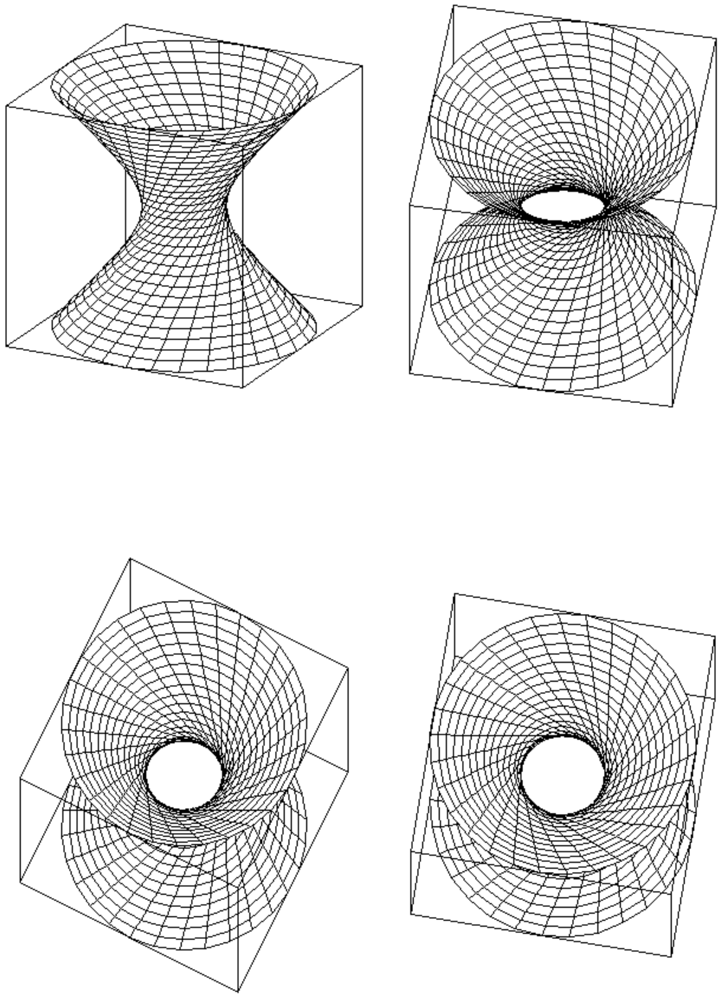
UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA



Vetores e Geometria Analítica

Lenimar Nunes de Andrade

versão 0.0 – 27/outubro/2000

Sumário

Prefácio

Este é um texto básico sobre *Vetores e Geometria Analítica.* No momento, somente os dois primeiros capítulos estão prontos.

Os exercícios podem ser classificados em três níveis: fácil (nível A), médio (nível B) e difícil (nível C). Recomendamos que sejam resolvidos todos os exercícios classificados como fáceis ou médios (apesar dessa classificação ser bastante subjetiva) e que sejam considerados opcionais os exercícios difíceis.

João Pessoa, maio de 2001

Lenimar Nunes de Andrade

Capítulo 1

Vetores

1.1 Introdução

O estudo de *vetores* iniciou-se no final do século XIX. Eles constituem os instrumentos ideais para o desenvolvimento de muitos conceitos importantes da Física e da Matemática.

Existem basicamente três maneiras de se introduzir o estudo de vetores: geometricamente, analiticamente e axiomaticamente.

No método geométrico, os vetores são representados por segmentos de reta orientados (setas) e as operações com eles são definidas geometricamente.

No método analítico, os vetores e correspondentes operações são descritos em termos de números, chamados *componentes* dos vetores. A descrição analítica resulta naturalmente da descrição geométrica, desde que seja introduzido um sistema de coordenadas.

No método axiomático não se faz qualquer tentativa para se descrever um vetor ou as operações algébricas com vetores. Neste caso, vetores e operações vetoriais são considerados conceitos não definidos, relativamente aos quais sabe-se apenas que eles satisfazem um certo conjunto de axiomas. Um tal sistema algébrico, com axiomas apropriados, chama-se *espaço vetorial*. Em todos os ramos da Matemática se encontram espaços vetoriais e eles são apresentados em cursos de Álgebra Linear.

Neste texto, inicialmente introduzimos vetores geometricamente. Depois, utilizamos o método analítico para introduzir outros conceitos.

1.2 Segmentos orientados e vetores

Nesta seção são definidos geometricamente segmentos orientados e vetores. Tentamos definir formalmente todos os conceitos envolvidos, algo que nem sempre é fácil de ser colocado em prática mantendo-se a simplicidade do texto.

1.2.1 Definição de segmento orientado

A *reta suporte* de dois pontos dados A e B, é a única reta que passa por eles. O conjunto de pontos formado por A, B e os pontos da reta suporte que estejam entre eles chama-se *segmento* AB, denotado por $\overline{AB}$. Neste caso, A e B chamam-se os *extremos* do segmento. A figura 1.1 mostra um segmento de extremos A e B, com reta suporte r.

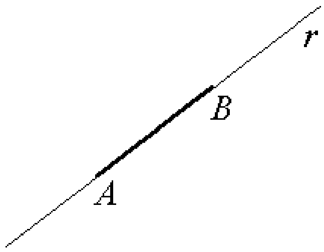


Figura 1.1: Segmento $\overline{AB}$

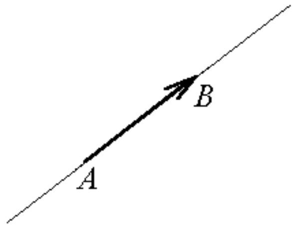


Figura 1.2: Segmento orientado

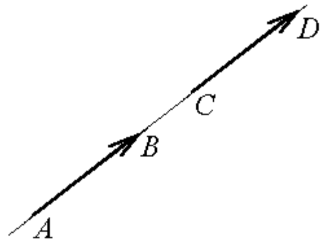


Figura 1.3: Segmentos colineares

Um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é definido por um segmento $\overline{AB}$ mais a escolha de um dos seus extremos. O extremo escolhido chama-se *ponto inicial* (ou *origem*) do segmento orientado e o outro extremo chama-se *ponto final.*

Graficamente, um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ costuma ser representado como sendo uma seta de A para B (figura 1.2). Formalmente, um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ pode ser definido como um par $(\overline{AB}, A)$ formado pelo segmento AB e um ponto inicial A.

A reta suporte de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é a mesma reta suporte do segmento $\overline{AB}$. Dizemos que dois segmentos orientados são *colineares* quando eles têm a mesma reta suporte (figura 1.3).

1.2.2 Módulo, direção e sentido

O *módulo* (ou *comprimento* ou *norma*) de $\overrightarrow{AB}$, denotado por $\|\overrightarrow{AB}\|$ (ou $|\overrightarrow{AB}|$) é o comprimento do segmento $\overline{AB}$, ou seja, é a distância entre os pontos A e B.

Dizemos que dois segmentos orientados têm a mesma *direção* quando eles têm retas suportes coincidentes ou paralelas.

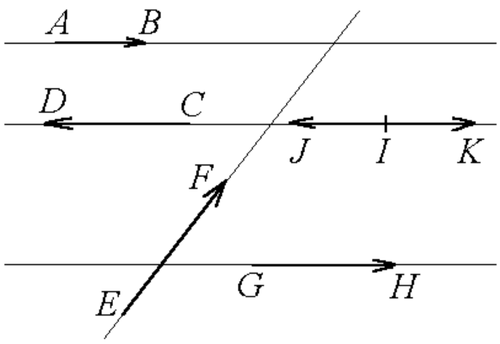


Figura 1.4: Diversos sentidos e direções

Exemplo 1.1 *Todos os segmentos da figura 1.4, com exceção de $\overrightarrow{EF}$, têm a mesma direção.*

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ tiverem a mesma direção e não forem colineares, dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm o *mesmo sentido* quando $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \emptyset$. (figura 1.5). Caso $\overline{AC} \cap \overline{BD} \neq \emptyset$ dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm *sentidos contrários.* (figura 1.6).

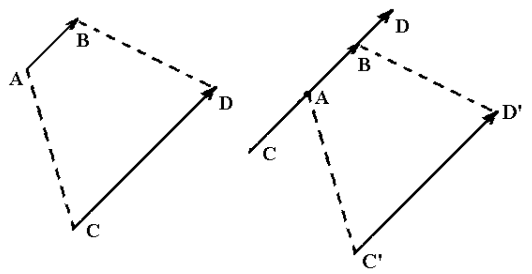


Figura 1.5: Mesmos sentidos

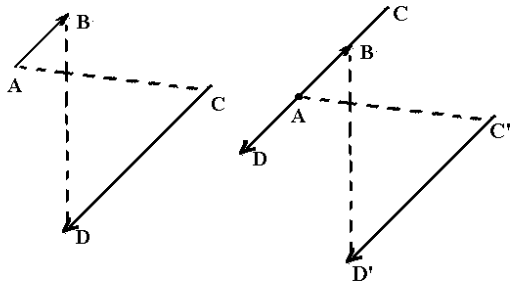


Figura 1.6: Sentidos contrários

Se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ forem colineares, então comparamos os sentidos de $\overrightarrow{AB}$ com $\overrightarrow{C'D'}$, onde $\overrightarrow{C'D'}$ é eqüivalente a $\overrightarrow{CD}$ situado em outra reta suporte e, neste caso, dizemos que $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ têm os mesmos sentidos se e somente se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{C'D'}$ também tiverem.

Observações:

- Sob um ponto de vista formal, a direção do segmento orientado é o conjunto de retas formado pela reta suporte e todas as suas paralelas.

- Dados dois pontos A e B, podemos definir a partir deles dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BA}$. Neste caso dizemos que eles um deles é o *oposto* do outro e que eles têm *sentidos contrários.*

- Não faz sentido comparar sentidos de segmentos orientados de direções diferentes. Por exemplo, na figura 1.4 nada podemos afirmar se $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{EF}$ têm o mesmo sentido ou não – simplesmente seus sentidos não se comparam.

Quando $A = B$ o segmento $\overline{AB}$ reduz-se ao ponto A e, neste caso, o segmento orientado $\overrightarrow{AA}$ é chamado *segmento orientado nulo.* Neste caso, o sentido e a direção são indefinidos.

1.2.3 Eqüivalência de segmentos orientados

Dizemos que dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são *eqüivalentes* (ou *eqüipolentes*) quando eles têm o mesmo módulo, mesma direção e o mesmo sentido.

Outra maneira de definir segmentos eqüivalentes: os segmentos $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ são eqüivalentes quando o ponto médio do segmento $\overline{AD}$ coincidir com o ponto médio do segmento $\overline{BC}$.

Segue da definição de eqüivalência que o segmento $\overrightarrow{AB}$ é eqüivalente a si próprio e que $\overrightarrow{AB}$ eqüivalente a $\overrightarrow{CD}$ implica $\overrightarrow{CD}$ eqüivalente a $\overrightarrow{AB}$. Além disso, $\overrightarrow{AB}$ eqüivalente a $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD}$ eqüivalente a $\overrightarrow{EF}$ implica $\overrightarrow{AB}$ eqüivalente a $\overrightarrow{EF}$ (figura 1.7).

Exemplo 1.2 *Todos os segmentos orientados da figura 1.7 têm o mesmo módulo, a mesma direção e o mesmo sentido; logo, são eqüivalentes.*

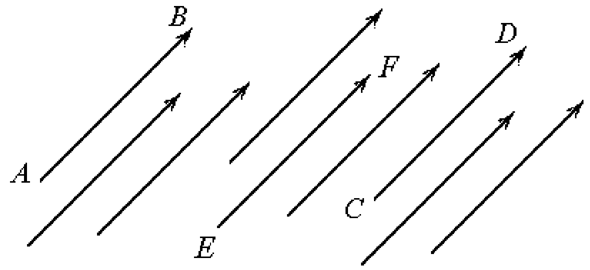


Figura 1.7: Segmentos orientados eqüivalentes

1.2.4 Vetores

O *vetor* definido pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é o conjunto de todos os segmentos orientados que são eqüivalentes a $\overrightarrow{AB}$. Qualquer um dos segmentos orientados desse conjunto é chamado *representante* do vetor.

Exemplo 1.3 *Na figura 1.7 os nove segmentos orientados mostrados são distintos. Mas, como eles são eqüivalentes, podem ser considerados como sendo representantes do mesmo vetor* $\overrightarrow{AB}$.

Usaremos a mesma notação $\overrightarrow{AB}$ para representar tanto o segmento orientado quanto o vetor determinado por ele. Aqui há o que se chama *abuso de notação*: dois conceitos distintos denotados da mesma maneira.

Vetores também são denotados por letras latinas minúsculas encimadas por uma setinha ($\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}\ldots$) ou por letras latinas em negrito (**a, b, c**, ...).

Dizemos que dois vetores são *iguais* quando os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ que os representam são eqüivalentes. Neste caso escrevemos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ para denotar a igualdade de vetores.

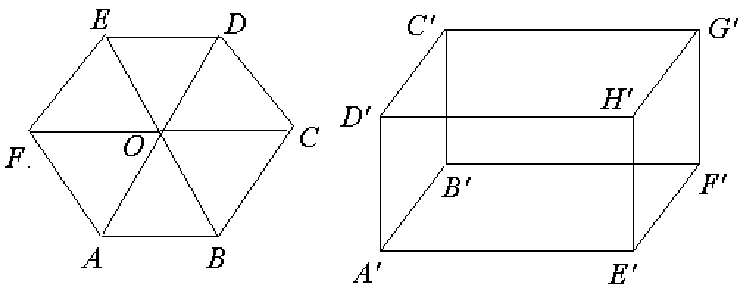


Figura 1.8: Hexágono regular e paralelepípedo retângulo

Exemplo 1.4 *Considerando o hexágono regular da figura 1.8, temos as seguintes igualdades de vetores:*

- $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CD}$
- $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BC}$

- $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$

Considerando agora o paralelepípedo retângulo da mesma figura, temos as seguintes igualdades:

- $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'} = \overrightarrow{H'G'} = \overrightarrow{E'F'}$
- $\overrightarrow{A'E'} = \overrightarrow{B'F'} = \overrightarrow{D'H'} = \overrightarrow{C'G'}$
- $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{E'H'} = \overrightarrow{F'G'}$

O *vetor nulo*, denotado por $\vec{0}$, é definido como sendo aquele que tem por representante um segmento orientado nulo.

Se $\vec{a}$ for um vetor representado por $\overrightarrow{AB}$, definimos o *vetor oposto a $\vec{a}$* como sendo o vetor $-\vec{a}$ cujo representante é $\overrightarrow{BA}$.

Observação:

- Os conceitos de vetor e segmento orientado costumam ser confundidos. Vetor é um conjunto, enquanto que segmento orientado é apenas um dos elementos desse conjunto. Costuma-se escrever *"vetor $\overrightarrow{AB}$"* quando o correto seria *"vetor do qual $\overrightarrow{AB}$ é um representante"*.
- O que estamos definindo como vetor costuma ser chamado por alguns autores de *vetor livre*. Um segmento orientado também costuma ser chamado de *vetor ligado*.

1.3 Operações com vetores

Definimos agora três operações com vetores: produto por escalar, adição e subtração.

1.3.1 Produto de um escalar por um vetor

Algumas grandezas físicas como massa, densidade, temperatura, volume, energia se definem sem a necessidade de uma direção ou um sentido. Essas grandezas são chamadas *escalares*. Neste texto, usaremos a palavra *escalar* como sendo um número real.

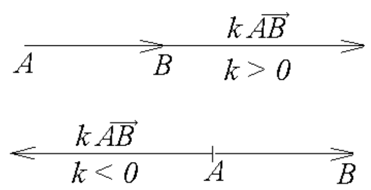


Figura 1.9: Produto por um escalar

Dados $k \neq 0$ e $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, denotaremos por $k\overrightarrow{AB}$ o novo vetor que tem a mesma direção que $\overrightarrow{AB}$, tem comprimento igual a $|k|\|\overrightarrow{AB}\|$, tem o mesmo sentido que $\overrightarrow{AB}$ se $k > 0$ e tem sentido contrário a $\overrightarrow{AB}$ se $k < 0$ (figura 1.9). Além disso, definimos $0\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ e $k\vec{0} = \vec{0}$.

Note que, por definição, os vetores $\vec{v}$ e $k\vec{v}$ são sempre colineares, para qualquer escalar $k \in \mathbb{R}$ e qualquer vetor $\vec{v}$.

1.3.2 Adição e subtração de vetores

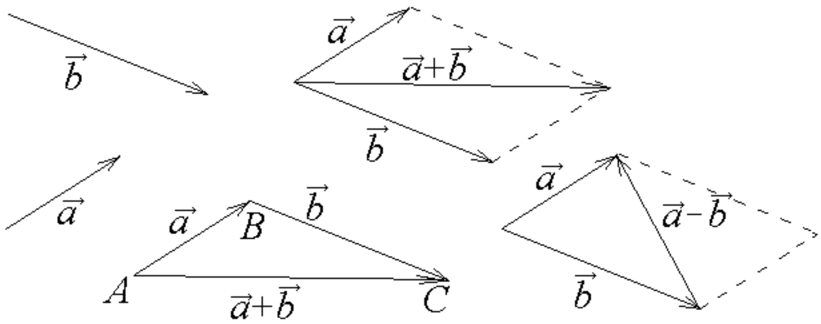


Figura 1.10: Soma e diferença de dois vetores

A *soma* de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, denotada por $\vec{a}+\vec{b}$, é um novo vetor $\vec{c}$ que satisfaz uma das seguintes alternativas:

- Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem colineares de mesmo sentido, então $\vec{c}$ tem comprimento igual à soma dos comprimentos de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, mesma direção e mesmo sentido que eles.
- Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem colineares e de sentidos contrários, então $\vec{c}$ tem comprimento igual ao maior menos o menor comprimento de $\vec{a}$ e $\vec{b}$, mesma direção e o mesmo sentido do vetor de maior comprimento.
- $\vec{c}$ é dado pela diagonal do paralelogramo cujos lados são $\vec{a}$ e $\vec{b}$ (figura 1.10).

A *diferença* $\vec{a}-\vec{b}$ dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é definida como sendo a soma de $\vec{a}$ com o vetor oposto a $\vec{b}$ (figura 1.10), isto é,

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}).$$

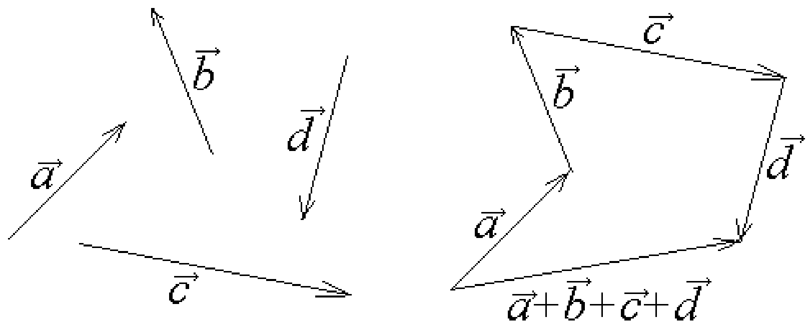


Figura 1.11: Soma de vários vetores

A soma de vários vetores (digamos, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, e $\vec{d}$) pode ser feita arrumando-se representantes dos vetores colocados de tal forma que o ponto final de um corresponda ao ponto inicial de outro (figura 1.11); com isso, a soma $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ é o vetor cujo ponto inicial é o ponto inicial do primeiro vetor $\vec{a}$ e cujo ponto final é o ponto final do último vetor $\vec{d}$.

Observações:

- Em um paralelogramo cujos lados estão relacionados com $\vec{a}$ e $\vec{b}$, uma diagonal corresponde à soma e a outra corresponde à diferença entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$.
- Também é possível definir a soma da seguinte maneira: considerando o triângulo ABC com lados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{BC}$, o terceiro lado do triângulo é a soma $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. Isto eqüivale a definir $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.

Se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são vetores, m e n são escalares, então são válidas as seguintes propriedades:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$
2. $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$
4. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$
5. $1\vec{a}=\vec{a}$
6. $m(n\vec{a})=(mn)\vec{a}=n(m\vec{a})$
7. $(m+n)\vec{a}=m\vec{a}+n\vec{a}$
8. $m(\vec{a}+\vec{b})=m\vec{a}+n\vec{b}$

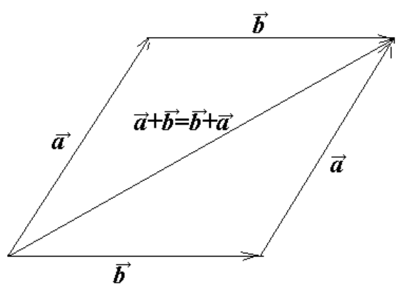


Figura 1.12: Comutatividade

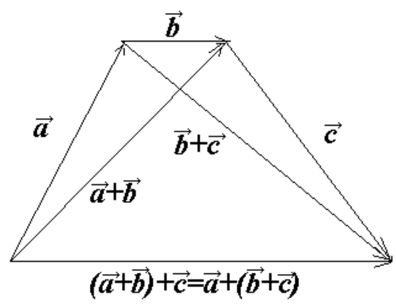


Figura 1.13: Associatividade

Graças a essas propriedades, muitas vezes podemos operar com vetores como se estivéssemos trabalhando com número reais. Por exemplo, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c} \Longrightarrow \vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$ e também $3\vec{x}=\vec{a} \Longrightarrow \vec{x}=\frac{1}{3}\vec{a}$.

As demonstrações dessas propriedades são conseqüências imediatas das definições. A comutatividade e a associatividade da adição (propriedades 1 e 2) estão ilustradas nas figuras 1.12 e 1.13, respectivamente.

1.4 Sistema de coordenadas

Tendo em vista o estudo analítico de vetores, vamos agora introduzir sistemas de coordenadas.

1.4.1 Coordenadas no plano

Em um plano, podemos considerar duas retas que se cruzem em um único ponto, definir um lado positivo e um lado negativo para cada reta, uma escala de unidades

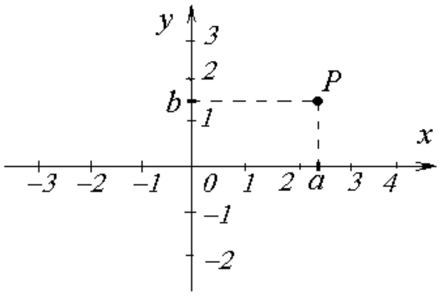


Figura 1.14: Sistema de eixos no plano

nessas retas e chamar o ponto de encontro dessas retas de *origem*. Neste caso, chamamos cada uma dessas retas de *eixos*.

O usual é considerar os eixos perpendiculares e identificar o ponto de encontro deles por $O = (0, 0)$.

Dado qualquer ponto do plano, as projeções desse ponto nos eixos escolhidos chamam-se *coordenadas* do ponto. A projeção de cada ponto P é obtida através da interseção de um eixo com uma reta que passe por P e que seja paralela ao outro eixo. Assim, é possível associar a cada ponto do plano um par ordenado de coordenadas (a, b). Reciprocamente, podemos associar a cada par de coordenadas um ponto P do plano (figura 1.14). Vamos fazer algo parecido com isso no espaço tridimensional.

1.4.2 Coordenadas no espaço

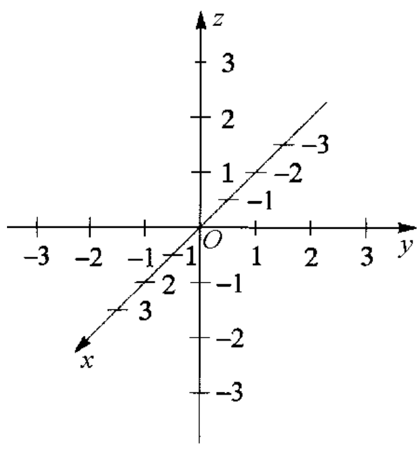


Figura 1.15: Sistema de eixos ortogonais

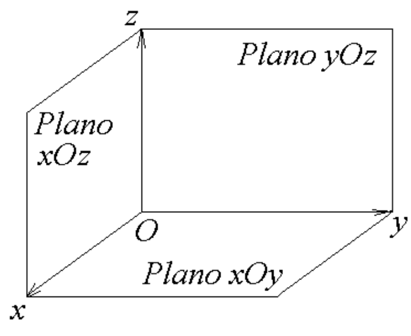


Figura 1.16: Planos coordenados

Consideremos no espaço euclidiano tridimensional, um *sistema de eixos ortogonais* que consista em três eixos Ox, Oy e Oz dois a dois ortogonais e com uma origem comum O (figura 1.15). Esses eixos são chamados *eixos coordenados*.

Nesse sistema, os planos que contém os pares de eixos (Ox, Oy), (Ox, Oz) e (Oy, Oz) são denotados por xOy, xOz e yOz, respectivamente (figura 1.16). Esses planos são chamados *planos coordenados*.

Para cada ponto P do espaço tridimensional, podemos associar um conjunto ordenado (a, b, c) formado por três número reais (chamado *terno de número reais*) da seguinte forma: a, b e c são as projeções de P nos eixos Ox, Oy e Oz, respectivamente. Cada projeção pode ser obtida através da interseção com o eixo com um plano paralelo a um dos planos coordenados que passe por P (figura 1.17).

O conjunto de todos os ternos ordenados é denotado por $\mathbb{R}^3$. Simbolicamente,

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

Cada terno $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ pode ser associado a um ponto P no espaço tridimensional da seguinte forma: identificamos no eixo Ox o ponto de coordenada a e no eixo Oy o ponto de coordenada b. Considerando as retas paralelas a esses eixos que passam por esses pontos, o ponto de encontro delas é um ponto $P' = (a, b, 0)$. Finalmente, "subimos" (se $c > 0$) ou "descemos" (se $c < 0$) tantas unidades quanto for o valor de c (figura 1.17).

Exemplo 1.5 *Para marcar o ponto* $P = (-1, -2, 4)$, *inicialmente identificamos o ponto* $(-1, -2, 0)$; *depois, "subimos"* 4 *unidades. Veja figura 1.18.*

Analogamente, para desenharmos o ponto $Q = (1, 3, -2)$, *marcamos* $(1, 3, 0)$ *no plano* xOy *e, depois, "descemos"* 2 *unidades (fig. 1.19).*

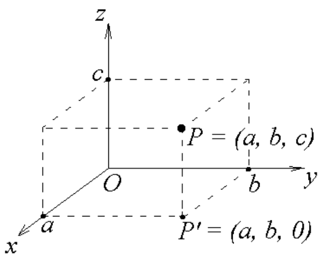


Figura 1.17: Ponto no espaço

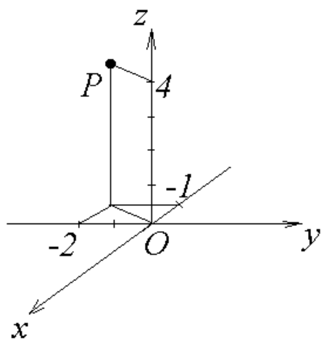


Figura 1.18: $P = (-1, -2, 4)$

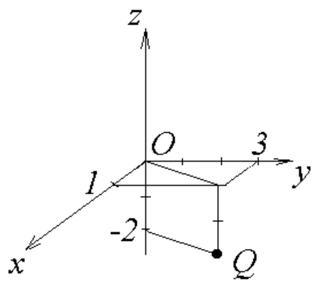


Figura 1.19: $Q = (1, 3, -2)$

1.4.3 Vetores unitários

Dizemos que $\vec{v}$ é *unitário* [1] quando seu comprimento for igual a 1. Denotam-se os vetores unitários nas direções e sentidos positivos dos eixos x, y, z por $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Ou seja, considerando os pontos $O = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$ e $C = (0, 0, 1)$ (figura 1.20) temos $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ e $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$.

Dado qualquer ponto P do espaço, podemos associar a esse ponto um vetor que tenha como representante o segmento orientado que vai da origem O a P. Reciprocamente, para cada vetor, considerando um representante $\overrightarrow{OP}$ que inicie na origem podemos associá-lo ao seu ponto terminal P. Dessa forma, as coordenadas (x, y, z) do ponto P podem ser *identificadas* com o vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ com $x, y, z \in \mathbb{R}$. Temos aqui mais um abuso de notação: costuma-se escrever

$$\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z).$$

[1] Também chamado *versor*

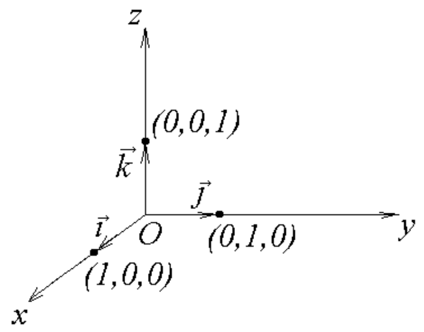


Figura 1.20: Vetores i, j, k

Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ dois pontos dados. Como $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$, temos $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$. Portanto,

$$\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1)\vec{i} + (b_2 - a_2)\vec{j} + (b_3 - a_3)\vec{k}.$$

1.4.4 Definição analítica das operações com vetores

Podemos dar uma definição analítica das operações com vetores: sejam $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j} + v_3\vec{k}$, $\vec{w} = w_1\vec{i} + w_2\vec{j} + w_3\vec{k}$ e $k \in \mathbb{R}$, então definimos:

$$k\vec{v} = (kv_1)\vec{i} + (kv_2)\vec{j} + (kv_3)\vec{k}$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1)\vec{i} + (v_2 + w_2)\vec{j} + (v_3 + w_3)\vec{k}.$$

Eqüivalentemente, podemos denotar as expressões acima por: $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ e definir

$$k\vec{v} = (kv_1, kv_2, kv_3)$$

$$\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3).$$

Definimos também $-\vec{v} = -v_1\vec{i} - v_2\vec{j} - v_3\vec{k} = (-v_1, -v_2, -v_3)$.

Exemplo 1.6 *Sejam* $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$ *e* $\vec{w} = 4\vec{i} - 5\vec{j} - 2\vec{k}$. *Então* $5\vec{v} = 10\vec{i} + 5\vec{j} + 15\vec{k}$, $-\vec{w} = -4\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{v} - 4\vec{w} = -14\vec{i} + 21\vec{j} + 11\vec{k}$.

1.5 Comprimento de um vetor

Seja $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j}$. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo da figura 1.21, temos: $\|\vec{v}\|^2 = a^2 + b^2$ e daí

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Consideremos agora $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$. No triângulo retângulo ORQ da figura 1.22, temos $\|\overrightarrow{OQ}\|^2 = \|\overrightarrow{OR}\|^2 + \|\overrightarrow{RQ}\|^2$. Como $\|\overrightarrow{OR}\| = a$ e $\|\overrightarrow{RQ}\| = b$, temos $\|\overrightarrow{OQ}\|^2 = a^2 + b^2$. Usando também o Teorema de Pitágoras no triângulo OQP, temos $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = \|\overrightarrow{OQ}\|^2 + \|\overrightarrow{QP}\|^2$, e daí $\|\overrightarrow{OP}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2$, ou seja,

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

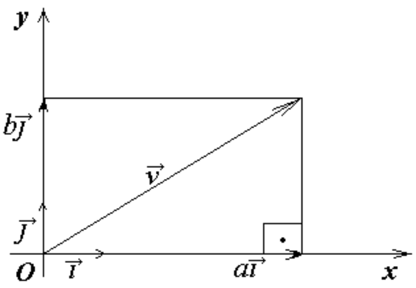


Figura 1.21: Vetor no plano

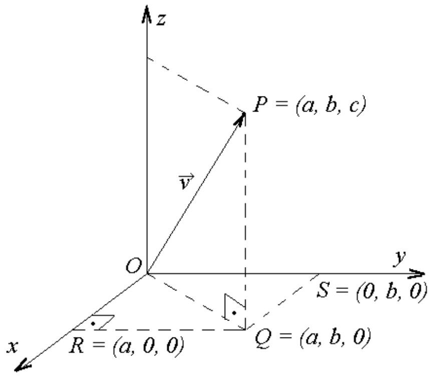


Figura 1.22: Vetor no espaço tridimensional

Exemplo 1.7 *O comprimento de* $\vec{v} = 2\vec{i} - 3\vec{j} + 5\vec{k}$ *é* $\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$. *Um vetor unitário com mesma direção e mesmo sentido que* $\vec{v}$ *é dado por* $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{2}{\sqrt{38}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{38}}\vec{j} + \frac{5}{\sqrt{38}}\vec{k}$.

1.6 Ponto médio de um segmento de reta

Sejam $A = (a_1, a_2, a_3)$ e $B = (b_1, b_2, b_3)$ dois pontos no $\mathbb{R}^3$. Seja $M = (m_1, m_2, m_3)$ o ponto médio de $\overline{AB}$. Então $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, ou seja, $(m_1 - a_1, m_2 - a_2, m_3 - a_3) = (b_1 - m_1, b_2 - m_2, b_3 - m_3)$. Comparando cada coordenada, obtemos

$$m_1 - a_1 = b_1 - m_1 \Longrightarrow m_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

$$m_2 - a_2 = b_2 - m_2 \Longrightarrow m_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$$

$$m_3 - a_3 = b_3 - m_3 \Longrightarrow m_3 = \frac{a_3 + b_3}{2}$$

Assim as coordenadas do ponto médio é a média aritmética das coordenadas dos pontos extremos do segmento. Por exemplo, o ponto médio M do segmento $\overline{AB}$ onde $A = (-1, 3, 7)$ e $B = (5, 4, 1)$ é dado por $M = (\frac{-1+5}{2}, \frac{3+4}{2}, \frac{7+1}{2}) = (2, 7/2, 4)$.

1.7 Dependência e independência linear

Uma *combinação linear* de n vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\cdots$, $\vec{v}_n$ dados, é um vetor da forma

$$\vec{u} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n$$

onde $a_i \in \mathbb{R}$ são escalares quaisquer.

Em particular, uma combinação linear de dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é um vetor da forma $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$, onde $x, y \in \mathbb{R}$ e uma combinação linear de três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ é um vetor $\vec{w} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exemplo 1.8 *Sejam $\vec{a} = 3\vec{i} + 2\vec{j}$ e $\vec{b} = \vec{i} - 4\vec{j}$. São exemplos de combinações lineares de $\vec{a}$ e $\vec{b}$ os vetores $\vec{u} = 5\vec{a} - 2\vec{b} = 13\vec{i} + 18\vec{j}$ e $\vec{v} = -\vec{a} + 7\vec{b} = 4\vec{i} - 30\vec{j}$.*

Dizemos que n vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \cdots, \vec{v}_n$ dados são *linearmente independentes (LI)* quando a única solução da equação

$$a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + \cdots + a_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

for $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$. Se a equação vetorial anterior admitir pelo menos um $a_i \neq 0$ como solução, então os vetores $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ chamam-se *linearmente dependentes (LD).*

Em particular, dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente independentes quando

$$x\vec{a} + y\vec{b} = 0 \Longrightarrow x = y = 0.$$

Se existirem $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ que satisfaçam a equação $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$ então $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são linearmente dependentes.

Três vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente independentes quando

$$x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = 0 \Longrightarrow x = y = z = 0.$$

Se existirem $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ ou $z \neq 0$ que satisfaçam a equação $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ então $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são linearmente dependentes.

Exemplo 1.9 *Os vetores $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - \vec{k}$ e $\vec{c} = 5\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ são linearmente dependentes porque podemos observar que $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, ou seja, $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$ de onde concluímos que a equação $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ admite a solução $x = 2$, $y = 1$ e $z = -1$. Logo, os vetores são LD.*

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem LD, então, por definição, existem $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ tais que $x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$. Se $x \neq 0$, então podemos obter que $\vec{a} = (-y/x)\vec{b}$. Daí, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são colineares. Se $y \neq 0$ obtemos algo semelhante. Reciprocamente, se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem colineares, existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{a} = k\vec{b}$ e, neste caso, temos $\vec{a} - k\vec{b} = \vec{0}$ de onde podemos concluir que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LD.

Suponhamos agora que $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD. Então, por definição, existe $x \neq 0$ ou $y \neq 0$ ou $z \neq 0$ tais que $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c} = \vec{0}$. Se $x \neq 0$, então podemos obter que $\vec{a} = (-y/x)\vec{b}+(-z/x)\vec{c}$. Daí, $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são coplanares. Se $y \neq 0$ ou $z \neq 0$ obtemos algo análogo. Reciprocamente, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ forem coplanares, existem $k_1 \in \mathbb{R}$ e $k_2 \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{a} = k_1\vec{b} + k_2\vec{c}$ e neste caso temos $\vec{a} - k_1\vec{b} - k_2\vec{c} = \vec{0}$ de onde podemos concluir que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são LD.

Mostramos assim que dois vetores são LD se e somente se forem colineares e que três vetores são LD se e somente se forem coplanares.

Se um conjunto de vetores contém o vetor nulo, então esse conjunto de vetores será necessariamente LD. Por exemplo, os vetores $\vec{a} = \vec{0}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD porque $1\vec{a}+0\vec{b}+0\vec{c} = \vec{0}$. conseqüentemente, se um conjunto de vetores for LI, então nenhum desses vetores pode ser nulo.

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem LI, então consideremos uma combinação linear deles $\vec{v} = x\vec{a}+y\vec{b}$ (figura 1.23). Variando os valores dos escalares x, y no conjunto dos números reais podemos obter todos os vetores do plano. Dessa forma, qualquer vetor $\vec{v}$ do plano pode ser escrito como combinação linear de $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

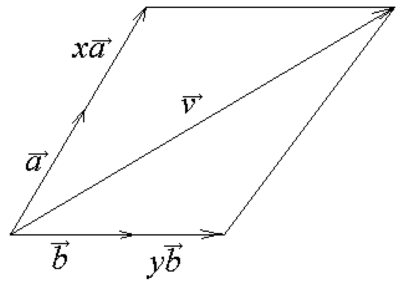


Figura 1.23: Combinação linear dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$

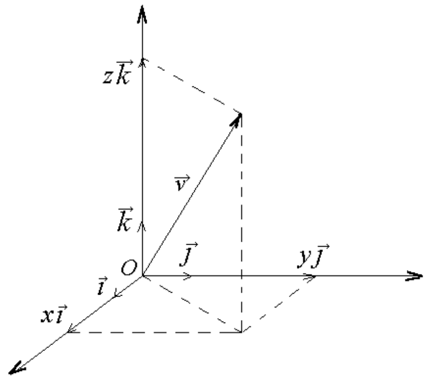


Figura 1.24: Combinação linear dos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$

Analogamente, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ forem LI (por exemplo, $\vec{a}=\vec{i}$, $\vec{b}=\vec{j}$ e $\vec{c}=\vec{k}$) consideremos $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ (figura 1.24). Podemos assim obter todos os vetores do espaço tridimensional se atribuirmos a x,y,z valores reais.

No espaço tridimensional, qualquer conjunto de três vetores LI é chamado uma *base*.

Exemplo 1.10 *Os vetores $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ não são coplanares. Logo, são LI, e, conseqüentemente, formam uma base do espaço tridimensional. Neste caso dizemos que eles são a* base canônica *do espaço tridimensional.*

Se $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ for uma base, então qualquer vetor $\vec{v}$ do espaço tridimensional se escreve de modo único na forma

$$\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$$

(veja exercício R7 a seguir). Neste caso, dizemos que x,y,z são as *coordenadas* de $\vec{v}$ na base $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$.

Uma base deve ser considerada como sendo um conjunto ordenado, onde não se deve trocar a ordem dos vetores. Por exemplo, as bases $\beta_1=\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ e $\beta_2=\{\vec{c},\vec{b},\vec{a}\}$ são consideradas distintas.

1.8 Exercícios resolvidos

R 1 Dados $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{v}=2\vec{i}-5\vec{k}$, determine o vetor $\vec{w}$ tal que

$$2\vec{u}+3\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{w}-\vec{v}.$$

Solução: Com relação às operações de adição, subtração e produto por escalar, podemos operar com vetores como se estivéssemos operando com números reais. Por exemplo, *"passar um termo para o outro membro da equação trocando o sinal do mesmo"*. Dessa forma a equação dada é eqüivalente a $3\vec{w}-\frac{1}{2}\vec{w}=-2\vec{u}-\vec{v}$, ou seja, $\frac{5}{2}\vec{w}=-2(\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k})-(2\vec{i}-5\vec{k})\Longrightarrow\vec{w}=\frac{2}{5}(-4\vec{i}+4\vec{j}+3\vec{k})=-\frac{8}{5}\vec{i}+\frac{8}{5}\vec{j}+\frac{6}{5}\vec{k}$.

R 2 Sejam $\vec{u}=\frac{1}{4}\vec{i}-\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$ e $\vec{v}=n\vec{i}+m^2\vec{j}-m\vec{k}$. Determine m e n de modo que $\vec{v}$ tenha sentido contrário a $\vec{u}$ e seja 4 vezes maior do que $\vec{u}$.

Solução: Devemos ter neste caso que $\vec{v} = -4\vec{u}$, ou seja, $n\vec{i}+m^2\vec{j}-m\vec{k} = -4(\frac{1}{4}\vec{i}-\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k})$ $= -\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$. Comparando os coeficientes de $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ nos dois membros obtemos as seguintes igualdades: $n = -1$, $m^2 = 4$, $-m = -2$, ou seja, $m = 2, n = -1$.

R 3 Consideremos os vetores $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_2\vec{k}$ e seja

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Mostre que se $D = 0$ então $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD e se $D \neq 0$ então $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LI.

Solução: Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$. Então, $x(a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) + y(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) + z(c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_2\vec{k}) = \vec{0}$ que é eqüivalente a $(a_1x + b_1y + c_1z)\vec{i} + (a_2x + b_2y + c_2z)\vec{j} + (a_3x + b_3y + c_3z)\vec{k} = \vec{0}$ de onde obtemos que x, y, z devem ser solução do sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{cases}$$

É claro que $x = y = z = 0$ é solução desse sistema. Além disso, se $D \neq 0$ essa solução é única e, portanto, os vetores dados são LI. Se $D = 0$ o sistema é indeterminado, isto é, admite uma infinidade de soluções e conseqüentemente os vetores dados são LD.

R 4 Sejam $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{v} = \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

a) O conjunto $\beta = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$?

b) Escreva o vetor $\vec{a} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ como combinação linear de $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Solução: a) Seja $D = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. Desenvolvendo este determinante obtemos $D = -12 \neq 0$. Logo, os vetores são LI e portanto formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

b) Sejam $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} \Longrightarrow 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} = x(2\vec{i} - \vec{j}) + y(\vec{j} + 2\vec{k}) + z(\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}) \Longrightarrow 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k} = (2x + z)\vec{i} + (-x + y + 2z)\vec{j} + (2y - z)\vec{k}$. Portanto, (x, y, z) é solução do sistema

$$\begin{cases} 2x & & & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ & & 2y & - & z & = & -4 \end{cases}$$

Resolvendo este sistema obtemos $x = 1, y = -1, z = 2$ e daí concluímos que $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v} + 2\vec{w}$.

R 5 Sejam $A(1, 2, 4)$, $B(2, 3, 2)$ e $C(2, 1, -1)$.

a) Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo?

b) Determine D de modo que $ABCD$ seja um paralelogramo.

Solução: a) Os pontos dados são vértices de um triângulo se os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não forem colineares. Como $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, -2)$ e $\overrightarrow{AC} = C - A = (1, -1, -5)$ devemos verificar se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} \Longrightarrow (1,1,-2) = (k,-k,-5k) \Longrightarrow k = 1$ e $k = -1$ e $k = 2/5$, o que é absurdo – não existe tal k. Logo, os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ não são colineares e, conseqüentemente, os pontos dados formam um triângulo.

b) Basta determinar $D = (x,y,z)$ tal que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. Temos então que $D - A = (B-A)+(C-A)$ ou seja $(x-1, y-2, z-4) = (1,1,-2)+(1,-1,-5) \Longrightarrow (x-1,y-2,z-4) = (2,0,-7)$ de onde obtemos $x = 3, y = 2, z = -3$. Portanto o ponto D procurado é $D = (3,2,-3)$.

R 6 Se $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ for uma base do $\mathbb{R}^3$, mostre que $\{\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-2\vec{w}, \vec{u}+3\vec{v}-\vec{w}\}$ também é uma base do mesmo espaço.

Solução: Sejam $x,y,z \in \mathbb{R}$ tais que $x(\vec{u}+\vec{v})+y(\vec{u}-2\vec{w})+z(\vec{u}+3\vec{v}-\vec{w}) = \vec{0}$. Efetuando os produtos pelos escalares indicados, obtemos: $x\vec{u}+x\vec{v}+y\vec{u}-2y\vec{w}+z\vec{u}+3z\vec{v}-z\vec{w} = \vec{0}$ que é eqüivalente a $x\vec{u}+y\vec{u}+z\vec{u}+x\vec{v}+3z\vec{v}-2y\vec{w}-z\vec{w} = \vec{0}$, ou seja, $(x+y+z)\vec{u}+(x+3z)\vec{v}+(-2y-z)\vec{w} = \vec{0}$. Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI, devemos ter:

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x \quad\;\; + 3z = 0 \\ \quad - 2y - z = 0 \end{cases}$$

O determinante dos coeficientes de x,y,z nesse sistema é:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Portanto, o sistema linear anterior só possui a solução trivial $x = y = z = 0$ e, conseqüentemente, os três vetores $\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}-2\vec{w}, \vec{u}+3\vec{v}-\vec{w}$ são LI, logo, formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

R 7 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores LI e $\vec{a}$ um vetor tal que $\vec{a} = x_1\vec{u}+y_1\vec{v}+z_1\vec{w}$ e $\vec{a} = x_2\vec{u}+y_2\vec{v}+z_2\vec{w}$ onde $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$. Mostre que neste caso $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$.

Solução: Se $\vec{a} = x_1\vec{u}+y_1\vec{v}+z_1\vec{w}$ e $\vec{a} = x_2\vec{u}+y_2\vec{v}+z_2\vec{w}$ então subtraindo as duas equações membro a membro obtemos: $\vec{0} = (x_1-x_2)\vec{u}+(y_1-y_2)\vec{v}+(z_1-z_2)\vec{w}$. Como $\vec{u},\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI, devemos ter $x_1 - x_2 = y_1 - y_2 = z_1 - z_2 = 0$, ou seja, $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ e $z_1 = z_2$. Mostramos assim que só existe uma maneira de escrever um vetor $\vec{a}$ como combinação linear de outros vetores LI.

R 8 Mostre que as diagonais de um paralelogramo interceptam-se ao meio.

Solução: Na figura 1.25, seja P o ponto de encontro das duas diagonais do paralelogramo $ABCD$. Sejam $\vec{a} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AP}$, $\vec{d} = \overrightarrow{PC}$, $\vec{e} = \overrightarrow{DP}$ e $\vec{f} = \overrightarrow{PB}$. Devemos mostrar que $\vec{c} = \vec{d}$ e que $\vec{e} = \vec{f}$. Nos triângulos APB e DPC temos as seguintes igualdades de vetores: $\vec{b} = \vec{c}+\vec{f}$ e $\vec{b} = \vec{e}+\vec{d}$. Daí, $\vec{c}+\vec{f} = \vec{e}+\vec{d}$.

Como $\vec{c}$ e $\vec{d}$ são colineares, temos que existe $k_1 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{d} = k_1\vec{c}$. Analogamente, existe $k_2 \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{f} = k_2\vec{e}$. Substituindo na igualdade $\vec{c}+\vec{f} = \vec{e}+\vec{d}$, obtemos $\vec{c}+k_2\vec{e} = \vec{e}+k_1\vec{c}$, ou seja, $(1-k_1)\vec{c}+(k_2-1)\vec{e} = \vec{0}$. Como $\vec{c}$ e $\vec{e}$ são LI, temos que $1 - k_1 = 0$ e $k_2 - 1 = 0$. Logo, $k_1 = k_2 = 1$ o que implica $\vec{c} = \vec{d}$ e $\vec{e} = \vec{f}$.

R 9 Seja $ABCD$ um quadrilátero qualquer e P, Q, R e S os pontos médios dos lados AB, BC, CD e DA, respectivamente. Mostre que $PQRS$ é um paralelogramo (figura 1.26).

Solução: Na figura 1.26, sejam $\vec{a} = \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{SA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{PB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{QC}$ e $\vec{d} = \overrightarrow{CR} = \overrightarrow{RD}$. Estamos usando aqui o fato de que os pontos P, Q, R e S são pontos médios dos lados do quadrilátero. Como $\overrightarrow{SP} = \vec{a} + \vec{b}$ e $\overrightarrow{QR} = \vec{c} + \vec{d}$, temos $\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{QR} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$. Por outro lado, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$, ou seja, $2\vec{a} + 2\vec{b} + 2\vec{c} + 2\vec{d} = \vec{0}$ $\Longrightarrow \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. Logo, $\overrightarrow{SP} + \overrightarrow{QR} = \vec{0} \Longrightarrow \overrightarrow{SP} = -\overrightarrow{QR} \Longrightarrow \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RQ}$. Pela definição de igualdade de vetores, temos que $PQRS$ é um paralelogramo.

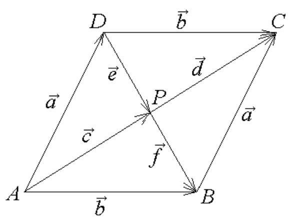


Figura 1.25: Exercício R8

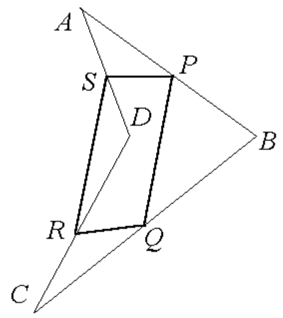


Figura 1.26: Exercício R9

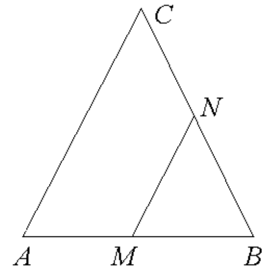


Figura 1.27: Exercício R10

R 10 No triângulo eqüilátero ABC sejam M e N os pontos médios dos lados AB e BC, respectivamente. Mostre que MBN também é um triângulo eqüilátero (figura 1.27).

Solução: Na figura 1.27 temos $\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{BC}\| = \|\overrightarrow{CA}\| = l$ e $\|\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{BN}\| = l/2$. Resta mostrar apenas que $\|\overrightarrow{MN}\| = l/2$. Como $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, temos $\|\overrightarrow{MN}\| = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AC}\| = l/2$. Portanto, o triângulo MBN é eqüilátero pois tem seus três lados medindo $l/2$.

1.9 Exercícios propostos

A 1 Em uma partícula estão atuando as forças $\vec{F_1} = \vec{i} + \vec{k}$, $\vec{F_2} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{F_3} = 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Determine o módulo da resultante das forças que atuam nessa partícula *(OBS.: a resultante é a soma de todas as forças que atuam na partícula).*

A 2 No hexágono regular $ABCDEF$ de centro O da figura 1.28 calcule as seguintes somas dos vetores:

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF}$

b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DO}$

c) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{FO}$

d) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DB}$

A 3 No cubo da figura 1.29, calcule as somas de vetores $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{FA}$ e $\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

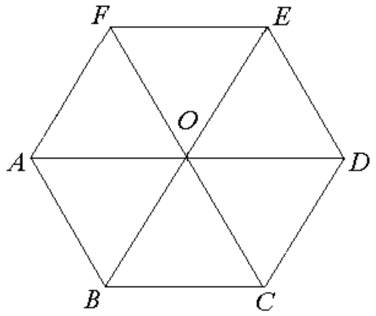


Figura 1.28: Exercício A2

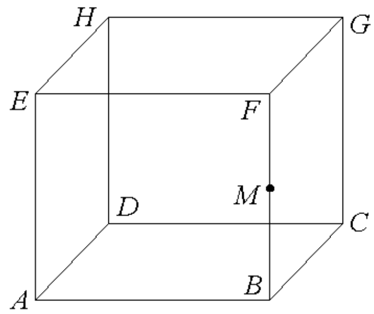


Figura 1.29: Exercício A3

A 4 Verifique se os pontos $A(3,4,1)$, $B(-1,0,2)$ e $C(0,1,1)$ são vértices de um triângulo. Se forem, determine um ponto D de tal forma que $ABCD$ seja um paralelogramo e o ponto de interseção das diagonais desse paralelogramo.

A 5 Dê exemplo de dois vetores unitários que tenham a mesma direção que $\vec{v} = -3\vec{i} + \vec{j} - 4\vec{k}$.

A 6 Determine m para que os pontos $A(3,1,0)$, $B(1,0,1)$ e $C(-1,m,2)$ sejam colineares.

A 7 Sejam $\vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Dê exemplo de dois vetores cujas normas sejam o triplo da norma de $\vec{u} + \vec{v}$.

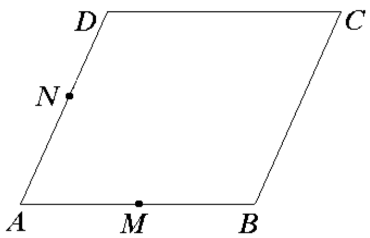


Figura 1.30: Exercício A8

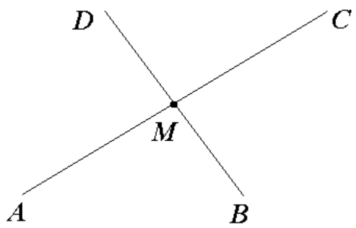


Figura 1.31: Exercício A9

A 8 No paralelogramo $ABCD$ da figura 1.30, os pontos M e N são, respectivamente, os pontos médios dos lados AB e AD. Mostre que

$$\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CM} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}.$$

A 9 Na figura 1.31, M é o ponto médio dos segmentos AC e de DB. Mostre que $ABCD$ é um paralelogramo. (Sugestão: basta mostrar que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ ou que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.)

A 10 Considere os vetores $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} + \vec{k}$ e $\vec{w} = 2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$. Mostre que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base do espaço tridimensional e obtenha as coordenadas de $\vec{a} = 4\vec{i} - 2\vec{k}$ nessa base.

A 11 Mostre que para quaisquer vetores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ os vetores $\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{a}+\vec{c}$ e $\vec{c}-\vec{a}$ são coplanares.

A 12 Considere a base $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$. Mostre que os vetores $\vec{a}+2\vec{b}-\vec{c}$, $3\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ e $-\vec{a}+5\vec{b}-3\vec{c}$ são LD.

A 13 Dados vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ não coplanares, determine escalares λ e μ para que os vetores $\lambda\vec{a}+\mu\vec{b}+\vec{c}$ e $\vec{a}+\lambda\vec{b}+\mu\vec{c}$ sejam colineares.

A 14 Determine vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ que satisfaçam o sistema de equações

$$\begin{cases} \vec{x}+2\vec{y} &= 3\vec{i} \\ 2\vec{x}+\vec{y} &= \vec{j}-3\vec{k} \end{cases}$$

A 15 Verifique se os pontos $A(2,2,1)$, $B(3,1,2)$, $C(2,3,0)$ e $D(2,3,2)$ são coplanares.

B 1 Em um triângulo ABC considere um ponto E no lado AB e um ponto D no lado AC que satisfazem $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$. Escreva o vetor $\overrightarrow{DE}$ como combinação linear de $\overrightarrow{BA}$ e $\overrightarrow{BC}$.

B 2 Mostre que o segmento de reta que une os pontos médios de dois lados de um triângulo é paralelo ao terceiro lado e tem a metade do comprimento deste.

B 3 Seja $ABCD$ um paralelogramo e G o ponto de encontro de suas diagonais. Determine os vértices C e D conhecendo as coordenadas de $A(1,2,3)$, $B(0,2,5)$ e $G(1,0,1)$.

B 4 No cubo da figura 1.29, sabendo que M é o ponto médio do segmento BF, escreva o vetor $\overrightarrow{HM}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$.

B 5 Em um triângulo ABC sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Mostre que

$$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{CM}+\overrightarrow{BN}=\vec{0}.$$

C 1 Em um hexágono regular $ABCDEF$ temos $\overrightarrow{AB}=\vec{u}$ e $\overrightarrow{BC}=\vec{v}$. Escreva os vetores $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ e $\overrightarrow{AE}$ em termos de $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

C 2 Dizemos que uma base $\{\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}, \vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}, \vec{c}=c_1\vec{i}+c_2\vec{j}+c_3\vec{k}\}$ é *positiva* (respectivamente, *negativa*) quando o determinante

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

for positivo (respectivamente, negativo). Baseado nesta definição, mostre que as bases $\beta_1=\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ e $\beta_2=\{3\vec{i},-\vec{j}-\vec{k},-2\vec{i}-5\vec{k}\}$ são positivas, enquanto que $\beta_3=\{\vec{j},\vec{i},\vec{k}\}$ e $\beta_4=\{\vec{i}+\vec{j}+\vec{k},\vec{j}+\vec{k},\vec{j}\}$ são bases negativas.

C 3 Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores LI tais que $\overrightarrow{AB}=\vec{a}+2\vec{b}$, $\overrightarrow{BC}=-4\vec{a}-\vec{b}$ e $\overrightarrow{CD}=-5\vec{a}-3\vec{b}$. Mostre que $ABCD$ é um trapézio.

C 4 a) Mostre que os vetores $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + \vec{k}$ e $\vec{c} = 4\vec{j} + \vec{k}$ não formam uma base do $\mathbb{R}^3$.

b) Mostre que não é possível escrever $\vec{v} = \vec{i} - \vec{k}$ como combinação linear de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$. Interprete geometricamente esta situação.

c) Mostre que é possível escrever $\vec{w} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ como combinação linear de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ de uma infinidade de maneiras.

C 5 O segmento de extremidades $A(x_1, y_1, z_1)$ e $B(x_2, y_2, z_2)$ é dividido pelo ponto $C(x, y, z)$ na razão de 1 para λ (isto é, $\frac{||\overrightarrow{AC}||}{||\overrightarrow{CB}||} = \frac{1}{\lambda}$). Mostre que

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \; z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Usando este resultado, determine pontos C e D que dividem o segmento de extremidades $A(0, 1, 2)$ e $B(4, -2, 1)$ em três partes de mesmo comprimento.

Capítulo 2

Produtos de vetores

2.1 Introdução

Neste capítulo introduzimos diversos tipos de produtos vetoriais. Essas idéias são inspiradas em conceitos físicos e têm aplicações a diferentes áreas da Matemática. Em particular, nos exemplos e nos exercícios resolvidos usamos produtos vetoriais para demonstrar resultados de Geometria Plana ou de Trigonometria bastante conhecidos tais como Teorema de Pitágoras, Lei dos Senos para um triângulo qualquer, cosseno e seno da diferença de dois ângulos, entre outros.

2.2 Produto interno

A motivação para a definição de produto interno vem da Mecânica. Consideremos uma força representada pelo vetor $\vec{F}$ atuando sobre um corpo de tal forma que lhe provoque um deslocamento representado pelo vetor $\vec{d}$ (Figura 2.1). Então define-se o *trabalho* W realizado pela força $\vec{F}$ como sendo o número real dado por

$$W = \|\vec{F}\|\|\vec{d}\|\cos\alpha$$

onde α é o ângulo entre os vetores $\vec{F}$ e $\vec{d}$.

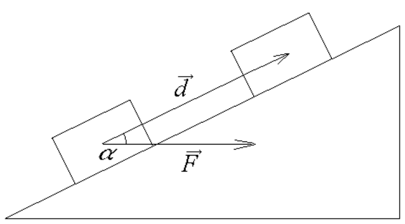


Figura 2.1: Trabalho realizado pela força $\vec{F}$

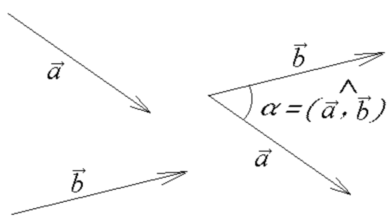


Figura 2.2: Ângulo entre vetores

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores não nulos. Denotemos o ângulo[1] entre eles por $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. No cálculo da medida do ângulo, podemos considerar representantes para esses vetores que tenham

[1]Estamos nos referindo ao *menor ângulo* de 0 a π radianos (de 0 a 180 graus).

o mesmo ponto inicial (Figura 2.2). O *produto interno* dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é denotado por $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e é definido por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \ = \ \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}.$$

Se $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$, então definimos $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0}$.

Exemplo 2.1 *Os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$ são unitários e tais que $\widehat{(\vec{i}, \vec{j})} = \widehat{(\vec{i}, \vec{k})} = \widehat{(\vec{j}, \vec{k})} = \frac{\pi}{2}$ Logo,*

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \|\vec{i}\|\|\vec{j}\| \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{i} \cdot \vec{k} = \|\vec{i}\|\|\vec{k}\| \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = \|\vec{j}\|\|\vec{k}\| \cos \frac{\pi}{2} = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0.$$

Além disso, como $\widehat{(\vec{i}, \vec{i})} = \widehat{(\vec{j}, \vec{j})} = \widehat{(\vec{k}, \vec{k})} = 0$, temos

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \|\vec{i}\|\|\vec{i}\| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{j} \cdot \vec{j} = \|\vec{j}\|\|\vec{j}\| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \|\vec{k}\|\|\vec{k}\| \cos 0 = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Observações:

- Observe o produto assim definido envolve dois vetores como fatores mas tem como resultado um número real, ou seja, um escalar. Por isso, tal produto também é conhecido pelo nome de *produto escalar.*
- O produto interno dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$ também costuma ser denotado por $\langle \vec{a},\ \vec{b} \rangle$.

2.2.1 Projeções ortogonais

Dados dois vetores $\vec{a}$ e $\vec{u} \neq \vec{0}$, consideremos a reta suporte r de um representante de $\vec{u}$ [2]. Chamamos <u>*projeção ortogonal*</u> de $\vec{a}$ na direção de $\vec{u}$ ao vetor representado pelo segmento orientado $\overrightarrow{A'B'}$ onde $\overrightarrow{AB}$ é um representante de $\vec{a}$ e os pontos A' e B' são os pontos de interseção de retas perpendiculares a r que passam por A e B, respectivamente (Figura 2.3). Neste caso, denotamos $\overrightarrow{A'B'}$ por $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{a}$.

Observe que nessa definição interessa apenas a direção do vetor $\vec{u}$. Conseqüentemente, $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{a} = \text{proj}_{\vec{v}}\vec{a}$ se $\vec{v} \neq \vec{0}$ for um vetor paralelo a $\vec{u}$.

Suponhamos $\vec{u}$ unitário, $\alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{u})}$ e $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$. Na Figura 2.3 temos $\frac{\|\overrightarrow{A'B'}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \cos\alpha \Longrightarrow \|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cos\alpha$. Portanto, $\text{proj}_{\vec{u}}\vec{a} = (\|\vec{a}\| \cos\alpha)\vec{u} = (\|\vec{a}\|\|\vec{u}\| \cos\alpha)\vec{u}$, e daí

$$\text{proj}_{\vec{u}}\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u}.$$

[2] Dois vetores quaisquer $\vec{a}$ e $\vec{u}$ possuem representantes que são segmentos orientados coplanares

De maneira análoga podemos obter esse mesmo resultado se tivermos $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \pi$. Daí, podemos deduzir que $|\vec{a} \cdot \vec{u}| = \|\vec{a}\| \|\vec{u}\| |\cos\alpha| = \|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{a}\|$. Geometricamente, isso significa que o módulo do produto interno de um vetor $\vec{a}$ por um vetor unitário $\vec{u}$ corresponde ao comprimento da projeção de $\vec{a}$ sobre $\vec{u}$.

Se $\vec{v}$ for um vetor não nulo então $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ é unitário e, usando o que foi visto anteriormente, temos $\text{proj}_{\vec{v}}\vec{a} = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u} = \left(\vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right) \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, ou seja,

$$\text{proj}_{\vec{v}}\vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

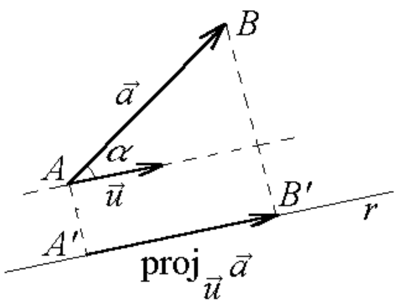


Figura 2.3: Projeção de $\vec{a}$ na direção de $\vec{u}$

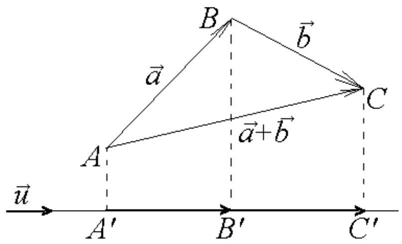


Figura 2.4: Projeção de $\vec{a} + \vec{b}$ na direção de $\vec{u}$

Destaquemos a seguinte propriedade das projeções ortogonais:

$$\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{a} + \vec{b}) = \text{proj}_{\vec{u}}\vec{a} + \text{proj}_{\vec{u}}\vec{b}.$$

Essa propriedade é uma conseqüência imediata da igualdade $\overrightarrow{A'C'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{B'C'}$ na Figura 2.4.

2.2.2 Propriedades do produto interno

Para quaisquer vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e qualquer escalar x são válidas as propriedades mostradas a seguir, com suas respectivas demonstrações.

[I1] $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (comutatividade)

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = \|\vec{b}\| \|\vec{a}\| \cos\widehat{(\vec{b}, \vec{a})} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

[I2] $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = x(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (x\vec{b})$

Se $x > 0$, o ângulo entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ é o mesmo ângulo que $x\vec{a}$ e $\vec{b}$ (Figura 2.5). Logo, $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = \|x\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\widehat{(x\vec{a}, \vec{b})} = |x| \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Se $x < 0$ então $\widehat{(x\vec{a}, \vec{b})} = \pi - \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$ (Figura 2.6). Logo, $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = \|x\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\widehat{(x\vec{a}, \vec{b})} = |x| \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos\left(\pi - \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}\right) = -x\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \left(-\cos\widehat{(\vec{a}, \vec{b})}\right) = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

Além disso, $\vec{a} \cdot (x\vec{b}) = (x\vec{b}) \cdot \vec{a} = x(\vec{b} \cdot \vec{a}) = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$.

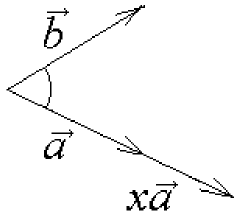


Figura 2.5: Ângulo entre $x\vec{a}$ e $\vec{b}$ com $x > 0$

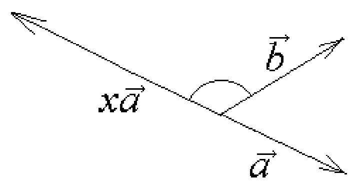


Figura 2.6: Ângulo entre $x\vec{a}$ e $\vec{b}$ com $x < 0$

[I3] $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$ (distributividade com relação à soma de vetores)

Se $\vec{c}=\vec{0}$ a igualdade é imediata pois reduz-se a $\vec{0}=\vec{0}+\vec{0}$.

Suponhamos $\vec{c}\neq\vec{0}$. Então temos $\text{proj}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}) = \text{proj}_{\vec{c}}\vec{a}+\text{proj}_{\vec{c}}\vec{b}$ e daí obtemos $\left(\frac{(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}}{\|\vec{c}\|^2}\right)\vec{c} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{\|\vec{c}\|^2}\vec{c}+\frac{\vec{b}\cdot\vec{c}}{\|\vec{c}\|^2}\vec{c}$, que multiplicando por $\|\vec{c}\|^2$ fornece: $((\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c})\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{c}+(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{c}$, ou seja, $((\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{c}=\vec{0}$. Como $\vec{c}\neq 0$, temos $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}-\vec{a}\cdot\vec{c}-\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{0}$ que é equivalente a $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Usando a comutatividade do produto interno, temos também que $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = (\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a} = \vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{a} = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$. Logo,

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}.$$

[I4] Dois vetores não nulos $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais se, e somente se, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

Se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem ortogonais, então $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\pi}{2}$ e daí $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\frac{\pi}{2}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cdot 0=0$.

Reciprocamente, se $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, então $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=0$. Como $\|\vec{a}\|\neq 0$ e $\|\vec{b}\|\neq 0$, devemos ter $\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=0$. Logo, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\frac{\pi}{2}$, isto é, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são ortogonais.

Convencionamos que o vetor nulo é ortogonal a qualquer outro vetor. Com isso esta propriedade pode ser estendida com o seguinte enunciado: *"Dois vetores são ortogonais se e somente se seu produto interno é nulo."*

[I5] $\|\vec{a}\|^2=\vec{a}\cdot\vec{a}$ (ou $\|\vec{a}\|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$)

É claro que $\vec{0}\cdot\vec{0}=\|\vec{0}\|^2$. Se $\vec{a}\neq\vec{0}$, então, como $\widehat{(\vec{a},\vec{a})}=0$ temos $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|\|\vec{a}\|\cos 0$, ou seja, $\vec{a}\cdot\vec{a}=\|\vec{a}\|^2$.

[I6] $|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leq\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$

Esta desigualdade é conhecida com o nome de *Desigualdade de Schwarz*[3] . Basta usar a definição de produto interno e que o módulo do cosseno de um ângulo é menor do que ou igual a 1: $|\vec{a}\cdot\vec{b}|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\||\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})}|\leq\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$.

2.2.3 Produto interno em coordenadas

Consideremos os vetores $\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ e $\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$. Vamos determinar uma maneira simples de calcular $\vec{a}\cdot\vec{b}$ usando apenas as coodenadas de $\vec{a}$ e de $\vec{b}$.

[3]Hermann Schwarz (1843 – 1921), matemático alemão

Usando as propriedades **[I1]**, **[I2]**, **[I3]**[4] e os resultados obtidos no exemplo 2.1 podemos obter uma fórmula muito útil para o cálculo de produto interno:
$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1\vec{i}\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})+a_2\vec{j}\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k})+a_3\vec{k}\cdot(b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}) = a_1b_1(\vec{i}\cdot\vec{i})+a_1b_2(\vec{i}\cdot\vec{j})+a_1b_3(\vec{i}\cdot\vec{k})+a_2b_1(\vec{j}\cdot\vec{i})+a_2b_2(\vec{j}\cdot\vec{j})+a_2b_3(\vec{j}\cdot\vec{k})+a_3b_1(\vec{k}\cdot\vec{i})+a_3b_2(\vec{k}\cdot\vec{j})+a_3b_3(\vec{k}\cdot\vec{k}) = a_1b_1\cdot 1+a_1b_2\cdot 0+a_1b_3\cdot 0a_2b_1\cdot 0+a_2b_2\cdot 1+a_2b_3\cdot 0a_3b_1\cdot 0+a_3b_2\cdot 0+a_3b_3\cdot 1.$
Portanto,

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Exemplo 2.2 *Sejam $\vec{a} = 2\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ e $\vec{b} = -5\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$. Então o produto interno entre $\vec{a}$ e $\vec{b}$ pode ser rapidamente efetuado da seguinte maneira:*

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 2\cdot(-5)+3\cdot(-2)+4\cdot 2 = -10-6+8 = -8.$$

Exemplo 2.3 *Dados $\vec{u} = 8\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$ e $\vec{v} = 3\vec{i}+13\vec{j}+\vec{k}$. Para verificar se esses vetores são ortogonais, basta verificar se o produto interno deles é nulo. Como $\vec{u}\cdot\vec{v} = 8\cdot 3+(-2)\cdot 13+2\cdot 1 = 24-26+2 = 0$ temos que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais.*

Exemplo 2.4 *Dados dois vetores $\vec{a} = a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$, podemos determinar o ângulo entre eles usando a definição*

$$\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{||\vec{a}||\,||\vec{b}||}$$

e as fórmulas $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, $||\vec{a}|| = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$ e $||\vec{b}|| = \sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$. Por exemplo, sejam $\vec{a} = 5\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{b} = 2\vec{i}+3\vec{j}+3\vec{k}$. Temos: $\vec{a}\cdot\vec{b} = 10-3+3 = 10$, $||\vec{a}|| = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27}$ e $||\vec{b}|| = \sqrt{4+9+9} = \sqrt{22}$. Portanto, se $\alpha = \widehat{(\vec{a},\vec{b})}$, então

$$\cos\alpha = \frac{10}{\sqrt{27}\sqrt{22}} = \frac{10}{\sqrt{594}},$$

ou seja, $\alpha = \text{arccos}\frac{10}{\sqrt{594}}$. Em geral, deve-se deixar esse tipo de resposta da maneira como está, usando a função arco-cosseno. A título de curiosidade informamos que usando uma calculadora ou um computador, pode-se obter uma boa aproximação para ângulos desse tipo. Neste exemplo, temos $\alpha \approx 65^o46'34''$.

2.2.4 Bases ortogonais e ortonormais

Uma base $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ do espaço tridimensional é chamada *base ortogonal* quando seus vetores forem dois a dois ortogonais, ou seja, quando $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{c} = 0$. Se além de ortogonais os vetores forem unitários então a base chama-se *base ortonormal.*

Exemplo 2.5 *A base canônica do $\mathbb{R}^3$, $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, é uma base ortonormal pois $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$ e $||\vec{i}|| = ||\vec{j}|| = ||\vec{k}|| = 1$.*

[4] Graças a essas propriedades, muitas vezes podemos operar com produtos internos de vetores como se estivéssemos operando com produtos de números reais.

Exemplo 2.6 *A base* $\beta_1 = \{\vec{a} = \vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}, \vec{b} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}, \vec{c} = -2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}\}$ *é ortogonal porque* $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0$*, mas não é ortonormal porque* $\|\vec{a}\| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{4+4+1} = 3$ *e* $\|\vec{c}\| = \sqrt{4+1+4} = 3$*. A partir de* β_1*, podemos construir facilmente uma outra base que seja ortonormal: basta dividir cada vetor de* β_1 *pela sua norma. Obtemos assim a seguinte base ortonormal:*

$$\beta_2 = \left\{ \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}, \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|}, \frac{\vec{c}}{\|\vec{c}\|} \right\} = \left\{ \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}, \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}, -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k} \right\}.$$

A vantagem em se ter uma base ortogonal ou ortonormal é a facilidade com que escrevemos um vetor dado como combinação linear dos vetores da base.

Seja $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ uma base ortogonal, $\vec{v}$ um vetor do $\mathbb{R}^3$ e $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$. Fazendo o produto interno de $\vec{v}$ com $\vec{a}$, depois com $\vec{b}$ e com $\vec{c}$, obtemos:

$$\vec{v} \cdot \vec{a} = x\vec{a} \cdot \vec{a} + y\vec{b} \cdot \vec{a} + z\vec{c} \cdot \vec{a} = x\|\vec{a}\|^2 + 0 + 0 \Longrightarrow x = \frac{\vec{v} \cdot \vec{a}}{\|\vec{a}\|^2},$$

$$\vec{v} \cdot \vec{b} = x\vec{a} \cdot \vec{b} + y\vec{b} \cdot \vec{b} + z\vec{c} \cdot \vec{b} = 0 + y\|\vec{b}\|^2 + 0 \Longrightarrow y = \frac{\vec{v} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2},$$

$$\vec{v} \cdot \vec{c} = x\vec{a} \cdot \vec{c} + y\vec{b} \cdot \vec{c} + z\vec{c} \cdot \vec{c} = 0 + 0 + z\|\vec{c}\|^2 \Longrightarrow z = \frac{\vec{v} \cdot \vec{c}}{\|\vec{c}\|^2}.$$

Em particular, se $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ for ortonormal, então $x = \vec{v} \cdot \vec{a}, y = \vec{v} \cdot \vec{b}, z = \vec{v} \cdot \vec{c}$.

Exemplo 2.7 *Vamos calcular as coordenadas do vetor* $\vec{v} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ *na base* $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ *onde* $\vec{a} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$, $\vec{b} = \frac{2}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{3}\vec{k}$, $\vec{c} = -\frac{2}{3}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$*. Note que essa base é ortonormal (veja exemplo 2.6). Daí, se* $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$*, então* $x = \vec{v} \cdot \vec{a} = 4 \cdot (\frac{1}{3}) - 3(-\frac{2}{3}) + 2 \cdot (\frac{2}{3}) = \frac{14}{3}$, $y = \vec{v} \cdot \vec{b} = 4 \cdot (\frac{2}{3}) - 3(\frac{2}{3}) + 2 \cdot (\frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$, $z = \vec{v} \cdot \vec{c} = 4 \cdot (-\frac{2}{3}) - 3(\frac{1}{3}) + 2 \cdot (\frac{2}{3}) = -\frac{7}{3}$*. Portanto, as coordenadas de* $\vec{v}$ *na base dada são* $\frac{14}{3}$, $\frac{4}{3}$ *e* $-\frac{7}{3}$.

2.3 Produto vetorial

Definiremos agora outro tipo de produto com vetores: o produto vetorial. A motivação para sua definição também vem da Física. Nas definições do *momento de uma força*, *velocidade angular* e de *campo magnético* ocorrem vetores que são ortogonais a dois outros vetores.

Antes de dar uma definição formal vamos fazer alguns cálculos que justifiquem nossa definição. Dados dois vetores $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$ e $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$, queremos determinar um vetor $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ que seja simultaneamente ortogonal a $\vec{a}$ e a $\vec{b}$. Então devemos ter $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ e $\vec{v} \cdot \vec{b} = 0$, ou seja,

$$\begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z &= 0 \\ b_1x + b_2y + b_3z &= 0 \end{cases}$$

que é equivalente a

$$\begin{cases} a_1x + a_2y &= -a_3z \\ b_1x + b_2y &= -b_3z \end{cases}$$

de onde podemos obter os valores de x e y em função de z:

$$x = \frac{a_2b_3 - a_3b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}z, \ y = \frac{a_3b_1 - a_1b_3}{a_1b_2 - a_2b_1}z.$$

Para cada valor de $z \in \mathbb{R}$ obtemos uma solução para o sistema. Em particular, podemos escolher $z = a_1b_2 - a_2b_1$ (para "eliminar" o denominador das frações) e daí temos a seguinte solução para o sistema:

$$\begin{aligned} x &= a_2b_3 - a_3b_2 \\ y &= a_3b_1 - a_1b_3 \\ z &= a_1b_2 - a_2b_1 \end{aligned}$$

Obtivemos dessa forma o vetor $\vec{v} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$ que é simultaneamente ortogonal a $\vec{a}$ e $\vec{b}$. Chamamos o vetor $\vec{v}$ assim obtido de *produto vetorial* de $\vec{a}$ por $\vec{b}$ e denotamos[5] por $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$.

Note que nessa definição $\vec{v}$ for escrito usando determinantes:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

Entretanto, é mais conveniente memorizar a definição de produto vetorial como sendo o seguinte determinante:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Nem todas as propriedades de determinantes são válidas neste caso. Por exemplo, não faz sentido somar a primeira linha com a segunda[6] porque uma linha é formada por vetores e a outra por escalares.

Exemplo 2.8 *Calcular o produto vetorial dos vetores* $\vec{a} = 5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{j}$ *e* $\vec{b} = \vec{i} + \vec{k}$. *Temos* $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 4\vec{k}$. *Observe que* $\vec{v}$ *é ortogonal a* $\vec{a}$ *e a* $\vec{b}$ *porque* $\vec{a} \cdot \vec{v} = 5 \cdot 4 + 4 \cdot (-2) + 3 \cdot (-4) = 0$ *e* $\vec{b} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 4 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot (-4) = 0$.

Exemplo 2.9 *Vamos calcular* $\vec{i} \times \vec{j}$, $\vec{j} \times \vec{k}$ *e* $\vec{k} \times \vec{i}$. *Usando a definição, temos:* $\vec{i} \times \vec{j} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \vec{j}$.

É útil memorizar esses resultados para usá-los posteriormente. A Figura 2.7 ajuda nessa memorização.

Do cálculo de um produto vetorial sempre resulta um vetor ortogonal a cada um dos fatores envolvidos. Além disso, se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{a} \times \vec{b}$ não forem nulos, o sentido do produto

[5]O produto vetorial também costuma ser denotado por $\vec{v} = \vec{a} \wedge \vec{b}$

[6]Esse determinante 3×3 é apenas um determinante *simbólico*, é um artifício útil para lembrar da definição de produto vetorial.

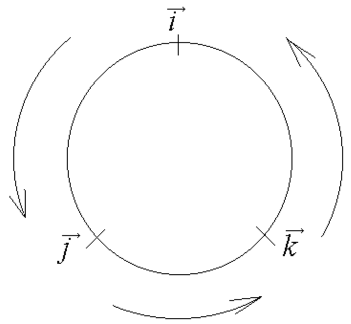


Figura 2.7: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$

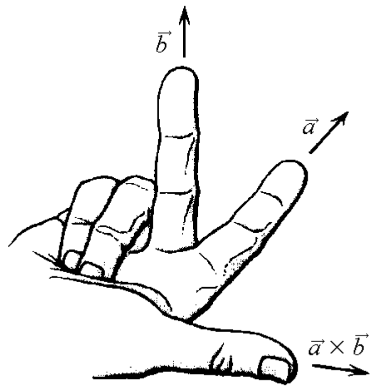


Figura 2.8: Regra da mão direita

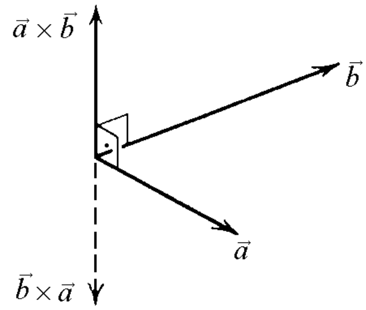


Figura 2.9: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$

vetorial pode ser determinado pela seguinte regra: se $\vec{a} \times \vec{b}$ apontar para o observador e $\vec{a}$ for girado para ocupar a posição de $\vec{b}$, então o sentido de rotação deverá ser anti-horário. Esse fato costuma ser ilustrado com o nome de *Regra da Mão Direita*: colocando-se três dedos da mão direita como na Figura 2.8, se o dedo indicador representar o vetor $\vec{a}$ e o dedo médio representar $\vec{b}$, então o polegar aponta para $\vec{a} \times \vec{b}$.

2.3.1 Propriedades do produto vetorial

Para quaisquer vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e qualquer escalar x são válidas as propriedades mostradas a seguir (com suas respectivas demonstrações):

[V1] $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

De acordo com a definição $\vec{a} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = \vec{0}$, porque neste caso temos um determinante com duas linhas iguais.

Em particular $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$.

[V2] $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (Figura 2.9)

Quando trocamos duas linhas de um determinante, seu sinal também fica trocado. Devido a isso: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -\vec{b} \times \vec{a}$.

Usando essa propriedade e o que foi obtido no exemplo 2.9 temos $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, $\vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i}$ e $\vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

[V3] $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$

Como $\vec{b} + \vec{c} = (b_1 + c_1)\vec{i} + (b_2 + c_2)\vec{j} + (b_3 + c_3)\vec{k}$, temos:

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 + c_1 & b_2 + c_2 & b_3 + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}.$$

[V4] $(x\vec{a}) \times \vec{b} = x(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (x\vec{b})$

$$x\vec{a} \times \vec{b} = x \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \; (x\vec{a}) \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ xa_1 & xa_2 & xa_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix},$$

$$\vec{a} \times (x\vec{b}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ xb_1 & xb_2 & xb_3 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Nos três casos obtivemos a mesma expressão nos segundos membros das igualdades.

[V5] $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$

Esta igualdade é conhecida pelo nome *Identidade de Lagrange.*[7] Como $\vec{a} \times \vec{b} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$ temos $\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$.

Por outro lado, $\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$ e $(\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$.

Desenvolvendo os quadrados indicados obtemos a identidade desejada.

[V6] $\vec{a} \times \vec{b} = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \operatorname{sen} \alpha$, onde $\alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$

Usando a Identidade de Lagrange e a definição de produto interno, temos:

$\|\vec{a} \times \vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \cos \alpha)^2 = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2(1 - \cos^2 \alpha) = \|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 \operatorname{sen}^2 \alpha$. Como $0 \leq \alpha \leq \pi$, temos $\operatorname{sen} \alpha \geq 0$ e daí, $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \operatorname{sen} \alpha$.

[V7] $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ se e somente se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem paralelos.

Convencionamos que $\vec{0}$ é paralelo a qualquer vetor. Logo, se $\vec{a} = \vec{0}$ ou $\vec{b} = \vec{0}$ então essa propriedade é óbvia e não há o que mostrar.

Suponhamos $\vec{a} \neq \vec{0}$ e $\vec{b} \neq \vec{0}$. Então: $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são paralelos $\iff \alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})} = 0$ ou π radianos $\iff \operatorname{sen} \alpha = 0 \iff \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \operatorname{sen} \alpha = 0 \iff \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

O produto vetorial não possui a propriedade associativa, ou seja, $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ em geral não é igual a $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Por exemplo, $(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0} \times \vec{j} = \vec{0}$ e $\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$.

2.3.2 Interpretação geométrica do módulo do produto vetorial

Consideremos o paralegramo $ABCD$ da Figura 2.10. Sejam $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ e $\alpha = \widehat{(\vec{a}, \vec{b})}$.

A área de um paralelogramo é dada pelo produto da medida da base pela altura, ou seja, é igual a $\|\vec{a}\| \cdot h = \|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \operatorname{sen} \alpha = \|\vec{a} \times \vec{b}\|$.

Mostramos assim que o módulo do produto vetorial de $\vec{a}$ por $\vec{b}$ é numericamente igual à área do paralelogramo determinado por eles.

[7] Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813), matemático italiano

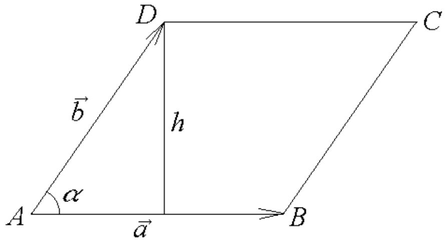


Figura 2.10: Área do paralelogramo $ABCD$

Exemplo 2.10 *Calcular a área do paralelogramo de vértices* $A = (1, -2, 1)$, $B = (2, -1, 4)$, $C = (0, -2, 6)$ *e* $D = (-1, -3, 3)$. *Como* $\overrightarrow{AB} = B - A = (1, 1, 3)$ *e* $\overrightarrow{AD} = D - A = (-2, -1, 2)$, *temos* $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 5\vec{i} - 8\vec{j} + \vec{k}$. *Portanto a área de* $ABCD$ *é dada por* $\|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\| = \sqrt{25 + 64 + 1} = 3\sqrt{10}$.

2.4 Produto misto

Nesta seção definimos mais um produto de vetores. Assim como o produto interno, o resultado obtido nesse produto também é um escalar.

Dados os vetores $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}$ e $\vec{c} = c_1\vec{i} + c_2\vec{j} + c_3\vec{k}$ chamamos *produto misto* de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ (considerados nessa ordem) ao número real[8] $\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c}$. Denotamos o produto misto de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ por $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}]$.

Considerando a definição de produto vetorial, temos $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}$. Fazendo o produto interno com $\vec{c}$ obtemos:

$$\vec{a} \times \vec{b} \cdot \vec{c} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1.$$

Como $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 - a_3b_2c_1$, obtemos

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Exemplo 2.11 *Calcular o produto misto dos vetores* $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$ *e* $\vec{c} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

$$[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 27.$$

[8] Não há necessidade do uso de parênteses nessa definição: como $\vec{a} \times (\vec{b} \cdot \vec{c})$ não faz sentido, a única possibilidade é considerar $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

2.4.1 Interpretação geométrica

Consideremos o paralelepípedo $ABCDEFGH$ definido pelos vetores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$ (Figura 2.11). O volume V desse paralelepípedo é o produto da área da base (que é igual a $||\vec{a} \times \vec{b}||$) pela altura h.

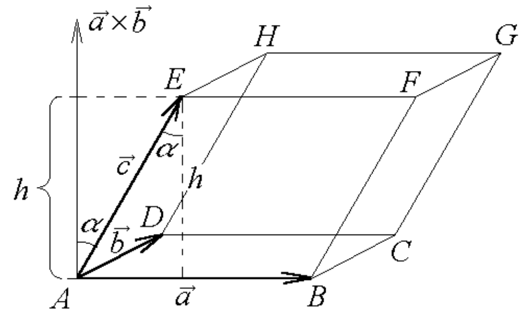


Figura 2.11: Volume do paralelepípedo $ABCDEFGH$

Sendo $\alpha = \widehat{(\vec{b}, \vec{c})}$, temos $h = ||\vec{c}|| \, |\cos\alpha|$ e daí $V = ||\vec{a} \times \vec{b}||h = ||\vec{a} \times \vec{b}|| \, ||\vec{c}|| \, |\cos\alpha|$ $= ||(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}||$.

2.4.2 Propriedades do produto misto

Sejam $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ vetores quaiquer e $x, y \in \mathbb{R}$. Então são válidas as seguintes propriedades:

[M1] O produto misto troca se sinal se trocarmos a ordem de dois dos vetores

Esta propriedade é uma conseqüência da propriedade de determinantes que diz que *"ao trocarmos duas linhas, o determinante muda de sinal"*.

[M2] O produto misto é nulo se pelo menos dois vetores forem iguais.

Um determinante que tenha duas linhas iguais é nulo. Portanto, $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{a}] = 0$, $[\vec{a}, \vec{a}, \vec{b}] = 0$, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{b}] = 0$, etc.

[M3] $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ se e somente se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ forem LD;

Se os vetores forem LD, então um deles é combinação linear dos outros. Suponhamos $\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$. Então $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [x\vec{b} + y\vec{c}, \vec{b}, \vec{c}] = 0$ porque temos um determinante cuja primeira linha é uma combinação linear da segunda e da terceira linhas.

Se os vetores forem LI, então eles não são coplanares e daí o volume do paralelepípedo definido por eles é diferente de 0 e, neste caso, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \neq 0$.

[M4] O produto misto independe da ordem circular dos vetores, isto é $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$.

Usando a propriedade **[M1]**, temos: $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] = -[\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}] = [\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] = -[\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}] = [\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}]$.

[M5] $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}$, ou seja, podemos permutar as operações "$\cdot$" e "$\times$" sem alterar o produto misto.

Basta observar que $\vec{a}\cdot\vec{b}\times\vec{c} = \vec{b}\times\vec{c}\cdot\vec{a} = [\vec{b},\vec{c},\vec{a}] = [\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$[9].

[M6] $[x\vec{a}+y\vec{b},\vec{c},\vec{d}] = x[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+y[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]$, $[\vec{a},x\vec{b}+y\vec{c},\vec{d}] = x[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]+y[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]$, $[\vec{a},\vec{b},x\vec{c}+y\vec{d}] = x[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+y[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]$.

Também é conseqüência imediata de propriedades de determinantes. Por exemplo,

$$[x\vec{a}+y\vec{b},\vec{c},\vec{d}] = \begin{vmatrix} xa_1+yb_1 & xa_2+yb_2 & xa_3+yb_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} = x\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} =$$

$x[\vec{a},\vec{c},\vec{d}]+y[\vec{b},\vec{c},\vec{d}]$.

Observações:

Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores. Então:

- $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ se e somente se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem ortogonais;
- $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ se e somente se $\vec{a}$ e $\vec{b}$ forem paralelos;
- $[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=0$ se e somente se $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ forem coplanares.

2.5 Exercícios resolvidos

R 11 *Mostre que:*
a) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$
b) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \|\vec{a}\|^2 - \|\vec{b}\|^2$

Solução:
a) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\|\vec{b}\|^2$.
Da mesma forma podemos obter também que $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$.
b) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{b}\cdot\vec{a}-\vec{b}\cdot\vec{b} = \|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2$.

R 12 *Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores tais que $\vec{u}\cdot\vec{v}=4$, $\|\vec{v}\|=3\sqrt{3}$ e $\widehat{(\vec{u},\vec{v})}=\pi/6$. Calcule $\|\vec{u}\|$ e $\|\vec{u}+\vec{v}\|$.*

Solução: *Como* $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos\widehat{(\vec{u},\vec{v})}$, *temos* $4 = \|\vec{u}\|\cdot 3\sqrt{3}\cdot\cos(\pi/6) \Longrightarrow 4 = \frac{9}{2}\|\vec{u}\| \Longrightarrow \|\vec{u}\| = \frac{8}{9}$.
Usando **R 1**, *temos:* $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\|\vec{v}\|^2 = (8/9)^2+2\cdot 4+(3\sqrt{3})^2 = 64/81+35 = 2899/81 \Longrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\| = \sqrt{2899/81}$.

R 13 *Mostre que* $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\|+\|\vec{b}\|$.

[9] Foi usada na última igualdade a propriedade **[M4]**

Solução: *Como* $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2$, *e* $\vec{a}\cdot\vec{b} \leq |\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq \|\vec{a}\|\|\vec{b}\|$, *temos:* $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 \leq \|\vec{a}\|^2 + 2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| + \|\vec{b}\|^2 = (\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|)^2$. *Portanto,* $\|\vec{a}+\vec{b}\| \leq \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$.

Esse resultado é conhecido como Desigualdade Triangular *e pode ser interpretado geometricamente da seguinte maneira: o comprimento do lado de um triângulo (o* $\|\vec{a}+\vec{b}\|$*) não ultrapassa a soma dos comprimentos dos outros dois lados (*$\|\vec{a}\| + \|\vec{b}\|$*).*

R 14 *Seja* $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ *uma base ortonormal. Calcule* $\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|$.

Solução: *Para evitar raiz quadrada, é mais conveniente iniciar com o quadrado da norma.* $\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2 = (\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}\cdot\vec{a}+\vec{c}\cdot\vec{b}+\vec{c}\cdot\vec{c} = \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2+2(\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}) = 1+1+1+2(0+0+0) = 3$. *Logo,* $\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\| = \sqrt{3}$.

Geometricamente, calculamos a diagonal de um cubo de aresta 1.

R 15 *Mostre que se os vetores não nulos* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$ *forem dois a dois ortogonais, então eles são LI.*

Solução: *Sejam* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tais que* $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$. *Fazendo o produto interno com* $\vec{a}$, *obtemos:* $\vec{a}\cdot(a\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}) = x\vec{a}\cdot\vec{a}+y\vec{a}\cdot\vec{b}+z\vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{0} = 0$. *Logo,* $x\|\vec{a}\|^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Analogamente, fazendo o produto interno com $\vec{b}$ *e com* $\vec{c}$ *obtemos* $y = 0$ *e* $z = 0$, *respectivamente.*

R 16 *Considere os vetores* $\vec{u} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + \vec{k}$ *e* $\vec{v} = -\vec{i} + 3\vec{k}$.

a) Mostre que $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são ortogonais e determine um vetor* $\vec{w}$ *de modo que* $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ *seja uma base ortogonal do* $\mathbb{R}^3$.

b) Dê exemplo de uma base ortonormal $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ *tais que* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$ *sejam paralelos a* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$, *respectivamente.*

Solução: *a)* $\vec{u}\cdot\vec{v} = -3+0+3 = 0$, *logo,* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *são ortogonais. Para encontrar* $\vec{w}$ *que seja simultaneamente ortogonal a* $\vec{u}$ *e a* $\vec{v}$, *uma boa opção é considerar* $\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v}$.

$$\vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -7 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -21\vec{i} - 10\vec{j} - 7\vec{k}.$$

b) Como $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *são ortogonais, basta considerar os vetores unitários* $\vec{a} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$, $\vec{b} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ *e* $\vec{c} = \frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}$. *Obtemos assim,* $\vec{a} = \frac{3}{\sqrt{59}}\vec{i} - \frac{7}{\sqrt{59}}\vec{j} + \frac{1}{\sqrt{59}}\vec{k}$, $\vec{b} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{k}$, $\vec{c} = -\frac{21}{\sqrt{590}}\vec{i} - \frac{10}{\sqrt{590}}\vec{j} - \frac{7}{\sqrt{590}}\vec{k}$.

R 17 *Considere o triângulo retângulo ABC da Figura 2.12. Demonstre o Teorema de Pitágoras:* $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$.

Solução: *Como* $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, *temos que* $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\| + 2\vec{a}\cdot\vec{b} + \|\vec{b}\|^2 = \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2$.

R 18 *Mostre que todo triângulo inscrito em um semicírculo é um triângulo retângulo.*

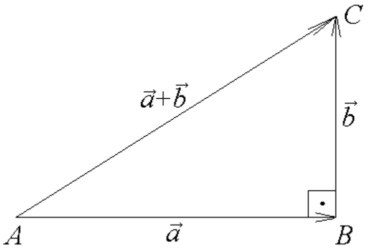


Figura 2.12: Teorema de Pitágoras

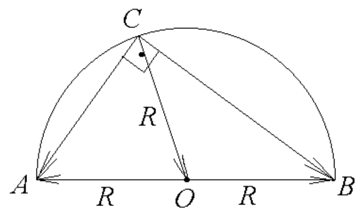


Figura 2.13: Triângulo inscrito em semicírculo

Solução: *Consideremos um triângulo ABC inscrito em um semicírculo de raio R e centro O (Figura 2.13). Queremos mostrar que os vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$ são ortogonais. Para isso, basta calcular seu produto interno. Como $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OB}$ e $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$, temos $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = (\overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA}) \cdot (\overrightarrow{CO} - \overrightarrow{OA}) = \|\overrightarrow{CO}\|^2 - \|\overrightarrow{OA}\|^2 = R^2 - R^2 = 0$.*

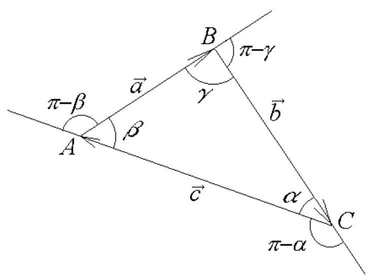


Figura 2.14: Lei dos senos

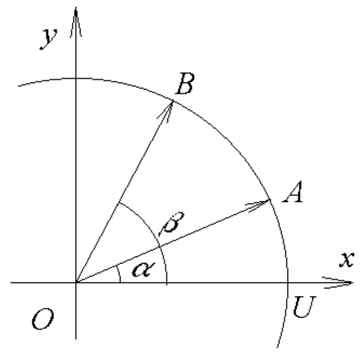


Figura 2.15: Cosseno e seno de $\beta - \alpha$

R 19 *Consideremos um triângulo ABC com lados definidos pelos vetores $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{CA}$ e ângulos internos $\alpha = \widehat{ACB}$, $\beta = \widehat{BAC}$ e $\gamma = \widehat{ABC}$ (Figura 2.14).*

a) Mostre que $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$.

c) Demonstre a Lei dos Senos:

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\|\vec{a}\|} = \frac{\operatorname{sen}\beta}{\|\vec{b}\|} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\|\vec{c}\|}.$$

Solução:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Fazendo o produto vetorial de veca $+ \vec{b} + \vec{c}$ com $\vec{a}$ obtemos $(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{0} \Longrightarrow \vec{b} \times \vec{a} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{c} \times \vec{a} = -\vec{b} \times \vec{a} \Longrightarrow \vec{c} \times \vec{a} = \vec{a} \times \vec{b}$

Analogamente, fazendo o produto vetorial com $\vec{b}$ obtemos $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{c} \times \vec{b} = \vec{0}$, ou seja, $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c}$.

c) Usando a propriedade **[V6]** *do produto vetorial para calcular as normas de $\vec{a} \times \vec{b}$ e de $\vec{c} \times \vec{a}$ temos $\|\vec{a}\|\|\vec{b}\| \operatorname{sen}(\pi - \gamma) = \|\vec{c}\|\|\vec{a}\| \operatorname{sen}(\pi - \beta)$, ou seja, $\|\vec{b}\| \operatorname{sen}\gamma = \|\vec{c}\| \operatorname{sen}\beta \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}\beta}{\|\vec{b}\|} = \frac{\operatorname{sen}\gamma}{\|\vec{c}\|}$.*

Analogamente, de $\vec{b}\times\vec{c}=\vec{c}\times\vec{a}$, *obtemos* $\|\vec{b}\|\|\vec{c}\|\operatorname{sen}(\pi-\alpha)=\|\vec{c}\|\|\vec{a}\|\operatorname{sen}(\pi-\beta)$, *ou seja,* $\|\vec{b}\|\operatorname{sen}\alpha=\|\vec{a}\|\operatorname{sen}\beta \Longrightarrow \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\|\vec{a}\|}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{\|\beta\|}$.

Pode-se também obter que $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{b}\times\vec{c}\|=\|\vec{c}\times\vec{a}\|$ *calculando-se a área do triângulo* ABC.

R 20 *Na Figura 2.15 temos uma circunferência de centro na origem* $O=(0,0)$ *e raio* 1 *e os pontos* A, B *e* $U=(1,0)$ *nessa circunferência de tal forma que as medidas dos ângulos* $\widehat{UOA}$ *e* $\widehat{UOB}$ *sejam* α *e* β *respectivamente. Determine expressões para* $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ *e* $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ *e o cosseno do ângulo entre* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$.

Solução: *De* $\vec{a}=\cos\alpha\vec{i}+\operatorname{sen}\alpha\vec{j}$ *e* $\vec{b}=\cos\beta\vec{i}+\operatorname{sen}\beta\vec{j}$, *obtemos* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$. *Por outro lado, como* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *são unitários e a medida do ângulo entre eles é* $\beta-\alpha$, *temos* $\vec{a}\cdot\vec{b}=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos(\beta-\alpha)\|=\cos(\alpha-\beta)$. *Portanto,* $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$.

R 21 *Com os mesmos vetores* $\vec{a}$ *e* $\vec{b}$ *do exercício* **R 10** *com a restrição* $0\le\alpha<\beta<\pi/2$, *calcule o produto vetorial* $\vec{a}\times\vec{b}$ *e obtenha uma fórmula para* $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$.

Solução: $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0\\ \cos\beta & \operatorname{sen}\beta & 0\end{vmatrix}=(\operatorname{sen}\beta\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta)\vec{k}$. *Como* $0\le\alpha<\beta<\pi/2$, *temos* $\operatorname{tg}\alpha<\operatorname{tg}\beta\Longrightarrow\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}<\frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta}\Longrightarrow\operatorname{sen}\beta\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta>0\Longrightarrow$ $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\operatorname{sen}\beta\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$.

Por outro lado, $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=\operatorname{sen}(\beta-\alpha)$. *Portanto,* $\operatorname{sen}(\beta-\alpha)=\operatorname{sen}\beta\cos\alpha-\operatorname{sen}\alpha\cos\beta$.

R 22 *Mostre que* $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{c}]=2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]$.

Solução: *Usando as propriedades* **[M2]**, **[M4]** *e* **[M6]**, *temos* $[\vec{a}+\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{c}]+[\vec{b},\vec{b}+\vec{c},\vec{a}+\vec{c}]=[\vec{a},\vec{b},\vec{a}+\vec{c}]+[\vec{a},\vec{c},\vec{a}+\vec{c}]+\underbrace{[\vec{b},\vec{b},\vec{a}+\vec{c}]}_{0}+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}+\vec{c}]=$

$$\underbrace{[\vec{a},\vec{b},\vec{a}]}_{0}+[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+\underbrace{[\vec{a},\vec{c},\vec{a}]}_{0}+\underbrace{[\vec{a},\vec{c},\vec{c}]}_{0}+[\vec{b},\vec{c},\vec{a}]+\underbrace{[\vec{b},\vec{c},\vec{c}]}_{0}=[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]+[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]=2[\vec{a},\vec{b},\vec{c}].$$

R 23 *Na molécula de metano* (CH_4), *o átomo de carbono ocupa o centro de um tetraedro regular em cujos vértices estão os átomos de carbono (Figura 2.16). Os livros de Química mencionam, sem maiores explicações, que o ângulo entre duas valências do carbono é de* $109^o28'16''$. *Na Figura 2.17 temos o tetraedro* $BDEG$ *incrito no cubo* $ABCDEFGH$ *de aresta 2, onde* $A=(2,0,0)$, $B=(2,2,0)$, $C=(0,2,0)$, $D=(0,0,0)$, $E=(2,0,2)$, $F=(2,2,2)$, $G=(0,2,2)$, $H=(0,0,2)$.

a) Mostre que $BDEG$ *é um tetraedro regular;*

b) Mostre que $P=(1,1,1)$ *é o centro do tetraedro regular* $BDEG$*;*

c) Calcule o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{PE}$ *e* $\overrightarrow{PG}$, *que é mencionado nos livros de Química.*

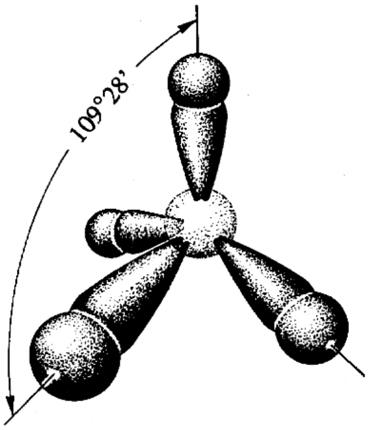


Figura 2.16: Molécula de metano

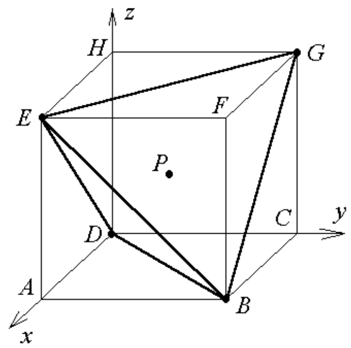


Figura 2.17: Tetraedro inscrito em um cubo

Solução: *a) Cada aresta do tetraedro corresponde a uma diagonal de uma face do cubo. Logo, elas têm o mesmo comprimento e, conseqüentemente, o tetraedro é regular.*

b) Para mostrar que P é o centro do tetraedro, devemos mostrar que ele é eqüidistante dos vértices, ou seja, que $\|\overrightarrow{PB}\| = \|\overrightarrow{PD}\| = \|\overrightarrow{PE}\| = \|\overrightarrow{PG}\|$. *Como* $\overrightarrow{PB} = B - P = (1,1,-1)$, *temos* $\|\overrightarrow{BP}\| = \sqrt{3}$. *Analogamente obtemos* $\|\overrightarrow{PD}\| = \|\overrightarrow{PE}\| = \|\overrightarrow{PG}\| = \sqrt{3}$.

c) Da definição de produto interno, obtemos

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PG}}) = \frac{\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PG}}{\|\overrightarrow{PE}\|\|\overrightarrow{PG}\|}.$$

Como $\overrightarrow{PE}\cdot\overrightarrow{PG} = (1,-1,1)\cdot(-1,1,1) = -1-1+1 = -1$, *obtemos:*

$$\cos(\widehat{\overrightarrow{PE},\overrightarrow{PG}}) = \frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = -\frac{1}{3}.$$

Portanto o ângulo procurado é $\arccos(-\frac{1}{3}) \approx 109^o 28' 16''$.

R 24 *As expressões* $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ *e* $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$ *são conhecidas como* produtos vetoriais triplos. *Mostre que*

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c},$$

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = (\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b} - (\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}.$$

Solução: *Calculemos inicialmente as coordenadas dos vetores* $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ *e* $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ *na base ortonormal* $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. *Para isso, basta calcularmos os produtos internos desses vetores com os vetores da base (seção 2.2.4).*

$$\vec{i}\cdot\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{i},\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \end{vmatrix} = a_2(b_1c_2 - b_2c_1) -$$

$a_3(b_3c_1 - b_1c_3) = a_2b_1c_2 - a_2b_2c_1 - a_3b_3c_1 + a_3b_1c_3$.

Por outro lado, $\vec{i}\cdot((\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}) = (a_1c_1+a_2c_2+a_3c_3)b_1-(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)c_1 = a_2b_1c_2-a_2b_2c_1-a_3b_3c_1+a_3b_1c_3$.

Analogamente, $\vec{j}\cdot\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{j},\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{j}\cdot((\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c})$ *e* $\vec{k}\cdot\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = [\vec{k},\vec{a},\vec{b}\times\vec{c}] = \vec{k}\cdot((\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c})$.

Como os vetores $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ *e* $(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}$ *têm as mesmas coordenadas na base canônica* $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ *concluímos que eles são iguais.*

A segunda igualdade pode ser demonstrada a partir da primeira: $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = -[(\vec{c}\cdot\vec{b})\vec{a}-(\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b}] = \vec{a}\cdot\vec{c}\vec{b}-\vec{c}\cdot\vec{b}\vec{a}$.

R 25 *Mostre a Identidade de Jacobi*[10]*:*

$$(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}+(\vec{w}\times\vec{u})\times\vec{v}+(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u}=\vec{0}.$$

Solução: *Usando três vezes a fórmula provada no exercício* **R 14** *temos:* $(\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}-(\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{u}$, $(\vec{w}\times\vec{u})\times\vec{v} = (\vec{w}\cdot\vec{v})\vec{u}-(\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w}$, $(\vec{v}\times\vec{w})\times\vec{u} = (\vec{v}\cdot\vec{u})\vec{w}-(\vec{u}\cdot\vec{w})\vec{v}$. *Somando as três equações anteriores obtemos o resultado desejado.*

2.6 Exercícios propostos

A 16 Determine $x\in\mathbb{R}$ de modo que os vetores $\vec{u}=x\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ e $\vec{v}=3\vec{i}+x\vec{j}+10\vec{k}$ sejam ortogonais.

A 17 Calcule $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$, onde $\vec{a}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{b}=3\vec{i}+4\vec{j}$.

A 18 Encontre a projeção ortogonal do vetor $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ sobre o vetor $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$.

A 19 Determine um vetor de módulo igual a 5 que seja simultanemente ortogonal aos vetores $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{v}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

A 20 Sejam $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$ e $\vec{c}=4\vec{j}-3\vec{k}$. Mostre que $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})\neq(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$.

A 21 Mostre que:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2-\|\vec{a}\|^2-\|\vec{b}\|^2)$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{4}(\|\vec{a}+\vec{b}\|^2-\|\vec{a}-\vec{b}\|^2)$

c) $\|\vec{a}+\vec{b}\|^2+\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=2(\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2)$

A 22 Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores unitários tais que $\widehat{(\vec{a},\vec{b})}=\pi/6$. Mostre que $\|(\vec{a}-\vec{b})\times(\vec{a}+2\vec{b})\|=1/2$.

A 23 Mostre que $\vec{a}$ e $\vec{b}$ são vetores ortogonais se e somente se $\|\vec{a}+\vec{b}\|=\|\vec{a}-\vec{b}\|$.

A 24 a) Calcule a área (usando produto vetorial) e a medida do ângulo interno oposto ao maior lado do triângulo PQR onde $P=(0,0,0)$, $Q=(6,0,0)$ e $R=(3,4,0)$

b) Represente o triângulo PQR em um sistema de eixos coordenados e calcule novamente a área usando a conhecida fórmula

$$\text{Área}_{\triangle}=\frac{(\text{base})\cdot(\text{altura})}{2}.$$

Verifique se o resultado encontrado coincide com o que foi obtido no item (a).

[10]Karl Gustav Jacobi (1804 – 1851), matemático alemão

A 25 Calcule a área do triângulo cujos vértices são os pontos $A = (1,0,1)$, $B = (3,2,-1)$ e $C = (6,-1,5)$. Mostre que esse triângulo é retângulo.

A 26 Mostre que se $\vec{u}$ for ortogonal a $\vec{v}-\vec{w}$ e $\vec{v}$ for ortogonal a $\vec{u}-\vec{v}$, então $\vec{w}$ é ortogonal a $\vec{u}-\vec{v}$.

A 27 Seja $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ uma base ortonormal. Calcule $\|\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}\|$ e $\left(\frac{\sqrt{155}}{3}\vec{a} - \frac{2255}{\sqrt{7}}\vec{b}\right) \cdot (5\vec{c})$.

A 28 Sejam $\vec{u} = m\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{v} = m\vec{i} + m\vec{j} + 2\vec{k}$

a) Determine m de modo que $\vec{u}$ seja ortogonal a $\vec{v}$.

b) Com o valor positivo de m obtido no item (a), determine $\vec{w}$ de modo que $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ seja uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

c) Obtenha as coordenadas de $\vec{a} = \vec{i} + 7\vec{j} + 2\vec{k}$ na base $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ do item (b).

A 29 Determine x para que os pontos $A = (1,1,1)$, $B = (0,1,2)$, $C = (2,1,0)$ e $D = (x,2,3)$ sejam coplanares.

A 30 Determine x de modo que o volume do paralelepípedo com arestas definidas pelo vetores $\vec{a} = -2\vec{i} + x\vec{j}$, $\vec{b} = x\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{k}$ seja igual a 2 unidades de volume.

A 31 Seja $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ uma base ortogonal tal que $\|\vec{a}\| = 2$, $\|\vec{b}\| = 3$ e $\|\vec{c}\| = 5$. Calcule $|[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]|$.

A 32 Calcule o volume do *tetraedro* (pirâmide com 4 faces triangulares) cujos vértices são os pontos $A = (1,2,1)$, $B = (7,4,3)$, $C = (4,6,2)$ e $D = (3,3,3)$, sabendo que o volume do tetraedro definido por $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ é $1/6$ do volume do paralelepípedo definido pelos mesmos vetores.

B 6 Sendo $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores quaisquer, mostre que $(\vec{a}+\vec{b}) \times (\vec{a}-\vec{b}) = 2(\vec{b}\times\vec{a})$. Interprete geometricamente esse resultado.

B 7 Calcule a área de um paralelogramo $ABCD$ cujas diagonais são $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} - 3\vec{k}$ e $\overrightarrow{BD} = 2\vec{i} + 5\vec{j} - \vec{k}$.

B 8 Demonstre que as diagonais de um losango são perpendiculares entre si.

B 9 Determine a solução $\vec{x}$ do sistema

$$\begin{cases} \vec{x} \times (2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) & = & \vec{0} \\ \vec{x} \cdot (4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) & = & 2 \end{cases}$$

B 10 Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores tais que $\|\vec{a}\| = 3$, $\|\vec{b}\| = 5$, $\widehat{(\vec{a},\vec{b})} = \pi/3$. Determine o valor de m de modo que:

a) $\vec{a} + m\vec{b}$ e $\vec{a} - m\vec{b}$ sejam ortogonais

b) $\vec{a} + m\vec{b}$ e $\vec{a} - m\vec{b}$ sejam paralelos

B 11 Ache $\vec{u}$ ortogonal a $\vec{v} = 4\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$ e a $\vec{w} = \vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$ que satisfaça $\vec{u}\cdot(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}) = 2$.

B 12 Sejam $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ vetores unitários tais que $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$. Mostre que $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}=-3/2$.

B 13 Consideremos vetores $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ com $\vec{a}\neq\vec{0}$.
a) Se $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ podemos concluir que $\vec{b}=\vec{c}$?
b) Se $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$ podemos concluir que $\vec{b}=\vec{c}$?

B 14 Considerando um triângulo com lados definidos por $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, mostre o resultado conhecido como *Lei dos Cossenos:*

$$\|\vec{c}\|^2=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\widehat{(\vec{a},\vec{b})}$$

(Sugestão: $\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$)

B 15 Os *cossenos diretores* de um vetor $\vec{v}$ são os cossenos dos ângulos α, β e γ que $\vec{v}$ forma com os vetores $\vec{i}$, $\vec{j}$ e $\vec{k}$, respectivamente. Seja $\vec{v}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$. Mostre que:
a) $\cos\alpha=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ e $\cos\gamma=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$
b) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

C 6 Um vetor $\vec{v}$ de comprimento 5 tem dois de seus cossenos diretores dados por $\cos\alpha=1/3$ e $\cos\beta=1/4$, onde $\alpha=\widehat{(\vec{v},\vec{i})}$ e $\beta=\widehat{(\vec{v},\vec{j})}$. Determine as coordenadas de $\vec{v}$ na base canônica do $\mathbb{R}^3$.

C 7 Seja θ o ângulo entre os vetores $\vec{v}_1=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$ e $\vec{v}_2=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$. Mostre que

$$\cos\theta=\cos\alpha_1\cdot\cos\alpha_2+\cos\beta_1\cdot\cos\beta_2+\cos\gamma_1\cdot\cos\gamma_2$$

onde $\cos\alpha_1$, $\cos\beta_1$, $\cos\gamma_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\beta_2$, $\cos\gamma_2$ são os cossenos diretores de $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$, respectivamente.

C 8 Sejam $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ vetores não nulos. Mostre que $|[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]|\leq\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\|\vec{w}\|$ e que vale a igualdade se e somente se os vetores são ortogonais dois a dois.

C 9 Mostre que se $\vec{a}\times\vec{b}+\vec{b}\times\vec{c}+\vec{c}\times\vec{a}=\vec{0}$, então $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $\vec{c}$ são LD.

(Sugestão: Faça o produto interno com $\vec{c}$.)

C 10 Mostre que

$$[\vec{a},\vec{b},\vec{c}][\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}\vec{a}\cdot\vec{u} & \vec{a}\cdot\vec{v} & \vec{a}\cdot\vec{w}\\ \vec{b}\cdot\vec{u} & \vec{b}\cdot\vec{v} & \vec{b}\cdot\vec{w}\\ \vec{c}\cdot\vec{u} & \vec{c}\cdot\vec{v} & \vec{c}\cdot\vec{w}\end{vmatrix}.$$

(Sugestão: $\det(A)\det(B)=\det(AB^t)$)

C 11 Seja $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ uma base do $\mathbb{R}^3$ e $\vec{v}$ um vetor no espaço tridimensional. Mostre que

$$\vec{v}=\frac{[\vec{v},\vec{b},\vec{c}]}{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}\vec{a}+\frac{[\vec{a},\vec{v},\vec{c}]}{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}\vec{b}+\frac{[\vec{a},\vec{b},\vec{v}]}{[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}\vec{c}.$$

(Sugestão: Sendo $\vec{v}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$, faça o produto vetorial por $\vec{c}$. Depois, faça o produto interno por $\vec{b}$ para obter o valor de x.)

C 12 Mostre que

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d})+(\vec{b}\times\vec{c})\cdot(\vec{a}\times\vec{d})+(\vec{c}\times\vec{a})\cdot(\vec{b}\times\vec{d})=0.$$

(Sugestão: Use a propriedade **M5** e o exercício **R 15**)

C 13 Se $\vec{b}$ for um vetor ortogonal a $\vec{a}$, então existe um vetor $\vec{c}$ tal que $\vec{b}=\vec{a}\times\vec{c}$.

(Sugestão: Considere $\vec{c}=\frac{\vec{b}\times\vec{a}}{||\vec{a}||^2}$ e use o exercício **R 14**.)

C 14 Mostre que $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d})=[\vec{a},\vec{b},\vec{d}]\vec{c}-[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]\vec{d}$.

C 15 Considere a equação $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$, onde $\vec{a}$ é um vetor não nulo e $b\in\mathbb{R}$ são dados e $\vec{x}$ é um vetor a ser determinado.

a) Mostre que se $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ são duas soluções dessa equação, então $\vec{x}_1=\vec{x}_2+\vec{c}$ onde $\vec{c}$ é um vetor ortogonal a $\vec{a}$. Conclua a partir daí que existe um vetor $\vec{v}$ tal que $\vec{x}_1=\vec{x}_2+\vec{a}\times\vec{v}$.

b) Mostre que $\vec{x}=\frac{b\vec{a}}{||\vec{a}||^2}$ é uma solução particular da equação dada.

c) Mostre que a *solução geral* da equação $\vec{a}\cdot\vec{x}=b$ é dada por

$$\vec{x}=\frac{b\vec{a}}{||\vec{a}||^2}+\vec{a}\times\vec{v}$$

onde $\vec{v}$ é um vetor arbitrário.

C 16 Considere a equação $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$, onde $\vec{a}$ é um vetor não nulo e $\vec{b}$ é um vetor ortogonal a $\vec{a}$ são dados e $\vec{x}$ é um vetor a ser determinado.

a) Mostre que se $\vec{x}_1$ e $\vec{x}_2$ são duas soluções dessa equação, então $\vec{x}_1=\vec{x}_2+\vec{c}$ onde $\vec{c}$ é um vetor paralelo a $\vec{a}$. Conclua a partir daí que $\vec{x}_1=\vec{x}_2+k\vec{a}$ onde k é um escalar.

b) Mostre que $\vec{x}=\frac{\vec{b}\times\vec{a}}{||\vec{a}||^2}$ é uma solução particular da equação dada.
(Sugestão: use **R 14**.)

c) Mostre que a *solução geral* da equação $\vec{a}\times\vec{x}=\vec{b}$ é dada por

$$\vec{x}=\frac{\vec{b}\times\vec{a}}{||\vec{a}||^2}+k\vec{a}$$

onde k é um escalar.

d) Determine todas as soluções de $(3\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k})\times x=\vec{i}-2\vec{j}-\vec{k}$.

C 17 Mostre que a solução $\vec{x}$ do sistema

$$\begin{cases}\vec{a}\times\vec{x} &= \vec{b}\\ \vec{c}\cdot\vec{x} &= m\end{cases}$$

com $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, $\vec{a}\cdot\vec{c}\neq 0$ e $m\in\mathbb{R}$ é dada por

$$\vec{x}=\frac{\vec{b}\times\vec{a}}{||\vec{a}||^2}+\left(\frac{m||\vec{a}||^2+[\vec{a},\vec{b},\vec{c}]}{(\vec{a}\cdot\vec{c})||\vec{a}||^2}\right)\vec{a}.$$

Sugestão: Use a primeira equação e o exercício **C 11** para obter $\vec{x}$ em função de $\vec{a}$, $\vec{b}$ e $k\in\mathbb{R}$. Depois, substitua na segunda equação para calcular o valor de k.

Referências Bibliográficas

[1] Apostol, T. M. (1975) *Cálculo*, vol. 1, Editora Reverté Ltda.

[2] Boulos, P., Camargo, I. (1987) *Geometria Analítica – um tratamento vetorial*, McGraw-Hill.

[3] Chianca, J. C. (1981) *Cálculo Vetorial e Geometria Analítica*, notas de aula.

[4] Efimov, N. (1972), Elementos de Geometria Analítica, Editora Mir.

[5] Feitosa, M. O., Cálculo Vetorial e Geometria Analítica – Exercícios Propostos e Resolvidos, 4ª edição, Editora Atlas, 1983

[6] Kletenik, D. (1969), Problems in Analytic Geometry, Mir Publishers.

[7] Kreyzig, E. (1981), Matemática Superior, vol. 2, 2a. edição, Livros Técnicos e Científicos Editora S. A.

[8] Lima, E. L. (1993) *Coordenadas no Espaço*, SBM.

[9] Santos, R. J (1998), *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, UFMG, disponível na Internet em http://www.mat.ufmg.br

[10] Spiegel, M. S. (1959) *Análise Vetorial*, Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill.

[11] Swokowski, E. W. (1991) Cálculo com Geometria Analítica, vol. 2, Makron Books.