A forma canônica de Jordan*

Lenimar Nunes de Andrade
UFPB - CCEN - Departamento de Matemática
58059-900 – João Pessoa, PB
e-mail: lenimar@mat.ufpb.br

22 de março de 1999

Resumo

Neste trabalho apresentamos algumas receitas e exemplos da forma canônica de Jordan de uma matriz quadrada. São mostradas algumas aplicações a sistemas de equações diferenciais lineares e ao cálculo de funções de matrizes. As demonstrações dos teoremas, exemplos detalhados e exercícios serão adicionados futuramente.

Sumário

1 Receita para encontrar a forma canônica de Jordan

1.1 Calculamos a forma fatorada do polinômio característico de M:

$$p(x) = (x - x_n)^{r_n}(x - x_{n-1})^{r_{n-1}} \cdots (x - x_1)^{r_1}$$

Os x_i são os autovalores distintos de M e os r_i são suas respectivas multiplicidades.

*Disponível em ftp://mat.ufpb.br/pub/docs/cursos/jordan.zip

1.2 Calculamos o polinômio mínimo de M:

$$q(x) = (x - x_n)^{s_n}(x - x_{n-1})^{s_{n-1}} \cdots (x - x_1)^{s_1}$$

Para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ devemos ter $1 \leq s_i \leq r_i$.

1.3 Para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ e para cada $k_i = 1, \cdots, s$ calculamos a nulidade da matriz $(M - x_i I)^k$. Denotemos cada uma dessas nulidades por $m_{i,k}$. A nulidade de uma matriz é a quantidade total de linhas nulas que aparecem após o escalonamento da matriz.

1.4 Denotando por $n(J_{i,k})$ a quantidade de blocos de Jordan de ordem k associados ao autovalor x_i, isto é, a quantidade de blocos da forma

$$\begin{bmatrix} x_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_i \end{bmatrix}_{k \times k}$$

temos que

$$n(J_{i,s_i}) = m_{i,s_i} - m_{i,s_i - 1}$$

e que

$$n(J_{i,k}) = 2m_{i,k} - m_{i,k+1} - m_{i,k-1}, \forall k \in \{1, \cdots, s_i - 1\}.$$

Além disso, $m_{i,0} = 0$, $\forall i$.

1.5 A forma de Jordan de M é a matriz diagonal de blocos formada por $n(J_{i,k})$ blocos de Jordan de ordem k associados ao autovalor x_i, $\forall i \in \{1, \cdots n\}$ e $\forall k \in \{1, \cdots s_i\}$.

2 Receita para encontrar a base associada à forma de Jordan

2.1 Uma vez calculado o polinômio mínimo de M

$$q(x) = (x - x_n)^{s_n}(x - x_{n-1})^{s_{n-1}} \cdots (x - x_1)^{s_1},$$

para cada $i = 1, \cdots, n$ e cada $k = 1, \cdots, s_i$, se $n(J_{i,k}) > 0$ calculamos os vetores v que são soluções do sistema linear $(M - x_i I)^k v = 0$ e que satisfaçam à condição $(M - x_i I)^{k-1} v \neq 0$, onde I é a matriz identidade de mesma ordem que M.

2.2 Para cada v obtido no item [2.1], os k vetores

$$(M - x_iI)^{k-1}v,\ (M - x_iI)^{k-2}v,\ \cdots,\ (M - x_iI)v,\ v$$

são parte da base procurada, desde que eles juntamente com outros vetores já encontrados formem um conjunto de vetores L.I.

2.3 Para cada k e cada i com $n(J_{i,k}) > 0$, procuram-se k vetores como no item [2.2] anterior. Os conjuntos L.I. assim encontrados são bases associadas à forma de Jordan de M.

Sendo P a matriz cujas linhas são os vetores formados pela base encontrada no item [2.3], temos que

$$J = (P^t)^{-1}MP^t$$

onde P^t representa a matriz transposta de P e J é a forma de Jordan de M.

Exemplo 2.1 *Seja M a matriz*

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -3 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

cujos polinômios característico e mínimo são $p(x) = (x-2)^5$ e $q(x) = (x-2)^3$, respectivamente. De acordo com a notação do item [2.1] temos que $x_1 = 2$ e $s_1 = 3$.

Para cada $k = 1, \cdots, s_1$ calculamos as nulidades de $(M - x_1I)^k$ descritas a seguir:

$m_{1,0} = 0$
$m_{1,1} =$ *Nulidade de* $(M-2I) = 2$
$m_{1,2} =$ *Nulidade de* $(M-2I)^2 = 4$
$m_{1,3} =$ *Nulidade de* $(M-2I)^3 = 5$

e daí, podemos calcular facilmente os $n(J_{i,k})$:

$n(J_{1,3}) = m_{1,3} - m_{1,2} = 5 - 4 = 1 \rightarrow$ *1 bloco de ordem 3*
$n(J_{1,1}) = 2m_{1,1} - m_{1,2} - m_{1,0} = 4 - 4 - 0 = 0 \rightarrow$ *0 bloco de ordem 1*
$n(J_{1,2}) = 2m_{1,2} - m_{1,3} - m_{1,1} = 8 - 5 - 2 = 1 \rightarrow$ *1 bloco de ordem 2*

o que significa que a forma de Jordan de M é formada por 1 bloco de ordem 3 e 1 bloco de ordem 2 associados ao autovalor $x_1 = 2$, ou seja, que a forma de Jordan de M é:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos agora determinar os vetores $v = (x, y, z, u, v)$ que satisfaçam à equação $(M - 2I)^3(v) = 0$, mas que não satisfaçam $(M - 2I)^2(v) = 0$. Resolvendo o sistema linear assim obtido obtemos que $v = (0, 0, 0, 1, 0)$ ou $v = (0, 0, 0, 0, 1)$ (combinações lineares desses vetores também são soluções).

Procurando agora os vetores w que satisfaçam à equação $(M - 2I)^2(w) = 0$, mas que $(M - 2I)(w) \neq 0$ obtemos $w = (1, 0, 0, 0, 0)$ ou $w = (0, 1, 0, 0, 0)$ ou $w = (0, 0, 1, 0, 0)$ ou $w = (0, 0, 0, 1, 1)$

Daí, a base associada à forma de Jordan é

$$B = \{(M - 2I)^2(v),\, (M - 2I)(v),\, v,\, (M - 2I)(w),\, w\}$$

onde v e w sao escolhidos entre os vetores encontrados anteriormente restritos à condição de que o conjunto B seja L. I.

Portanto a base procurada, entre outras possibilidades, é:

$$\begin{array}{l}
(\,-1,\ -2,\ -3,\ -3,\ -3\,) = (M - 2I)^2(v) \\
(\,1,\ \ 2,\ \ 3,\ \ 2,\ \ 2\,) = (M - 2I)(v) \\
(\,0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 0\,) = v \\
(\,-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ -1\,) = (M - 2I)(w) \\
(\,1,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0\,) = w
\end{array}$$

Seja P a matriz cujas colunas são os vetores da base assim encontrada:

$$P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos assim que $J = P^{-1}MP$, ou equivalentemente, $M = PJP^{-1}$.

3 A forma de Jordan real

Se M for uma matriz formada por elementos reais e se $a+bi$ for um autovalor de M, então $a - bi$ também será um autovalor. Uma consequência disto é que poderemos associar aos blocos de Jordan

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_2 \end{bmatrix}$$

a matriz de blocos reais

$$R = \begin{bmatrix} J & I & O & \cdots & O \\ O & J & I & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & O & \cdots & I \\ O & O & O & \cdots & J \end{bmatrix}_{k \times k}$$

onde

$$J_1 = \begin{bmatrix} a+bi & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a+bi & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+bi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a+bi \end{bmatrix}_{k\times k},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} a-bi & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-bi & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-bi & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a-bi \end{bmatrix}_{k\times k},$$

$$J = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como cada bloco que forma a matriz R é de ordem 2×2, temos que R é uma matriz de elementos reais de ordem $2k \times 2k$.

A base associada à forma de Jordan real da matriz M pode ser construída a partir da base da forma de Jordan complexa. Para isso, basta escolher convenientemente vetores v associado a $a + bi$ e w associado a $a - bi$ e substituí-los por $(v + w)/2$ e $(v - w)/(2i)$.

Exemplo 3.1 *Uma matriz real M cujo polinômio característico é*

$$p(x) = (x^2 - 4x + 53)^4 = (x - (2 + 7i))^4 (x - (2 - 7i))^4$$

e cujo polinômio mínimo é

$$q(x) = (x^2 - 4x + 53)^3 = (x - (2 + 7i))^3 (x - (2 - 7i))^3$$

tem forma de Jordan complexa a matriz

$$C = \begin{bmatrix} 2+7i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2+7i & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2+7i & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2+7i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2-7i & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-7i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-7i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2-7i \end{bmatrix}_{8\times 8}$$

e por forma de Jordan real a matriz

$$R = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 7 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -7 & 2 \end{bmatrix}_{8\times 8}$$

Além disso, se $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$ *for a base associada a* C, *então a base associada a* R *será* $\{(v_1+v_5)/2,\ (v_1-v_5)/(2i),\ (v_2+v_6)/2,\ (v_2-v_6)/(2i),\ (v_3+v_7)/2,\ (v_3-v_7)/(2i),\ (v_4+v_8)/2,\ (v_4-v_8)/(2i)\}$

4 Uma aplicação da forma de Jordan

Sejam A uma matriz $n \times n$ constante e B um vetor de dimensão n dado. O sistema de equações diferenciais a coeficientes constantes

$$X'(t) = AX(t),\ X(0) = B$$

possui solução única dada por

$$X(t) = e^{tA}B.$$

Na equação acima, $X(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))^t$ e $X'(t) = (x'_1(t), \cdots, x'_n(t))^t$. A exponencial de tA, denotada por e^{tA}, pode ser definida como sendo

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2A^2}{2!} + \frac{t^3A^3}{3!} + \cdots + \frac{t^nA^n}{n!} + \cdots$$

Se J for a matriz diagonal de blocos

$$\begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{r_i} \end{bmatrix}$$

então

$$e^J = \begin{bmatrix} e^{J_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{J_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{J_{r_i}} \end{bmatrix}.$$

Se

$$J_i = \begin{bmatrix} x_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_i \end{bmatrix}_{k\times k},$$

então

$$e^{tJ_i} = e^{x_i t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \\ 0 & 1 & t & \cdots & \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & t \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{k\times k}$$

Sendo J a forma de Jordan de A e P uma matriz tal que $A = PJP^{-1}$ temos que $e^{tA} = Pe^{tJ}P^{-1}$.

Exemplo 4.1 *Consideremos o sistema*

$$\begin{cases} x' &= 3x - y + z \\ y' &= 2x + z \\ z' &= x - y + 2z \end{cases}$$

com as condições de valores iniciais $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $z(0) = 2$.

Este sistema pode ser escrito na forma $X' = AX$, $X(0) = B$, *onde* $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$. *Logo, sua solução é* $X = e^{tA}B$.

A forma de Jordan de A *é* $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *que está associada à base* $\{(0,1,1),(1,1,0),(0,0,1)\}$. *Logo, sendo* $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *temos que* $A = PJP^{-1}$.

Portanto, $e^{tA} = Pe^{Jt}P^{-1}$. *Como* $e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ *e* $P^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ *temos* $e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} + te^{2t} & -te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} + te^{2t} & e^t - te^{2t} & te^{2t} \\ -e^t + e^{2t} & e^t - e^{2t} & e^{2t} \end{bmatrix}$. *Multiplicando esta matriz por* B, *obtemos a solução do sistema dado:*

$$\begin{cases} x &= e^{2t} + 4te^{2t} \\ y &= -2e^t + e^{2t} + 4te^{2t} \\ z &= -2e^t + 4e^{2t} \end{cases}$$

5 Funções de matrizes

Sejam A uma matriz $n \times n$ e f uma função de uma variável tal que f, f', f'', $\cdots$, $f^{(n-1)}$ estão definidas nas vizinhanças dos autovalores x_i de A. Se

$$J_i = \begin{bmatrix} x_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_i \end{bmatrix}_{k \times k}$$

então, por definição,

$$f(J_i) = \begin{bmatrix} f(x_i) & f'(x_i) & f''(x_i)/2! & \cdots & \frac{f^{(k-1)}(x_i)}{(k-1)!} \\ 0 & f(x_i) & f'(x_i) & \cdots & \frac{f^{(k-2)}(x_i)}{(k-2)!} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f'(x_i) \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(x_i) \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Se a forma de Jordan de A for

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & J_{r_i} \end{bmatrix}$$

e P for uma matriz tal que $A = PJP^{-1}$, então, por definição,

$$f(A) = P \begin{bmatrix} f(J_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & f(J_2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(J_{r_i}) \end{bmatrix} P^{-1}.$$

Apesar das funções de matrizes possuirem varias propriedades "esperadas" como $\operatorname{sen}(2A) = 2\operatorname{sen}A\cos A$, por exemplo, temos algumas surpresas como o fato de e^{A+B} ser diferente de $e^A e^B$ em geral.

Se v for um autovetor de M associado ao autovalor a, então v é um autovetor de $f(M)$ associado ao autovalor $f(a)$.

Um outro método para o cálculo de funções de matrizes é apresentado em [2].

Exemplo 5.1 *Seja* $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. *A forma de Jordan de* M *é* $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$. *Uma base associada à forma de Jordan é*

$\{(-1,-1,-1),\ (1,0,0),\ (0,1,0)\}$. *Portanto* $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *é tal que* $M = PJP^{-1}$.

Seja f *a função raiz quadrada* $f(x) = \sqrt{x}$. *Então,* $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ *e* $f''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x^3}}$. *Logo,* $f(J) = \begin{bmatrix} f(4) & f'(4) & f''(4)/2 \\ 0 & f(4) & f'(4) \\ 0 & 0 & f(4) \end{bmatrix}$, *ou seja,* $f(J) = \begin{bmatrix} 2 & 1/4 & -1/64 \\ 0 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Finalmente obtemos

$$f(M) = P \begin{bmatrix} 2 & 1/4 & -1/64 \\ 0 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} 7/4 & 17/64 & -1/64 \\ -1/4 & 129/64 & 15/64 \\ -1/4 & 1/64 & 143/64 \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar diretamente que $f(M)^2 = M$.

Exemplo 5.2 *Seja* $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 6 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$. *A forma de Jordan de* M *é* $J = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ *e uma base associada é* $\{(-1,2,-1),\ (1,0,0),\ (-1,1,0)\}$.

O logaritmo de M *é dado por* $\ln(M) = P \begin{bmatrix} \ln 4 & 1/4 & 0 \\ 0 & \ln 4 & 0 \\ 0 & 0 & \ln 4 \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \ln 4 - 1/4 & -1/4 & -1/4 \\ 1/2 & \ln 4 + 1/2 & 1/2 \\ -1/4 & -1/4 & \ln 4 - 1/4 \end{bmatrix}$, *onde* $P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Pode-se verificar também que $e^{\ln(M)} = M$.

Referências Bibliográficas

[1] Apostol, T. M. - *Cálculo*, vol. 2, Editora Reverté Ltda., 1981

[2] Bronson, R. - *Theory and problems of matrix operations*, (Schaum's Outline Series), McGraw-Hill, 1989

[3] Ikramov, H. D. - *Linear Algebra Problems Book*, Editora Mir, 1983

[4] Lipschutz, S. - *Álgebra Linear* - Coleção Schaum, Editora McGraw-Hill do Brasil Ltda., 1968

[5] Proskuriakov, I. - *Problemas de Algebra Lineal*, Editora Mir, 1986

[6] Shilov, G. E. - *Linear Algebra*, Prentice-Hall, Inc. - 1971