FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA
resumos e exercícios
junho-setembro/2019

Lenimar N. Andrade
UFPB – João Pessoa

30 de setembro de 2019

Resumo

Apresentamos aqui alguns textos resumidos, exercícios resolvidos e provas da disciplina *"Funções de Uma Variável Complexa"*, ministrada na UFPB em 2019.1, um dos meus últimos semestres de trabalho. Preocupei-me apenas em elaborar um texto acessível e sem complicações.

A principal parte é a dos exercícios resolvidos, alguns não são tão comuns. A minha eterna fonte de inspiração é constituída pelos antigos livros russos da Editora Mir: *Recueil de problèmes sur la théorie des fonctions analytiques,* de M. Evgrafov, K. Béjanov, Y. Sidorov, M. Fédoruk, M. Chabounine (1974), e *Problemas sobre la teoria de funciones de variable compleja,* de L. I. Volkovyski, G. L. Lunts, I. G. Aramanovich (1972).

Ao final do semestre, esses textos certamente iriam ficar perdidos e cairiam no esquecimento. Ao colocá-los à disposição fica a esperança de que eles ainda possam ser de alguma utilidade para algumas pessoas por mais algum tempo.

Sumário

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA
resumos e exercícios resolvidos – parte 1 de 3

1 Definições, propriedades e exemplos básicos

1.1 Definições e propriedades

Um número complexo é um número da forma $a + bi$ onde a e b são reais e $i = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária cuja propriedade básica é $i^2 = -1$. O conjunto de todos os números complexos é denotado por $\mathbb{C}$. Se $b = 0$ então z é um número real e se a=0, z é dito imaginário puro.

Um número complexo $a + bi$ pode ser representado como o ponto (a, b) no plano cartesiano e o conjunto $\mathbb{C}$ pode ser pensado como se fosse o plano $\mathbb{R}^2$.

Se $z = a + bi \in \mathbb{C}$, então a é denominado parte real de z e b é a parte imaginária. Em símbolos: $a = \text{Re}(z)$ e $b = \text{Im}(z)$.

Se $z = a + bi$, o conjugado de z é o número $\overline{z} = a - bi$, o módulo de z é a distância do ponto (a, b) à origem $(0, 0)$, ou seja $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. O argumento de $z \neq 0$, denotado por $\arg(z)$, é o ângulo formado pelo eixo dos x e o segmento Oz. Se $0 \leq \arg(z) < 2\pi$, então $\arg(z)$ é denominado argumento principal.

Dados dois números complexos $z = a + bi$ e $w = c + di$, a adição e a multiplicação de z e w são definidas por: $z + w = (a + c) + (b + d)i$ e $zw = z \cdot w = (ac - bd) + i(ad + bc)$. O inverso aditivo e multiplicativo de $z \neq 0$ são calculados por $-z = -a - bi$ e $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{bi}{a^2 + b^2}$. A partir daí, definimos subtração e divisão de z por w: $z - w = z + (-w)$ e $\frac{z}{w} = z \cdot \frac{1}{w}$, se $w \neq 0$.

Exemplo: Escrever na forma $a + bi$ o número $z = \frac{3+2i}{1+7i}$. Para isso, basta multiplicar numerador e denominador da fração pelo conjugado do denominador:

$$z = \frac{3 + 2i}{1 + 7i} = \frac{(3 + 2i)(1 - 7i)}{(1 + 7i)(1 - 7i)} = \frac{3 - 21i + 2i - 14i^2}{1^2 - (7i)^2} = \frac{3 - 19i + 14}{1 + 49} = \frac{17}{50} - \frac{19}{50}i$$

1.2 Potências da unidade imaginária

As potências de i são $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = i \cdot i = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$. A partir daí, as potências com expoente inteiro se repetem de 4 em 4: $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$ etc. Em geral, se n for inteiro positivo, para calcular uma potência i^n, basta dividir n por 4, ou seja escrever $n = 4q + r$ com $0 \leq r < 4$ e considerar o resto da divisão como expoente: $i^n = i^{4q+r} = (i^4)^q \cdot i^r = 1^q \cdot i^r = i^r$. Por exemplo, para calcular i^{2019}, dividimos 2019 por 4 e obtemos um resto igual a 3 e daí $i^{2019} = i^3 = -i$.

1.3 Forma polar e fórmula de De Moivre

Se $z \neq 0$, $r = |z|$ e $\theta = \arg(z)$, então a forma polar de z é definida como sendo $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$.

Se $z = a + bi$, então $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\theta = \frac{a}{r}$, $\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{r}$ e daí $\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{a}$. Logo, $\theta = \arg(z) = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$. Por exemplo, se $z = 2 + 5i$, então $|z| = \sqrt{2^2 + 5^2} = \sqrt{29}$, $\theta = \operatorname{arctg}\frac{5}{2}$. Logo, a forma polar de z é $z = \sqrt{29}(\cos(\operatorname{arctg}\frac{5}{2}) + i(\operatorname{sen}(\operatorname{arctg}\frac{5}{2}))$.

Se $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \operatorname{sen}\theta_1)$ e $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \operatorname{sen}\theta_2)$, então

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)).$$

Se $z_1 = z_2 = z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, obtemos $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$ e, de modo geral,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta),$$

para todo inteiro n. Essa é a conhecida fórmula de De Moivre [1] para o cálculo de potências de números complexos.

A partir daí, obtemos a fórmula para o cálculo de raízes:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right],$$

com $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Se for feito um gráfico com todas as raízes enésimas de um número complexo z, obtemos sempre os vértices de um polígono regular com n lados e de raio igual a $\sqrt[n]{|z|}$.

Exemplo: Calcular todas as raízes cúbicas de $z = 27 - 27i$. Inicialmente, escrevemos z na forma polar. Para isso, determinamos seus módulo e argumento.

- $|z| = \sqrt{27^2 + (-27)^2} = \sqrt{2 \cdot 27^2} = 27\sqrt{2}$
- $z = |z| \cdot (\frac{z}{|z|}) = 27\sqrt{2}(\frac{27}{27\sqrt{2}} - \frac{27}{27\sqrt{2}}i) = 27\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i) = 27\sqrt{2}(\overbrace{\sqrt{2}/2}^{\cos\theta} \ \overbrace{-\sqrt{2}/2}^{\operatorname{sen}\theta}\, i)$
- Se $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $\operatorname{sen}\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, então $\theta = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$
- Logo, $\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{|z|}(\cos\frac{\theta+2k\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{3})$, com $k = 0, 1, 2$.
- $k = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{7\pi}{4}}{3}) = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12})$
- $k = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{3}) = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{15\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{15\pi}{12})$
- $k = 2 \Rightarrow \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{27\sqrt{2}}(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{7\pi}{4}+4\pi}{3}) = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{23\pi}{12})$

Portanto, as três raízes cúbicas encontradas são:
$z_1 = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{7\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{12})$, $z_2 = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{5\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{5\pi}{4})$ e $z_3 = 3\sqrt[6]{2}(\cos\frac{23\pi}{12} + i \operatorname{sen}\frac{23\pi}{12})$.

1.4 Funções de uma variável complexa

Uma função de uma variável complexa é uma função $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ na qual cada valor $z \in \mathbb{C}$ é associado a um valor $f(z) \in \mathbb{C}$.

Se $z = x + iy$, então $f(z)$ possui uma parte real e uma parte imaginária que dependem de x e y. É usual denotar $\mathrm{Re}(f(z))$ por $u(x, y)$ e $\mathrm{Im}(f(z))$ por $v(x, y)$. Com essa notação, temos $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, ou simplesmente, $f = u + iv$. Por exemplo, se $f(z) = z^2 + 5z + 6$ e $z = x + iy$, então $f(x + iy) = (x + iy)^2 + 5(x + iy) + 6 = x^2 + 2xyi + i^2y^2 + 5x + 5yi + 6$, de onde obtemos $f(x + iy) = (x^2 - y^2 + 6) + i(2xy + 5y)$ o que implica em $\mathrm{Re}(f(z)) = u(x, y) = x^2 - y^2 + 6$ e $\mathrm{Im}(f(z)) = v(x, y) = 2xy + 5y$.

[1] Abraham de Moivre, 1667–1754, matemático francês

1.5 Limites e funções contínuas

As definições de limite e função contínua complexas são idênticas ao caso real:

- Dizemos que $\lim_{z \to z_0} f(z) = L$ quando para cada $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - L| < \varepsilon.$$

- Uma função $f(z)$ é contínua em um ponto z_0 quando $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$.

- $f = u + iv$ é contínua em $z_0 = x_0 + iy_0$ se, e somente se, u e v são contínuas em (x_0, y_0).

As propriedades das funções contínuas complexas são idênticas às funções reais. Por exemplo, a soma e produto de funções contínuas resultam em funções contínuas. Um exemplo de função contínua é qualquer função polinomial, por exemplo, $f(z) = z^3 + iz - 1$ e, como consequência, temos o seguinte exemplo de cálculo de limite: $\lim_{z \to i}(z^3 + iz - 1) = i^3 + i^2 - 1 = -i - 1 - 1 = -i - 2$.

1.6 Derivada de uma função complexa

Seja f definida em uma vizinhança de um ponto z_0. Se z pertence a tal vizinhança, denotemos $z - z_0$ por Δz ou por h. Dizemos que f é derivável no ponto z_0 se existir o limite $\lim_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$; quando esse limite existe, ele é denominado derivada de $f(z)$ no ponto $z = z_0$ e é denotado por $f'(z_0)$:

$$f'(z_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}.$$

As principais regras de derivação ficam mantidas para o caso de funções complexas tais como derivada da soma $(f + g)' = f' + g'$, derivada do produto $(fg)' = f'g + fg'$, derivada do quociente $(f/g)' = (f'g - fg')/g^2$ e regra da cadeia $[f(g(z)]' = f'(g(z))g'(z)$.

Se $f = u + iv$ for derivável, podemos calcular $f'(z)$ através da fórmula $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$ e também através de $f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}$. Como o resultado $f'(z)$ é único, devemos ter

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Essas equações são muito importante na teoria das funções complexas e são denomindas *Equações de Cauchy-Riemann* [2] e elas são válidas no caso da função ser derivável. Ou seja, um pré-requisito (condição necessária) para que uma função complexa seja derivável é que as equações de Cauchy-Riemann sejam verdadeiras para essa função.

Exemplo: Verificar se a função $f(z) = \overline{z} + z^2$ é derivável em algum ponto. Se $z = x + iy$, então $\overline{z} = x - iy$ e $f(z) = x - yi + (x + iy)^2 = x - yi + x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 - y^2 + x + i(2xy - y)$. Então $\mathrm{Re}(f(z)) = u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ e $\mathrm{Im}(f(z)) = v(x, y) = 2xy - y$ e daí obtemos $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -2y$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 1$. Neste caso, a equação $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ é equivalente a $2x + 1 = 2x - 1$ que é o mesmo que $1 = -1$, uma contradição. Logo, uma das equações de Cauchy-Riemann não pode ser satisfeita o que implica no fato de que a função dada não é derivável (em nenhum ponto).

[2] Augustin Louis Cauchy, 1789–1857, foi um matemático francês e Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826–1866, foi um matemático alemão

1.7 Equações de Cauchy-Riemann em coordenadas polares

Em coordenadas polares (r, θ) temos que $x = r\cos\theta$ e $y = r \operatorname{sen}\theta$. A partir daí, calculando-se diversas derivadas como $\frac{\partial r}{\partial x}$, $\frac{\partial \theta}{\partial x}$, $\frac{\partial r}{\partial y}$, ..., e usando a regra da cadeia calculamos derivadas como $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$. Finalmente, substituindo-se as derivadas obtidads nas equações de Cauchy-Rieman em coordenadas cartesianas (x, y), obtemos essas equações em coordenadas polares:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{e} \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

1.8 Funções analíticas

Uma função complexa é dita analítica em uma região aberta e conexa do plano complexo se ela for derivável em cada ponto dessa região. Uma função é analítica em um ponto z_0 se for analítica em toda vizinhança desse ponto.

Exemplo: A função $f(z) = |z|^2$ não é analítica em nenhum ponto, apesar de ser derivável somente na origem ($f'(0) = 0$). Para ser analítica na origem, a função precisaria ter derivada em toda vizinhança da origem.

Teorema: Sejam $u(x, y)$ e $v(x, y)$ funções reais tais que as derivadas parciais $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$ e $\frac{\partial v}{\partial y}$ existem uma região aberta e conexa do plano, são contínuas e satisfazem as condições de Cauchy-Riemann na região. Então $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ é analítica na região considerada.

Exemplo: Vamos mostrar que a função $f(z) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$ é analítica em todo o plano complexo. Sejam $u = x^3 - 3xy^2$ e $v = 3x^2y - y^3$. Então temos as seguintes derivadas: $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$, $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy$ e $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$. Como todas essas derivadas são funções contínuas e $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$ e $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y} = 6xy$, temos que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas e, consequentemente, a função dada é analítica em todos os pontos de seu domínio.

1.9 Funções harmônicas

Uma função real $f(x, y)$ que possui derivadas parciais até 2^a ordem contínuas e satisfaz a equação de Laplace $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ é dita função harmônica. A parte real $u(x, y)$ e a parte imaginária $v(x, y)$ de uma função analítica $f = u + iv$ são ambas harmônicas e, neste caso, são chamadas conjugadas e, se for dada uma delas, podemos determinar a outra a menos de uma constante.

1.10 Algumas funções elementares

1.11 A função exponencial

Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, define-se a exponencial de z como sendo

$$\exp(z) = e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y).$$

Para quaisquer $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, são válidas as seguintes propriedades:

- $\frac{d}{dz}(e^z) = e^z$
- $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$ e $\frac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$
- $e^z \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, a função exponencial não possui raiz.
- $e^{z+2\pi i} = e^z$ para todo $z \in \mathbb{C}$, ou seja, a exponencial é periódica de período $2\pi i$

1.12 Funções trigonométricas e hiperbólicas

Para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$, define-se o cosseno, seno, cosseno hiperbólico e seno hiperbólico, respectivamente, através das seguintes igualdades:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$
$$\cosh z = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}, \qquad \operatorname{senh} z = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}.$$

Para quaisquer $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $x, y \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:

- $\frac{d}{dz}(\cos z) = -\operatorname{sen} z$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{sen} z) = \cos z$, $\frac{d}{dz}(\cosh z) = \operatorname{senh} z$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{senh} z) = \cosh z$
- $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ e $\cosh^2 z - \operatorname{senh}^2 z = 1$
- $\cos(-z) = \cos z$, $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$, $\cosh(-z) = \cosh z$, $\operatorname{senh}(-z) = -\operatorname{senh} z$
- $\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 + \operatorname{sen} z_2 \cos z_1$ e $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2$
- $\operatorname{senh}(z_1+z_2) = \operatorname{senh} z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_2 \cosh z_1$ e $\cosh(z_1+z_2) = \cosh z_1 \cosh z_2 + \operatorname{senh} z_1 \operatorname{senh} z_2$
- $\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{senh} x$ e $\cos(ix) = \cosh x$. Como $\operatorname{senh} x$ e $\cosh x$ são ilimitadas, isso mostra que as funções complexas $\operatorname{sen} z$ e $\cos z$ são ilimitadas.
- $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+iy) = \underbrace{\operatorname{sen} x \cosh y}_{u(x,y)} + i \underbrace{\cos x \operatorname{senh} y}_{v(x,y)}$ e $\cos z = \cos(x+iy) = \underbrace{\cos x \cosh y}_{u(x,y)} \underbrace{- \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}_{v(x,y)} i$

Outras funções como $\operatorname{tg} z$, $\sec z$, $\operatorname{tgh} z$ etc. são definidas de modo semelhante ao caso real: $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$, $\sec z = \frac{1}{\cos z}$, $\operatorname{tgh} z = \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}$ etc. Permanecem válidas muitas propriedades tais como: $\operatorname{tg}^2 + 1 = \sec^2 z$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{tg} z) = \sec^2 z$, $\frac{d}{dz}(\sec z) = \sec z \cdot \operatorname{tg} z$ etc.

1.13 Funções logaritmo, potencial e trigonométricas inversas

Se a forma polar de um número complexo $z \neq 0$ é $z = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$, então o logaritmo natural de z, denotado por $\ln z$ ou $\log z$ é definido por $\ln z = \ln r + i\theta$. Como o argumento de z, θ, não é determinado de forma única, temos em geral $\ln z = \ln r + i(\theta + 2k\pi)$, para algum $k \in \mathbb{Z}$. Nesse caso dizemos que o logaritmo é uma função multivalente e cada valor de k é um ramo do logaritmo. O ramo que corresponde a $0 \leq \arg z < 2\pi$ é o ramo principal.

Algumas propriedades da função logaritmo são

- $\frac{d}{dz}(\ln z) = \frac{1}{z}$
- $\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2$, $\ln(z_1/z_2) = \ln z_1 - \ln z_2$, se $z_1 \neq 0$ e $z_2 \neq 0$
- $e^{\ln z} = z$, $\ln e^z = z$, $\ln z^n = n \ln z$
- $\ln z = \ln(x + iy) = \underbrace{\ln\sqrt{x^2 + y^2}}_{u(x,y)} + i \underbrace{(\operatorname{arctg}(y/x) + 2k\pi)}_{v(x,y)}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Exemplo: A forma polar de $2-2i$ é $2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{7\pi}{4}) = 2\sqrt{2}e^{\frac{7\pi i}{4}}$. Como consequência disso, temos que o valor principal de $\ln(2-2i)$ é igual a $\ln(2\sqrt{2}) + \frac{7\pi i}{4}$. Os outros valores de $\ln(2-2i)$ são $\ln(2\sqrt{2}) + \frac{7\pi i}{4} + 2k\pi i$, onde $k \in \mathbb{Z}$.

Exemplo: $\ln(-1) = \ln(1(\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi)) = \ln(e^{\pi i}) = \pi i$, que é o valor principal do $\ln(-1)$. Outros valores podem ser dados genericamente por $\ln(-1) = \pi i + 2k\pi i = (2k+1)\pi i$, com $k \in \mathbb{Z}$.

A potência de expoente complexo α de um número complexo não nulo z é definida por

$$z^\alpha = e^{\alpha \ln z}.$$

Como $\ln z$ é multivalente, então z^α também é, ou seja, possui uma infinidade de ramos.

A derivada de z^α com relação a z é a função $\alpha z^{\alpha-1}$, ou seja, $\frac{d}{dz}(z^\alpha) = \alpha z^{\alpha-1}$.

Exemplo: Vamos calcular o valor principal de $(-i)^i$. A forma polar da base da potência é $-i = 1(\cos\frac{3\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{2}) = 1 \cdot e^{\frac{3\pi i}{2}}$; logo, seu logaritmo natural é dado por $\ln(-i) = \ln 1 + \frac{3\pi}{2}$ e daí temos $(-i)^i = e^{i\ln(-i)} = e^{i\cdot\frac{3\pi}{2}} = e^{-\frac{3\pi}{2}}$. Note que $(-i)^i$ é real e vale aproximadamente $0,008983$.

As funções inversas das funções trigonométricas e hiperbólicas são denominadas arco-seno, arco-cosseno etc. e podem ser obtidas a partir da lei genérica para funções: $w = f^{-1}(z) \iff z = f(w)$.

- $\operatorname{arcsen} z = -i\ln(iz + \sqrt{1-z^2})$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{arcsen} z) = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
- $\arccos z = -i\ln(z + i\sqrt{1-z^2})$, $\frac{d}{dz}(\arccos z) = \frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}$
- $\operatorname{arctg} z = \frac{i}{2}\ln\frac{i+z}{i-z}$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{arctg} z) = \frac{1}{1+z^2}$
- $\operatorname{arcsenh} z = \ln(z + \sqrt{z^2+1})$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{arcsenh} z) = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$
- $\operatorname{arccosh} z = \ln(z + \sqrt{z^2-1})$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{arccosh} z) = \frac{-1}{\sqrt{1+z^2}}$
- $\operatorname{arctgh} z = \frac{1}{2}\ln\frac{1+z}{1-z}$, $\frac{d}{dz}(\operatorname{arctgh} z) = \frac{1}{1+z^2}$

Todas essas funções que dependem do logaritmo natural ou da raiz quadrada são multivalentes.

Exemplo: Vamos calcular $\cos(\pi i)$, $\operatorname{sen}(\pi i)$ e $\arccos 5$.

- $\cos(\pi i) = \dfrac{e^{i(\pi i)} + e^{-i(\pi i)}}{2} = \dfrac{e^\pi + e^{-\pi}}{2} = \cosh\pi$ que vale aproximadamente $11,592$
- $\operatorname{sen}(\pi i) = \dfrac{e^{i(\pi i)} - e^{-i(\pi i)}}{2i} = i\left(\dfrac{e^\pi - e^{-\pi}}{2}\right) = i\operatorname{senh}\pi$ que vale aproximadamente $11,549i$
- $\arccos 5 = -i\ln(5 + i\sqrt{1-5^2}) = -i\ln(5 + i(\sqrt{24}i)) = -i\ln(5 - 2\sqrt{6})$. Esse é o valor principal de $\arccos 5$; outros possíveis valores são $\arccos 5 = -i(\ln(5 \pm 2\sqrt{6}) + 2k\pi i) = 2k\pi - i\ln(5 \pm 2\sqrt{6})$, com $k \in \mathbb{Z}$.

2 Exercícios resolvidos

1) Determine todas as raízes complexas da equação $x^6 - 11x^3 + 10 = 0$.

Solução: Substituindo x^3 por y, obtemos a equação do segundo grau $y^2 - 11y + 10 = 0$ cujas raízes são $y = 1$ e $y = 10$.

Se $y = 1$, então $x^3 = 1$ o que implica $x = \sqrt[3]{1}$. Todo número real $r > 0$ tem forma polar dada por $r(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$. Logo, $1 = 1(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$, e daí $\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1}(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{3})$, com $k = 0, 1, 2$. Isso significa que as três raízes cúbicas de 1 são $z_1 = 1(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0) = 1$, $z_2 = 1(\cos\frac{2\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{2\pi}{3}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $z_3 = 1(\cos\frac{4\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{4\pi}{3}) = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Se $y = 10$, então $x^3 = 10$ o que implica $x = \sqrt[3]{10}$. Como $10 = 10(\cos 0 + i\operatorname{sen} 0)$, temos $\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{10}(\cos\frac{0+2k\pi}{3} + i\operatorname{sen}\frac{0+2k\pi}{3})$, com $k = 0, 1, 2$. Isso significa que as três raízes cúbicas de

10 são $z_4 = \sqrt[3]{10}(\cos 0 + i \operatorname{sen} 0) = \sqrt[3]{10}$, $z_5 = \sqrt[3]{10}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{2\pi}{3}) = \sqrt[3]{10}(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ e $z_6 = \sqrt[3]{10}(\cos \frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3}) = \sqrt[3]{10}(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$. Portanto, as seis raízes da equação dada são z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 e z_6 citados acima.

2) Calcule as raízes quadradas de $-15 + 8i$

Solução: O cálculo de raízes complexas normalmente é feito através da forma polar do número. No caso de $z = -15+8i$, a forma polar não é muito conveniente para realização de cálculos porque ela envolve uma função arco-tangente: $z = 17(\cos(\pi - \operatorname{arctg} \frac{8}{15}) + i \operatorname{sen}(\pi - \operatorname{arctg} \frac{8}{15}))$. Logo, é melhor tentar outro caminho.

Se $z = a + bi$ for uma raiz quadrada de $-15 + 8i$, então $z^2 = -15 + 8i$. Como $z^2 = (a + bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$ temos que a e b são as soluções do sistema de equações $\begin{cases} a^2 - b^2 = -15 \\ 2ab = 8 \end{cases}$. Isolando o valor de b na segunda equação, obtemos $b = 4/a$ e daí, substituindo na primeira equação obtemos $a^2 - (4/a)^2 = -15$, ou seja, $a^4 + 15a^2 - 16 = 0$ que é uma equação biquadrada na variável a. Fazendo $a^2 = y$, obtemos a seguinte equação do segundo grau: $y^2 + 15y - 16 = 0$ cujas raízes são $y = 1$ e $y = -16$. Substituindo $y = a^2$, obtemos as equações $a^2 = 1$ e $a^2 = -16$. Como $a \in \mathbb{R}$, temos que a única equação que tem solução real é $a^2 = 1$ o que implica $a = 1$ ou $a = -1$. Substituindo $b = 4/a$, obtemos $b = 4$ ou $b = -4$. Finalmente, substituindo a e b em z, obtemos que as raízes quadradas de $-15 + 8i$ são $1 + 4i$ e $-1 - 4i$.

3) Se n for um inteiro positivo, mostre que:

a) $\dfrac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cdots + \cos nx = \dfrac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}$.

b) $\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 3x + \cdots + \operatorname{sen} nx = \dfrac{\operatorname{sen}(\frac{n+1}{2})x \operatorname{sen} \frac{nx}{2}}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}}$.

Solução: Sejam $z = \cos x + i \operatorname{sen} x$ e $S = \frac{1}{2} + z + z^2 + z^3 + \cdots + z^n$. Temos que S também pode ser escrito na forma

$$S = \frac{1}{2} + \cos x + i \operatorname{sen} x + \cos 2x + i \operatorname{sen} 2x + \cos 3x + i \operatorname{sen} 3x + \cdots + \cos nx + i \operatorname{sen} nx$$

de onde podemos observar que $\operatorname{Re}(S)$ é o somatório do item (a) e $\operatorname{Im}(S)$ é o do item (b).

Como $S = -\frac{1}{2} + \underbrace{1 + z + z^2 + \cdots + z^n}_{n+1 \text{ termos em progressão geométrica}} = -\frac{1}{2} + \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = -\frac{1}{2} + \frac{z \cdot z^n - 1}{z-1}$, temos

$$\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{2} + \frac{(\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos nx + i \operatorname{sen} nx) - 1}{\cos x + i \operatorname{sen} x - 1} \cdot \frac{(\cos x - i \operatorname{sen} x) - 1}{(\cos x - i \operatorname{sen} x) - 1} && (1) \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{\cos nx + i \operatorname{sen} nx + 1 - \cos x + i \operatorname{sen} x - \overbrace{(\cos x + i \operatorname{sen} x)(\cos nx + i \operatorname{sen} nx)}^{z \cdot z^n = z^{n+1} = \cos(n+1)x + i \operatorname{sen}(n+1)x}}{(\cos x - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 x} && (2) \\
&= -\frac{\cancel{1}}{2} + \cancel{\frac{1 - \cos x}{2(1 - \cos x)}} + \frac{\cos nx + i \operatorname{sen} nx + i \operatorname{sen} x - \cos(n+1)x - i \operatorname{sen}(n+1)x}{2(1 - \cos x)} && (3)
\end{aligned}$$

de onde obtemos a parte real e a parte imaginária de S:

$$\operatorname{Re}(S) = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x}{2(1 - \cos x)} = \frac{2 \operatorname{sen}(\frac{2nx+x}{2}) \cancel{\operatorname{sen}(\frac{x}{2})}}{4 \operatorname{sen}^{\cancel{2}} \frac{x}{2}} = \frac{\operatorname{sen}(n + \frac{1}{2})x}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(S) &= \frac{\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\, nx - \mathrm{sen}(n+1)x}{2(1-\cos x)} = \frac{\cancel{2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}}\cos\frac{x}{2} - \cancel{2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}}\cos(\frac{2n+1}{2})x}{4\,\mathrm{sen}^{\cancel{2}}\frac{x}{2}} && (5)\\
&= \frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(\frac{2n+1}{2})x}{2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}} = \frac{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\frac{nx}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{n+1}{2})x}{\cancel{2}\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}} && (6)\\
&= \frac{\mathrm{sen}\frac{nx}{2}\,\mathrm{sen}(\frac{n+1}{2})x}{\mathrm{sen}\frac{x}{2}} && (7)
\end{aligned}$$

Observação 1: Na linha (1) foi feita uma multiplicação pelo conjugado do denominador da fração, na linha (2) foi usado que $(\cos x + i\,\mathrm{sen}\, x)(\cos x - i\,\mathrm{sen}\, x) = \cos^2 x + \mathrm{sen}^2 x = 1$, na linha (4) e na linha (6) foi usado que $\cos p - \cos q = 2\,\mathrm{sen}\frac{q+p}{2}\,\mathrm{sen}\frac{q-p}{2}$ e $1 - \cos x = 2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}$ e na linha (5) foi usado que $\mathrm{sen}\, p - \mathrm{sen}\, q = 2\,\mathrm{sen}\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$ e também que $\mathrm{sen}\, x = 2\,\mathrm{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$.

Observação 2: Se utilizarmos $n = 5$ e $x = \frac{2\pi}{11}$ no item (a), obtemos:

$$\frac{1}{2} + \cos\frac{2\pi}{11} + \cos\frac{4\pi}{11} + \cos\frac{6\pi}{11} + \cos\frac{8\pi}{11} + \cos\frac{10\pi}{11} = \frac{\mathrm{sen}(\frac{11}{2}\cdot\frac{2\pi}{11})}{2\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{11}} = 0.$$

4) Sendo $n > 1$ um número inteiro, mostre que:

a) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{6})$

b) $1 - \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \frac{1}{9}\binom{n}{4} - \frac{1}{27}\binom{n}{6} + \cdots = \frac{2^n}{3^{n/2}}\cos\frac{n\pi}{6}$

c) $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} + \cdots = \frac{2^n}{3^{(n-1)/2}}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{6}$

Solução:

a) Se $z = \sqrt{3} - i$, então o módulo de z é $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2$. A partir daí obtemos a sua forma polar: $z = |z|\cdot\frac{z}{|z|} = 2(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = 2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{6}))$. Pela fórmula de De Moivre, temos que $z^n = (\sqrt{3} - i)^n = 2^n(\cos(-\frac{n\pi}{6}) + i\,\mathrm{sen}(-\frac{n\pi}{6})) = 2^n(\cos\frac{n\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{6})$

b) O desenvolvimento pela fórmula do *binômio de Newton* de $(\sqrt{3} - i)^n$ é dado por

$$(\sqrt{3})^n + \binom{n}{1}(\sqrt{3})^{n-1}(-i)^1 + \binom{n}{2}(\sqrt{3})^{n-2}(-i)^2 + \binom{n}{3}(\sqrt{3})^{n-3}(-i)^3 + \binom{n}{4}(\sqrt{3})^{n-4}(-i)^4$$
$$+ \binom{n}{5}(\sqrt{3})^{n-5}(-i)^5 + \cdots + \binom{n}{n-1}(\sqrt{3})^1(-i)^{n-1} + (-i)^n$$

que é o mesmo que

$$3^{n/2} - \binom{n}{1}\frac{3^{n/2}}{\sqrt{3}}i - \binom{n}{2}\frac{3^{n/2}}{3} + \binom{n}{3}\frac{3^{n/2}}{3\sqrt{3}}i + \binom{n}{4}\frac{3^{n/2}}{9} - \binom{n}{5}\frac{3^{n/2}}{9\sqrt{3}}i - \binom{n}{6}\frac{3^{n/2}}{27} + \binom{n}{7}\frac{3^{n/2}}{27\sqrt{3}}i$$
$$+ \binom{n}{8}\frac{3^{n/2}}{81} + \binom{n}{9}\frac{3^{n/2}}{81\sqrt{3}}i + \ldots$$

Comparando a parte real do somatório anterior com a parte real de $2^n(\cos\frac{n\pi}{6} - i\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{6})$, obtemos:

$$3^{n/2} - \binom{n}{2}\frac{3^{n/2}}{3} + \binom{n}{4}\frac{3^{n/2}}{9} - \binom{n}{6}\frac{3^{n/2}}{27} + \binom{n}{8}\frac{3^{n/2}}{81} - \cdots = 2^n\cos\frac{n\pi}{6}.$$

Dividindo todos os termos por $3^{n/2}$, obtemos

$$1 - \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \frac{1}{9}\binom{n}{4} - \frac{1}{27}\binom{n}{6} + \frac{1}{81}\binom{n}{8} - \cdots = \frac{2^n}{3^{n/2}}\cos\frac{n\pi}{6}$$

Comparando agora a parte imaginária do somatório com a parte imaginária de $2^n(\cos\frac{n\pi}{6} - \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}i)$, obtemos:

$$-\binom{n}{1}3^{(n-1)/2} + \binom{n}{3}\frac{3^{(n-1)/2}}{3} - \binom{n}{5}\frac{3^{(n-1)/2}}{9} + \binom{n}{7}\frac{3^{(n-1)/2}}{27} - \binom{n}{9}\frac{3^{(n-1)/2}}{81} - \cdots = -2^n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}$$

que dividindo todos os termos por $-3^{(n-1)/2}$, resulta em

$$\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} + \frac{1}{81}\binom{n}{9} - \cdots = \frac{2^n}{3^{(n-1)/2}}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{6}.$$

Observação: As reticências ... utilizadas nas fórmulas não significam que o somatório tem uma infinidade de termos não nulos. Todos esses somatórios têm apenas uma quantidade finita de termos não nulos. Os números binomiais $\binom{n}{k}$ com $k > n$ podem ser definidos como sendo iguais a 0.

5) A partir do desenvolvimento de $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^5$, mostre que

$$\cos 5x = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x$$

e que

$$\frac{\operatorname{sen} 5x}{\operatorname{sen} x} = 16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1,$$

se $x \neq k\pi, \ \ k \in \mathbb{Z}$.

Solução: Usando a fórmula do *binômio de Newton*

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

temos que $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^5$ é igual a

$$\cos^5 x + 5\cos^4 x \operatorname{sen} x i + 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x i^2 + 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x i^3 + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x i^4 + \operatorname{sen}^5 x i^5$$

$$= \cos^5 x + 5i\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x - 10i\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x + i\operatorname{sen}^5 x.$$

Por outro lado, usando a fórmula de De Moivre, $(\cos x + i \operatorname{sen} x)^5 = \cos 5x + i\operatorname{sen} 5x$. Logo, comparando-se as partes reais e imaginárias dessas expressões, obtemos:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x + 5\cos x \operatorname{sen}^4 x,$$

$$\operatorname{sen} 5x = 5\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^2 x \operatorname{sen}^3 x + \operatorname{sen}^5 x.$$

Por fim, substituindo $\operatorname{sen}^2 x$ por $1 - \cos^2 x$, obtemos o resultado desejado:

$$\cos 5x = \cos^5 x - 10\cos^3 x(1 - \cos^2 x) + 5\cos x(1-\cos^2 x)^2 = 16\cos^5 x - 20\cos^3 x + 5\cos x,$$

$$\operatorname{sen} 5x = 5\cos^4 x \operatorname{sen} x - 10\cos^2 x(1-\cos^2 x)\operatorname{sen} x + (1-\cos^2 x)^2 \operatorname{sen} x = (16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)\operatorname{sen} x.$$

6) Mostre que $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} + i\dfrac{\operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$.

Solução: Se $z = x + iy$, então

$$\begin{aligned}
\operatorname{tg} z &= \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} = \frac{\operatorname{sen}(x+iy)}{\cos(x+iy)} = \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos(iy) + \cos x \operatorname{sen}(yi)}{\cos x \cos(iy) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(iy)} = \frac{\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y}{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y} \\
&= \left(\frac{\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{senh} y}{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}\right)\left(\frac{\cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}{\cos x \cosh y + i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y}\right) \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x \cos x \cosh^2 y - \operatorname{sen} x \cos x \operatorname{senh}^2 y) + i(\cos^2 x \operatorname{senh} y \cosh y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh} h \cosh y)}{\cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y} \\
&= \frac{(\operatorname{sen} x \cos x(\cosh^2 y - \operatorname{senh}^2 y) + i \operatorname{senh} y \cosh y(\cos^2 x + i \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x)(\cosh^2 y - 1)} \\
&= \frac{\operatorname{sen} x \cos x + i \operatorname{senh} y \cosh y}{\cancel{\cos^2 x \cosh^2 y} + \cosh^2 y \cancel{- \cos^2 x \cosh^2 y} + \cos^2 x - 1} = \frac{\operatorname{sen} 2x + i \operatorname{senh} 2y}{2(\cosh^2 y + \cos^2 x - 1)} \\
&= \frac{\operatorname{sen} 2x + i \operatorname{senh} 2y}{\underbrace{2\cosh^2 y - 1}_{\cosh 2y} + \underbrace{2\cos^2 x - 1}_{\cosh 2x}} = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cosh 2y + \cos 2x} + i \frac{\operatorname{senh} 2y}{\cosh 2y + \cos 2x}
\end{aligned}$$

7) a) Mostre que $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ é harmônica;
b) Determine v de tal modo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja analítica;
c) Escreva f como função de $z = x + iy$.

Solução: a) As derivadas segundas de u com relação a x e com relação a y e o seu laplaciano são iguais a:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x + 12y$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = 6x^2 - 6xy - 6y^2$
- $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x - 12y$
- $\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6x + 2y - 6x - 12y = 0$

Como todas essas derivadas são contínuas, concluímos que a função u é harmônica.

b) Usando as equações de Cauchy-Riemann, temos:

- $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -6x^2 + 6xy + 6y^2$
- Calculando a integral de $\frac{\partial v}{\partial x}$ com relação a x: $v(x,y) = \int(-6x^2 + 6xy + 6y^2)dx = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 + g(y)$. Aqui, $g(y)$ é constante com relação à variável x.
- $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 + 12xy + g'(y) = \frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy - 3y^2$ que implica $g'(y) = -3y^2$, e daí, calculando a integral com relação a y, obtemos $g(y) = -y^3 + k$, onde k é uma constante.
- Portanto, $v(x,y) = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + k$.

c) Se $z = x + iy$, então $\overline{z} = x - iy$ e $x = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $y = \frac{z-\overline{z}}{2i}$. Substituindo x e y em

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3) + i(-2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3 + k),$$

obtemos:

$$f(z) = \left[\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) - 3\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^3\right]$$
$$+ i\left[-2\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^3 + 3\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)^2\left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right) + 6\left(\frac{z+\overline{z}}{2}\right)\left(\frac{z-\overline{z}}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-\overline{z}}{2i}\right)^3\right] + K$$

Desenvolvendo essa expressão e simplificando, obtemos no final: $f(z) = (1-2i)z^3 + K$, onde K é uma constante.

8) Mostre que $f'(z)$ não existe em nenhum ponto se $f(z) = f(x+iy) = 2x + xy^2 i$.

Solução: Sejam $u = 2x$ e $v = xy^2$. As derivadas de u e v são: $u_x = 2$, $u_y = 0$, $v_x = y^2$, $v_y = 2xy$.

- Se $u_y = -v_x$, então $y^2 = 0$ que implica $y = 0$
- Se $u_x = v_y$, então $2xy = 2$ que implica $xy = 1$

Substituindo $y = 0$ em $xy = 1$, obtemos a contradição $0 = 1$. Logo, as equações de Cauchy-Riemann não podem ser simultaneamente satisfeitas em nenhum ponto e, consequentemente, $f'(z)$ não existe em nenhum ponto.

9) Seja $f = u + iv$ analítica em uma região D aberta e conexa. Mostre que se $|f| = \sqrt{u^2+v^2}$ for constante, então f também é constante.

Solução: Se $|f| = 0$, então $u^2 + v^2 = 0$, e daí, $u = v = 0$. Portanto, f é constante e igual a 0.

Se $|f|$ for uma constante não nula, então $|f|^2 = u^2 + v^2$ também é. Derivando implicitamente $u^2 + v^2 = k$ constante com relação a x e a y, obtemos $2uu_x + 2vv_x = 0$ e $2uu_y + 2vv_y = 0$. Usando as equações $u_x = v_y$ e $u_y = -v_x$, obtemos o sistema de equações

$$\begin{cases} uu_x + vv_x &= 0 \\ -uv_x + vu_x &= 0 \end{cases}$$

- Multiplicando a primeira equação desse sistema por u, a segunda por v e somando os resultados obtemos $(\underbrace{u^2+v^2}_{\neq 0})u_x = 0$ e daí $u_x = 0 = v_y$.
- Multiplicando a primeira equação do sistema por v, a segunda por $-u$ e somando os resultados obtemos $(\underbrace{u^2+v^2}_{\neq 0})v_x = 0$ e daí $v_x = 0 = u_y$.

Concluímos que todas as derivadas das funções u e v são nulas. Como o domínio D é conexo, temos que essas funções são constantes e, consequentemente, f é constante.

10) Determine a parte real u e a parte imaginária v da função $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$.

Solução:

$$f(z) = f(x+iy) = \frac{1-x-iy}{1+x+iy} = \frac{(1-x-iy)(1+x-iy)}{(1+x+iy)(1+x-iy)} = \frac{(1-iy)^2 - x^2}{(1+x)^2 - (iy)^2}$$
$$= \frac{1-2yi-y^2-x^2}{1+2x+x^2+y^2} = \underbrace{\frac{1-x^2-y^2}{1+2x+x^2+y^2}}_{u} + i\underbrace{\left(\frac{-2y}{1+2x+x^2+y^2}\right)}_{v},$$

de onde obtemos: $u(x,y) = \dfrac{1-x^2-y^2}{1+2x+x^2+y^2}$ e $v(x,y) = \dfrac{-2y}{1+2x+x^2+y^2}$.

11) Verifique que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para a função $f(z) = z^3 + iz$.

Solução:

$$\begin{aligned} f(z) = f(x+iy) &= (x+iy)^3 + i(x+iy) = x^3 + 3x^2(iy) + 3x(iy)^2 + (iy)^3 + ix - y \\ &= x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i + ix - y = \underbrace{x^3 - 3xy^2 - y}_{u} + (\underbrace{3x^2y - y^3 + x}_{v})i \end{aligned}$$

Dessa forma, a parte real de $f(z)$ é $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 - y$ e a parte imaginária é $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + x$ e suas derivadas são:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy - 1$
- $\frac{\partial v}{\partial x} = 6xy + 1$
- $\frac{\partial v}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2$

Observamos a partir daí que $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ e $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Portanto, as equações de Cauchy-Riemann estão satisfeitas no caso dessa função.

12) Se u e v são harmônicas em uma região D aberta conexa, então $F(z) = F(x+iy) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ é analítica.

Solução: Será mostrado futuramente que se $f = u + iv$ é analítica, então as derivadas parciais de u e v de todas as ordens existem e são contínuas. Como consequência disso, temos que as derivadas segundas mistas indepedem da ordem de derivação, ou seja, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$

Como u e v são harmônicas, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^y} = 0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^y} = 0 \Longrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^y} = 0$ e $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x^y}$.

Sejam $U(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}$ e $V(x,y) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}$. Calculando as derivadas parciais de U e V com relação a x e a y, temos:

- $\dfrac{\partial U}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$
- $\dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$
- $\dfrac{\partial V}{\partial x} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$
- $\dfrac{\partial V}{\partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}$

de onde observamos que $\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y}$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$. Como todas essas derivadas são contínuas, concluímos que a função $F = U + iV$ é analítica.

13) Prove que as raízes da equação $z^5 + 2z + 4 = 0$ são exteriores ao círculo unitário $|z| \leq 1$.

Solução:

- Se alguma raiz r dessa equação pertencesse a esse círculo unitário, teríamos $|r| \leq 1$.
- A equação $r^5 + 2r + 4 = 0$ é equivalente a $r^5 + 2r = -4$ e, daí, $|r^5 + 2r| = |-4| = 4$.
- Usando a desigualdade triangular: $4 = |r^5 + 2r| \leq |r^5| + |2r| = |r|^5 + 2|r| \leq 1^5 + 2 \cdot 1 = 3$.
- Obtivemos assim a contradição $4 \leq 3$. Portanto, não pode existir raiz r no círculo unitário, ou seja, toda raiz da equação está fora (no exterior) do círculo.

14) Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em $\mathbb{C}$, mostre que $|f'(z)|^2 = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

Solução: O jacobiano de u, v com relação a x e y é dado por

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2$$

Como $f'(z) = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\dfrac{\partial v}{\partial x}$, concluímos que

$$|f'(z)|^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

15) Mostre que $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \overline{z}$.

Solução: Se $z = x + iy$, então $\overline{z} = x - iy$.
Como $\cos iy = \cosh y$ e $\operatorname{sen} iy = i \operatorname{senh} y$, temos

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x + iy) = \operatorname{sen} x \cos iy + \operatorname{sen} iy \cos x = \operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x$$

e daí obtemos

$$\overline{\operatorname{sen} z} = \overline{\operatorname{sen} x \cosh y + i \operatorname{senh} y \cos x} = \operatorname{sen} x \cosh y - i \operatorname{senh} y \cos x$$

e

$$\operatorname{sen} \overline{z} = \operatorname{sen}(x - iy) = \operatorname{sen} x \cosh y - i \operatorname{senh} y \cos x$$

de onde podemos concluir que $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen} \overline{z}$.

16) Usando a definição com ε e δ, mostre que $f(z) = -4z + 3$ é contínua em $2 - i$.

Solução:

- Inicialmente, calculamos o valor de f no ponto $z_0 = 2 - i$: $f(z_0) = -4(2 - i) + 3 = -5 + 4i$
- Depois avaliamos o módulo da diferença entre $f(z)$ e $f(z_0)$:
$|f(z) - f(z_0)| = |(-4z+3) - (-5+4i)| = |-4z+8-4i| = |-4(z-2+i)| = 4|z-2+i| = 4|z-z_0|$
- Se $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, então $4|z - z_0| < \varepsilon$ que é o mesmo que $|z - z_0| < \frac{\varepsilon}{4}$

Por fim, dado qualquer $\varepsilon > 0$, se escolhermos $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ teremos a seguinte implicação:

$$|z - z_0| < \delta \Rightarrow |z - z_0| < \frac{\varepsilon}{4} \Rightarrow 4|z - z_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon,$$

e, de acordo com a definição, isso significa que a função f é contínua no ponto z_0.

17) a) Se $z, w \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a, b \in \mathbb{R}$, mostre que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$ e $\overline{az + bw} = a\overline{z} + b\overline{w}$;
b) Se z for uma raiz complexa de uma equação polinomial de coeficientes reais, mostre que $\overline{z}$ é raiz dessa mesma equação;
c) Resolva a equação $x^4 - 13x^3 + 63x^2 - 173x + 182 = 0$, sabendo que uma das raízes é $2 - 3i$;
d) Determine uma equação polinomial de coeficientes reais que tenha $7 + i$ e $-2 + 5i$ como duas de suas raízes.

Solução: a) Se $z = x_1 + iy_1$ e $w = x_2 + iy_2$ com $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, temos que

- $z + w = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$
- $\overline{z + w} = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$
- $\overline{z} + \overline{w} = (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = (x_1 + x_2) - i(y_1 + y_2)$. Fica mostrado assim que $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
- $z \cdot w = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $\overline{z \cdot w} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$
- $\overline{z} \cdot \overline{w} = (x_1 - iy_1)(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$. E assim, fica provado que $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$.
- Se $z_1 = z_2 = z$, então $\overline{z^2} = \overline{z \cdot z} = \overline{z} \cdot \overline{z} = (\overline{z})^2$ e, de um modo geral (usando indução) obtemos $\overline{z^n} = (\overline{z})^n$ para todo inteiro positivo n.
- Se a e b são números reais, então $\overline{a} = a$ e $\overline{b} = b$ e daí $\overline{az + bw} = \overline{az} + \overline{bw} = \overline{a} \cdot \overline{z} + \overline{b} \cdot \overline{w} = a\overline{z} + b\overline{w}$

b) Se z for uma raiz de um polinômio $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ de coeficientes reais, então $\overline{p(z)} = \overline{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0} = \overline{a_n}\,\overline{z^n} + \overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}} + \cdots + \overline{a_1}\,\overline{z} + \overline{a_0} = a_n \overline{z}^n + a_{n-1} \overline{z}^{n-1} + \cdots + a_1 \overline{z} + a_0 = p(\overline{z})$. Desse modo, se z for uma raiz do polinômio $p(z)$, então $p(z) = 0$ que implica $\overline{p(z)} = p(\overline{z}) = 0$, ou seja, $\overline{z}$ também é raiz do mesmo polinômio.

c) Se $z = 2 - 3i$ for uma raiz, então $\overline{z} = 2 + 3i$ também é. Logo, o polinômio $p(x) = x^4 - 13x^3 + 63x^2 - 173x + 182$ é divisível por $(x - z)(x - \overline{z}) = (x - 2 + 3i)(x - 2 - 3i) = (x - 2)^2 - (3i)^2 = x^2 - 4x + 4 + 9 = x^2 - 4x + 13$. Dividindo $p(x)$ por $x^2 - 4x + 13$ obtemos quociente $q(x) = x^2 - 9x + 14$ e resto igual a 0. Resolvendo a equação $q(x) = 0$ obtemos as outras duas raízes: $x = 2$, $x = 7$.

d) Se $7 + i$ e $-2 + 5i$ são raízes, então os conjugados $7 - i$ e $-2 - 5i$ também são. Daí, calculamos o produto

$$(x - (7 + i))(x - (-2 + 5i))(x - (7 - i))(x - (-2 - 5i)) = (x - 7 - i)(x - 7 + i)(x + 2 - 5i)(x + 2 + 5i) =$$
$$((x - 7)^2 + 1)((x + 2)^2 + 25) = (x^2 - 14x + 50)(x^2 + 4x + 29)$$
$$= x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 206x + 1450.$$

Logo, a equação procurada é $x^4 - 10x^3 + 23x^2 - 206x + 1450 = 0$.

18) Sendo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dois pontos distintos fixados e $a \in \mathbb{R}_+^*$, interprete geometricamente o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem:

a) $|z - z_1| = |z - z_2|$ b) $|z - z_1| = |\operatorname{Re} z|$
c) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ d) $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$

Solução: O módulo da diferença entre z_1 e z_2, $|z_1 - z_2|$, pode ser interpretado geometricamente como a distância entre os pontos z_1 e z_2 no plano.

a) $|z - z_1| = |z - z_2|$ significa que a distância de z ao ponto z_1 é a mesma distância de z a z_2, ou seja, z é equidistante de z_1 e de z_2. Sendo assim, o conjunto desses pontos é a reta mediatriz do segmento de reta $z_1 z_2$.

b) $|z - z_1| = |\operatorname{Re} z|$. Se $z = x + iy$ e $z_1 = a + bi$, então $|x + iy - a - bi| = |x|$, ou seja, $\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = |x|$ que equivale a $(x-a)^2 + (y-b)^2 = x^2$. Essa é uma equação do segundo grau nas variáveis x, y e tem apenas um único termo de segundo grau que é o y^2. Assim, a equação é a de uma parábola com eixo de simetria paralelo ao eixo dos x.

c) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$. Aqui, soma das distâncias do ponto z aos pontos z_1 e z_2 é constante e igual a $2a$. Isso caracteriza uma elipse de focos z_1 e z_2 e eixo maior igual a $2a$.

d) $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$. Aqui, o módulo da diferença das distâncias do ponto z aos pontos z_1 e z_2 é constante e igual a $2a$. Isso caracteriza uma hipérbole de focos z_1 e z_2.

19) Se z_1 e z_2 são dois números complexos, mostre que

$$|z_1 \overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$$

Solução: Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ com $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- $|z_1 \overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = |(a + bi)(c - di) + 1|^2 + |a + bi - c - di|^2 = |(ac + bd + 1) + i(bc - ad)|^2 + |(a - c) + i(b - d)|^2 = (ac + bd + 1)^2 + (bc - ad)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2$ $= a^2c^2 + b^2d^2 + 1 + \cancel{2ac} + \cancel{2bd} + \cancel{2abcd} + b^2c^2 - \cancel{2abcd} + a^2d^2 + a^2 - \cancel{2ac} + c^2 + b^2 - \cancel{2bd} + d^2 =$ $a^2c^2 + b^2d^2 + 1 + b^2c^2 + a^2d^2 + a^2 + c^2 + b^2 + d^2$
- $(1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2) = (1 + a^2 + b^2)(1 + c^2 + d^2) = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + d^2 + a^2d^2 + b^2d^2$

Concluímos assim que $|z_1 \overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$.

20) Mostre que se $|\cos z| \leq 1$ para todo z em uma região R, então $|\operatorname{Im} z| \leq \ln(1 + \sqrt{2})$.

Solução: A partir da expansão do $\cos z$ em parte real e imaginária

$$\cos z = \cos(x + iy) = \cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{senh} y,$$

calculamos o módulo do $\cos z$:

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x \cosh^2 y + \operatorname{sen}^2 x \operatorname{senh}^2 y = \cos^2 x \cosh^2 y + (1 - \cos^2 x)(\cosh^2 y - 1) \\ &= \cancel{\cos^2 x \cosh^2 y} + \cosh^2 y \cancel{- \cos^2 x \cosh^2 y} - 1 + \cos^2 x = \cosh^2 y - 1 + \cos^2 x \\ &= \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x \end{aligned}$$

Se $|\cos z| \leq 1$, então $|\cos z|^2 \leq 1 \Rightarrow \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x \leq 1$. Como $\operatorname{senh}^2 y \leq \operatorname{senh}^2 y + \cos^2 x$, temos $\operatorname{senh}^2 y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq \operatorname{senh} y \leq 1 \Rightarrow \operatorname{arcsenh}(-1) \leq y \leq \operatorname{arcsenh} 1$, que equivale a $-\ln(1 + \sqrt{2}) \leq y \leq \ln(1 + \sqrt{2}$, ou seja, $|y| \leq \ln(1 + \sqrt{2})$.

3 Definições, propriedades e teoremas básicos

3.1 Definições

Um arco do ponto $A = z(a)$ ao ponto $B = z(b)$ é um conjunto de pontos do plano descrito por equações paramétricas

$$C \;=\; \{z(t) = x(t) + iy(t) \,|\, a \le t \le b\},$$

onde $z(t)$ é uma função contínua de $t \in [a, b]$.

Se C for um arco de A a B, então definimos $-C$ como sendo o mesmo conjunto de pontos do arco C percorrido em sentido contrário, de $B = z_1(-b)$ a $A = z_1(-a)$:

$$-C \;=\; \{z_1(t) = x(-t) + iy(-t) \,|\, -b \le t \le -a\}.$$

Por exemplo, se C for a semicircunferência de centro na origem e raio 3 que vai do ponto $(3, 0)$ ao ponto $(-3, 0)$, sentido positivo (anti-horário), então uma parametrização de C é dada por $z(t) = 3\cos t + 3i \operatorname{sen} t = 3e^{it}$, com $0 \le t \le \pi$. Nesse caso, o arco $-C$ é a mesma semicircunferência percorrida no sentido horário, de $(-3, 0)$ a $(3, 0)$, cuja parametrização é dada por $z_1(t) = 3\cos(-t) + 3i \operatorname{sen}(-t) = 3e^{-it}$, com $-\pi \le t \le 0$.

Uma região R é dita simplesmente conexa se toda curva fechada simples (sem auto-interseção) pode ser deformada continuamente, sem sair da região, até reduzir-se a um ponto. Intuitivamente, isso quer dizer que a região simplesmente conexa não possui buracos. Se uma região não for simplesmente conexa, então ela é dita multiplamente conexa.

Se existir a derivada $z'(t)$ e for diferente de 0 para todo $t \in [a, b]$ então o arco se chama regular. Um caminho ou um contorno é um arco contínuo formado por um número finito de arcos regulares.

3.2 Integrais

Se $F(t) = U(t) + iV(t)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$, então sua integral nesse intervalo é definida por

$$\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t \;=\; \int_a^b U(t)\,\mathrm{d}t \;+ i \int_a^b V(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Se $C = \{z(t) \,|\, t \in [a, b]\}$ for um caminho e $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ for contínua em C, definimos

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; \int_a^b f(z(t))z'(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Por exemplo, se $f(z) = z^2$ e C é o arco de parábola $z(t) = t^2 + 3it$, $0 \le t \le 4$, então $\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ é calculada da seguinte maneira:

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^4 \underbrace{(t^2 + 3it)^2}_{f(z)}\underbrace{(2t + 3i)\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{d}z} = \int_0^4 (t^4 + 6it^3 - 9t^2)(2t + 3i)\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^4 \left[(2t^5 - 36t^3) + i(15t^4 - 27t^2)\right]\,\mathrm{d}t = \int_0^4 (2t^5 - 36t^3)\,\mathrm{d}t + i\int_0^4 (15t^4 - 27t^2)\,\mathrm{d}t = -\frac{2816}{3} + 2496i$$

Utilizamos frequentemente as seguintes notações: $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = x'(t)\,\mathrm{d}t + iy'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$ e $|\,\mathrm{d}z\,| = |z'(t)|\,\mathrm{d}t = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,\mathrm{d}t$. Se o caminho C for fechado (ou seja, ponto inicial A coincidindo com o ponto final B), então utilizamos o símbolo $\oint$ ou $\ointctrclockwise$ no lugar do $\displaystyle\int$.

Se $f = u + iv$ e $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$, então

$$\int_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_C (u+iv)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \int_C u\,\mathrm{d}x - v\,\mathrm{d}y \; + \; i\int_C u\,\mathrm{d}y + v\,\mathrm{d}x\,.$$

Sendo assim, o cálculo de uma integral complexa equivale ao cálculo de duas integrais de linha reais.

3.3 Propriedades

Se $F(t)$ e $G(t)$ são contínuas em $t \in [a,b]$, então:

- $\mathrm{Re}\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Re}\,F(t)\,\mathrm{d}t$ e $\mathrm{Im}\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \mathrm{Im}\,F(t)\,\mathrm{d}t$;
- $\int_a^b [F(t)+G(t)]\,\mathrm{d}t = \int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t$ e $\int_a^b kF(t)\,\mathrm{d}t = k\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t$, k constante;
- $\left|\int_a^b F(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |F(t)|\,\mathrm{d}t$.

Se $f(z)$, $f_1(z)$ e $f_2(z)$ são contínuas em um caminho $C = C_1 \cup C_2$, então:

- $\int\limits_C f_1(z) + f_2(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_C f_1(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_C f_2(z)\,\mathrm{d}z$ e $\int\limits_C kf(z)\,\mathrm{d}z = k\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z$, k constante;
- $\int\limits_{C_1\cup C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z$;
- $\int\limits_{-C} f(z)\,\mathrm{d}z = -\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z$;
- $\left|\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq \int\limits_C |f(z)||\,\mathrm{d}z\,|$;
- Se $|f(z)| \leq M$ e L é o comprimento de C, então $\left|\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leq ML$.

3.4 Principais teoremas

Teorema de Cauchy: Seja f analítica em uma região simplesmente conexa R. Então

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0,$$

para todo caminho fechado C contido na região R.

Por exemplo, $\oint\limits_C e^z\,\mathrm{d}z = 0$ para qualquer caminho fechado, porque e^z é analítica para todo z.

Os dois teoremas a seguir são corolários do Teorema de Cauchy:

Teorema: Seja f uma função analítica em uma região simplesmente conexa R. Então a integral de f ao longo de um caminho ligando z_1 a z_2 não depende desse caminho.

Teorema: Se f é analítica em uma região simplesmente conexa R e F é uma primitiva de f (ou seja, $F' = f$), então

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z \;=\; F(z_2) - F(z_1),$$

para quaisquer pontos $z_1, z_2 \in R$.

Por exemplo, $\displaystyle\int_{i}^{1+4i} z^2\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z^3}{3}\right]_i^{1+4i} = \frac{1}{3}\left[(1+4i)^3 - i^3\right] = -\frac{47}{3} - 17i.$

Teorema (Fórmula Integral de Cauchy): Se f é analítica em uma região simplesmente conexa R, se $a \in R$ e C é qualquer caminho fechado simples de R que envolve $z = a$ uma vez no sentido positivo, cujo interior está inteiramente contido em R, então

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z \qquad \left(\text{ou} \quad \oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(a)\right).$$

Por exemplo, se C for a circunferência $z(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, então

$$\oint_C \frac{e^z}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot e^i = 2\pi i \cdot (\cos 1 + i \operatorname{sen} 1) = -2\pi \operatorname{sen} 1 + 2\pi i \cos 1.$$

Note que nesse caso $f(z) = e^z$ e $a = i$. Como i é um ponto que está no interior da região delimitada por C, temos $\displaystyle\oint_C \frac{f(z)}{z-a}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f(a)$.

Uma consequência importante da Fórmula de Cauchy é que uma função analítica possui derivadas de todas as ordens.

Teorema (Derivadas de todas as ordens): Com as mesmas hipóteses da Fórmula Integral de Cauchy, temos

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,\mathrm{d}z \qquad \left(\text{ou} \quad \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i f'(a)\right)$$

e, em geral,

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z \qquad \left(\text{ou} \quad \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!}\right)$$

Teorema de Morera[3]: Seja f contínua em uma região R tal que $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$ para todo caminho fechado C contido em R. Então f é analítica em R.

Teorema de Liouville[4]: Uma função inteira (analítica em todo o plano) e limitada é obrigatoriamente uma função constante.

Teorema Fundamental da Álgebra: Todo polinômio de grau $n \geq 1$ possui pelo menos uma raiz complexa.

---

[3]Giacinto Morera (1856–1909), matemático italiano

[4]Joseph Liouville (1809-1882), matemático francês

4 Exercícios resolvidos

1) Calcule as seguintes integrais: a) $\displaystyle\int_i^1 (z+1)^2\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i} \operatorname{sen}^2 z\,\mathrm{d}z$

Solução: Quando a função f é analítica, sua integral $\int_a^b f(z)\,\mathrm{d}z$ depende apenas do ponto inicial e do ponto final do caminho de integração e pode ser calculada através da diferença $F(b) - F(a)$, onde F é uma primitiva de f.

a) $\displaystyle\int_1^i (z+1)^2\,\mathrm{d}z = \left[\frac{(z+1)^3}{3}\right]_1^i = \frac{(i+1)^3}{3} - \frac{2^3}{3} = -\frac{7}{3} - \frac{i}{3}$

b) $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i} \operatorname{sen}^2 z\,\mathrm{d}z = \int_{-\pi i}^{\pi i} \frac{1-\cos 2z}{2}\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2z}{4}\right]_{-\pi i}^{\pi i} = \left[\frac{\pi i}{2} + \frac{\pi i}{2}\right] - \left[\frac{\operatorname{sen} 2\pi i}{4} + \frac{\operatorname{sen} 2\pi i}{4}\right]$

$\displaystyle = \pi i - \frac{\operatorname{sen} 2\pi i}{2} = \pi i - \frac{i \operatorname{senh} 2\pi}{2} = \left(\pi - \frac{\operatorname{senh} 2\pi}{2}\right) i.$

2) Se C é descrito por $z(t) = 2e^{it},\ 0 \le t \le 2\pi$, calcule:

a) $\displaystyle\oint_C \operatorname{Re}(z)\,|\mathrm{d}z|$ b) $\displaystyle\oint_C \operatorname{Im}(z)\,\mathrm{d}z$ c) $\displaystyle\oint_C |z-2|\,|\mathrm{d}z|$ d) $\displaystyle\oint_C \overline{z}^2\,\mathrm{d}z$

Solução: O caminho descrito neste exercício é uma circunferência de raio 2 e centro na origem: $z(t) = 2(\cos t + i \operatorname{sen} t)$. A partir daí, obtemos:

- $\overline{z} = \overline{z(t)} = 2(\cos t - i \operatorname{sen} t) = 2e^{-it}$
- $\operatorname{Re} z = 2\cos t$
- $\operatorname{Im} z = 2 \operatorname{sen} t$
- $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = 2i(\cos t + i \operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t = (-2\operatorname{sen} t + 2i\cos t)\,\mathrm{d}t\,.$
- $|\,\mathrm{d}z\,| = |z'(t)|\,\mathrm{d}t = |2ie^{it}|\,\mathrm{d}t = |2i| \cdot |e^{it}|\,\mathrm{d}t = 2\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t = 2 \cdot 1\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}t$

Substituindo em cada uma das integrais:

a) $\displaystyle\oint_C \operatorname{Re}(z)\,|\mathrm{d}z| = \int_0^{2\pi} 2\cos t \cdot 2\,\mathrm{d}t = 4 \cdot [\operatorname{sen} t]_0^{2\pi} = 4(\operatorname{sen} 2\pi - \operatorname{sen} 0) = 0$

b) $\displaystyle\oint_C \operatorname{Im}(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} 2\operatorname{sen} t \cdot (-2\operatorname{sen} t + 2i\cos t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} (-4\operatorname{sen}^2 t + 4i \operatorname{sen} t \cos t)\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle = \int_0^{2\pi} (-2(1 - \cos 2t) + 2i \operatorname{sen} 2t)\,\mathrm{d}t = [-2t + \operatorname{sen} 2t - i\cos 2t]_0^{2\pi} = (-4\pi + \operatorname{sen} 4\pi - i\cos 4\pi)$
$-(0 + \operatorname{sen} 0 - i\cos 0) = -4\pi + 0 - i - 0 - 0 + i = -4\pi\,.$

c) $\displaystyle\oint_C |z-2|\,|\mathrm{d}z| = \int_0^{2\pi} |2(\cos t + i\operatorname{sen} t) - 2| \cdot 2\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t - 1)^2 + \operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{\cos^2 - 2\cos t + 1 + \operatorname{sen}^2 t}\,\mathrm{d}t = 4\int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{2\pi} \tfrac{\sqrt{2-2\cos t}}{2}\,\mathrm{d}t = 8\int_0^{2\pi} \sqrt{\tfrac{1-\cos t}{2}}\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle = 8\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} \tfrac{t}{2}\,\mathrm{d}t = 8\left[-\frac{\cos\frac{t}{2}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{2\pi} = -16[\cos\pi - \cos 0] = (-16)(-2) = 32.$

d) $\displaystyle\oint_C \overline{z}^2\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} (2e^{-it})^2 (2ie^{it})\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 4e^{-2it} \cdot 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = 8i\int_0^{2\pi} e^{-it}\,\mathrm{d}t$
$\displaystyle = 8i\left[\frac{e^{-it}}{(-i)}\right]_0^{2\pi} = -8(e^{-2\pi i} - e^0) = -8(\cos(-2\pi) + i\operatorname{sen}(-2\pi) - 1) = -8(1 + i \cdot 0 - 1) = 0.$

3) Calcule a integral $\displaystyle\int_C f(z)\,\mathrm{d}z$ onde $f(z) = z^2 + 4z - 3$ e C é um caminho que vai de $z = -i$ até $z = 1$ de cinco maneiras diferentes:

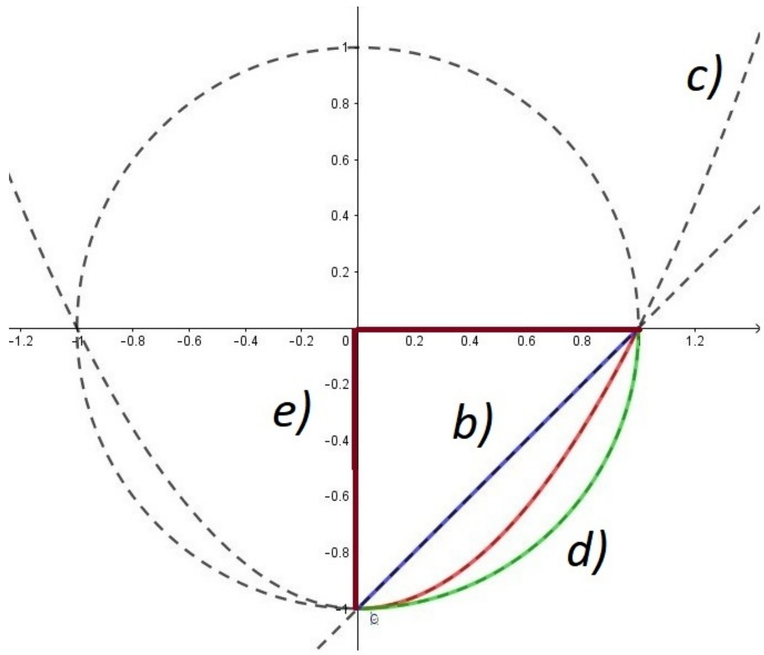
a) usando uma primitiva para $f(z)$;

b) C é um segmento sobre a reta $y = x - 1$;

c) C é um arco sobre a parábola $y = x^2 - 1$;

d) C é um arco sobre a circunferência de centro na origem e raio 1;

e) C é formado por dois segmentos de reta, um sobre o eixo imaginário que vai de $-i$ à origem, outro sobre o eixo real que vai de 0 até 1.



Solução: a) $\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-i}^{1}(z^2+4z-3)\,\mathrm{d}z = \left[\frac{z^3}{3}+2z^2-3z\right]_{-i}^{1} = (\frac{1}{3}+2-3)-(\frac{(-i)^3}{3}+2(-i)^2-3(-i)) = \frac{1}{3}+2-3-\frac{i}{3}+2-3i = \frac{4}{3}-\frac{10i}{3}$;

b) Uma parametrização de C é $z = z(t) = t+(t-1)i$, $0 \le t \le 1$. Daí, $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = (1+i)\,\mathrm{d}t$ de onde obtemos: $\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1[(t+(t-1)i)^2+4(t+(t-1)i)-3](1+i)\,\mathrm{d}t = \int_0^1(2it^2-2t^2+8it+4t-8i)\,\mathrm{d}t = \int_0^1(-2t^2+4t)\,\mathrm{d}t + i\int_0^1(2t^2+8t-8)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{2t^3}{3}+2t^2\right]_0^1 + i\left[\frac{2t^3}{3}+4t^2-8t\right]_0^1$ $= (-\frac{2}{3}+2)+i(\frac{2}{3}+4-8) = \frac{4}{3}-\frac{10i}{3}$;

c) Uma parametrização de C é $z = z(t) = t+(t^2-1)i$, $0 \le t \le 1$. A partir daí, obtemos: $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = (1+2ti)\,\mathrm{d}t$ e também $\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_0^1[(t+(t^2-1)i)^2+4(t+(t^2-1)i)-3](1+2ti)\,\mathrm{d}t$ $= \int_0^1(-2it^5-5t^4+8it^3-8t^3+12it^2+7t^2-10it+12t-4i-4)\,\mathrm{d}t = \int_0^1(-5t^4-8t^3+7t^2+12t-4)\,\mathrm{d}t + i\int_0^1(-2t^5+8t^3+12t^2-10t-4)\,\mathrm{d}t = (-t^5-2t^4+\frac{7t^3}{3}+6t^2-4t)+i(-\frac{t^6}{6}+2t^4+4t^3-5t^2-4t)$ $= (-1-2+\frac{7}{3}+6-4)+i(-\frac{1}{3}+2+4-5-4) = \frac{4}{3}-\frac{10i}{3}$;

d) Uma parametrização de C é $z = z(t) = e^{ti}$, $-\frac{\pi}{2} \le t \le 0$. A partir daí, $\mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t = ie^{ti}\,\mathrm{d}t$ e, consequentemente, $\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(e^{2ti}+4e^{it}-3)(ie^{it})\,\mathrm{d}t = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(ie^{3it}+4ie^{2it}-3ie^{it})\,\mathrm{d}t =$ $\left[\frac{ie^{3it}}{3i}+\frac{4ie^{2it}}{2i}-\frac{3ie^{it}}{i}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{0} = \left[\frac{e^0}{3}+2e^0-3e^0\right]-\left[\frac{e^{\frac{-3\pi i}{2}}}{3}+2e^{-\pi i}-3e^{\frac{-\pi i}{2}}\right] = \frac{1}{3}+2-3-\frac{\cos(-\frac{3\pi}{2})+i\,\mathrm{sen}(-\frac{3\pi}{2})}{3}-$ $2(\cos(-\pi)+i\,\mathrm{sen}(-\pi))+3(\cos(-\frac{\pi}{2})+i\,\mathrm{sen}(-\frac{\pi}{2})) = -\frac{2}{3}-\frac{i}{3}+2-3i = \frac{4}{3}-\frac{10i}{3}$.

e) O primeira parte do caminho sobre o eixo imaginário, C_1, é parametrizada por $z(t) = it$, $-1 \le t \le 0$. A segunda parte do caminho sobre o eixo real, C_2, é parametrizada por $z(t) = t$,

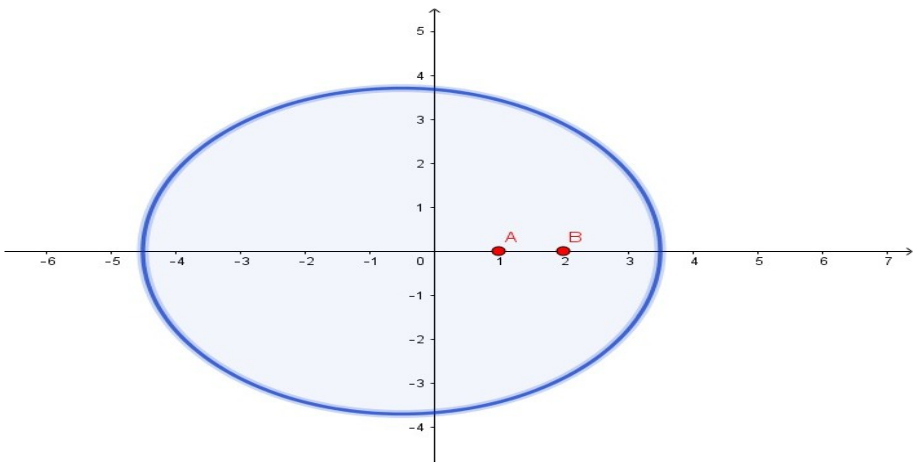
$0 \leq t \leq 1$. Em C_1, temos $\mathrm{d}z = i\,\mathrm{d}t$, e em C_2, $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$. Daí, a integral a ser calculada é $\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int\limits_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int\limits_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-1}^{0}((it)^2+4(it)-3)i\,\mathrm{d}t + \int_0^1(t^2+4t-3)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{0}(-it^2-4t-3i)\,\mathrm{d}t + \int_0^1(t^2+4t-3)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{it^3}{3} - 2t^2 - 3it\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{t^3}{3} + 2t^2 - 3t\right]_0^1 = 0 - \frac{i}{3} + 2 - 3i + \frac{1}{3} + 2 - 3 = \frac{4}{3} - \frac{10i}{3}$.

Observação: Como f é analítica em todo o plano complexo, a integral $\int\limits_C f(z)\,\mathrm{d}z$ não depende do caminho e tinha que dar o mesmo resultado nos cinco casos anteriores.

4) Calcule a integral $\displaystyle\oint\limits_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z^2 - 3z + 2}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é a elipse $|z-1| + |z+2| = 8$, descrita no sentido positivo.

Solução: Nesse tipo de cálculo, é muito importante saber se a função integranda tem algum ponto no interior do caminho de integração onde ela não seja analítica. Para isso, é fundamental fazer o gráfico desse caminho.

Se $z \in$, da equação $|z-1| + |z+2| = 8$ concluímos que a soma das distâncias de z aos pontos 1 e -2 é constante e igual a 8. Logo, a equação descreve uma elipse de focos nos pontos $F_1(1,0)$ e $F_2(-2,0)$ e eixo maior igual a $2a = 8 \Rightarrow a = 4$. A distância entre os pontos F_1 e F_2 é a distância focal e é igual a $2c = 3 \Rightarrow c = 3/2$. Na elipse, temos $a^2 = b^2 + c^2$ e daí obtemos: $b^2 = a^2 - c^2 = 16 - \frac{9}{4} = \frac{55}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{55}}{2}$. Além disso, o centro da elipse é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ e é o ponto $(-\frac{1}{2}, 0)$.



A equação $z^2 - 3z + 2 = 0$ tem raízes $z = 1$ e $z = 2$ que estão situadas no interior da elipse que é o caminho de integração. Podemos fazer uma separação em frações parciais para obter $\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{M}{z-1} + \frac{N}{z-2}$. Daí, temos $M(z-2) + N(z-1) = 1$. Fazendo $z = 1$ nessa última igualdade, obtemos $M = -1$, e fazendo $z = 2$, obtemos $N = 1$. Logo, $\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1}$ que implica

$$\oint\limits_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z^2 - 3z + 2}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z - 2}\,\mathrm{d}z - \oint\limits_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z - 1}\,\mathrm{d}z.$$

Como $f(z) = \operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)$ é analítica no caminho de integração e no seu interior, usando a *Fórmula Integral de Cauchy*, temos:

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z - 2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(2) = 2\pi i \cdot (\underbrace{\operatorname{sen} 4\pi}_{0} + \underbrace{\cos 4\pi}_{1}) = 2\pi i,$$

$$\oint\limits_C \frac{f(z)}{z - 1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i \cdot (\underbrace{\operatorname{sen} \pi}_{0} + \underbrace{\cos \pi}_{-1}) = -2\pi i.$$

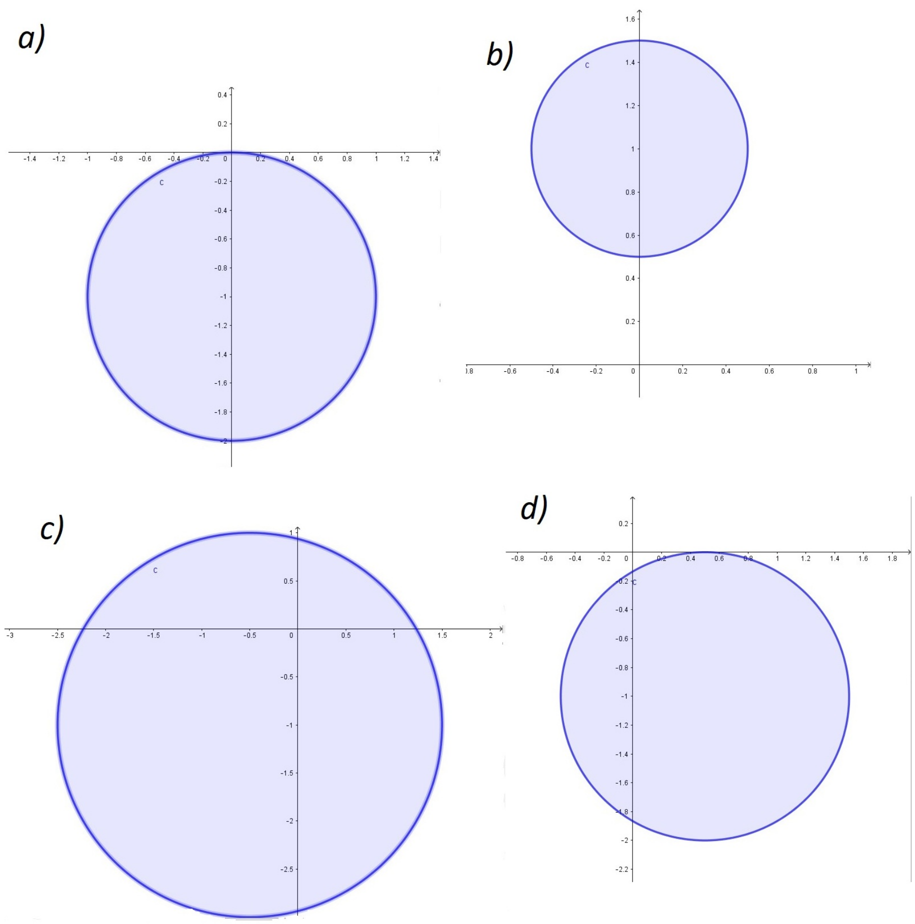
Portanto,

$$\oint\limits_C \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2)+\cos(\pi z^2)}{z^2-3z+2}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-2}\,\mathrm{d}z - \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i - (-2\pi i) = 4\pi i.$$

5) Calcule $\displaystyle\oint\limits_C \frac{z^2}{z^4-1}\,\mathrm{d}z$, sabendo que C é uma circunferência orientada positivamente, descrita por cada uma das seguintes equações:

a) $|z+i|=1$ b) $|z-i|=\frac{1}{2}$ c) $|z+\frac{1}{2}+i|=2$ d) $|z-\frac{1}{2}+i|=1$

Solução: Cada um dos caminhos de integração está desenhado a seguir:



O denominador da fração pode ser fatorado na forma

$$z^4-1=(z^2-1)(z^2+1)=(z+1)(z-1)(z+i)(z-i).$$

Sendo assim, as raízes do polinômio do denominador são $z=\pm1$ e $z=\pm i$.

a) O caminho $|z+i|=1$ contém apenas a raiz $z=-i$ no seu interior. Por isso, definimos $f(z)=\dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)(z-i)}$ e usamos a *Fórmula Integral de Cauchy* para calcular a integral:

$$\oint\limits_C \frac{z^2}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = \oint\limits_C \frac{f(z)}{z-(-i)}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot f(-i) = \frac{2\pi i\cdot(-i)^2}{(-i+1)(-i-1)(-2i)} = \frac{\cancel{-2i}\pi}{((-i)^2-1^2)(\cancel{-2i})} = -\frac{\pi}{2}.$$

b) Somente a raiz $z = i$ está no interior do caminho $|z-1| = \frac{1}{2}$. Assim, definimos $f(z) = \dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)(z+i)}$ e calculamos a integral:

$$\oint_C \frac{z^2}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{z-i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(i) = \frac{2\pi i \cdot i^2}{(i+1)(i-1)(2i)} = \frac{-\cancel{2}\cancel{i}\pi}{(i^2-1^2)(\cancel{2}\cancel{i})} = \frac{\pi}{2}.$$

c) Somente a raiz $z = i$ está no exterior do caminho $|z + \frac{1}{2} + i| = 2$. Separando $\frac{z^2}{z^4-1}$ em frações parciais:

$$\frac{z^2}{z^4-1} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \frac{C}{z-i} + \frac{D}{z+i}.$$

Multiplicando-se os dois membros por $(z-1)(z+1)(z-i)(z+i)$, obtemos:

$$z^2 = A(z+1)(z-i)(z+i) + B(z-1)(z-i)(z+i) + C(z+1)(z-1)(z+i) + D(z+1)(z-1)(z-i).$$

Substituindo os valores $z = 1$, $z = -1$, $z = i$ e $z = -i$ nessa expressão, podemos calcular os valores das constantes A, B, C e D: $A = \frac{1}{4}$, $B = \frac{-1}{4}$, $C = \frac{i}{4}$, $D = \frac{-i}{4}$. Dessa forma, obtemos a seguinte igualdade:

$$\frac{z^2}{z^4-1} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z-1} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{z+1} - \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{z-i} + \frac{i}{4}\cdot\frac{1}{z+i}.$$

Sendo $f(z) = 1$, calculamos separadamente cada uma das integrais $\oint_C \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i$, $\oint_C \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(-1) = 2\pi i$, $\oint_C \frac{1}{z+i}\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot f(-i) = 2\pi i$. Como a função $\frac{1}{z-i}$ é analítica em C e no seu interior, temos $\oint_C \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z = 0$. Concluímos então que

$$\oint_C \frac{z^2}{z^4-1}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{4}\cdot\overbrace{\oint_C \frac{1}{z-1}\,\mathrm{d}z}^{2\pi i} - \frac{1}{4}\cdot\overbrace{\oint_C \frac{1}{z+1}\,\mathrm{d}z}^{2\pi i} - \frac{i}{4}\cdot\overbrace{\oint_C \frac{1}{z-i}\,\mathrm{d}z}^{0} + \frac{i}{4}\cdot\overbrace{\oint_C \frac{1}{z+i}\,\mathrm{d}z}^{2\pi i}$$
$$= \cancel{\frac{1}{4}\cdot(2\pi i)} - \cancel{\frac{1}{4}\cdot(2\pi i)} - 0 + \frac{i}{4}\cdot(2\pi i) = -\frac{\pi}{2}.$$

d) O caminho $|z - \frac{1}{2} + i| = 1$ contém apenas a raiz $z = -i$ no seu interior. Portanto, o cálculo da integral é idêntico ao que foi feito no item a) e dá a mesma resposta: $-\frac{\pi}{2}$.

6) A partir de $\displaystyle\oint_C \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$, onde C é qualquer caminho fechado simples que dá uma volta no sentido anti-horário em torno na origem, mostre que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(\cos t)\operatorname{senh}(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t = 0$ e $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(\cos t)\cosh(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$.

Solução: Escolhendo C como sendo a circunferência de raio 1 e centro na origem parametrizada por $z(t)=e^{it}$, $0\le t\le 2\pi$, temos que $\mathrm{d}z = ie^{it}\,\mathrm{d}t$ e

$$\oint_C \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\frac{\cos e^{it}\cdot i\cancel{e^{it}}}{\cancel{e^{it}}}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\cos e^{it}\cdot i\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi}\cos(\cos t + i\operatorname{sen} t)\cdot i\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos(\cos t)\cos(i\operatorname{sen} t) - \operatorname{sen}(\cos t)\operatorname{sen}(i\operatorname{sen} t))\cdot i\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi}(\cos(\cos t)\cosh(\operatorname{sen} t) - i\operatorname{sen}(\cos t)\operatorname{senh}(\operatorname{sen} t))\cdot i\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi}(i\cos(\cos t)\cosh(\operatorname{sen} t) + \operatorname{sen}(\cos t)\operatorname{senh}(\operatorname{sen} t))\,\mathrm{d}t$$

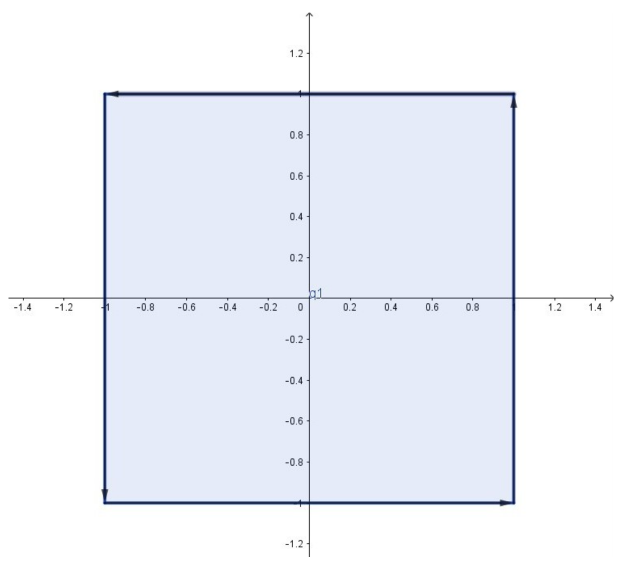
$$= i\overbrace{\int_0^{2\pi}\cos(\cos t)\cosh(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t}^{2\pi} + \overbrace{\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(\cos t)\operatorname{senh}(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t}^{0} = 2\pi i + 0,$$

de onde concluímos que $\int_0^{2\pi}\cos(\cos t)\cosh(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t = 2\pi$ e $\int_0^{2\pi}\operatorname{sen}(\cos t)\operatorname{senh}(\operatorname{sen} t)\,\mathrm{d}t = 0$.

7) Seja C um quadrado que tem extremidades de uma das diagonais nos pontos $-1-i$ e $1+i$, descrito no sentido positivo. Calcule cada uma das seguintes integrais:

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{z^2+4}\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{z^2}}{2z-i}\,\mathrm{d}z$ c) $\displaystyle\oint_C \frac{\cosh 3z}{z}\,\mathrm{d}z$ d) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{\operatorname{sen} z}}{z(z-5i)}\,\mathrm{d}z$ e) $\displaystyle\oint_C \frac{\cos 2\pi z}{2z^2+7z-4}\,\mathrm{d}z$

Solução: O quadrado aqui descrito é o de centro na origem e lado 2 da seguinte figura:



a) As raízes de $z^2+4=0$ são $z=\pm 2i$ que estão fora do quadrado, ou seja, no seu exterior. Logo, a função $\frac{1}{z^2+4}$ é analítica em C e no seu interior e, consequentemente, sua integral é igual a 0.

b) Seja $f(z)=e^{z^2}$. A raiz de $2z-i=0$ é $z=\frac{i}{2}$ e está no interior do quadrado. Usando a *Fórmula Integral de Cauchy*, temos

$$\oint_C \frac{e^{z^2}}{2z-i}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{2(z-\frac{i}{2})}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\cdot\oint_C \frac{f(z)}{z-\frac{i}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi i\cdot f\left(\frac{i}{2}\right) = \pi i\cdot e^{(\frac{i}{2})^2} = \frac{\pi i}{e^{1/4}}.$$

c) $$\oint_C \frac{\cosh 3z}{z}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{\cosh 3z}{z-0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot\cosh 0 = 2\pi i.$$

d) As raízes de $z(z-5i)=0$ são $z=0$ e $z=5i$. Dessas raízes, a única que está no interior do caminho de integração é a $z=0$. Por isso, a definimos a função $f(z)=\dfrac{e^{\operatorname{sen} z}}{z-5i}$ que é analítica em C e no seu interior. Pela *Fórmula Integral de Cauchy*, temos

$$\oint_C \frac{e^{\operatorname{sen} z}}{z(z-5i)}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{z-0}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot f(0) = 2\pi i\cdot\frac{e^{\operatorname{sen} 0}}{0-5i} = \frac{2\pi i}{-5i} = -\frac{2\pi}{5}.$$

e) As raízes de $2z^2+7z-4=0$ são $z=\frac{1}{2}$ e $z=-4$. A única raiz que está no interior do caminho de integração é a $z=\frac{1}{2}$. Assim, definimos $f(z)=\dfrac{\cos 2\pi z}{z+4}$, analítica em C e no seu interior. Daí, temos

$$\oint_C \frac{\cos 2\pi z}{2z^2+7z-4}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{\cos 2\pi z}{2(z-\frac{1}{2})(z+4)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\oint_C \frac{f(z)}{z-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\pi i\cdot f\left(\frac{1}{2}\right) = \pi i\cdot\frac{\cos\pi}{\frac{1}{2}+4} = \frac{-2\pi i}{9}.$$

8) Seja C um quadrado que tem lados situados nas retas $x=\pm1$ e $y=\pm1$, descrito no sentido positivo. Calcule cada uma das seguintes integrais:

a) $\displaystyle\oint_C \frac{z^3}{(2z+i)^3}\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\oint_C \frac{z^4}{(z-3i)^2}\,\mathrm{d}z$ c) $\displaystyle\oint_C \frac{ze^z}{(4z+\pi i)^2}\,\mathrm{d}z$ d) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{z^3}}{z^3}\,\mathrm{d}z$ e) $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2+10i)z^2}\,\mathrm{d}z$

Solução: O quadrado aqui descrito é o mesmo quadrado de centro na origem e lado 2 da questão anterior.

a) O denominador da fração pode ser escrito na forma $(2z+i)^3=[2(z+\frac{i}{2})]^3=8(z+\frac{i}{2})^3$. $z=-\frac{i}{2}$ é a única raiz do denominador e corresponde ao ponto $(0,-\frac{1}{2})$ no interior do quadrado. Seja $f(z)=z^3$ o numerador da fração que é analítica no quadrado e no seu interior, e por isso,

$$\oint_C \frac{z^3}{(2z+i)^3}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{8(z+\frac{i}{2})^3}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\oint_C \frac{f(z)}{(z-(-\frac{i}{2}))^{2+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{8}\cdot\frac{2\pi i\cdot f^{(2)}(-\frac{i}{2})}{2!} = \frac{1}{8}\cdot\frac{\cancel{2}\pi i\cdot f''(-\frac{i}{2})}{\cancel{2}!}$$

Como $f'(z)=3z^2$ e $f''(z)=6z$, concluímos que $\oint_C \frac{z^3}{(2z+i)^3}\,\mathrm{d}z=\frac{\pi i}{8}\cdot6(-\frac{i}{2})=\frac{3\pi}{8}$.

b) Neste caso, $z=3i$ é a única raiz do denominador e corresponde ao ponto $(0,3)$ no exterior do quadrado. Portanto, $f(z)=\frac{z^4}{(z-3i)^2}$ é analítica no quadrado e no seu interior, logo sua integral é igual a 0.

c) O denominador pode ser escrito na forma $(4z+\pi i)^2=[4(z+\frac{\pi i}{4})]^2=16(z+\frac{\pi i}{4})^2$. Observamos que $z=-\frac{\pi i}{4}$ é a única raiz do denominador e corresponde ao ponto $(0,-\frac{\pi}{4})$ no interior do quadrado. Se $f(z)=ze^z$, então $f'(z)=1\cdot e^z+ze^z=(z+1)e^z$ e a integral em questão é calculada da seguinte forma:

$$\oint_C \frac{ze^z}{(4z+\pi i)^2}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{f(z)}{16(z+\frac{\pi i}{4})^2}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{16}\oint_C \frac{f(z)}{(z-(-\frac{\pi i}{4}))^{1+1}}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{16}\cdot\frac{2\pi i\cdot f^{(1)}(-\frac{\pi i}{4})}{1!}$$

$$= \frac{\pi i\cdot f'(-\frac{\pi i}{4})}{8} = \frac{\pi i\cdot\left((-\frac{\pi i}{4}+1)e^{-\frac{\pi i}{4}}\right)}{8} = \frac{\pi i\cdot\left((\frac{-\pi i+4}{4})(\cos(-\frac{\pi}{4})+i\operatorname{sen}(-\frac{\pi}{4}))\right)}{8}$$

$$= \left(\frac{\pi^2+4\pi i}{32}\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{64}\left(\pi^2+4\pi+i(-\pi^2+4\pi)\right)$$

d) Seja $f(z)=e^{z^3}$. Então, $f'(z)=3z^2e^{z^3}$, $f''(z)=6ze^{z^3}+(3z^2)^2e^{z^3}$ e

$$\oint_C \frac{e^{z^3}}{z^3}\,\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-0)^{2+1}}\,\mathrm{d}z=\frac{2\pi i\cdot f''(0)}{2!}=0.$$

e) As raízes da equação $(z^2+10i)z^2=0$ são $z=0$ e $z=\pm\sqrt{-10i}$. A forma polar de $-10i$ é $10(\cos\frac{3\pi}{2}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{2})$. Daí, concluímos que as raízes quadradas de $-10i$ são $\sqrt{10}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{3\pi}{4})=\sqrt{10}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=-\sqrt{5}+i\sqrt{5}$ e $\sqrt{10}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\,\mathrm{sen}\,\frac{7\pi}{4})=\sqrt{10}(\frac{1}{\sqrt{2}}-i\frac{1}{\sqrt{2}})=\sqrt{5}-i\sqrt{5}$. O módulo de cada uma dessas raízes quadradas é igual a $\sqrt{10}$. Logo, elas estão situadas no exterior do caminho de integração. Concluímos assim que somente a raiz $z=0$ está no interior do quadrado.

Seja $f(z)=\dfrac{\mathrm{sen}\,z}{z^2+10i}\Rightarrow f'(z)=\dfrac{(z^2+10i)\cos z-2z\,\mathrm{sen}\,z}{(z^2+10i)^2}$. Como f é analítica em C e no seu interior, temos:

$$\oint_C \frac{\mathrm{sen}\,z}{(z^2+10i)z^2}\,\mathrm{d}z=\oint_C \frac{f(z)}{(z-0)^{1+1}}\,\mathrm{d}z=2\pi i\cdot f'(0)=2\pi i\cdot\left[\frac{(0+10i)\cdot 1-0}{(0+10i)^2}\right]=\frac{1}{10i}=\frac{1\cdot i}{10i\cdot i}=-\frac{i}{10}.$$

9) Dado $R>1$ constante, considere C o arco cuja equação paramétrica é $z(t)=R\cos t+i(R\,\mathrm{sen}\,t)$, $0\le t\le\frac{\pi}{3}$. Mostre que $\left|\displaystyle\int_C \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z\right|\le\frac{\pi}{3}\left(\frac{R}{R^3-1}\right)$ e que $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_C \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z=0$.

Solução: O arco descrito no enunciado é um arco de circunferência de raio R:

$$x^2+y^2=(R\cos t)^2+(R\,\mathrm{sen}\,t)^2=R^2(\cos^2 t+\mathrm{sen}^2\,t)=R^2.$$

Seu comprimento L é igual ao raio multiplicado pelo ângulo central, ou seja, $L=R\cdot\frac{\pi}{3}$.

Em C, temos $|z|=R$ e, como $|a-b|\ge|a|-|b|$, temos que $|z^3+1|\ge|z^3|-1$ e que

$$\left|\frac{1}{z^3+1}\right|=\frac{1}{|z^3+1|}\le\frac{1}{|z|^3-1}=\frac{1}{R^3-1}=M.$$

Concluímos assim que

$$\left|\int_C \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z\right|\le ML=\left(\frac{R}{R^3-1}\right)\frac{\pi}{3},$$

de onde finalmente obtemos

$$\lim_{R\to\infty}\left[\left(\frac{R}{R^3-1}\right)\frac{\pi}{3}\right]=\lim_{R\to\infty}\left[\left(\frac{\frac{R}{R^3}}{\frac{R^3-1}{R^3}}\right)\frac{\pi}{3}\right]=\frac{\pi}{3}\left[\lim_{R\to\infty}\frac{\frac{1}{R^2}}{1-\frac{1}{R^3}}\right]=\frac{\pi}{3}\left(\frac{0}{1-0}\right)=0$$

que implica $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\int_C \frac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z=0$.

10) Sejam $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0$, $a_n\ne 0$, um polinômio de coeficientes complexos e grau n, sem raízes repetidas, e C um contorno simples fechado que envolve todas as raízes de $P(z)$. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{zP'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z=-\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

Solução: Sejam $r_1,r_2,\dots,r_n$ as n raízes de $P(z)$. Então $P(z)=a_n(z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)$. Aplicando a função logaritmo natural em ambos os lados, temos:

$$\ln P(z)=\ln[a_n(z-r_1)(z-r_2)\dots(z-r_n)]=\ln a_n+\ln(z-r_1)+\ln(z-r_2)+\cdots+\ln(z-r_n).$$

Derivando ambos os lados da equação com relação à variável z:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\ln P(z)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\ln a_n + \ln(z - r_1) + \ln(z - r_2) + \cdots + \ln(z - r_n)\right)$$
$$\Rightarrow \frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - r_1} + \frac{1}{z - r_2} + \cdots + \frac{1}{z - r_n}$$

Multiplicando todos os termos por z, dividindo por $2\pi i$ e calculando a integral em C, obtemos:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{zP'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{z}{z - r_1}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{z}{z - r_2}\,\mathrm{d}z + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{z}{z - r_n}\,\mathrm{d}z$$
$$= r_1 + r_2 + \cdots + r_n = \text{ soma das raízes de } P(z) = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

11) a) Se C é um caminho simples, fechado, orientado positivamente que é a fronteira de uma região plana R. Mostre que a área de R é dada por $A = \dfrac{1}{2i}\oint\limits_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$.

b) Usando essa fórmula, calcule a área da região delimitada pela elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{25} = 1$.

Solução: a) Se $z = x + iy$, então $\mathrm{d}z = \mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y$ e $\overline{z} = x - iy$, o que implica

$$A = \frac{1}{2i}\oint\limits_C \overline{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i}\oint\limits_C (x - iy)(\mathrm{d}x + i\,\mathrm{d}y) = \frac{1}{2i}\left[\oint\limits_C (x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y) + i\oint\limits_C (-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)\right]$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\iint\limits_R \underbrace{\left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y}\right)}_{0-0=0}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + i\iint\limits_R \underbrace{\left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y}\right)}_{1-(-1)=2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right] = \frac{1}{\cancel{2i}}\left[0 + \cancel{i}\iint\limits_R \cancel{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\right]$$
$$= \iint\limits_R \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \text{ área da região } R.$$

Note que foi utilizado a fórmula do Teorema de Green: $\oint\limits_C P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint\limits_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

b) Uma parametrização dessa elipse é $z = z(t) = \underbrace{2\cos t}_{x(t)} + i(\underbrace{5\operatorname{sen} t}_{y(t)})$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Daí, $\overline{z} = 2\cos t - 5i\operatorname{sen} t$ e $\mathrm{d}z = (-2\operatorname{sen} t + 5i\cos t)\,\mathrm{d}t$. Substituindo na fórmula, temos

$$A = \frac{1}{2i}\oint\limits_C \overline{z}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}(2\cos t - 5i\operatorname{sen} t)(-2\operatorname{sen} t + 5i\cos t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}[(-4\cos t\operatorname{sen} t + 25\operatorname{sen} t\cos t) + i(10\cos^2 t + 10\operatorname{sen}^2 t)]\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}[21\cos t\operatorname{sen} t + 10i]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\int_0^{2\pi}\left[\frac{21\operatorname{sen} 2t}{2} + 10i\right]\mathrm{d}t = \frac{1}{2i}\left[\frac{-21\cos 2t}{4} + 10it\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{2i}\left[\cancel{-\frac{21\cos 2\pi}{4}} + \cancel{\frac{21\cos 0}{4}} + 10i(2\pi - 0)\right] = \frac{10\pi\cdot\cancel{2i}}{\cancel{2i}} = 10\pi.$$

12) Seja f uma função inteira tal que $\operatorname{Im}(f) = v(x, y)$ não muda de sinal em $\mathbb{R}^2$. Mostre que f é constante.

Solução: Suponhamos $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ e $v(x,y) < 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Consideremos a função inteira

$$g(z) = e^{-if(z)} = e^{-iu(x,y)+v(x,y)} = e^{v(x,y)}(\cos u(x,y) - i \operatorname{sen} u(x,y)).$$

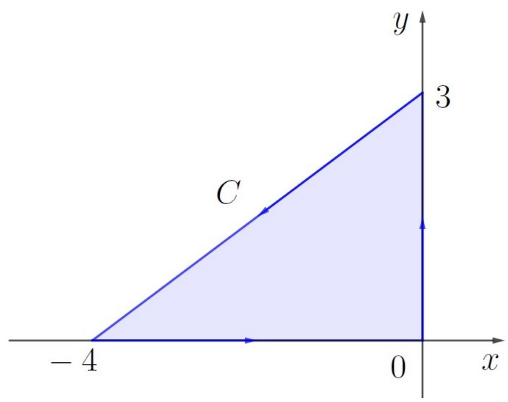
Como $|\cos u(x,y) - i \operatorname{sen} u(x,y)| = \cos^2 u(x,y) + \operatorname{sen}^2 u(x,y) = 1$ e $0 < e^{v(x,y)} < e^0 = 1$, temos que $|g(z)| = |e^{v(x,y)}| \cdot |\cos u(x,y) - i \operatorname{sen} u(x,y)| < 1$, ou seja, $g(z)$ é limitada e daí, pelo Teorema de Liouville, g é uma função constante, e daí, $f(z) = \dfrac{\ln g(z)}{-i}$ também é constante.

Se $v(x,y) > 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, consideramos

$$h(z) = e^{if(z)} = e^{iu(x,y)-v(x,y)} = e^{-v(x,y)}(\cos u(x,y) + i \operatorname{sen} u(x,y)).$$

Como h é inteira e $|h(z)| < 1$, temos que h é constante, e daí, $f(z) = \dfrac{\ln h(z)}{i}$ também é constante.

13) Se C for o triângulo de vértices 0, $3i$ e -4, orientado no sentido anti-horário,



sem calcular a integral, mostre que

$$\left| \oint_C (e^z - \overline{z})\, \mathrm{d}z \right| \leq 60.$$

Solução: O caminho C é um triângulo retângulo com catetos medindo 3 e 4. Logo, a hipotenusa é igual a 5 e o seu perímetro é $L = 3 = 4 + 5 = 12$.

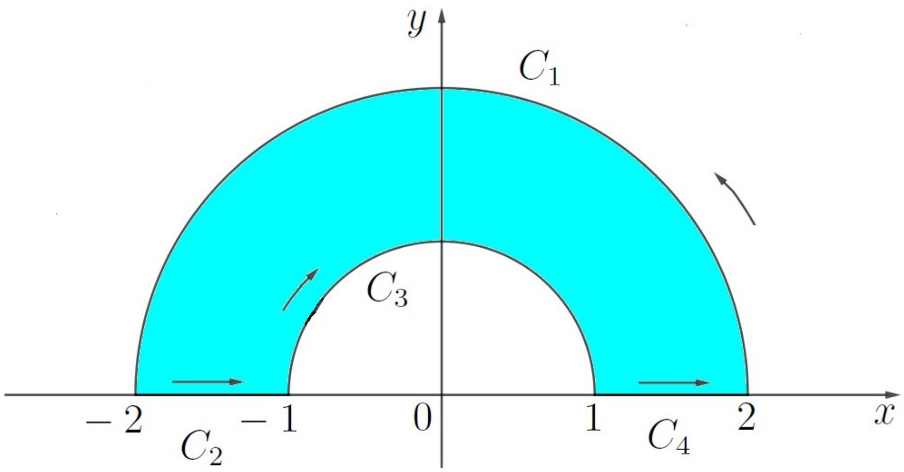
Se $z = x + iy$, então $\overline{z} = x - iy$ e $e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$. A partir daí, $|\overline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $|e^z| = e^x \cdot (\cos^2 y + \operatorname{sen}^2 y) = e^x$. Em C, o maior valor que e^x pode assumir é e^0 que é igual a 1 e o maior valor que $\sqrt{x^2 + y^2}$ assume (ou seja, o ponto mais distante da origem) é igual a 4. Logo, pela desigualdade triangular, obtemos a seguinte cota superior para o módulo de $f(z) = e^z + \overline{z}$:

$$|e^z + \overline{z}| \leq |e^z| + |\overline{z}| = 1 + 4 = 5.$$

Concluímos assim que

$$\left| \oint_C (e^z - \overline{z})\, \mathrm{d}z \right| \leq 5 \cdot 12 = 60.$$

14) Calcule a integral $\displaystyle\oint_C \frac{z}{\overline{z}}\, \mathrm{d}z$, onde C é a fronteira da região da figura.



Solução: $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4$, onde C_1, C_2, C_3 e C_4 têm as seguintes parametrizações:

- C_1: $z(t) = 2e^{it}$, $0 \leq t \leq \pi \Rightarrow \overline{z} = 2e^{-it}$ e $\mathrm{d}z = 2ie^{it}\,\mathrm{d}t$
- C_2: $z(t) = t$, $-2 \leq t \leq -1 \Rightarrow \overline{z} = t$ e $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$
- C_3: $z(t) = e^{-it}$, $-\pi \leq t \leq 0 \Rightarrow \overline{z} = e^{it}$ e $\mathrm{d}z = -ie^{-it}\,\mathrm{d}t$
- C_4: $z(t) = t$, $1 \leq t \leq 2 \Rightarrow \overline{z} = t$ e $\mathrm{d}z = \mathrm{d}t$

Calculamos agora as seguintes integrais:

- $\displaystyle\int_{C_1} \frac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{\cancel{2}e^{it}}{\cancel{2}e^{-it}} \cdot 2ie^{it}\,\mathrm{d}t = 2i\int_0^{\pi} e^{3it}\,\mathrm{d}t = 2\cancel{i}\left[\frac{e^{3it}}{3\cancel{i}}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}[e^{3\pi i} - e^0] = \frac{2}{3}[-1-1] = -\frac{4}{3}$
- $\displaystyle\int_{C_2} \frac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z = \int_{-2}^{-1} \frac{t}{t} \cdot 1\,\mathrm{d}t = \int_{-2}^{-1} \mathrm{d}t = -1-(-2) = 1$
- $\displaystyle\int_{C_3} \frac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} \frac{e^{-it}}{e^{it}} \cdot (-i)e^{-it}\,\mathrm{d}t = -i\int_{-\pi}^{0} e^{-3it}\,\mathrm{d}t = \cancel{-i}\left[\frac{e^{-3it}}{3\cancel{(-i)}}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1}{3}[e^0 - e^{-3\pi i}] = \frac{2}{3}$
- $\displaystyle\int_{C_4} \frac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z = \int_1^2 \frac{t}{t} \cdot 1\,\mathrm{d}t = \int_1^2 \mathrm{d}t = 2-1 = 1$

Portanto, $\displaystyle\oint_C \frac{z}{\overline{z}}\,\mathrm{d}z = -\frac{4}{3} + 1 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{4}{3}$.

Observação: Como o resultado da integral de $f(z) = \frac{z}{\overline{z}}$ sobre o caminho fechado C deu um resultado diferente de 0, temos que f não é analítica nessa região. Se f fosse analítica, como por exemplo $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ ou $f(z) = \frac{z^5+4z^2+7}{z^3}$, então teríamos $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

15) Mostre que se C é uma circunferência de raio $R > 0$ e centro na origem e $|a| \neq R$, então

$$\left|\oint_C \frac{1}{|z-a|\cdot|z+a|}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}.$$

Solução: Usando a desigualdade $|a+b| \geq ||a|-|b||$, temos

$$|z-a|\cdot|z+a| = |(z-a)(z+a)| = |z^2-a^2| \geq ||z^2|-|a^2|| = ||z|^2-|a|^2|.$$

Em C temos $|z| = R$ e daí, $||z+a| \cdot |z-a|| \leq |R^2 - |a|^2||$ o que implica $\frac{1}{|z-a| \cdot |z+a|} \leq \frac{1}{|R^2 - |a|^2|} = M$. O comprimento de C é $L = 2\pi R$. Concluímos dessa forma que

$$\left| \oint_C \frac{1}{|z-a| \cdot |z+a|} \, \mathrm{d}z \right| \leq ML = \frac{2\pi R}{|R^2 - |a|^2|}$$

5 Séries, singularidades, resíduos e integrais

5.1 Séries de Taylor e de MacLaurin

Se $f(z)$ for analítica em um círculo com centro em $z = z_0$, então para todo z pertencente ao círculo é válida a seguinte representação de $f(z)$ em série de potências de $(z - z_0)$:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \frac{f'''(z_0)}{3!}(z - z_0)^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n.$$

Esse é o desenvolvimento em série de Taylor ou de MacLaurin (se $z_0 = 0$).

5.2 Séries de potências básicas

Algumas séries de MacLaurin básicas estão listadas a seguir. Essas séries podem ser usadas para obtenção de outras séries através de operações ou substituições realizadas com seus termos.

- Série geométrica: $\dfrac{1}{1 - z} = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \cdots + z^n + \ldots,$ se $|z| < 1$
- Exponencial: $e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^4}{4!} + \cdots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots,$ se $z \in \mathbb{C}$
- Seno: $\operatorname{sen} z = z - \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} - \dfrac{z^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$ se $z \in \mathbb{C}$
- Seno hiperbólico: $\operatorname{sen} z = z + \dfrac{z^3}{3!} + \dfrac{z^5}{5!} + \dfrac{z^7}{7!} + \cdots + \dfrac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots,$ se $z \in \mathbb{C}$
- Cosseno: $\cos z = 1 - \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} - \dfrac{z^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$ se $z \in \mathbb{C}$
- Cosseno hiperbólico: $\cos z = 1 + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^4}{4!} + \dfrac{z^6}{6!} + \cdots + \dfrac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots,$ se $z \in \mathbb{C}$ 33
- Arco-tangente: $\operatorname{arctg} z = z - \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^5}{5} - \dfrac{z^7}{7} + \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots,$ se $|z| < 1$
- Logaritmo natural: $\ln(1 + z) = z - \dfrac{z^2}{2} + \dfrac{z^3}{3} - \dfrac{z^4}{4} + \cdots + (-1)^n \dfrac{z^{n+1}}{n+1} + \ldots,$ se $|z| < 1$
- Série binomial: $(1 + z)^m = 1 + mz + \frac{m(m-1)}{2!}z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}z^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{4!}z^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{5!}z^5 + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)}{n!} + \ldots,$ se $|z| < 1$

5.3 Raio de convergência e operações com séries

O raio r do disco de convergência de uma série de potências $\displaystyle\sum_{k=s}^{\infty} c_k(z - z_0)^k$ pode ser calculado de várias formas, inclusive pela fórmula

$$r = \lim_{k \to \infty} \left| \frac{c_k}{c_{k+1}} \right|.$$

Diversas operações podem ser realizadas com uma série de potências sem alteração no disco de convergência. Por exemplo, dada uma série, podemos calcular derivadas ou calcular integrais de todos seus termos que o disco de convergência se mantém inalterado.

5.4 Séries de Laurent e singularidades

Uma singularidade de uma função $f(z)$ é um ponto $z = z_0$ no qual f não é analítica nele. Se f é analítica em todo ponto de uma região exceto em $z = z_0$, então z_0 chama-se uma singularidade isolada. Por exemplo, $z = 2$ é uma singularidade isolada da função $f(z) = \dfrac{z^2+8z+11}{(z-2)^3}$.

Se $f(z)$ é analítica sobre em uma coroa circular $r < |z - z_0| < R$ com centro em $z = z_0$, então $f(z)$ pode ser representada por uma série do tipo

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}}_{\text{parte principal}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n}_{\text{parte analítica}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n,$$

onde os coeficientes a_n, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \cdots$ são dados por $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z$. Esse tipo de série é chamado série de Laurent[5] de $f(z)$ em torno de $z = z_0$.

Para obter o desenvolvimento de uma função em série de Laurent, muitas vezes usamos algum desenvolvimento em série que seja previamente conhecido, e, a partir dele, realizamos operações de adição, multiplicação, divisão, derivação, integração etc. para obtermos o desenvolvimento desejado. Por exemplo, para obter o desenvolvimento em série de Laurent de $f(z) = z^2\cos(\frac{1}{z})$ em torno da singularidade $z = 0$, o caminho mais fácil é substituir z por $\frac{1}{z}$ na série de MacLaurin de $\cos z$, e depois multiplicar a série por z^2; obtemos dessa forma que:

$$f(z) = z^2\cos\left(\frac{1}{z}\right) = z^2\left[1 - \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \frac{1}{4!}\left(\frac{1}{z}\right)^4 - \frac{1}{6!}\left(\frac{1}{z}\right)^6 + \cdots\right] = z^2 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!z^2} - \frac{1}{6!z^4} + \cdots$$

As singularidades de uma função podem ser de três tipos:

- Se $z = z_0$ for uma singularidade de uma função $f(z)$ e todos os coeficientes da parte principal da série de Laurent em torno de z_0 forem nulos (ou seja, $a_{-n} = 0$ para todo $n > 0$), então $z = z_0$ é uma singularidade removível. Por exemplo, $z = 0$ é uma singularidade removível da função $f(z) = \frac{\operatorname{sen} z}{z}$ porque seu desenvolvimento em série em torno de $z = 0$ não tem potências negativas de z: $f(z) = \frac{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \cdots$

- Se a série de Laurent de $f(z)$ só tem uma quantidade finita de potências negativas de $(z - z_0)$, então $z = z_0$ é denominado um pólo de f. A ordem do pólo é o maior módulo dos expoentes negativos das potências de $(z - z_0)$. Por exemplo, se $f(z) = \frac{\cos 3z}{z^4}$ então $f(z) = \frac{1 - \frac{(3z)^2}{2!} + \frac{(3z)^4}{4!} - \frac{(3z)^6}{6!} + \cdots}{z^4} = \frac{1}{z^4} - \frac{9}{4z^2} + \frac{27}{8} - \frac{81z^2}{80} + \ldots$ de onde concluímos que $z = 0$ é um pólo de ordem 4.

- Se a série de Laurent de $f(z)$ tem uma infinidade de potências negativas de $(z - z_0)$, então $z = z_0$ é denominado uma singularidade essencial de f. Por exemplo, se $f(z) = e^{1/z}$, então $f(z) = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \cdots$; por isso $z = 0$ é uma singularidade essencial.

[5]Pierre Alphonse Laurent (1813-1854), matemático francês.

5.5 Resíduos

O coeficiente a_{-1} do desenvolvimento em série de Laurent de $f(z)$ em torno de $z = z_0$ é chamado resíduo de $f(z)$ e é denotado por $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$.

Por exemplo, o desenvolvimento em série de Laurent de $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ em torno de $z = 0$ é dado por

$$f(z) = \frac{\cos z}{z^3} = \frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots}{z^3} = \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z} + \frac{z}{4!} - \frac{z^3}{6!} + \cdots$$

Como o coeficente do termo em $1/z$ é $-1/2$, temos que $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{2}$.

Se $z = z_0$ for um pólo simples (ordem 1) de $f(z)$, então

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z),$$

e, em geral, se $z = z_0$ for um pólo de ordem m de $f(z)$, então

$$\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

Ainda com relação ao exemplo da função $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$, temos que $z = 0$ é um pólo de ordem 3 de $f(z)$ e, por isso, seu resíduo nesse ponto é dado por

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z \to 0} \frac{d^2}{dz^2} \left[\cancel{z^3} \frac{\cos z}{\cancel{z^3}} \right] = \frac{1}{2} \lim_{z \to 0} (-\cos z) = -\frac{1}{2},$$

que coincide com o resultado que foi observado anteriormente, a partir da série de Laurent.

5.6 Teorema dos Resíduos

Se $f(z)$ for analítica no interior e na fronteira de uma região R delimitada por um caminho simples fechado C, exceto em um número finito de singularidades z_k, $k = 1, \cdots, n$, situadas no interior de R, então

$$\oint_C f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) + \cdots + \operatorname*{Res}_{z=z_n} f(z) \right) = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Observação: Se as singularidades z_k forem denotadas por $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}$, então a fórmula anterior fica na forma $\oint_C f(z)\, \mathrm{d}z = 2\pi i (\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \cdots + \operatorname*{Res}_{z=z_{n-1}} f(z)) = 2\pi i \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$.

6 Exercícios resolvidos

1) Determine a série de Laurent com centro em z_0, o resíduo nesse ponto e determine a região de convergência para cada uma das funções:

a) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z - \frac{\pi}{4})^3}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$ b) $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$ c) $f(z) = \dfrac{2z^2 + 1}{z^3 - 4z}$, $z_0 = 2$

Solução: a) Inicialmente, fazemos $z = z - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$ e usamos a fórmula do seno da soma:

$$\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}((\underbrace{z - \frac{\pi}{4}}_{a}) + \underbrace{\frac{\pi}{4}}_{b}) = \underbrace{\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{4})}_{\operatorname{sen} a} \underbrace{\cos \frac{\pi}{4}}_{\cos b} + \underbrace{\cos(z - \frac{\pi}{4})}_{\cos a} \underbrace{\operatorname{sen} \frac{\pi}{4}}_{\operatorname{sen} b} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\operatorname{sen}(z - \frac{\pi}{4}) + \cos(z - \frac{\pi}{4}) \right)$$

Depois, substituímos $\alpha = z - \frac{\pi}{4}$ nas séries de Taylor para $\operatorname{sen} \alpha$ e $\cos \alpha$:

$$f(z) = \frac{1}{(z-\frac{\pi}{4})^3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left[\underbrace{(z - \frac{\pi}{4}) - \frac{(z-\frac{\pi}{4})^3}{3!} + \frac{(z-\frac{\pi}{4})^5}{5!} + \cdots}_{\operatorname{sen}(z-\frac{\pi}{4})} + \underbrace{1 - \frac{(z-\frac{\pi}{4})^2}{2!} + \frac{(z-\frac{\pi}{4})^4}{4!} - \cdots}_{\cos(z-\frac{\pi}{4})} \right]$$

e daí obtemos a série de $f(z)$ em torno de $\frac{\pi}{4}$:

$$f(z) = \frac{\sqrt{2}}{2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3} + \frac{\sqrt{2}}{2\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2} - \frac{\sqrt{2}}{4\left(z-\frac{\pi}{4}\right)} - \frac{\sqrt{2}}{12} + \frac{\sqrt{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}{48} + \frac{\sqrt{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^2}{240} - \frac{\sqrt{2}\left(z-\frac{\pi}{4}\right)^3}{1440} + \cdots$$

O resíduo de $f(z)$ em $\frac{\pi}{4}$ é o coeficiente do termo que contém $\frac{1}{z-\frac{\pi}{4}}$ na série: $\operatorname*{Res}_{z=\frac{\pi}{4}} f(z) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$

A região de convergência é todo o plano complexo, com exceção apenas do ponto $z = \frac{\pi}{4}$.

b) Fazemos $z = z - 1 + 1$, usamos que $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ e o desenvolvimento em série de Taylor de e^α, com $\alpha = z - 1$:
$e^z = e^{z-1+1} = e^{z-1} \cdot e^1 = e \cdot e^{z-1} = e\left(1 + (z-1) + \frac{(z-1)^2}{2!} + \frac{(z-1)^3}{3!} + \frac{(z-1)^4}{4!} + \frac{(z-1)^5}{5!} + \cdots\right)$, e daí

$$f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{(z-1)^2} + \frac{e}{z-1} + \frac{e}{2!} + \frac{e(z-1)}{3!} + \frac{e(z-1)^2}{4!} + \frac{e(z-1)^3}{5!} + \cdots$$

O resíduo de $f(z)$ em 1 é o coeficiente do termo $\frac{e}{z-1}$ da série: $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = e$

A região de convergência é todo o plano complexo, com exceção apenas do ponto $z = 1$.

c) Fatorando o denominador da fração, obtemos: $z^3 - 4z = z(z^2-4) = z(z+2)(z-2)$ e separando em frações parciais: $\frac{2z^2+1}{z^3-4z} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z+2} + \frac{C}{z-2}$ que equivale a

$$2z^2 + 1 = A(z+2)(z-2) + Bz(z-2) + Cz(z+2).$$

Substituindo $z = 0$, $z = 2$ e $z = -2$ nessa equação, obtemos os valores $A = -\frac{1}{4}$, $B = C = \frac{9}{8}$, e daí

$$\frac{2z^2+1}{z^3-4z} = -\frac{1}{4z} + \frac{9}{8(z+2)} + \frac{9}{8(z-2)}$$

Usando a série geométrica $\frac{1}{1+\alpha} = 1 - \alpha + \alpha^2 - \alpha^3 + \alpha^4 - \cdots$, se $|\alpha| < 1$, obtemos os desenvolvimentos das funções $\frac{1}{z}$ e $\frac{1}{z+2}$ em torno de $z = 2$:

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{2+z-2} = \frac{1}{2(1+\frac{z-2}{2})} = \frac{1}{2} \cdot \left[1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{2}\right)^3 + \left(\frac{z-2}{2}\right)^4 - \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{(z-2)}{4} + \frac{(z-2)^2}{8} - \frac{(z-2)^3}{16} + \frac{(z-2)^4}{32} - \cdots, \text{ se } \left|\frac{z-2}{2}\right| < 1,$$

$$\frac{1}{z+2} = \frac{1}{4+z-2} = \frac{1}{4(1+\frac{z-2}{4})} = \frac{1}{4} \cdot \left[1 - \frac{z-2}{4} + \left(\frac{z-2}{4}\right)^2 - \left(\frac{z-2}{4}\right)^3 + \left(\frac{z-2}{4}\right)^4 - \cdots\right]$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{(z-2)}{16} + \frac{(z-2)^2}{64} - \frac{(z-2)^3}{256} + \frac{(z-2)^4}{1024} - \cdots, \text{ se } \left|\frac{z-2}{4}\right| < 1,$$

Finalmente, obtemos o desenvolvimento de $f(z)$ em torno de $z = 2$:

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{4}\left[\frac{1}{2} - \frac{(z-2)}{4} + \frac{(z-2)^2}{8} - \frac{(z-2)^3}{16} + \frac{(z-2)^4}{32} - \cdots\right] \\
&\qquad + \frac{9}{8}\left[\frac{1}{4} - \frac{(z-2)}{16} + \frac{(z-2)^2}{64} - \frac{(z-2)^3}{256} + \frac{(z-2)^4}{1024} - \cdots\right] + \frac{9}{8(z-2)} \\
&= \frac{9}{8(z-2)} + \left(-\frac{1}{8} + \frac{9}{32}\right) + \left(\frac{1}{16} - \frac{9}{128}\right)(z-2) + \left(-\frac{1}{32} + \frac{9}{512}\right)(z-2)^2 + \left(\frac{1}{64} - \frac{9}{2048}\right)(z-2)^3 \\
&\qquad + \left(-\frac{1}{128} + \frac{9}{8192}\right)(z-2)^4 + \left(\frac{1}{256} - \frac{9}{32768}\right)(z-2)^5 + \cdots \\
&= \frac{9}{8(z-2)} + \frac{5}{32} - \frac{1}{128}(z-2) - \frac{1}{32} - \frac{7}{512}(z-2)^2 + \frac{23}{2048}(z-2)^3 - \frac{55}{8192}(z-2)^4 + \frac{119}{32768}(z-2)^5 - \cdots
\end{aligned}
$$

O resíduo de $f(z)$ em 2 é o coeficiente do termo $\frac{9}{8(z-2)}$ da série: $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z) = \frac{9}{8}$

A região de convergência é a interseção entre $z \neq 2$, $\left|\frac{z-2}{2}\right| < 1$ e $\left|\frac{z-2}{4}\right| < 1$, ou seja, é dada por $0 < |z-2| < 2$.

2) Determine os resíduos nos pontos singulares das seguintes funções:

a) $f(z) = \dfrac{z}{z^2+1}$ b) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ c) $f(z) = \dfrac{1}{z^4-1}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} z}$

Solução: a) Seja $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$. As raízes de $z^2+1 = 0$ são $z = \pm i$ e, por isso, $z^2+1 = (z+i)(z-i)$ de onde podemos observar que $\pm i$ são pólos simples de $f(z)$. Logo, seus resíduos são calculados pelos seguintes limites:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i}\frac{\cancel{(z-i)}z}{\cancel{(z-i)}(z+i)} = \frac{i}{2i} = \frac{1}{2},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i}\frac{\cancel{(z+i)}z}{\cancel{(z+i)}(z-i)} = \frac{-i}{-2i} = \frac{1}{2}.$$

Observação: Se f for uma função ímpar (ou seja, $f(-z) = -f(z)$, para todo z), então $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=-z_0} f(z)$

b) Consideremos $f(z) = \frac{1}{(z^2-1)^2}$. As raízes de $(z^2-1)^2 = 0$ são $z = \pm 1$ e, consequentemente, $(z^2-1)^2 = (z+1)^2(z-1)^2$ de onde podemos observar que ± 1 são pólos duplos de $f(z)$. Logo, seus resíduos são calculados da seguinte forma:

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left[\frac{\cancel{(z-1)^2}}{\cancel{(z-1)^2}(z+1)^2}\right] = \lim_{z\to 1}\frac{-2}{(z+1)^3} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2 f(z)\right] = \lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}\left[\frac{\cancel{(z+1)^2}}{\cancel{(z+1)^2}(z-1)^2}\right] = \lim_{z\to -1}\frac{-2}{(z-1)^3} = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}.$$

Observação: Se f for uma função par (ou seja, $f(-z) = f(z)$, para todo z), então $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=-z_0} f(z)$

c) Consideremos $f(z) = \frac{1}{z^4-1}$. As raízes de $z^4 - 1 = 0$ são $z = \pm 1$ e $z = \pm i$, e, consequentemente, $z^4 - 1 = (z+1)(z-1)(z-i)(z+i)$, de onde podemos observar que ± 1 e $\pm i$ são pólos simples de $f(z)$. Daí, seus resíduos são

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{\cancel{(z-1)}}{\cancel{(z-1)}(z+1)(z^2+1)} = \frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{\cancel{(z+1)}}{\cancel{(z+1)}(z-1)(z^2+1)} = -\frac{1}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i}(z-i)f(z) = \lim_{z\to i} \frac{\cancel{(z-i)}}{\cancel{(z-i)}(z+i)(z^2-1)} = \frac{1}{-4i} = \frac{i}{4},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z\to -i}(z+i)f(z) = \lim_{z\to -i} \frac{\cancel{(z+i)}}{\cancel{(z+i)}(z-i)(z^2-1)} = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}.$$

d) Sendo $f(z) = \frac{1}{\operatorname{sen} z}$, temos que as singularidades de f são as raízes da equação $\operatorname{sen} z = 0$, ou seja, são iguais a $z_k = k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}$.

A série de Taylor de $\operatorname{sen} z$ é $z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$ Fazendo uma divisão de 1 por $z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \cdots$ como se fosse uma divisão de polinômios, obtemos $\frac{1}{\operatorname{sen} z} = \frac{1}{z} + \frac{z}{6} + \frac{7z^3}{360} + \cdots$. Observamos dessa forma que $z = 0$ é um pólo simples da função. Pelo mesmo motivo, $z = k\pi$ também são pólos simples. Os resíduos nesses pontos podem ser calculados pelo seguinte limite:

$$\operatorname*{Res}_{z=k\pi} f(z) = \lim_{z\to k\pi}(z-k\pi)f(z) = \lim_{z\to k\pi} \frac{z-k\pi}{\operatorname{sen} z} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{z\to k\pi} \frac{1}{\cos z} = \frac{1}{\cos k\pi}$$

de onde podemos concluir que o resíduo de f no ponto $k\pi$ é igual a 1, se k for par, e é igual a -1, se k for ímpar.

3) Sendo C uma circunferência de centro na origem e raio $3/2$ orientada positivamente, calcule as seguintes integrais usando o Teorema dos Resíduos:

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1+e^z}{z^3 - 6z^2 + 5z}\,dz$ b) $\displaystyle\oint_C \frac{(z+4)^3}{z^4 + 5z^3 + 6z^2}\,dz$ c) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{1-\cos z}\,dz$ d) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}\,dz$

Solução: a) Seja $f(z) = \dfrac{1+e^z}{z^3 - 6z^2 + 5z}$. As raízes de $z^3 - 6z^2 + 5z = z(z^2 - 6z + 5) = 0$ são 0, 1 e 5 e são pólos simples. Como $z = 5$ está no exterior de C, calculamos os resíduos somente nos pontos 0 e 1:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{\cancel{z}(1+e^z)}{\cancel{z}(z^2-6z+5)} = \frac{2}{5},$$

$$\operatorname*{Res}_{z=1} f(z) = \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1} \frac{\cancel{(z-1)}(1+e^z)}{\cancel{(z-1)}z(z-5)} = \frac{1+e}{-4} = -\frac{1+e}{4}.$$

A partir desses resultados, temos a seguinte conclusão:

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=1} f(z) \right) = 2\pi i \left(\frac{2}{5} - \frac{1+e}{4} \right) = \frac{(3-5e)\pi i}{10}$$

b) Seja $f(z) = \dfrac{(z+4)^3}{z^4 + 5z^3 + 6z^2}$. As raízes de $z^4 + 5z^3 + 6z^2 = z^2(z^2 + 5z + 6) = 0$ são 0, 0, -2 e -3. Somente $z = 0$ está no interior de C. Calculamos o resíduo em $z = 0$ que é um pólo duplo:

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz}(z^2 f(z)) = \lim_{z\to 0} \frac{d}{dz} \left[\frac{\cancel{z^2}(z+4)^3}{\cancel{z^2}(z^2+5z+6)} \right]$$

$$= \lim_{z\to 0} \frac{3(z+4)^2(z^2+5z+6) - (z+4)^3(2z+5)}{(z^2+5z+6)^2} = \frac{3\cdot 4^2 \cdot 6 - 4^3 \cdot 5}{6^2} = -\frac{8}{9}.$$

A partir desse resultado, concluímos que

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)\right) = 2\pi i \left(-\frac{8}{9}\right) = -\frac{16\pi i}{9}$$

Observação: o cálculo do resíduo de f em $z = 0$ também pode ser calculado observando-se o desenvolvimento em série de Laurent de f em torno de 0. Para isso, basta efetuar uma operação semelhante à divisão do polinômio $(4+z)^3 = 64 + 48z + 12z^2 + z^3$ por $6z^2 + 5z^3 + z^4$:

$$f(z) = \frac{32}{3z^2} - \frac{8}{9z} + \frac{26}{27} - \frac{79z}{162} + \frac{239z^2}{972} - \cdots$$

Para efetuar a divisão, é importante que os polinômios estejam ordenados segundo as potências crescentes da variável z. No final, observamos o coeficente do termo $-\frac{8}{9z}$ e chegamos à conclusão de que $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = -\dfrac{8}{9}$.

c) Seja $f(z) = \dfrac{1}{1-\cos z}$. As raízes de $1 - \cos z = 0$ são da forma $z = 2k\pi$, como $k \in \mathbb{Z}$. Dentre elas, a única que está no interior de C é $z = 0$; por isso, calculamos o resíduo de f somente nesse ponto.

A série de Laurent de $f(z)$ em torno de $z = 0$ é

$$f(z) = \frac{1}{1-\cos z} = \frac{1}{1-(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\frac{z^6}{6!}+\cdots)} = \frac{1}{\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\frac{z^6}{720}-\cdots}$$

Dividindo 1 por $\frac{z^2}{2}-\frac{z^4}{24}+\frac{z^6}{720}-\cdots$ como se fosse uma divisão de polinômios, obtemos

$$f(z) = \frac{2}{z^2} + \frac{1}{6} + \frac{z^2}{120} + \frac{z^4}{3024} + \cdots$$

de onde podemos concluir que $z = 0$ é um pólo de ordem 2 de f e que tem resíduo nulo nesse ponto. Portanto, a integral de $f(z)$ ao longo do caminho C é igual a $2\pi i \cdot 0 = 0$.

d) Consideremos $f(z) = \dfrac{e^z}{\operatorname{sen} z}$. As raízes de $senz = 0$ são da forma $z = k\pi$, como $k \in \mathbb{Z}$. Dentre elas, as únicas que está no interior de C é $z = 0$; sendo assim, calculamos o resíduo de f nesse ponto.

A série de Laurent de $f(z)$ em torno de $z = 0$ é $f(z) = \frac{e^z}{\operatorname{sen} z} = \frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\cdots}{z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\frac{z^7}{7!}+\cdots}$. Dividindo o numerador pelo denominador como se fossem polinômios, obtemos

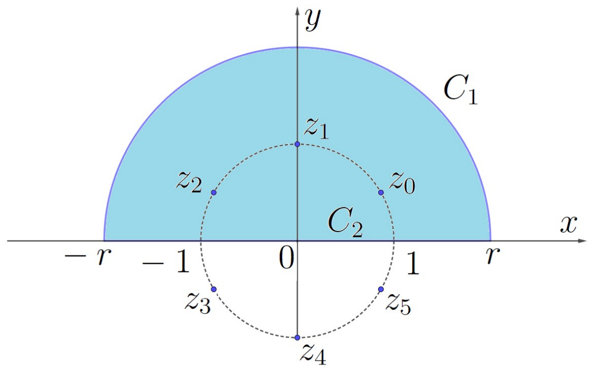
$$f(z) = \frac{1}{z} + 1 + \frac{2z}{3} + \frac{z^2}{3} + \frac{13z^3}{90} + \cdots$$

de onde podemos concluir que $z = 0$ é um pólo simples de f e que tem resíduo igual a 1 nesse ponto. Portanto, $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$.

4) Calcule a integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$.

Solução: As raízes de $x^6 + 1 = 0$ são as raízes sextas de -1 que são iguais a $\sqrt[6]{-1} = \sqrt[6]{\cos\pi + i \operatorname{sen}\pi} = \cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\operatorname{sen}\frac{\pi+2k\pi}{6} = z_k$, com $k = 0, 1, \ldots, 5$, ou seja, são iguais a $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_1 = i$, $z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$, $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, $z_4 = -i$ e $z_5 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$.

Consideremos a integral da função $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$ calculada sobre a fronteira $C = C_1 \cup C_2$ do semi-círculo superior de centro na origem e raio igual a $r > 1$, percorrido no sentido positivo.



Somente as raízes z_0, z_1 e z_2 estão contidas no interior de C. Logo,

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z)\right)$$

Cada uma das raízes z_k é um pólo simples (ordem 1) de $f(z)$. Logo,

- $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{z-z_0}{z^6+1} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{z\to z_0}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6z_0^5} = \frac{z_0}{6z_0^6} = \frac{z_0}{-6} = -\frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}$
- $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z\to z_1}(z-z_1)f(z) = \lim_{z\to z_1}\frac{z-z_1}{z^6+1} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{z\to z_1}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6z_1^5} = \frac{z_1}{6z_1^6} = \frac{z_1}{-6} = -\frac{i}{6}$
- $\operatorname*{Res}_{z=z_2} f(z) == \lim_{z\to z_2}(z-z_2)f(z) = \lim_{z\to z_2}\frac{z-z_2}{z^6+1} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{z\to z_2}\frac{1}{6z^5} = \frac{1}{6z_2^5} = \frac{z_2}{6z_2^6} = \frac{z_2}{-6} = \frac{\sqrt{3}}{12} - \frac{i}{12}$

de onde obtemos $\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\cancel{-\frac{\sqrt{3}}{12}} - \frac{i}{12} - \frac{i}{6} + \cancel{\frac{\sqrt{3}}{12}} - \frac{i}{12}\right) = 2\pi i\cdot(-\frac{i}{3}) = \frac{2\pi}{3}$.

Por outro lado,

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{C_1}\frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z + \int_{-r}^{r}\frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi}{3}.$$

Como $\left|\int_{C_1}\frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{1}{|z|^6-1}\cdot(\text{comprimento de } C_1) = \frac{1}{r^6-1}\cdot\pi r = \frac{\pi r}{r^6-1}$, fazendo $r\to\infty$ temos $\lim_{r\to\infty}\frac{\pi r}{r^6-1} = 0$ que implica $\lim_{r\to\infty}\int_{C_1}\frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z = 0$. Concluímos assim que

$$\lim_{r\to\infty}\left[\int_{C_1}\frac{1}{z^6+1}\,\mathrm{d}z + \int_{-r}^{r}\frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x\right] = 0 + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{x^6+1}\,\mathrm{d}x = \lim_{r\to\infty}\frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}.$$

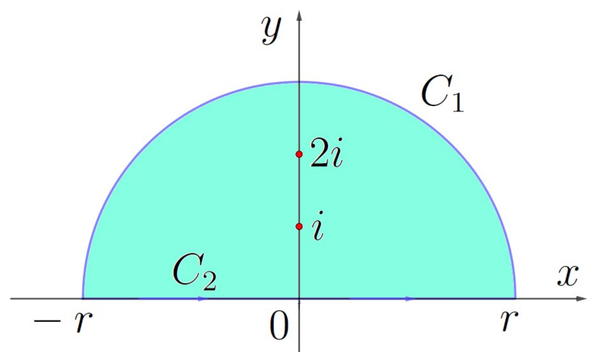
Observação: Pode ser calculado por um processo semelhante ao mostrado acima toda integral da forma $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$, onde $p(x)/q(x)$ é uma função par, $p(x)$ e $q(x)$ são polinômios tais que o grau de $q(x)$ é pelo menos 2 unidades maior que o grau de $p(x)$ e as raízes de $q(x)=0$ não são reais.

5) Calcule a integral imprópria $\int_0^{\infty}\frac{x\,\mathrm{sen}\,x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$.

Solução: Como $\dfrac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}$ é uma função par, temos que

$$\int_0^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Sejam $f(z) = \dfrac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}$ e $C = C_1 \cup C_2$ a fronteira do semicírculo $x^2+y^2=r^2,\ y \geq 0, r > 2$, percorrido no sentido positivo. Os pólos simples de $f(z)$ são $\pm i$ e $\pm 2i$ e somente $z_0 = i$ e $z_1 = 2i$ estão no interior de C.



Os resíduos de $f(z)$ nos pólos z_0 e z_1 são dados por

- $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{(z-z_0)\cdot ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{z-z_0}{z^4+5z^2+4}\cdot \lim\limits_{z\to z_0} ze^{iz} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{1}{4z^3+10z}\cdot z_0e^{iz_0}$
  $= \dfrac{z_0e^{iz_0}}{4z_0^3+10z_0} = \dfrac{ie^{-1}}{4i^3+10i} = \dfrac{\cancel{i}e^{-1}}{6\cancel{i}} = \dfrac{e^{-1}}{6} = \dfrac{1}{6e}$

- $\operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z) = \lim\limits_{z\to z_1} \dfrac{(z-z_1)\cdot ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)} = \lim\limits_{z\to z_1}\dfrac{z-z_1}{z^4+5z^2+4}\cdot \lim\limits_{z\to z_1} ze^{iz} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim\limits_{z\to z_1}\dfrac{1}{4z^3+10z}\cdot z_1e^{iz_1}$
  $= \dfrac{z_1e^{iz_1}}{4z_1^3+10z_1} = \dfrac{2ie^{-2}}{32i^3+20i} = \dfrac{2\cancel{i}e^{-2}}{-12\cancel{i}} = \dfrac{e^{-2}}{-6} = -\dfrac{1}{6e^2}$

e daí $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=z_1} f(z)\right) = 2\pi i\left(\frac{1}{6e} - \frac{1}{6e^2}\right) = 2\pi i\cdot(\frac{e-1}{6e^2}) = \frac{\pi i(e-1)}{3e^2}$.

Se $y \geq 0$, temos $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{-y+ix}| = |e^{-y}(\cos x + i \operatorname{sen} x)| = e^{-y} \leq 1$ e daí $\displaystyle\left|\int_{C_1}\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}z\right| \leq \frac{|z||e^{iz}|}{(|z|^2-1)(|z|^2-4))}\cdot(\text{comprimento de } C_1) = \frac{r\cdot 1}{(r^2-1)(r^2-4)}\cdot \pi r = \frac{\pi r^2}{r^4-5r^2+4}$.

Fazendo $r \to \infty$ temos $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\frac{\pi r^2}{r^4-5r^2+4} = 0$ que implica $\displaystyle\lim_{r\to\infty}\int_{C_1}\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}z = 0$ que resulta em

$$\lim_{r\to\infty}\left[\int_{C_1}\frac{ze^{iz}}{(z^2+1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}z + \int_{-r}^{r}\frac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\right] = 0 + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{xe^{ix}}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$$

$$= \lim_{r\to\infty}\frac{\pi i(e-1)}{3e^2} = \frac{\pi i(e-1)}{3e^2}.$$

e finalmente obtemos

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x(\cos x + i \operatorname{sen} x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi i(e-1)}{3e^2}$$

e daí

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \operatorname{Im}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\cos x + i \operatorname{sen} x)}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x\right] = \operatorname{Im}\left[\frac{\pi i(e-1)}{3e^2}\right] = \frac{\pi(e-1)}{3e^2}$$

de onde concluímos que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x \operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi(e-1)}{3e^2} = \frac{\pi(e-1)}{6e^2}.$$

Observação: As integrais do tipo $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\cos mx\,\mathrm{d}x$ ou $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\operatorname{sen} mx\,\mathrm{d}x$ podem ser calculadas de modo semelhante ao exercício anterior: partindo de $\oint_C F(z)e^{imz}\,\mathrm{d}z$, onde C é a fronteira do semicírculo superior de raio r e centro na origem. No final fazemos $r \to \infty$.

6) Calcule a integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$

Solução: No cálculo desse tipo de integral, é conveniente considerar o caminho C de integração como sendo a circunferência de centro na origem, raio igual a 1 e orientação positiva. Isso significa utilizar a parametrização $z = e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$. A partir daí, temos os seguintes resultados: $\mathrm{d}z = ie^{i\theta}\,\mathrm{d}\theta = iz\,\mathrm{d}\theta$, $\mathrm{d}\theta = \dfrac{\mathrm{d}z}{iz} = -i\dfrac{\mathrm{d}z}{z}$, $\cos\theta = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$.

Substituímos na integral a ser calculada:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \oint_C \frac{\frac{z+z^{-1}}{2}}{5+4(\frac{z+z^{-1}}{2})}\cdot\frac{-i}{z}\,\mathrm{d}z = \oint_C \frac{-i(z+z^{-1})}{z(4z+10+4z^{-1})}\,\mathrm{d}z = \frac{-i}{2}\cdot\oint_C \frac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)}\,\mathrm{d}z.$$

Seja $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z(2z^2+5z+2)}$. As raízes da equação $z(2z^2+5z+2)=0$ são 0, $-\frac{1}{2}$ e -2. Entre essas raízes, as que estão no interior de C são 0 e $-1/2$ o que implica

$$\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\left(\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-\frac{1}{2}} f(z)\right) = 2\pi i\left(\lim_{z\to 0}\frac{\cancel{z}(z^2+1)}{\cancel{z}(2z^2+5z+2)} + \lim_{z\to-\frac{1}{2}}\frac{\cancel{(z+\frac{1}{2})}(z^2+1)}{2z\cancel{(z+\frac{1}{2})}(z+2)}\right)$$

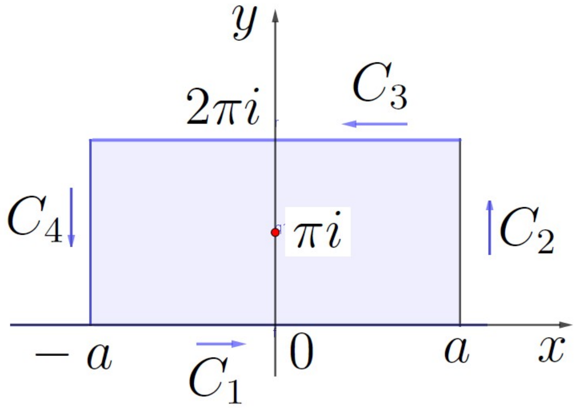
$$= 2\pi i\left(\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\right) = -\frac{2\pi i}{3}$$

e finalmente obtemos

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{5+4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta = \frac{-i}{2}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{-i}{2}\cdot\frac{-2\pi i}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

7) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{kx}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi}$, onde $0 < k < 1$. (*Sugestão: calcule uma integral no caminho fechado formado pelo retângulo de vértices* $-a$, a, $a+2\pi i$ *e* $-a+2\pi i$ *e depois faça* $a \to \infty$).

Solução: Consideremos a integral da função $f(z) = \dfrac{e^{kz}}{1+e^z}$ ao longo do retângulo de vértices $-a$, a, $a+2\pi i$, $-a+2\pi i$, orientado no sentido anti-horário:



As parametrizações dos lados desse retângulo são

- C_1: $z = t$, $-a \le t \le a$, $\mathrm{d}z \,=\, \mathrm{d}t$
- C_2: $z = a + ti$, $0 \le t \le 2\pi$, $\mathrm{d}z \,= i\,\mathrm{d}t\,$,
- C_3: $z = -t + 2\pi i$, $-a \le t \le a$, $\mathrm{d}z \,= -\,\mathrm{d}t$
- C_4: $z = -a - ti$, $-2\pi \le t \le 0$, $\mathrm{d}z \,= -i\,\mathrm{d}t$

As raízes da equação $e^z + 1 = 0$ são $\pm\pi i$, $\pm 3\pi i$, $\pm 5\pi i$, $\pm 7\pi i$, $\ldots$ Entre elas, a única que está no interior do caminho de integração é πi. Como

$$\operatorname*{Res}_{z=\pi i} f(z) = \lim_{z\to\pi i} \frac{(z-\pi i)e^{kz}}{1+e^z} = \lim_{z\to\pi i} \frac{z-\pi i}{1+e^z} \cdot \lim_{z\to\pi i} e^{kz} = \lim_{z\to\pi i} \frac{1}{e^z} \cdot e^{k\pi i} = \frac{e^{k\pi i}}{e^{\pi i}} = -e^{k\pi i},$$

temos $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (-e^{k\pi i})$. Por outro lado,

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z &= \int_{C_1} f(z)\,\mathrm{d}z \,+ \int_{C_2} f(z)\,\mathrm{d}z \,+ \int_{C_3} f(z)\,\mathrm{d}z \,+ \int_{C_4} f(z)\,\mathrm{d}z \\ &= \int_{-a}^{a} \frac{e^{kt}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \,+ i\int_0^{2\pi} \frac{e^{k(a+ti)}}{1+e^{a+ti}}\,\mathrm{d}t \,- \int_{-a}^{a} \frac{e^{k(-t+2\pi i)}}{1+e^{-t+2\pi i}}\,\mathrm{d}t \,- i\int_{-2\pi}^{0} \frac{e^{k(-a-ti)}}{1+e^{-a-ti}}\,\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$\text{Como } \left|\int_0^{2\pi} \frac{e^{k(a+ti)}}{1+e^{a+ti}}\,\mathrm{d}t\right| \le 2\pi \cdot \frac{|e^{k(a+ti)}|}{|e^{a+ti}|-1} = 2\pi \cdot \frac{\overbrace{e^{ka}}^{:\ e^a}}{\underbrace{e^a-1}_{:\ e^a}} = 2\pi \cdot \frac{e^{(k-1)a}}{1-e^{-a}} \to 0, \text{ se } a \to \infty,$$

$$\text{e } \left|\int_{-2\pi}^{0} \frac{e^{k(-a-ti)}}{1+e^{-a-ti}}\,\mathrm{d}t\right| \le 2\pi \cdot \frac{|e^{k(-a-ti)}|}{1-|e^{-a-ti}|} = 2\pi \cdot \frac{e^{-ka}}{1-e^{-a}} \to 0, \text{ se } a \to \infty,$$

temos

$$\lim_{a\to\infty} \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i \cdot (-e^{k\pi i}) = \lim_{a\to\infty} \left[\int_{-a}^{a} \frac{e^{kt}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \,- \underbrace{\int_{-a}^{a} \frac{e^{k(-t+2\pi i)}}{1+e^{-t+2\pi i}}\,\mathrm{d}t}_{\int_{-a}^{a} \frac{e^{k(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}}}\right]$$

e daí

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{a} \left(\frac{e^{kt}}{1+e^t} - \frac{e^{k(t+2\pi i)}}{1+e^t}\right)\,\mathrm{d}t \,= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{kt}}{1+e^t} - \frac{e^{k(t+2\pi i)}}{1+e^t}\right)\,\mathrm{d}t \,= 2\pi i \cdot (-e^{k\pi i})$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{kt}}{1+e^t}\left(1-e^{2k\pi i}\right)\,\mathrm{d}t \;= 2\pi i\cdot(-e^{k\pi i}) \;\Rightarrow\; (1-e^{2k\pi i})\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{kt}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \;= 2\pi i\cdot(-e^{k\pi i}),$$

e, finalmente,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{kt}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t \;= \frac{2\pi i\cdot e^{k\pi i}}{e^{2k\pi i}-1} = \frac{2\pi i\cdot \cancel{e^{k\pi i}}}{\cancel{e^{k\pi i}}(e^{k\pi i}-e^{-k\pi i})} = \frac{\pi}{\frac{e^{k\pi i}-e^{-k\pi i}}{2i}} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi}.$$

Observação: Foi utilizado uma mudança de variável $v=-t$ na integral $\int_{-a}^{a} \frac{e^{k(-t+2\pi i)}}{1+e^{-t+2\pi i}}\,\mathrm{d}t$ e obteve-se $\int_{-a}^{a} \frac{e^{k(-t+2\pi i)}}{1+e^{-t+2\pi i}}\,\mathrm{d}t \;= -\int_{a}^{-a} \frac{e^{k(v+2\pi i)}}{1+e^{v+2\pi i}}\,\mathrm{d}v \;= \int_{-a}^{a} \frac{e^{k(v+2\pi i)}}{1+e^{v+2\pi i}}\,\mathrm{d}v \;= \int_{-a}^{a} \frac{e^{k(t+2\pi i)}}{1+e^{t+2\pi i}}\,\mathrm{d}t$ e, depois, o fato de que $e^{2\pi i}=1$ que implica $e^{t+2\pi i}=e^t\cdot e^{2\pi i}=e^t$.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA
1^a LISTA DE EXERCÍCIOS – JUNHO/2019

1) Escreva os seguintes números na forma algébrica $a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$.
a) $(-2i)^{11}$ b) $\frac{i^{2019}+3i^{239}}{i^{101}}$ c) $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{2020}$ d) $\frac{(1+2i)^2-(\overline{1+i})^3}{(3+2i)^3-(2-i)^2}$ e) $\frac{(\overline{1-i})^9}{(1-i)^7}$ f) $\frac{\overline{1+i}}{i} - \frac{i}{i+1}$

2) Calcule todas as raízes complexas dos seguintes números:
a) $\sqrt{3-4i}$ b) $\sqrt{-15+8i}$ c) $\sqrt{-11+60i}$ d) $\sqrt[6]{-27}$ e) $\sqrt[4]{-4}$ f) $\sqrt[3]{2-2i}$
g) $\sqrt[5]{2+3i}$ h) $\sqrt[6]{1}$ i) $\sqrt[5]{32}$ j) $\sqrt[3]{-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i}$ k) $\sqrt[3]{i}$ l) $\sqrt[8]{\frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}}$

3) Sendo $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ dois pontos distintos fixados e $a \in \mathbb{R}_+^*$, interprete geometricamente o conjunto dos pontos $z \in \mathbb{C}$ que satisfazem:
a) $|z - z_1| = |z - z_2|$ b) $|z - z_1| = |\operatorname{Re} z|$ c) $|z - z_1| = |\operatorname{Im} z|$
d) $|z - z_1| + |z - z_2| = 2a$ e) $||z - z_1| - |z - z_2|| = 2a$ f) $|z - z_1| = a$

4) Faça um gráfico de todos os pontos do plano complexo que satisfazem:
a) $\operatorname{Im} \frac{z-1}{z+1} = 0$ b) $\operatorname{Re} \frac{z-1}{z+1} = 0$ c) $|z - i| + |z + i| < 4$
d) $|1 + z| < |1 - z|$ e) $\operatorname{Re} \frac{1}{z} < \frac{1}{2}$ f) $0 < \arg(\frac{i-z}{z+i}) < \frac{\pi}{2}$
g) $\frac{\pi}{4} < \arg(z + i) < \frac{\pi}{2}$ h) $|\pi - \arg\ z| < \frac{\pi}{4}$ i) $|\operatorname{Re} z| < 1$
j) $\operatorname{Im} z \leq 1$ k) $1 < |z - 1| < 3$ l) $0 < \arg\ z < \frac{\pi}{4}$

5) Determine todas as raízes complexas das seguintes equações:
a) $x^7 + 1 = 0$ b) $x^4 + 8x^2 - 9 = 0$ c) $x^6 - 11x^3 + 10 = 0$
d) $x^8 + x^4 = 2$ e) $x^4 - 16 = 0$ f) $x^3 = i$

6) Sendo $n > 1$ um número inteiro, mostre que:
a) $(1 + i)^n = 2^{n/2}(\cos \frac{n\pi}{4} + i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4})$ b) $1 - \frac{1}{3}\binom{n}{2} + \frac{1}{9}\binom{n}{4} - \frac{1}{27}\binom{n}{6} + \cdots = \frac{2^n}{3^{n/2}} \cos \frac{n\pi}{6}$
c) $(\sqrt{3} - i)^n = 2^n(\cos \frac{n\pi}{6} - i \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6})$ d) $\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \cdots = 2^{n/2} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{4}$
e) $1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \cdots = 2^{n/2} \cos \frac{n\pi}{4}$ f) $\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{9}\binom{n}{5} - \frac{1}{27}\binom{n}{7} + \cdots = \frac{2^n}{3^{(n-1)/2}} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{6}$

7) Se z_1 e z_2 são dois números complexos, mostre que
a) $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
b) $|z_1\overline{z_2} + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2)$
c) $|z_1\overline{z_2} - 1|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (|z_1|^2 - 1)(|z_2|^2 - 1)$

8) Se $\theta \in \mathbb{R}$, mostre que $\dfrac{1 + \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta}{1 + \operatorname{sen}\theta - i\cos\theta} = \operatorname{sen}\theta + i\cos\theta$ e deduza que

$(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}+i\cos\frac{\pi}{5})^5+(1+\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}-i\cos\frac{\pi}{5})^5=0.$

9) Mostre que $\cos\dfrac{2\pi}{11}+\cos\dfrac{4\pi}{11}+\cos\dfrac{6\pi}{11}+\cos\dfrac{8\pi}{11}+\cos\dfrac{10\pi}{11}=-\dfrac{1}{2}.$

10) Se a e $b\neq 0$ são dois números reais, mostre que

$$\sqrt{a+bi}=\pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+\frac{bi}{|b|}\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

11) Se n for um inteiro positivo, mostre que:

a) $\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}2x+\operatorname{sen}3x+\cdots+\operatorname{sen}nx=\dfrac{\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}\operatorname{sen}\frac{nx}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$

b) $\dfrac{1}{2}+\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cdots+\cos nx=\dfrac{\operatorname{sen}(n+\frac{1}{2})x}{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}}.$

c) $\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}3x+\operatorname{sen}5x-\cdots+(-1)^{n+1}\operatorname{sen}(2n-1)x=(-1)^{n+1}\dfrac{\operatorname{sen}2nx}{2\cos x}.$

d) $\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\cdots+\cos(2n-1)x=\dfrac{\operatorname{sen}2nx}{2\operatorname{sen}x}.$

12) Se $z\in\mathbb{C}$, mostre que $|z|\leq|\operatorname{Re}z|+|\operatorname{Im}z|\leq\sqrt{2}|z|.$

13) Simplifique $\dfrac{(5+i)^4(239-i)}{114244}$ e mostre que $\dfrac{\pi}{4}=4\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5}-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{239}$.

14) Mostre que $\cos 5x=16\cos^5 x-20\cos^3 x+5\cos x.$

15) a) Se $z,w\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}$ e $a,b\in\mathbb{R}$, mostre que $\overline{z^n}=\overline{z}^n$ e $\overline{az+bw}=a\overline{z}+b\overline{w}$;
b) Se z for uma raiz complexa de uma equação polinomial de coeficientes reais, mostre que $\overline{z}$ é raiz dessa mesma equação;
c) Resolva a equação $x^4-13x^3+63x^2-173x+182=0$, sabendo que uma das raízes é $2-3i$;
d) Determine uma equação polinomial de coeficientes reais que tenha $7+i$ e $-2+5i$ como duas de suas raízes.

16) Usando a definição com ϵ e δ, mostre que $f(z)=-4z+3$ é contínua em $2-i$.

17) Determine a, b e c para que $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$ seja inteira.

18) Mostre que $u(x,y)$ é harmônica e determine sua harmônica conjugada $v(x,y)$ em cada um dos seguintes casos:
a) $u(x,y) = -3x^2 + 3y^2 + x + 4$ b) $u(x,y) = x^2 - y^2 + xy$
c) $u(x,y) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3$ d) $u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

19) Determine o valor principal de cada uma das seguintes expressões:
a) $\operatorname{arctg} 2i$ b) $\arccos 2$ c) $\operatorname{arcsen} 10$ d) $\operatorname{sen}(1+i)$ e) $\cos(2-2i)$ f) $\ln(-4)$
g) $(1+i)^i$ h) $\cos(\pi i)$ i) $\operatorname{sen}\frac{\pi i}{4}$ j) $\ln i$ k) i^{1-i} l) $\operatorname{tg}\frac{\pi i}{3}$

20) Mostre que se $|\cos z| \leq 1$ para todo $z \in D$, então $|\operatorname{Im} z| \leq \ln(1+\sqrt{2})$.

21) Determine a parte real u e a parte imaginária v de cada uma das seguintes funções $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$:
a) $f(z) = -3iz^2$ b) $f(z) = \frac{1}{z^2}$ c) $f(z) = \frac{1-z}{1+z}$ d) $f(z) = z^2e^{2z}$ e)$f(z) = \operatorname{sen} 2z$

22) Mostre que: a) $\overline{\operatorname{sen} z} = \operatorname{sen}\overline{z}$ b) $\overline{\cos z} = \cos\overline{z}$ c) $\overline{\operatorname{tg} z} = \operatorname{tg}\overline{z}$

23) Mostre que $\operatorname{tg} z = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} + i\dfrac{\operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$.

24) Verifique que as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas para as funções:
a) $f(z) = -ie^{z^2}$ b) $f(z) = \cos 3z$ c) $f(z) = \operatorname{senh} 4z$ d) $f(z) = z^3 + iz$

25) a) Mostre que $u(x,y) = e^{-x}(x\operatorname{sen} y - y\cos y)$ é harmônica;
b) Determine v de tal modo que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ seja analítica;
c) Escreva f como função de $z = x + iy$.

26) Determine uma função analítica $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, sabendo que $u(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.

27) Mostre que $f'(z)$ não existe em nenhum ponto se
a) $f(z) = e^{\overline{z}}$; b) $f(z) = f(x+iy) = 2x + xy^2i$; c) $f(z) = 2x^2 + 5y^2 + 4i$.

28) Seja $f = u + iv$ analítica em uma região D aberta e conexa. Mostre que
a) Se a função conjugada $\overline{f} = u - iv$ também é analítica, então f é constante;
b) Se $|f| = u^2 + v^2$ for constante, então f também é constante;

c) Se $f(z)$ é real para todo $z \in D$, então f é constante.

29) Se u e v são harmônicas em uma região D aberta conexa, então $F(z) = F(x+iy) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) + i\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y}\right)$ é analítica.

30) Prove que as raízes da equação $z^5 + 2z + 4 = 0$ são exteriores ao círculo unitário $|z| \leq 1$.

31) Se $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ é analítica em $\mathbb{C}$, mostre que $|f'(z)|^2 = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA
2^a LISTA DE EXERCÍCIOS – AGOSTO/2019

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|^2\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é um caminho de $-i$ a i contido

a) no eixo imaginário; b) na parábola $y^2 = x + 1$;
c) na metade direita da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1;
d) na metade esquerda da circunferência de centro $(0, 0)$ e raio 1.

2) Calcule $\displaystyle\oint_C |z|^2\,\mathrm{d}z$ ao longo da elipse $z(t) = 5\cos t + 2i \operatorname{sen} t,\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$.

3) Sejam a e b tais que $0 < |a| < |b|$ e C uma circunferência de raio $R > 0$, centro na origem e orientação positiva. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{1}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z$ nos seguintes casos:

a) $R < |a|$ b) $|a| < R < |b|$ c) $|b| < R$

4) Se C é descrito por $z(t) = 2e^{it},\ \ 0 \leq t \leq 2\pi$, calcule:

a) $\displaystyle\oint_C \mathrm{Re}(z)\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\oint_C \mathrm{Re}(z)\,|\mathrm{d}z|$ c) $\displaystyle\oint_C \mathrm{Im}(z)\,\mathrm{d}z$ d) $\displaystyle\oint_C \mathrm{Im}(z)\,|\mathrm{d}z|$
e) $\displaystyle\oint_C |z-2|\,\mathrm{d}z$ f) $\displaystyle\oint_C |z-2|\,|\mathrm{d}z|$ g) $\displaystyle\oint_C \tfrac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$ h) $\displaystyle\oint_C \overline{z}^2\,\mathrm{d}z$

5) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{z^2+1}\,\mathrm{d}z$, sabendo que C é uma circunferência orientada positivamente, descrita por cada uma das seguintes equações:

a) $|z+i| = 1$ b) $|z-i| = \frac{1}{2}$ c) $|z+\frac{1}{2}+i| = 2$ d) $|z-\frac{1}{2}+i| = 1$ e) $|z-1| = 1$

6) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z^2}{z^4-1}\,\mathrm{d}z$, sabendo que C é uma circunferência orientada positivamente, descrita por cada uma das seguintes equações:

a) $|z+i| = 1$ b) $|z-i| = \frac{1}{2}$ c) $|z+\frac{1}{2}+i| = 2$ d) $|z-\frac{1}{2}+i| = 1$ e) $|z-1| = 1$

7) Seja C um quadrado que tem extremidades de uma das diagonais nos pontos $-1-i$ e $1+i$, descrito no sentido positivo. Calcule cada uma das seguintes integrais:

a) $\oint\limits_C \frac{1}{z}\,\mathrm{d}z$ b) $\oint\limits_C \frac{1}{z^2+4}\,\mathrm{d}z$ c) $\oint\limits_C \frac{1}{4z+i}\,\mathrm{d}z$ d) $\oint\limits_C \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z$ e) $\oint\limits_C \frac{e^{2z}}{z+2i}\,\mathrm{d}z$

f) $\oint\limits_C \frac{e^{2z}}{2z+i}\,\mathrm{d}z$ g) $\oint\limits_C \frac{e^{z^2}}{2z-i}\,\mathrm{d}z$ h) $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z}\,\mathrm{d}z$ i) $\oint\limits_C \frac{\operatorname{sen} z}{z}\,\mathrm{d}z$ j) $\oint\limits_C \frac{\operatorname{senh} 2z}{z}\,\mathrm{d}z$

k) $\oint\limits_C \frac{\cosh 3z}{z}\,\mathrm{d}z$ l) $\oint\limits_C \frac{\operatorname{sen} z}{z-2}\,\mathrm{d}z$ m) $\oint\limits_C \frac{e^z-1}{z}\,\mathrm{d}z$ n) $\oint\limits_C \frac{e^{\operatorname{sen} z}}{z(z-5i)}\,\mathrm{d}z$ o) $\oint\limits_C \frac{\cos \pi z}{(z-\frac{i}{2})(z+4\pi)}\,\mathrm{d}z$

8) Calcule $\int\limits_C |z|\overline{z}\,\mathrm{d}z$, onde C é a fronteira do semicírculo dado por $|z| \leq 1$, $\operatorname{Im} z \geq 0$, descrita no sentido positivo.

9) Seja C um quadrado que tem lados situados nas retas $x = \pm 1$ e $y = \pm 1$, descrito no sentido positivo. Calcule cada uma das seguintes integrais:

a) $\oint\limits_C \frac{z^2}{(2z-1)^2}\,\mathrm{d}z$ b) $\oint\limits_C \frac{z^2}{(2z-1)^4}\,\mathrm{d}z$ c) $\oint\limits_C \frac{z^3}{(2z+i)^3}\,\mathrm{d}z$ d) $\oint\limits_C \frac{z^4}{(z-3i)^2}\,\mathrm{d}z$ e) $\oint\limits_C \frac{z^4}{(3z-i)^2}\,\mathrm{d}z$

f) $\oint\limits_C \frac{e^z}{z^3}\,\mathrm{d}z$ g) $\oint\limits_C \frac{\cos z}{z^2}\,\mathrm{d}z$ h) $\oint\limits_C \frac{\operatorname{sen} z}{z^3}\,\mathrm{d}z$ i) $\oint\limits_C \frac{ze^z}{(4z+\pi i)^2}\,\mathrm{d}z$ j) $\oint\limits_C \frac{e^{z^3}}{z^3}\,\mathrm{d}z$

k) $\oint\limits_C \frac{\cosh z}{z^5}\,\mathrm{d}z$ l) $\oint\limits_C \frac{\operatorname{senh} z}{z^8}\,\mathrm{d}z$ m) $\oint\limits_C \frac{z^5}{(z^2-9)z^3}\,\mathrm{d}z$ n) $\oint\limits_C \frac{\operatorname{senh} z}{(z^2-5z)^3}\,\mathrm{d}z$ o) $\oint\limits_C \frac{\operatorname{sen} z}{(z^2+10i)z^2}\,\mathrm{d}z$

10) Calcule $\oint\limits_C \frac{1}{(z-2i)(z+i)^3}\,\mathrm{d}z$, onde C é a circunferência $|z| = 3/2$, descrita no sentido positivo.

11) Sejam $f(z)$ e $g(z)$ duas funções analíticas sobre a circunferência $C = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = 1\}$ e no seu interior. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \left[\frac{f(w)}{w-z} + \frac{zg(w)}{zw-1}\right]\mathrm{d}w = \begin{cases} f(z), & \text{se } \ |z| < 1 \\ g(1/z), & \text{se } \ |z| > 1 \end{cases}$$

12) Sejam $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, $a_n \neq 0$, um polinômio de coeficientes complexos e grau n, sem raízes repetidas, e C um contorno simples fechado que envolve todas as raízes de $P(z)$. Mostre que: a) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{zP'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = -\frac{a_{n-1}}{a_n}$;

b) $\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{z^2 P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z = \frac{(a_{n-1}^2 - 2a_n a_{n-2})}{a_n^2}$.

13) Sejam $P(z)$ um polinômio de grau n sem raízes repetidas e C um contorno simples fechado que não passa pelas raízes. Mostre que $\dfrac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \dfrac{P'(z)}{P(z)}\,\mathrm{d}z$ é igual à quantidade de raízes de $P(z)$ contidas na região delimitada por C.

14) Calcule cada uma das seguintes integrais, sabendo que C é uma circunferência de centro na origem e raio 1, descrita no sentido positivo.
a) $\oint\limits_C \frac{z}{z^2-\frac{1}{9}}\,\mathrm{d}z$ b) $\oint\limits_C \frac{z}{z^2+\frac{1}{9}}\,\mathrm{d}z$ c) $\oint\limits_C \frac{e^{iz}}{z(z-\pi)}\,\mathrm{d}z$ d) $\oint\limits_C e^{z^2}\left(\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^3}\right)\mathrm{d}z$

15) Sejam $t>0$ e C uma curva fechada simples envolvendo $z=-1$, orientada positivamente. Mostre que $\oint\limits_C \dfrac{ze^{tz}}{(z+1)^3}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\cdot(t-\dfrac{t^2}{2})e^{-t}$.

16) Seja f uma função inteira. Se a função harmônica $u(x,y)=\mathrm{Re}(f)$ é limitada em $\mathbb{R}^2$, mostre que f é constante.

17) Seja f uma função inteira tal que $\mathrm{Im}(f)=v(x,y)$ não muda de sinal em $\mathbb{R}^2$. Mostre que f é constante.

18) Sem calcular a integral, mostre que $\left|\int\limits_C \dfrac{1}{1+z^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \dfrac{\pi}{3}$, onde C é o arco de círculo $|z|=2$ de $z=2$ a $z=2i$.

19) Sejam R e a constantes positivas dadas com $R>a$. Se C é a circunferência $|z|=R$ descrita positivamente, então mostre que $\left|\int\limits_C \dfrac{1}{z^2+a^2}\,\mathrm{d}z\right| \le \dfrac{2\pi R}{R^2-a^2}$.

20) Dado $R>1$ constante, considere C o arco cuja equação paramétrica é $z(t)=R\cos t+i(R\,\mathrm{sen}\,t)$, $0\le t\le \frac{\pi}{3}$. Mostre que $\left|\int\limits_C \dfrac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z\right| \le \dfrac{\pi}{3}\left(\dfrac{R}{R^3-1}\right)$ e que $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_C \dfrac{1}{z^3+1}\,\mathrm{d}z = 0$.

21) Sejam a e b dois números complexos distintos e C uma circunferência de centro na origem e raio R, com $R > |a|$, e $R > |b|$, orientada no sentido antihorário. Considere também f uma função inteira e $I = \oint\limits_C \dfrac{f(z)}{(z-a)(z-b)}\,\mathrm{d}z$.

b) Se $|f(z)| \leq M$ em C e no interior, obtenha uma cota superior para $|I|$;
a) Calcule o valor de I;
c) Supondo f limitada em todo o plano e fazendo $R \to \infty$, obtenha outra demonstração para o Teorema de Liouville.

22) Sejam C descrito por $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Mostre que $\oint\limits_C \frac{e^z}{z}\,\mathrm{d}z = 2\pi i$, $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{k\cos\theta}\cos(k \operatorname{sen}\theta)\mathrm{d}\theta = \pi$ e $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{k\cos\theta}\operatorname{sen}(k\operatorname{sen}\theta)\mathrm{d}\theta = 0$.

23) Calcule as seguintes integrais, sabendo que C é a elipse $|z-1|+|z+2| = 8$, descrita no sentido positivo.

a) $\oint\limits_C \dfrac{z^2 e^{3z}}{z - \frac{\pi i}{2}}\,\mathrm{d}z$ b) $\oint\limits_C \dfrac{4z^2 e^{3z}}{4z^2 - 4z + 1}\,\mathrm{d}z$ c) $\oint\limits_C \dfrac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{z^2 - 3z + 2}\,\mathrm{d}z$

24) Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int_{1-i}^{1+i} z^3\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\int_{1}^{1+\pi i} e^z\,\mathrm{d}z$ c) $\displaystyle\int_{-\pi i}^{\pi i} \operatorname{sen}^2 z\,\mathrm{d}z$ d) $\displaystyle\int_{0}^{\pi i} z\cos z^2\,\mathrm{d}z$

25) Se C é um caminho simples, fechado, orientado positivamente que é a fronteira de uma região plana R. Mostre que a área de R é dada por $A = \dfrac{1}{2i}\oint\limits_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA
3^a LISTA DE EXERCÍCIOS – SETEMBRO/2019

1) Determine as séries de Taylor ou de Laurent com centro em $z = z_0$ e determine as regiões de convergência para as seguintes funções:

a) $\dfrac{e^{-z}}{z^3}$, $z_0 = 0$ b) $\dfrac{e^{1/z^2}}{z^6}$, $z_0 = 0$ c) $\dfrac{\operatorname{senh} 3z}{z^3}$, $z_0 = 0$

d) $\dfrac{1}{z^4(1+z)}$, $z_0 = 0$ e) $\dfrac{1}{z^3}$, $z_0 = i$ f) $\dfrac{1}{z^4}$, $z_0 = 1$

g) $\dfrac{1}{z^2+1}$, $z_0 = -i$ h) $\dfrac{4z-1}{z^4-1}$, $z_0 = 0$ i) $\dfrac{1}{1-z^4}$, $z_0 = -1$

j) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-\frac{\pi}{4})^3}$, $z_0 = \dfrac{\pi}{4}$ k) $\dfrac{e^z}{(z-1)^2}$, $z_0 = 1$ l) $\dfrac{2z^2+1}{z^3-4z}$, $z_0 = 2$

2) Determine os resíduos nos pontos singulares das seguintes funções:

a) $\dfrac{1}{1-z}$ b) $\dfrac{z+3}{z+1}$ c) $\dfrac{1}{z^2}$ d) $\dfrac{z}{z^2+1}$

e) $\dfrac{1}{z^2-1}$ f) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ g) $\dfrac{z}{z^4-1}$ h) $\dfrac{1}{z^4-1}$

i) $\dfrac{1}{e^z-1}$ j) $\dfrac{1}{\cos z}$ k) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{\cos z}$ l) $\dfrac{\cos z}{\operatorname{sen} z}$

m) $\dfrac{1}{(z^4-1)^2}$ n) $\dfrac{6-4z}{z^3+3z^2}$ o) $\dfrac{z^2+i}{(z-2)^4}$ p) $\dfrac{i+1}{z^4+1}$

3) a) Desenvolva $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-1)^4}$ em série de Laurent em torno de $z_0 = 1$. (Sugestão: $z = (z-1)+1$).

b) Calcule $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$.

4) Sendo C uma circunferência de centro na origem e raio $3/2$ orientada positivamente, calcule as seguintes integrais usando o Teorema dos Resíduos:

a) $\displaystyle\oint_C \frac{1+e^z}{z^3-6z^2+5z}\,\mathrm{d}z$ b) $\displaystyle\oint_C \frac{1}{1-\cos z}\,\mathrm{d}z$ c) $\displaystyle\oint_C \frac{z^3}{(z+i)^2}\,\mathrm{d}z$

d) $\displaystyle\oint_C \frac{z^5-3z^3+1}{(2z+1)(z^2+4)}\,\mathrm{d}z$ e) $\displaystyle\oint_C \frac{e^z}{\operatorname{sen} z}\,\mathrm{d}z$ f) $\displaystyle\oint_C \frac{\cosh z}{z^2-3iz}\,\mathrm{d}z$

g) $\displaystyle\oint_C \frac{(z+4)^3}{z^4+5z^3+6z^2}\,\mathrm{d}z$ h) $\displaystyle\oint_C \frac{z+1}{z^4-2z^3}\,\mathrm{d}z$ i) $\displaystyle\oint_C \frac{e^{z^2}}{\cos \pi z}\,\mathrm{d}z$

5) Calcule as seguintes integrais impróprias:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x}{(x^2-2x+2)^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^4+3x^2+2}\,\mathrm{d}x$

6) Calcule as seguintes integrais que envolvem seno e cosseno:

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{1}{1+\frac{1}{3}\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{13-12\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

d) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{17-8\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ e) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{5-4\cos\theta}\,\mathrm{d}\theta$ f) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{5-4\cos 2\theta}\,\mathrm{d}\theta$

7) Uma função f é analítica em todo plano complexo, exceto no ponto $z_0 = 1$ onde possui um pólo de ordem 3. Sabendo que $\displaystyle\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{i}{4}$ e que existe uma função φ analítica tal que $\varphi(z) = (z-1)^3 f(z)$ se $z \neq 1$, $\varphi(1) = -1$, $\varphi'(1) = i$, determine a parte principal do desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ válido para $|z-1| > 0$ e determine $\varphi''(1)$.

8) Calcule as seguintes integrais impróprias:

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\operatorname{sen} x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^2+4x+5}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 2x}{(x^2+4)^2}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos 4x}{(x^2+1)(x^2+4)}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} 2x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sen} 3x}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$

9) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{\mathrm{d}x}{\cosh x} = \pi$. (*Sugestão: calcule uma integral no caminho fechado formado pelo retângulo de vértices $-a$, a, $a+\pi i$ e $-a+\pi i$ e depois faça $a \to \infty$*).

10) Mostre que $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{kx}}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\operatorname{sen} k\pi}$, onde $0 < k < 1$. (*Sugestão: calcule uma integral no caminho fechado formado pelo retângulo de vértices $-a$, a, $a+2\pi i$ e $-a+2\pi i$ e depois faça $a \to \infty$*).

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 1^a PROVA - JUL/2019 - A

NOME: ____

N^o MATRÍCULA: ________________ CURSO: __________________________

1) Sendo $w = \dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$ uma das raízes quartas de um número complexo z, determine as raízes cúbicas de z.
Resposta: $\sqrt[3]{z} = -1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Determine todas as raízes da equação $e^{2z} + 4e^z + 4 = 0$
Resposta: $z = \ln(-2) = \ln 2 + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$

3) Verifique se $f(z) = f(x+iy) = e^{xy} - e^{-xy} + ixy$ é analítica em algum ponto.
Resposta: A função não é analítica em ponto algum.

4) Determine as partes real e imaginária da função $f(z) = ie^{z^2} - 5z$ e mostre que f é analítica em todo o $\mathbb{C}$.
Resposta: $u(x,y) = -e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy) - 5x,\ v(x,y) = e^{x^2-y^2}\cos(2xy) - 5y,\ u_x = v_y,\ u_y = -v_x$.

5) Mostre que $u(x,y) = 10(x^2 - y^2) - 7xy + 3$ é harmônica e determine sua harmônica conjugada $v(x,y)$.
Resposta: $v(x,y) = 20xy - 7y^2/2 + 7x^2/2 + k,\ k$ constante.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 1^a PROVA - JUL/2019 - B

NOME: ______________________________

N^o MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

1) Sendo $w = \dfrac{1-i}{\sqrt{2}}$ uma das raízes quartas de um número complexo z, determine as raízes cúbicas de z.

Resposta: $\sqrt[3]{z} = -1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Determine todas as raízes da equação $e^{2z} + 6e^{z} + 9 = 0$

Resposta: $z = \ln(-3) = \ln 3 + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$

3) Verifique se $f(z) = f(x+iy) = e^{xy} - e^{-xy} - \sqrt{3} + ixy + 4i$ é analítica em algum ponto.

Resposta: A função não é analítica em ponto algum.

4) Determine as partes real e imaginária da função $f(z) = 2ie^{z^2} + 3z$ e mostre que f é analítica em todo o $\mathbb{C}$.

Resposta: $u(x,y) = -2e^{x^2-y^2}\operatorname{sen}(2xy) + 3x,\ v(x,y) = 2e^{x^2-y^2}\cos(2xy) + 3y,\ u_x = v_y,\ u_y = -v_x.$

5) Mostre que $u(x,y) = 8(y^2 - x^2) - xy + 10$ é harmônica e determine sua harmônica conjugada $v(x,y)$.

Resposta: $v(x,y) = -16xy - y^2/2 + x^2/2 + k,\ k$ constante.

NOME: ________________________

N^o MATRÍCULA: ____________ CURSO: ____________

1) Sendo $w = \dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$ uma das raízes quartas de um número complexo z, determine as raízes cúbicas de z.
Resposta: $\sqrt[3]{z} = -1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Determine todas as raízes da equação $e^{2z} + 10e^{z} + 25 = 0$
Resposta: $z = \ln(-5) = \ln 5 + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$

3) Verifique se $f(z) = f(x+iy) = e^{xy} - e^{-xy} + \sqrt{2} + ixy + 4i$ é analítica em algum ponto.
Resposta: A função não é analítica em ponto algum.

4) Determine as partes real e imaginária da função $f(z) = e^{iz^2} - 2z + 1$ e mostre que f é analítica em todo o $\mathbb{C}$.
Resposta: $u(x,y) = -e^{-2xy}\cos(x^2-y^2) - 2x + 1,\ v(x,y) = e^{-2xy}\,\mathrm{sen}(x^2-y^2) - 2y,\ u_x = v_y,\ u_y = -v_x$.

5) Mostre que $u(x,y) = 5(y^2 - x^2) + 2xy + 1$ é harmônica e determine sua harmônica conjugada $v(x,y)$.
Resposta: $v(x,y) = -10xy + y^2 - x^2 + k,\ k$ constante.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 1^a PROVA - JUL/2019 - D

NOME: ______________________________

N^o MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

1) Sendo $w = \dfrac{-1-i}{\sqrt{2}}$ uma das raízes quartas de um número complexo z, determine as raízes cúbicas de z.

Resposta: $\sqrt[3]{z} = -1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

2) Determine todas as raízes da equação $e^{2z} + 14e^{z} + 49 = 0$

Resposta: $z = \ln(-7) = \ln 7 + (2k+1)\pi i, k \in \mathbb{Z}$

3) Verifique se $f(z) = f(x+iy) = e^{xy} - e^{-xy} + 3 + ixy + 2i$ é analítica em algum ponto.

Resposta: A função não é analítica em ponto algum.

4) Determine as partes real e imaginária da função $f(z) = e^{-iz} - 2z^2 + 1$ e mostre que f é analítica em todo o $\mathbb{C}$.

Resposta: $u(x,y) = e^{y}\cos x - 2x^2 + 2y^2 + 1,\ v(x,y) = -e^{y}\,\mathrm{sen}(x) - 4xy,\ u_x = v_y,\ u_y = -v_x$.

5) Mostre que $u(x,y) = 4(x^2 - y^2) + 5xy - 3$ é harmônica e determine sua harmônica conjugada $v(x,y)$.

Resposta: $v(x,y) = 8xy + 5y^2/2 - 5x^2/2 + k,\ k$ constante.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 2^a PROVA - AGO/2019 - A

NOME: ____________________________

N^o MATRÍCULA: ____________ CURSO: ________________

1) Calcule $\displaystyle\int_C |\overline{z}|\,\mathrm{d}z$, onde C é o arco $z = z(t) = 3e^{it}$, $-\pi \le t \le 0$.

Resposta: 18

2) Sem calcular a integral, mostre que

$$\left|\int_C \frac{z}{z^4+1}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{2\pi}{15},$$

onde C é o arco $|z| = 2$ de $z = 2i$ a $z = -2$.

Resposta: $\left|\int_C \frac{z}{z^4+1}\,\mathrm{d}z\right| \le \frac{2}{2^4-1} \cdot \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \frac{2\pi}{15}$.

3) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\cos z}{\left(z-\frac{i}{2}\right)^3}\,\mathrm{d}z$, onde a circunferência de raio 3 é percorrida no sentido anti-horário.

Resposta: $-\pi i \cosh \frac{1}{2}$

4) Seja C é o quadrado de vértices nos pontos $-2 \pm 2i$ e $2 \pm 2i$, descrito no sentido positivo. Calcule

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} 2z}{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\left(z^2-\frac{25}{4}\right)}\,\mathrm{d}z.$$

Resposta: $\frac{-32\pi i}{\pi^2-100}$

5) Mostre que não existe uma função f inteira não-constante que satisfaça $|f(z)| > 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Resposta: Se $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, então $|g(z)| < 1 \Rightarrow g(z)$ é constante $\Rightarrow f(z)$ constante.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 2^a PROVA - AGO/2019 - D

NOME: ______________________________

N^o MATRÍCULA: ______________ CURSO: ____________________

1) Calcule $\displaystyle\int_C \overline{z}\,\mathrm{d}z$, onde C é o arco $z = z(t) = 2e^{it}$, $\;-\pi \leq t \leq 0$.

Resposta: $4\pi i$

2) Sem calcular a integral, mostre que

$$\left| \int_C \frac{3z^2}{z^4+7}\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{4\pi}{3},$$

onde C é o arco $|z| = 2$ de $z = -2i$ a $z = 2$.

Resposta: $\left| \int_C \frac{3z^2}{z^4+7}\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{3 \cdot 2^2}{2^4-7} \cdot \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \frac{4\pi}{3}$.

3) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=3} \frac{\operatorname{sen} z}{\left(z+\frac{i}{2}\right)^3}\,\mathrm{d}z$, onde a circunferência de raio 3 é percorrida no sentido anti-horário.

Resposta: $-\pi \operatorname{senh} \frac{1}{2}$

4) Seja C é o quadrado de vértices nos pontos $-2 \pm 2i$ e $2 \pm 2i$, descrito no sentido positivo. Calcule

$$\oint_C \frac{\cos 2z}{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\left(z^2-\frac{23}{4}\right)}\,\mathrm{d}z.$$

Resposta: 0

5) Mostre que não existe uma função f inteira não-constante que satisfaça $|f(z)| > 2$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Resposta: Se $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, então $|g(z)| < \frac{1}{2} \Rightarrow g(z)$ é constante $\Rightarrow f(z)$ constante.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 2^a PROVA - AGO/2019 - B

NOME: ______________________________

N^o MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

1) Calcule $\displaystyle\int_C \mathrm{Re}\,(z)\,\mathrm{d}z$, onde C é o arco $z = z(t) = 4e^{it}$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq 0$.

Resposta: $8 + 4\pi i$

2) Sem calcular a integral, mostre que

$$\left| \int_C \frac{z^3}{z^4+5}\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{8\pi}{11},$$

onde C é o arco $|z| = 2$ de $z = -2$ a $z = -2i$.

Resposta: $\left| \int_C \frac{z^3}{z^4+5}\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{2^3}{2^4-5} \cdot \frac{2\pi \cdot 2}{4} = \frac{8\pi}{11}$.

3) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=2} \frac{e^{5z}}{\left(z-\frac{i}{5}\right)^3}\,\mathrm{d}z$, onde a circunferência de raio 2 é percorrida no sentido anti-horário.

Resposta: $25\pi(-\operatorname{sen} 1 + i \cos 1)$

4) Seja C é o quadrado de vértices nos pontos $-2 \pm 2i$ e $2 \pm 2i$, descrito no sentido positivo. Calcule

$$\oint_C \frac{\operatorname{sen} 4z}{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\left(z^2-\frac{29}{4}\right)}\,\mathrm{d}z.$$

Resposta: 0

5) Mostre que não existe uma função f inteira não-constante que satisfaça $|f(z)| > 3$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Resposta: Se $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, então $|g(z)| < \frac{1}{3} \Rightarrow g(z)$ é constante $\Rightarrow f(z)$ constante.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 2^a PROVA - AGO/2019 - C

NOME: ______________________________

N^o MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

1) Calcule $\displaystyle\int_C \operatorname{Im}(z)\,\mathrm{d}z$, onde C é o arco $z = z(t) = 5e^{it}, \;\; -\pi \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Resposta: $\frac{25i}{2} - \frac{75\pi}{4}$

2) Sem calcular a integral, mostre que

$$\left| \int_C \frac{z^2}{z^6+3}\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{4\pi}{61},$$

onde C é o arco $|z| = 2$ de $z = 2$ a $z = 2i$.

Resposta: $\left| \int_C \frac{z^2}{z^6+3}\,\mathrm{d}z \right| \leq \frac{2^2}{2^6-3} \cdot \frac{2\pi\cdot 2}{4} = \frac{4\pi}{61}$.

3) Calcule $\displaystyle\oint_{|z|=1} \frac{e^{-5z}}{\left(z+\frac{i}{5}\right)^3}\,\mathrm{d}z$, onde a circunferência de raio 1 é percorrida no sentido anti-horário.

Resposta: $25\pi(-\operatorname{sen} 1 + i\cos 1)$

4) Seja C é o quadrado de vértices nos pontos $-2\pm 2i$ e $2\pm 2i$, descrito no sentido positivo. Calcule

$$\oint_C \frac{\cos 4z}{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)\left(z^2-\frac{27}{4}\right)}\,\mathrm{d}z.$$

Resposta: $\frac{32\pi i}{108-\pi^2}$

5) Mostre que não existe uma função f inteira não-constante que satisfaça $|f(z)| > 4$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Resposta: Se $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, então $|g(z)| < \frac{1}{4} \Rightarrow g(z)$ é constante $\Rightarrow f(z)$ constante.

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 3^a PROVA - SET/2019 - A

NOME: ______________________________

N^o MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

1) Calcule $\operatorname*{Res}_{z=2} f(z)$ sabendo que $z = 2$ é um pólo de ordem 2 da função

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3z + 5}{(z-2)^2(z^2+2)}.$$

Resposta: $-\frac{5}{18}$

2) Escreva os 6 primeiros termos da série de Laurent de $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-1)^5}$ em torno de $z_0 = 1$. (Sugestão: $z = (z-1)+1$).

Resposta: $\frac{\operatorname{sen} 1}{(z-1)^5} + \frac{\cos 1}{(z-1)^4} - \frac{\operatorname{sen} 1}{2(z-1)^3} - \frac{\cos 1}{6(z-1)^2} + \frac{\operatorname{sen} 1}{24(z-1)} + \frac{\cos 1}{120} + \cdots$

3) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos zi}{4z^2+\pi^2}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é um retângulo com vértices nos pontos $\pm 3 \pm 2i$, orientado positivamente.

Resposta: 0

4) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{z^2}}{z^3 - 8z^2 + 7z}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é uma circunferência de raio 3, com centro na origem e orientada positivamente.

Resposta: $2\pi i(\frac{1}{7} - \frac{e}{6})$

5) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x$.

Resposta: $\frac{\pi}{30}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 3^a PROVA - SET/2019 - B

NOME: ____________________

N^o MATRÍCULA: __________ CURSO: __________

1) Calcule $\operatorname*{Res}_{z=3} f(z)$ sabendo que $z = 3$ é um pólo de ordem 2 da função

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3z + 5}{(z-3)^2(z^2+3)}.$$

Resposta: $-\frac{1}{12}$

2) Escreva os 6 primeiros termos da série de Laurent de $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z+1)^5}$ em torno de $z_0 = -1$. (Sugestão: $z = (z+1) - 1$).

Resposta: $-\frac{\operatorname{sen} 1}{(z+1)^5} + \frac{\cos 1}{(z+1)^4} + \frac{\operatorname{sen} 1}{2(z+1)^3} - \frac{\cos 1}{6(z+1)^2} - \frac{\operatorname{sen} 1}{24(z+1)} + \frac{\cos 1}{120} + \cdots$

3) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos zi}{16z^2 + \pi^2}\, \mathrm{d}z$

sabendo que C é um retângulo com vértices nos pontos $\pm 3 \pm 2i$, orientado positivamente.

Resposta: 0

4) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{z^2}}{z^3 - 7z^2 + 6z}\, \mathrm{d}z$ sabendo que C é uma circunferência de raio 3, com centro na origem e orientada positivamente.

Resposta: $2\pi i(\frac{1}{6} - \frac{e}{5})$

5) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+4)(x^2+16)}\, \mathrm{d}x\,.$

Resposta: $\frac{\pi}{48}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 3^a PROVA - SET/2019 - C

NOME: ______________________________

N^o MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

1) Calcule $\operatorname*{Res}_{z=4} f(z)$ sabendo que $z = 4$ é um pólo de ordem 2 da função

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3z + 5}{(z-4)^2(z^2+4)}.$$

Resposta: $-\frac{3}{100}$

2) Escreva os 6 primeiros termos da série de Laurent de $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-3)^5}$ em torno de $z_0 = 3$. (Sugestão: $z = (z-3) + 3$).

Resposta: $\frac{\operatorname{sen} 3}{(z-3)^5} + \frac{\cos 3}{(z-3)^4} - \frac{\operatorname{sen} 3}{2(z-3)^3} - \frac{\cos 3}{6(z-3)^2} + \frac{\operatorname{sen} 3}{24(z-3)} + \frac{\cos 3}{120} + \cdots$

3) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos zi}{9z^2 + \pi^2}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é um retângulo com vértices nos pontos $\pm 3 \pm 2i$, orientado positivamente.

Resposta: 0

4) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{z^2}}{z^3 - 9z^2 + 8z}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é uma circunferência de raio 3, com centro na origem e orientada positivamente.

Resposta: $2\pi i(\frac{1}{8} - \frac{e}{7})$

5) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+9)(x^2+16)}\,\mathrm{d}x\,.$

Resposta: $\frac{\pi}{84}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - 3^a PROVA - SET/2019 - D

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

1) Calcule $\operatorname*{Res}_{z=-2} f(z)$ sabendo que $z = -2$ é um pólo de ordem 2 da função

$$f(z) = \frac{2z^2 + 3z + 5}{(z+2)^2(z^2+4)}.$$

Resposta: $-\frac{3}{16}$

2) Escreva os 6 primeiros termos da série de Laurent de $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{(z-2)^5}$ em torno de $z_0 = 2$. (Sugestão: $z = (z-2) + 2$).

Resposta: $\frac{\operatorname{sen} 2}{(z-2)^5} + \frac{\cos 2}{(z-2)^4} - \frac{\operatorname{sen} 2}{2(z-2)^3} - \frac{\cos 2}{6(z-2)^2} + \frac{\operatorname{sen} 2}{24(z-2)} + \frac{\cos 2}{120} + \cdots$

3) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos zi}{25z^2 + \pi^2}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é um retângulo com vértices nos pontos $\pm 3 \pm 2i$, orientado positivamente.

Resposta: 0

4) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{z^2}}{z^3 - 7z^2 + 10z}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é uma circunferência de raio 3, com centro na origem e orientada positivamente.

Resposta: $2\pi i(\frac{1}{10} - \frac{e^4}{6})$

5) Calcule $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+9)}\,\mathrm{d}x\,.$

Resposta: $\frac{\pi}{12}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 1ª PROVA – A

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $f(6+5i)$ sabendo que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida recursivamente por

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{se } \ |z| \leq 1 \\ 1 + i f(\frac{z}{2}), & \text{se } \ |z| > 1 \end{cases} .$$

A) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{4}$	B) $\frac{-3}{4} - \frac{3i}{8}$	C) $\frac{-1}{2} + \frac{3i}{8}$	D) $\frac{-5}{8} - \frac{i}{2}$	E) $\frac{-3}{8} + \frac{3i}{2}$	F) $\frac{-1}{2} - \frac{5i}{8}$	G) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{6}$
H) $\frac{3}{4} - \frac{i}{2}$	I) $\frac{-1}{4} + \frac{i}{2}$	J) $\frac{-1}{8} + \frac{i}{2}$	K) $\frac{-3}{8} + \frac{i}{2}$	L) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{2}$	M) $\frac{-3}{8} - \frac{i}{2}$	N) $\frac{3}{8} + \frac{i}{2}$
O) $\frac{5}{8} + \frac{i}{4}$	P) $\frac{3}{4} + \frac{3i}{8}$	Q) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{8}$	R) $\frac{5}{8} + \frac{i}{2}$	S) $\frac{3}{8} + \frac{3i}{2}$	T) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{8}$	U) $\frac{1}{2} + \frac{5i}{8}$

2) Qual é o valor principal de $\left(1 - \dfrac{1}{i}\right)^{2i}$?

A) $e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{\ln 2}{2})]$	B) $e^{\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	C) $e^{\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
D) $e^{-\frac{3\pi}{2}}[\cos(3\ln 2) + i\,\text{sen}(3\ln 2)]$	E) $e^{-2\pi}[\cos(4\ln 2) + i\,\text{sen}(4\ln 2)]$	F) $e^{-3\pi}[\cos(6\ln 2) + i\,\text{sen}(6\ln 2)]$
G) $e^{-\frac{7\pi}{4}}[\cos(\frac{7\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{7\ln 2}{2})]$	H) $e^{-\frac{9\pi}{4}}[\cos(\frac{9\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{9\ln 2}{2})]$	I) $e^{-\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
J) $e^{-\pi}[\cos(2\ln 2) + i\,\text{sen}(2\ln 2)]$	K) $e^{-\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	L) $e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 2) + i\,\text{sen}(\ln 2)]$

3) Qual é a parte real da função $f(z) = \dfrac{\text{sen}\, 2z}{5z}$?

A) $\frac{x \,\text{sen}\, 3x \cosh 3y + y \,\text{senh}\, 3y \cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	B) $\frac{x \,\text{sen}\, 3x \,\text{senh}\, 3y - y \cosh 3y \cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	C) $\frac{x \cos 3x \,\text{senh}\, 3y - y \,\text{sen}\, 3x \cosh 3y}{5(x^2+y^2)}$
D) $\frac{x \,\text{sen}\, 2x \cosh 2y + y \,\text{senh}\, 2y \cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	E) $\frac{x \,\text{sen}\, 2x \,\text{senh}\, 2y - y \cosh 2y \cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	F) $\frac{x \cos 2x \,\text{senh}\, 2y - y \,\text{sen}\, 2x \cosh 2y}{5(x^2+y^2)}$
G) $\frac{x \,\text{sen}\, 5x \cosh 5y + y \,\text{senh}\, 5y \cos 5x}{4(x^2+y^2)}$	H) $\frac{x \,\text{sen}\, 6x \cosh 6y + y \,\text{senh}\, 6y \cos 6x}{4(x^2+y^2)}$	I) $\frac{x \,\text{sen}\, 4x \,\text{senh}\, 4y + y \,\text{senh}\, 4x \cos 4y}{4(x^2+y^2)}$
J) $\frac{x \,\text{sen}\, 7x \cosh 7y + y \,\text{senh}\, 7y \cos 7x}{4(x^2+y^2)}$	K) $\frac{x \,\text{sen}\, 8x \,\text{senh}\, 8y - y \cosh 8y \cos 8x}{5(x^2+y^2)}$	L) $\frac{x \cos 7x \,\text{senh}\, 7y - y \,\text{sen}\, 7x \cosh 7y}{4(x^2+y^2)}$
M) $\frac{x \,\text{sen}\, 9x \cosh 9y + y \,\text{senh}\, 9y \cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	N) $\frac{x \,\text{sen}\, 9x \,\text{senh}\, 9y - y \cosh 9y \cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	O) $\frac{x \cos 4x \,\text{senh}\, 4y - y \,\text{sen}\, 4x \cosh 4y}{4(x^2+y^2)}$

4) Considerando $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2+y^2+5x+2y) + i(x^2+y^2+2x+5y)$, determine um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ no qual as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

A) $(-5,-5)$	B) $(-5,5)$	C) $(5,5)$	D) $(-4,-4)$	E) $(4,-4)$	F) $(4,4)$	G) $(-3,-3)$	H) $(0,0)$
I) $(3,-3)$	J) $(3,3)$	K) $(-2,-2)$	L) $(2,-2)$	M) $(2,2)$	N) $(-1,-1)$	O) $(1,1)$	P) $(-1,1)$

5) Determine v de modo que a função $f(z) = 3e^{-y}\cos x + 5x^2 - 5y^2 + iv(x,y)$ seja analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

A) $v = 3e^{-y} \operatorname{sen} x + 10xy$	B) $v = 5e^{-y} \operatorname{sen} x + 6xy$	C) $v = 3e^{-y} \operatorname{sen} x - 10xy$	D) $v = 5e^{-y} \operatorname{sen} x - 6xy$
E) $v = -3e^{-y} \operatorname{sen} x - 10xy$	F) $v = -5e^{-y} \operatorname{sen} x - 6xy$	G) $v = -5e^{-y} \operatorname{sen} x + 6xy$	H) $v = -3e^{-y} \operatorname{sen} x + 10xy$
I) $v = e^{3y} \cos x + 10xy$	J) $v = e^{3y} \cos x - 10xy$	K) $v = e^{-3y} \cos x + 6xy$	L) $v = e^{-3y} \cos x - 6xy$
M) $v = e^{5y} \cos x - 8xy$	N) $v = e^{-5y} \cos x + 8xy$	O) $v = e^{5y} \cos x - 6xy$	P) $v = e^{-5y} \cos x + 6xy$
Q) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x + 8xy$	R) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x - 8xy$	S) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x + 5xy$	T) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x - 5xy$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 1ª PROVA – B

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $f(5+6i)$ sabendo que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida recursivamente por

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{se} \quad |z| \le 1 \\ 1 + i f(\frac{z}{2}), & \text{se} \quad |z| > 1 \end{cases} .$$

A) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{4}$	B) $\frac{-3}{4} - \frac{3i}{8}$	C) $\frac{-1}{2} + \frac{3i}{8}$	D) $\frac{-5}{8} - \frac{i}{2}$	E) $\frac{-3}{8} + \frac{3i}{2}$	F) $\frac{-1}{2} - \frac{5i}{8}$	G) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{6}$
H) $\frac{3}{4} - \frac{i}{2}$	I) $\frac{-1}{4} + \frac{i}{2}$	J) $\frac{-1}{8} + \frac{i}{2}$	K) $\frac{-3}{8} + \frac{i}{2}$	L) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{2}$	M) $\frac{-3}{8} - \frac{i}{2}$	N) $\frac{3}{8} + \frac{i}{2}$
O) $\frac{5}{8} + \frac{i}{4}$	P) $\frac{3}{4} + \frac{3i}{8}$	Q) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{8}$	R) $\frac{5}{8} + \frac{i}{2}$	S) $\frac{3}{8} + \frac{3i}{2}$	T) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{8}$	U) $\frac{1}{2} + \frac{5i}{8}$

2) Qual é o valor principal de $\left(1 - \dfrac{1}{i}\right)^{3i}$?

A) $e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\ln 2}{2}) - i\,\mathrm{sen}(\frac{\ln 2}{2})]$	B) $e^{\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) - i\,\mathrm{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	C) $e^{\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) - i\,\mathrm{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
D) $e^{-\frac{3\pi}{2}}[\cos(3\ln 2) + i\,\mathrm{sen}(3\ln 2)]$	E) $e^{-2\pi}[\cos(4\ln 2) + i\,\mathrm{sen}(4\ln 2)]$	F) $e^{-3\pi}[\cos(6\ln 2) + i\,\mathrm{sen}(6\ln 2)]$
G) $e^{-\frac{7\pi}{4}}[\cos(\frac{7\ln 2}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{7\ln 2}{2})]$	H) $e^{-\frac{9\pi}{4}}[\cos(\frac{9\ln 2}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{9\ln 2}{2})]$	I) $e^{-\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
J) $e^{-\pi}[\cos(2\ln 2) + i\,\mathrm{sen}(2\ln 2)]$	K) $e^{-\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) + i\,\mathrm{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	L) $e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 2) + i\,\mathrm{sen}(\ln 2)]$

3) Qual é a parte real da função $f(z) = \dfrac{\mathrm{sen}\,3z}{5z}$?

A) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,3x\cosh 3y + y\,\mathrm{senh}\,3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	B) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,3x\,\mathrm{senh}\,3y - y\cosh 3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	C) $\frac{x\cos 3x\,\mathrm{senh}\,3y - y\,\mathrm{sen}\,3x\cosh 3y}{5(x^2+y^2)}$
D) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,2x\cosh 2y + y\,\mathrm{senh}\,2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	E) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,2x\,\mathrm{senh}\,2y - y\cosh 2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	F) $\frac{x\cos 2x\,\mathrm{senh}\,2y - y\,\mathrm{sen}\,2x\cosh 2y}{5(x^2+y^2)}$
G) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,5x\cosh 5y + y\,\mathrm{senh}\,5y\cos 5x}{4(x^2+y^2)}$	H) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,6x\cosh 6y + y\,\mathrm{senh}\,6y\cos 6x}{4(x^2+y^2)}$	I) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,4x\,\mathrm{senh}\,4y + y\,\mathrm{senh}\,4x\cos 4y}{4(x^2+y^2)}$
J) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,7x\cosh 7y + y\,\mathrm{senh}\,7y\cos 7x}{4(x^2+y^2)}$	K) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,8x\,\mathrm{senh}\,8y - y\cosh 8y\cos 8x}{5(x^2+y^2)}$	L) $\frac{x\cos 7x\,\mathrm{senh}\,7y - y\,\mathrm{sen}\,7x\cosh 7y}{4(x^2+y^2)}$
M) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,9x\cosh 9y + y\,\mathrm{senh}\,9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	N) $\frac{x\,\mathrm{sen}\,9x\,\mathrm{senh}\,9y - y\cosh 9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	O) $\frac{x\cos 4x\,\mathrm{senh}\,4y - y\,\mathrm{sen}\,4x\cosh 4y}{4(x^2+y^2)}$

4) Considerando $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2+y^2+5x+2y) + i(x^2+y^2+6x+5y)$, determine um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ no qual as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

A) $(-5,-5)$	B) $(-5,5)$	C) $(5,5)$	D) $(-4,-4)$	E) $(4,-4)$	F) $(4,4)$	G) $(-3,-3)$	H) $(0,0)$
I) $(3,-3)$	J) $(3,3)$	K) $(-2,-2)$	L) $(2,-2)$	M) $(2,2)$	N) $(-1,-1)$	O) $(1,1)$	P) $(-1,1)$

5) Determine v de modo que a função $f(z) = 6e^{-y}\cos x + 4x^2 - 4y^2 + iv(x,y)$ seja analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

A) $v = 3e^{-y}\operatorname{sen} x + 10xy$	B) $v = 5e^{-y}\operatorname{sen} x + 6xy$	C) $v = 3e^{-y}\operatorname{sen} x - 10xy$	D) $v = 5e^{-y}\operatorname{sen} x - 6xy$
E) $v = -3e^{-y}\operatorname{sen} x - 10xy$	F) $v = -5e^{-y}\operatorname{sen} x - 6xy$	G) $v = -5e^{-y}\operatorname{sen} x + 6xy$	H) $v = -3e^{-y}\operatorname{sen} x + 10xy$
I) $v = e^{3y}\cos x + 10xy$	J) $v = e^{3y}\cos x - 10xy$	K) $v = e^{-3y}\cos x + 6xy$	L) $v = e^{-3y}\cos x - 6xy$
M) $v = e^{5y}\cos x - 8xy$	N) $v = e^{-5y}\cos x + 8xy$	O) $v = e^{5y}\cos x - 6xy$	P) $v = e^{-5y}\cos x + 6xy$
Q) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x + 8xy$	R) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x - 8xy$	S) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x + 5xy$	T) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x - 5xy$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 1ª PROVA – C

NOME: ____

Nº MATRÍCULA: ____________________ CURSO: ______________________

RESPOSTAS: 1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $f(5+4i)$ sabendo que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida recursivamente por

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{se } |z| \leq 1 \\ 1 + if(\frac{z}{2}), & \text{se } |z| > 1 \end{cases} .$$

A) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{4}$	B) $\frac{-3}{4} - \frac{3i}{8}$	C) $\frac{-1}{2} + \frac{3i}{8}$	D) $\frac{-5}{8} - \frac{i}{2}$	E) $\frac{-3}{8} + \frac{3i}{2}$	F) $\frac{-1}{2} - \frac{5i}{8}$	G) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{6}$
H) $\frac{3}{4} - \frac{i}{2}$	I) $\frac{-1}{4} + \frac{i}{2}$	J) $\frac{-1}{8} + \frac{i}{2}$	K) $\frac{-3}{8} + \frac{i}{2}$	L) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{2}$	M) $\frac{-3}{8} - \frac{i}{2}$	N) $\frac{3}{8} + \frac{i}{2}$
O) $\frac{5}{8} + \frac{i}{4}$	P) $\frac{3}{4} + \frac{3i}{8}$	Q) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{8}$	R) $\frac{5}{8} + \frac{i}{2}$	S) $\frac{3}{8} + \frac{3i}{2}$	T) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{8}$	U) $\frac{1}{2} + \frac{5i}{8}$

2) Qual é o valor principal de $\left(1 - \dfrac{1}{i}\right)^{4i}$?

A) $e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{\ln 2}{2})]$	B) $e^{\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	C) $e^{\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
D) $e^{-\frac{3\pi}{2}}[\cos(3\ln 2) + i\,\text{sen}(3\ln 2)]$	E) $e^{-2\pi}[\cos(4\ln 2) + i\,\text{sen}(4\ln 2)]$	F) $e^{-3\pi}[\cos(6\ln 2) + i\,\text{sen}(6\ln 2)]$
G) $e^{-\frac{7\pi}{4}}[\cos(\frac{7\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{7\ln 2}{2})]$	H) $e^{-\frac{9\pi}{4}}[\cos(\frac{9\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{9\ln 2}{2})]$	I) $e^{-\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
J) $e^{-\pi}[\cos(2\ln 2) + i\,\text{sen}(2\ln 2)]$	K) $e^{-\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	L) $e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 2) + i\,\text{sen}(\ln 2)]$

3) Qual é a parte real da função $f(z) = \dfrac{\text{sen}\,5z}{4z}$?

A) $\frac{x\,\text{sen}\,3x\cosh 3y + y\,\text{senh}\,3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	B) $\frac{x\,\text{sen}\,3x\,\text{senh}\,3y - y\cosh 3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	C) $\frac{x\cos 3x\,\text{senh}\,3y - y\,\text{sen}\,3x\cosh 3y}{5(x^2+y^2)}$
D) $\frac{x\,\text{sen}\,2x\cosh 2y + y\,\text{senh}\,2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	E) $\frac{x\,\text{sen}\,2x\,\text{senh}\,2y - y\cosh 2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	F) $\frac{x\cos 2x\,\text{senh}\,2y - y\,\text{sen}\,2x\cosh 2y}{5(x^2+y^2)}$
G) $\frac{x\,\text{sen}\,5x\cosh 5y + y\,\text{senh}\,5y\cos 5x}{4(x^2+y^2)}$	H) $\frac{x\,\text{sen}\,6x\cosh 6y + y\,\text{senh}\,6y\cos 6x}{4(x^2+y^2)}$	I) $\frac{x\,\text{sen}\,4x\,\text{senh}\,4y + y\,\text{senh}\,4x\cos 4y}{4(x^2+y^2)}$
J) $\frac{x\,\text{sen}\,7x\cosh 7y + y\,\text{senh}\,7y\cos 7x}{4(x^2+y^2)}$	K) $\frac{x\,\text{sen}\,8x\,\text{senh}\,8y - y\cosh 8y\cos 8x}{5(x^2+y^2)}$	L) $\frac{x\cos 7x\,\text{senh}\,7y - y\,\text{sen}\,7x\cosh 7y}{4(x^2+y^2)}$
M) $\frac{x\,\text{sen}\,9x\cosh 9y + y\,\text{senh}\,9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	N) $\frac{x\,\text{sen}\,9x\,\text{senh}\,9y - y\cosh 9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	O) $\frac{x\cos 4x\,\text{senh}\,4y - y\,\text{sen}\,4x\cosh 4y}{4(x^2+y^2)}$

4) Considerando $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2+y^2+15x-2y) + i(x^2+y^2-2x+15y)$, determine um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ no qual as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

A) $(-5,-5)$	B) $(-5,5)$	C) $(5,5)$	D) $(-4,-4)$	E) $(4,-4)$	F) $(4,4)$	G) $(-3,-3)$	H) $(0,0)$
I) $(3,-3)$	J) $(3,3)$	K) $(-2,-2)$	L) $(2,-2)$	M) $(2,2)$	N) $(-1,-1)$	O) $(1,1)$	P) $(-1,1)$

5) Determine v de modo que a função $f(z) = 6e^{-y}\cos x - 4x^2 + 4y^2 + iv(x,y)$ seja analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

A) $v = 3e^{-y}\operatorname{sen} x + 10xy$	B) $v = 5e^{-y}\operatorname{sen} x + 6xy$	C) $v = 3e^{-y}\operatorname{sen} x - 10xy$	D) $v = 5e^{-y}\operatorname{sen} x - 6xy$
E) $v = -3e^{-y}\operatorname{sen} x - 10xy$	F) $v = -5e^{-y}\operatorname{sen} x - 6xy$	G) $v = -5e^{-y}\operatorname{sen} x + 6xy$	H) $v = -3e^{-y}\operatorname{sen} x + 10xy$
I) $v = e^{3y}\cos x + 10xy$	J) $v = e^{3y}\cos x - 10xy$	K) $v = e^{-3y}\cos x + 6xy$	L) $v = e^{-3y}\cos x - 6xy$
M) $v = e^{5y}\cos x - 8xy$	N) $v = e^{-5y}\cos x + 8xy$	O) $v = e^{5y}\cos x - 6xy$	P) $v = e^{-5y}\cos x + 6xy$
Q) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x + 8xy$	R) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x - 8xy$	S) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x + 5xy$	T) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x - 5xy$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 1ª PROVA – D

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $f(4+5i)$ sabendo que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida recursivamente por

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{se } |z| \leq 1 \\ 1 + i f(\frac{z}{2}), & \text{se } |z| > 1 \end{cases} .$$

A) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{4}$	B) $\frac{-3}{4} - \frac{3i}{8}$	C) $\frac{-1}{2} + \frac{3i}{8}$	D) $\frac{-5}{8} - \frac{i}{2}$	E) $\frac{-3}{8} + \frac{3i}{2}$	F) $\frac{-1}{2} - \frac{5i}{8}$	G) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{6}$
H) $\frac{3}{4} - \frac{i}{2}$	I) $\frac{-1}{4} + \frac{i}{2}$	J) $\frac{-1}{8} + \frac{i}{2}$	K) $\frac{-3}{8} + \frac{i}{2}$	L) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{2}$	M) $\frac{-3}{8} - \frac{i}{2}$	N) $\frac{3}{8} + \frac{i}{2}$
O) $\frac{5}{8} + \frac{i}{4}$	P) $\frac{3}{4} + \frac{3i}{8}$	Q) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{8}$	R) $\frac{5}{8} + \frac{i}{2}$	S) $\frac{3}{8} + \frac{3i}{2}$	T) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{8}$	U) $\frac{1}{2} + \frac{5i}{8}$

2) Qual é o valor principal de $\left(1 - \frac{1}{i}\right)^{5i}$?

A) $e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{\ln 2}{2})]$	B) $e^{\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	C) $e^{\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
D) $e^{-\frac{3\pi}{2}}[\cos(3\ln 2) + i\,\text{sen}(3\ln 2)]$	E) $e^{-2\pi}[\cos(4\ln 2) + i\,\text{sen}(4\ln 2)]$	F) $e^{-3\pi}[\cos(6\ln 2) + i\,\text{sen}(6\ln 2)]$
G) $e^{-\frac{7\pi}{4}}[\cos(\frac{7\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{7\ln 2}{2})]$	H) $e^{-\frac{9\pi}{4}}[\cos(\frac{9\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{9\ln 2}{2})]$	I) $e^{-\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
J) $e^{-\pi}[\cos(2\ln 2) + i\,\text{sen}(2\ln 2)]$	K) $e^{-\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	L) $e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 2) + i\,\text{sen}(\ln 2)]$

3) Qual é a parte real da função $f(z) = \dfrac{\text{sen}\, 6z}{4z}$?

A) $\frac{x\,\text{sen}\,3x\cosh 3y + y\,\text{senh}\,3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	B) $\frac{x\,\text{sen}\,3x\,\text{senh}\,3y - y\cosh 3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	C) $\frac{x\cos 3x\,\text{senh}\,3y - y\,\text{sen}\,3x\cosh 3y}{5(x^2+y^2)}$
D) $\frac{x\,\text{sen}\,2x\cosh 2y + y\,\text{senh}\,2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	E) $\frac{x\,\text{sen}\,2x\,\text{senh}\,2y - y\cosh 2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	F) $\frac{x\cos 2x\,\text{senh}\,2y - y\,\text{sen}\,2x\cosh 2y}{5(x^2+y^2)}$
G) $\frac{x\,\text{sen}\,5x\cosh 5y + y\,\text{senh}\,5y\cos 5x}{4(x^2+y^2)}$	H) $\frac{x\,\text{sen}\,6x\cosh 6y + y\,\text{senh}\,6y\cos 6x}{4(x^2+y^2)}$	I) $\frac{x\,\text{sen}\,4x\,\text{senh}\,4y + y\,\text{senh}\,4x\cos 4y}{4(x^2+y^2)}$
J) $\frac{x\,\text{sen}\,7x\cosh 7y + y\,\text{senh}\,7y\cos 7x}{4(x^2+y^2)}$	K) $\frac{x\,\text{sen}\,8x\,\text{senh}\,8y - y\cosh 8y\cos 8x}{5(x^2+y^2)}$	L) $\frac{x\cos 7x\,\text{senh}\,7y - y\,\text{sen}\,7x\cosh 7y}{4(x^2+y^2)}$
M) $\frac{x\,\text{sen}\,9x\cosh 9y + y\,\text{senh}\,9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	N) $\frac{x\,\text{sen}\,9x\,\text{senh}\,9y - y\cosh 9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	O) $\frac{x\cos 4x\,\text{senh}\,4y - y\,\text{sen}\,4x\cosh 4y}{4(x^2+y^2)}$

4) Considerando $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2 + y^2 - 5x - 2y) + i(x^2 + y^2 - 6x - 5y)$, determine um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ no qual as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

A) $(-5,-5)$	B) $(-5,5)$	C) $(5,5)$	D) $(-4,-4)$	E) $(4,-4)$	F) $(4,4)$	G) $(-3,-3)$	H) $(0,0)$
I) $(3,-3)$	J) $(3,3)$	K) $(-2,-2)$	L) $(2,-2)$	M) $(2,2)$	N) $(-1,-1)$	O) $(1,1)$	P) $(-1,1)$

5) Determine v de modo que a função $f(z) = 6e^{-y}\cos x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{2}y^2 + iv(x,y)$ seja analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

A) $v = 3e^{-y}\operatorname{sen} x + 10xy$	B) $v = 5e^{-y}\operatorname{sen} x + 6xy$	C) $v = 3e^{-y}\operatorname{sen} x - 10xy$	D) $v = 5e^{-y}\operatorname{sen} x - 6xy$
E) $v = -3e^{-y}\operatorname{sen} x - 10xy$	F) $v = -5e^{-y}\operatorname{sen} x - 6xy$	G) $v = -5e^{-y}\operatorname{sen} x + 6xy$	H) $v = -3e^{-y}\operatorname{sen} x + 10xy$
I) $v = e^{3y}\cos x + 10xy$	J) $v = e^{3y}\cos x - 10xy$	K) $v = e^{-3y}\cos x + 6xy$	L) $v = e^{-3y}\cos x - 6xy$
M) $v = e^{5y}\cos x - 8xy$	N) $v = e^{-5y}\cos x + 8xy$	O) $v = e^{5y}\cos x - 6xy$	P) $v = e^{-5y}\cos x + 6xy$
Q) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x + 8xy$	R) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x - 8xy$	S) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x + 5xy$	T) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x - 5xy$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 1ª PROVA – E

NOME: ____________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $f(-4+3i)$ sabendo que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida recursivamente por

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{se } |z| \leq 1 \\ 1 + i f(\frac{z}{2}), & \text{se } |z| > 1 \end{cases} .$$

A) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{4}$	B) $\frac{-3}{4} - \frac{3i}{8}$	C) $\frac{-1}{2} + \frac{3i}{8}$	D) $\frac{-5}{8} - \frac{i}{2}$	E) $\frac{-3}{8} + \frac{3i}{2}$	F) $\frac{-1}{2} - \frac{5i}{8}$	G) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{6}$
H) $\frac{3}{4} - \frac{i}{2}$	I) $\frac{-1}{4} + \frac{i}{2}$	J) $\frac{-1}{8} + \frac{i}{2}$	K) $\frac{-3}{8} + \frac{i}{2}$	L) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{2}$	M) $\frac{-3}{8} - \frac{i}{2}$	N) $\frac{3}{8} + \frac{i}{2}$
O) $\frac{5}{8} + \frac{i}{4}$	P) $\frac{3}{4} + \frac{3i}{8}$	Q) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{8}$	R) $\frac{5}{8} + \frac{i}{2}$	S) $\frac{3}{8} + \frac{3i}{2}$	T) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{8}$	U) $\frac{1}{2} + \frac{5i}{8}$

2) Qual é o valor principal de $\left(1 - \dfrac{1}{i}\right)^{6i}$?

A) $e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\ln 2}{2}) - i \operatorname{sen}(\frac{\ln 2}{2})]$	B) $e^{\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) - i \operatorname{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	C) $e^{\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) - i \operatorname{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
D) $e^{-\frac{3\pi}{2}}[\cos(3\ln 2) + i \operatorname{sen}(3\ln 2)]$	E) $e^{-2\pi}[\cos(4\ln 2) + i \operatorname{sen}(4\ln 2)]$	F) $e^{-3\pi}[\cos(6\ln 2) + i \operatorname{sen}(6\ln 2)]$
G) $e^{-\frac{7\pi}{4}}[\cos(\frac{7\ln 2}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{7\ln 2}{2})]$	H) $e^{-\frac{9\pi}{4}}[\cos(\frac{9\ln 2}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{9\ln 2}{2})]$	I) $e^{-\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
J) $e^{-\pi}[\cos(2\ln 2) + i \operatorname{sen}(2\ln 2)]$	K) $e^{-\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) + i \operatorname{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	L) $e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 2) + i \operatorname{sen}(\ln 2)]$

3) Qual é a parte real da função $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} 4z}{4z}$?

A) $\frac{x \operatorname{sen} 3x \cosh 3y + y \operatorname{senh} 3y \cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	B) $\frac{x \operatorname{sen} 3x \operatorname{senh} 3y - y \cosh 3y \cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	C) $\frac{x \cos 3x \operatorname{senh} 3y - y \operatorname{sen} 3x \cosh 3y}{5(x^2+y^2)}$
D) $\frac{x \operatorname{sen} 2x \cosh 2y + y \operatorname{senh} 2y \cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	E) $\frac{x \operatorname{sen} 2x \operatorname{senh} 2y - y \cosh 2y \cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	F) $\frac{x \cos 2x \operatorname{senh} 2y - y \operatorname{sen} 2x \cosh 2y}{5(x^2+y^2)}$
G) $\frac{x \operatorname{sen} 5x \cosh 5y + y \operatorname{senh} 5y \cos 5x}{4(x^2+y^2)}$	H) $\frac{x \operatorname{sen} 6x \cosh 6y + y \operatorname{senh} 6y \cos 6x}{4(x^2+y^2)}$	I) $\frac{x \operatorname{sen} 4x \operatorname{senh} 4y + y \operatorname{senh} 4x \cos 4y}{4(x^2+y^2)}$
J) $\frac{x \operatorname{sen} 7x \cosh 7y + y \operatorname{senh} 7y \cos 7x}{4(x^2+y^2)}$	K) $\frac{x \operatorname{sen} 8x \operatorname{senh} 8y - y \cosh 8y \cos 8x}{5(x^2+y^2)}$	L) $\frac{x \cos 7x \operatorname{senh} 7y - y \operatorname{sen} 7x \cosh 7y}{4(x^2+y^2)}$
M) $\frac{x \operatorname{sen} 9x \cosh 9y + y \operatorname{senh} 9y \cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	N) $\frac{x \operatorname{sen} 9x \operatorname{senh} 9y - y \cosh 9y \cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	O) $\frac{x \cos 4x \operatorname{senh} 4y - y \operatorname{sen} 4x \cosh 4y}{4(x^2+y^2)}$

4) Considerando $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2 + y^2 + 12x + 10y) + i(x^2 + y^2 + 2x + 12y)$, determine um ponto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ no qual as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

A) $(-5,-5)$	B) $(-5,5)$	C) $(5,5)$	D) $(-4,-4)$	E) $(4,-4)$	F) $(4,4)$	G) $(-3,-3)$	H) $(0,0)$
I) $(3,-3)$	J) $(3,3)$	K) $(-2,-2)$	L) $(2,-2)$	M) $(2,2)$	N) $(-1,-1)$	O) $(1,1)$	P) $(-1,1)$

5) Determine v de modo que a função $f(z) = 5e^{-y}\cos x + 3x^2 - 3y^2 + iv(x,y)$ seja analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

A) $v = 3e^{-y} \operatorname{sen} x + 10xy$	B) $v = 5e^{-y} \operatorname{sen} x + 6xy$	C) $v = 3e^{-y} \operatorname{sen} x - 10xy$	D) $v = 5e^{-y} \operatorname{sen} x - 6xy$
E) $v = -3e^{-y} \operatorname{sen} x - 10xy$	F) $v = -5e^{-y} \operatorname{sen} x - 6xy$	G) $v = -5e^{-y} \operatorname{sen} x + 6xy$	H) $v = -3e^{-y} \operatorname{sen} x + 10xy$
I) $v = e^{3y} \cos x + 10xy$	J) $v = e^{3y} \cos x - 10xy$	K) $v = e^{-3y} \cos x + 6xy$	L) $v = e^{-3y} \cos x - 6xy$
M) $v = e^{5y} \cos x - 8xy$	N) $v = e^{-5y} \cos x + 8xy$	O) $v = e^{5y} \cos x - 6xy$	P) $v = e^{-5y} \cos x + 6xy$
Q) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x + 8xy$	R) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x - 8xy$	S) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x + 5xy$	T) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x - 5xy$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 1ª PROVA – F

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $f(3-4i)$ sabendo que $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ é definida recursivamente por

$$f(z)=\begin{cases} z, & \text{se } \ |z|\le 1 \\ 1+if(\frac{z}{2}), & \text{se } \ |z|>1 \end{cases}.$$

A) $\frac{-5}{8}+\frac{i}{4}$	B) $\frac{-3}{4}-\frac{3i}{8}$	C) $\frac{-1}{2}+\frac{3i}{8}$	D) $\frac{-5}{8}-\frac{i}{2}$	E) $\frac{-3}{8}+\frac{3i}{2}$	F) $\frac{-1}{2}-\frac{5i}{8}$	G) $\frac{-1}{2}+\frac{5i}{6}$
H) $\frac{3}{4}-\frac{i}{2}$	I) $\frac{-1}{4}+\frac{i}{2}$	J) $\frac{-1}{8}+\frac{i}{2}$	K) $\frac{-3}{8}+\frac{i}{2}$	L) $\frac{-5}{8}+\frac{i}{2}$	M) $\frac{-3}{8}-\frac{i}{2}$	N) $\frac{3}{8}+\frac{i}{2}$
O) $\frac{5}{8}+\frac{i}{4}$	P) $\frac{3}{4}+\frac{3i}{8}$	Q) $\frac{1}{2}+\frac{3i}{8}$	R) $\frac{5}{8}+\frac{i}{2}$	S) $\frac{3}{8}+\frac{3i}{2}$	T) $\frac{-1}{2}+\frac{5i}{8}$	U) $\frac{1}{2}+\frac{5i}{8}$

2) Qual é o valor principal de $\left(1-\dfrac{1}{i}\right)^{7i}$?

A) $e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\ln 2}{2})-i\,\text{sen}(\frac{\ln 2}{2})]$	B) $e^{\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2})-i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	C) $e^{\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2})-i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
D) $e^{-\frac{3\pi}{2}}[\cos(3\ln 2)+i\,\text{sen}(3\ln 2)]$	E) $e^{-2\pi}[\cos(4\ln 2)+i\,\text{sen}(4\ln 2)]$	F) $e^{-3\pi}[\cos(6\ln 2)+i\,\text{sen}(6\ln 2)]$
G) $e^{-\frac{7\pi}{4}}[\cos(\frac{7\ln 2}{2})+i\,\text{sen}(\frac{7\ln 2}{2})]$	H) $e^{-\frac{9\pi}{4}}[\cos(\frac{9\ln 2}{2})+i\,\text{sen}(\frac{9\ln 2}{2})]$	I) $e^{-\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2})+i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
J) $e^{-\pi}[\cos(2\ln 2)+i\,\text{sen}(2\ln 2)]$	K) $e^{-\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2})+i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	L) $e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 2)+i\,\text{sen}(\ln 2)]$

3) Qual é a parte real da função $f(z)=\dfrac{\text{sen}\,7z}{4z}$?

A) $\frac{x\,\text{sen}\,3x\cosh 3y+y\,\text{senh}\,3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	B) $\frac{x\,\text{sen}\,3x\,\text{senh}\,3y-y\cosh 3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	C) $\frac{x\cos 3x\,\text{senh}\,3y-y\,\text{sen}\,3x\cosh 3y}{5(x^2+y^2)}$
D) $\frac{x\,\text{sen}\,2x\cosh 2y+y\,\text{senh}\,2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	E) $\frac{x\,\text{sen}\,2x\,\text{senh}\,2y-y\cosh 2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	F) $\frac{x\cos 2x\,\text{senh}\,2y-y\,\text{sen}\,2x\cosh 2y}{5(x^2+y^2)}$
G) $\frac{x\,\text{sen}\,5x\cosh 5y+y\,\text{senh}\,5y\cos 5x}{4(x^2+y^2)}$	H) $\frac{x\,\text{sen}\,6x\cosh 6y+y\,\text{senh}\,6y\cos 6x}{4(x^2+y^2)}$	I) $\frac{x\,\text{sen}\,4x\,\text{senh}\,4y+y\,\text{senh}\,4x\cos 4y}{4(x^2+y^2)}$
J) $\frac{x\,\text{sen}\,7x\cosh 7y+y\,\text{senh}\,7y\cos 7x}{4(x^2+y^2)}$	K) $\frac{x\,\text{sen}\,8x\,\text{senh}\,8y-y\cosh 8y\cos 8x}{5(x^2+y^2)}$	L) $\frac{x\cos 7x\,\text{senh}\,7y-y\,\text{sen}\,7x\cosh 7y}{4(x^2+y^2)}$
M) $\frac{x\,\text{sen}\,9x\cosh 9y+y\,\text{senh}\,9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	N) $\frac{x\,\text{sen}\,9x\,\text{senh}\,9y-y\cosh 9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	O) $\frac{x\cos 4x\,\text{senh}\,4y-y\,\text{sen}\,4x\cosh 4y}{4(x^2+y^2)}$

4) Considerando $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(x^2+y^2+6x-10y)+i(x^2+y^2-2x+6y)$, determine um ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ no qual as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

A) $(-5,-5)$	B) $(-5,5)$	C) $(5,5)$	D) $(-4,-4)$	E) $(4,-4)$	F) $(4,4)$	G) $(-3,-3)$	H) $(0,0)$
I) $(3,-3)$	J) $(3,3)$	K) $(-2,-2)$	L) $(2,-2)$	M) $(2,2)$	N) $(-1,-1)$	O) $(1,1)$	P) $(-1,1)$

5) Determine v de modo que a função $f(z)=-3e^{-y}\cos x-5x^2+5y^2+iv(x,y)$ seja analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

A) $v = 3e^{-y}\operatorname{sen} x + 10xy$	B) $v = 5e^{-y}\operatorname{sen} x + 6xy$	C) $v = 3e^{-y}\operatorname{sen} x - 10xy$	D) $v = 5e^{-y}\operatorname{sen} x - 6xy$
E) $v = -3e^{-y}\operatorname{sen} x - 10xy$	F) $v = -5e^{-y}\operatorname{sen} x - 6xy$	G) $v = -5e^{-y}\operatorname{sen} x + 6xy$	H) $v = -3e^{-y}\operatorname{sen} x + 10xy$
I) $v = e^{3y}\cos x + 10xy$	J) $v = e^{3y}\cos x - 10xy$	K) $v = e^{-3y}\cos x + 6xy$	L) $v = e^{-3y}\cos x - 6xy$
M) $v = e^{5y}\cos x - 8xy$	N) $v = e^{-5y}\cos x + 8xy$	O) $v = e^{5y}\cos x - 6xy$	P) $v = e^{-5y}\cos x + 6xy$
Q) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x + 8xy$	R) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x - 8xy$	S) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x + 5xy$	T) $v = 6e^{-y}\operatorname{sen} x - 5xy$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 1ª PROVA – G

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $f(3+4i)$ sabendo que $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ é definida recursivamente por

$$f(z)=\begin{cases} z, & \text{se } |z|\leq 1 \\ 1+if(\frac{z}{2}), & \text{se } |z|>1 \end{cases}.$$

A) $\frac{-5}{8}+\frac{i}{4}$	B) $\frac{-3}{4}-\frac{3i}{8}$	C) $\frac{-1}{2}+\frac{3i}{8}$	D) $\frac{-5}{8}-\frac{i}{2}$	E) $\frac{-3}{8}+\frac{3i}{2}$	F) $\frac{-1}{2}-\frac{5i}{8}$	G) $\frac{-1}{2}+\frac{5i}{6}$
H) $\frac{3}{4}-\frac{i}{2}$	I) $\frac{-1}{4}+\frac{i}{2}$	J) $\frac{-1}{8}+\frac{i}{2}$	K) $\frac{-3}{8}+\frac{i}{2}$	L) $\frac{-5}{8}+\frac{i}{2}$	M) $\frac{-3}{8}-\frac{i}{2}$	N) $\frac{3}{8}+\frac{i}{2}$
O) $\frac{5}{8}+\frac{i}{4}$	P) $\frac{3}{4}+\frac{3i}{8}$	Q) $\frac{1}{2}+\frac{3i}{8}$	R) $\frac{5}{8}+\frac{i}{2}$	S) $\frac{3}{8}+\frac{3i}{2}$	T) $\frac{-1}{2}+\frac{5i}{8}$	U) $\frac{1}{2}+\frac{5i}{8}$

2) Qual é o valor principal de $\left(1-\dfrac{1}{i}\right)^{8i}$?

A) $e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\ln 2}{2})-i\,\text{sen}(\frac{\ln 2}{2})]$	B) $e^{\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2})-i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	C) $e^{\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2})-i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
D) $e^{-\frac{3\pi}{2}}[\cos(3\ln 2)+i\,\text{sen}(3\ln 2)]$	E) $e^{-2\pi}[\cos(4\ln 2)+i\,\text{sen}(4\ln 2)]$	F) $e^{-3\pi}[\cos(6\ln 2)+i\,\text{sen}(6\ln 2)]$
G) $e^{-\frac{7\pi}{4}}[\cos(\frac{7\ln 2}{2})+i\,\text{sen}(\frac{7\ln 2}{2})]$	H) $e^{-\frac{9\pi}{4}}[\cos(\frac{9\ln 2}{2})+i\,\text{sen}(\frac{9\ln 2}{2})]$	I) $e^{-\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2})+i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
J) $e^{-\pi}[\cos(2\ln 2)+i\,\text{sen}(2\ln 2)]$	K) $e^{-\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2})+i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	L) $e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 2)+i\,\text{sen}(\ln 2)]$

3) Qual é a parte real da função $f(z)=\dfrac{\text{sen}\,8z}{5z}$?

A) $\frac{x\,\text{sen}\,3x\cosh 3y+y\,\text{senh}\,3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	B) $\frac{x\,\text{sen}\,3x\,\text{senh}\,3y-y\cosh 3y\cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	C) $\frac{x\cos 3x\,\text{senh}\,3y-y\,\text{sen}\,3x\cosh 3y}{5(x^2+y^2)}$
D) $\frac{x\,\text{sen}\,2x\cosh 2y+y\,\text{senh}\,2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	E) $\frac{x\,\text{sen}\,2x\,\text{senh}\,2y-y\cosh 2y\cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	F) $\frac{x\cos 2x\,\text{senh}\,2y-y\,\text{sen}\,2x\cosh 2y}{5(x^2+y^2)}$
G) $\frac{x\,\text{sen}\,5x\cosh 5y+y\,\text{senh}\,5y\cos 5x}{4(x^2+y^2)}$	H) $\frac{x\,\text{sen}\,6x\cosh 6y+y\,\text{senh}\,6y\cos 6x}{4(x^2+y^2)}$	I) $\frac{x\,\text{sen}\,4x\,\text{senh}\,4y+y\,\text{senh}\,4x\cos 4y}{4(x^2+y^2)}$
J) $\frac{x\,\text{sen}\,7x\cosh 7y+y\,\text{senh}\,7y\cos 7x}{4(x^2+y^2)}$	K) $\frac{x\,\text{sen}\,8x\,\text{senh}\,8y-y\cosh 8y\cos 8x}{5(x^2+y^2)}$	L) $\frac{x\cos 7x\,\text{senh}\,7y-y\,\text{sen}\,7x\cosh 7y}{4(x^2+y^2)}$
M) $\frac{x\,\text{sen}\,9x\cosh 9y+y\,\text{senh}\,9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	N) $\frac{x\,\text{sen}\,9x\,\text{senh}\,9y-y\cosh 9y\cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	O) $\frac{x\cos 4x\,\text{senh}\,4y-y\,\text{sen}\,4x\cosh 4y}{4(x^2+y^2)}$

4) Considerando $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=(x^2+y^2-8x+6y)+i(x^2+y^2+10x-8y)$, determine um ponto $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ no qual as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

A) $(-5,-5)$	B) $(-5,5)$	C) $(5,5)$	D) $(-4,-4)$	E) $(4,-4)$	F) $(4,4)$	G) $(-3,-3)$	H) $(0,0)$
I) $(3,-3)$	J) $(3,3)$	K) $(-2,-2)$	L) $(2,-2)$	M) $(2,2)$	N) $(-1,-1)$	O) $(1,1)$	P) $(-1,1)$

5) Determine v de modo que a função $f(z)=-5e^{-y}\cos x-3x^2+3y^2+iv(x,y)$ seja analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

A) $v = 3e^{-y} \operatorname{sen} x + 10xy$	B) $v = 5e^{-y} \operatorname{sen} x + 6xy$	C) $v = 3e^{-y} \operatorname{sen} x - 10xy$	D) $v = 5e^{-y} \operatorname{sen} x - 6xy$
E) $v = -3e^{-y} \operatorname{sen} x - 10xy$	F) $v = -5e^{-y} \operatorname{sen} x - 6xy$	G) $v = -5e^{-y} \operatorname{sen} x + 6xy$	H) $v = -3e^{-y} \operatorname{sen} x + 10xy$
I) $v = e^{3y} \cos x + 10xy$	J) $v = e^{3y} \cos x - 10xy$	K) $v = e^{-3y} \cos x + 6xy$	L) $v = e^{-3y} \cos x - 6xy$
M) $v = e^{5y} \cos x - 8xy$	N) $v = e^{-5y} \cos x + 8xy$	O) $v = e^{5y} \cos x - 6xy$	P) $v = e^{-5y} \cos x + 6xy$
Q) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x + 8xy$	R) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x - 8xy$	S) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x + 5xy$	T) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x - 5xy$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 1ª PROVA – H

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $f(4+3i)$ sabendo que $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ é definida recursivamente por

$$f(z) = \begin{cases} z, & \text{se } |z| \leq 1 \\ 1 + i f(\frac{z}{2}), & \text{se } |z| > 1 \end{cases}.$$

A) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{4}$	B) $\frac{-3}{4} - \frac{3i}{8}$	C) $\frac{-1}{2} + \frac{3i}{8}$	D) $\frac{-5}{8} - \frac{i}{2}$	E) $\frac{-3}{8} + \frac{3i}{2}$	F) $\frac{-1}{2} - \frac{5i}{8}$	G) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{6}$
H) $\frac{3}{4} - \frac{i}{2}$	I) $\frac{-1}{4} + \frac{i}{2}$	J) $\frac{-1}{8} + \frac{i}{2}$	K) $\frac{-3}{8} + \frac{i}{2}$	L) $\frac{-5}{8} + \frac{i}{2}$	M) $\frac{-3}{8} - \frac{i}{2}$	N) $\frac{3}{8} + \frac{i}{2}$
O) $\frac{5}{8} + \frac{i}{4}$	P) $\frac{3}{4} + \frac{3i}{8}$	Q) $\frac{1}{2} + \frac{3i}{8}$	R) $\frac{5}{8} + \frac{i}{2}$	S) $\frac{3}{8} + \frac{3i}{2}$	T) $\frac{-1}{2} + \frac{5i}{8}$	U) $\frac{1}{2} + \frac{5i}{8}$

2) Qual é o valor principal de $\left(1 - \frac{1}{i}\right)^{9i}$?

A) $e^{\frac{\pi}{4}}[\cos(\frac{\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{\ln 2}{2})]$	B) $e^{\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	C) $e^{\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) - i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
D) $e^{-\frac{3\pi}{2}}[\cos(3\ln 2) + i\,\text{sen}(3\ln 2)]$	E) $e^{-2\pi}[\cos(4\ln 2) + i\,\text{sen}(4\ln 2)]$	F) $e^{-3\pi}[\cos(6\ln 2) + i\,\text{sen}(6\ln 2)]$
G) $e^{-\frac{7\pi}{4}}[\cos(\frac{7\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{7\ln 2}{2})]$	H) $e^{-\frac{9\pi}{4}}[\cos(\frac{9\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{9\ln 2}{2})]$	I) $e^{-\frac{5\pi}{4}}[\cos(\frac{5\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{5\ln 2}{2})]$
J) $e^{-\pi}[\cos(2\ln 2) + i\,\text{sen}(2\ln 2)]$	K) $e^{-\frac{3\pi}{4}}[\cos(\frac{3\ln 2}{2}) + i\,\text{sen}(\frac{3\ln 2}{2})]$	L) $e^{-\frac{\pi}{2}}[\cos(\ln 2) + i\,\text{sen}(\ln 2)]$

3) Qual é a parte real da função $f(z) = \dfrac{\text{sen}\, 9z}{5z}$?

A) $\frac{x \,\text{sen}\, 3x \cosh 3y + y \,\text{senh}\, 3y \cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	B) $\frac{x \,\text{sen}\, 3x \,\text{senh}\, 3y - y \cosh 3y \cos 3x}{5(x^2+y^2)}$	C) $\frac{x \cos 3x \,\text{senh}\, 3y - y \,\text{sen}\, 3x \cosh 3y}{5(x^2+y^2)}$
D) $\frac{x \,\text{sen}\, 2x \cosh 2y + y \,\text{senh}\, 2y \cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	E) $\frac{x \,\text{sen}\, 2x \,\text{senh}\, 2y - y \cosh 2y \cos 2x}{5(x^2+y^2)}$	F) $\frac{x \cos 2x \,\text{senh}\, 2y - y \,\text{sen}\, 2x \cosh 2y}{5(x^2+y^2)}$
G) $\frac{x \,\text{sen}\, 5x \cosh 5y + y \,\text{senh}\, 5y \cos 5x}{4(x^2+y^2)}$	H) $\frac{x \,\text{sen}\, 6x \cosh 6y + y \,\text{senh}\, 6y \cos 6x}{4(x^2+y^2)}$	I) $\frac{x \,\text{sen}\, 4x \,\text{senh}\, 4y + y \,\text{senh}\, 4x \cos 4y}{4(x^2+y^2)}$
J) $\frac{x \,\text{sen}\, 7x \cosh 7y + y \,\text{senh}\, 7y \cos 7x}{4(x^2+y^2)}$	K) $\frac{x \,\text{sen}\, 8x \,\text{senh}\, 8y - y \cosh 8y \cos 8x}{5(x^2+y^2)}$	L) $\frac{x \cos 7x \,\text{senh}\, 7y - y \,\text{sen}\, 7x \cosh 7y}{4(x^2+y^2)}$
M) $\frac{x \,\text{sen}\, 9x \cosh 9y + y \,\text{senh}\, 9y \cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	N) $\frac{x \,\text{sen}\, 9x \,\text{senh}\, 9y - y \cosh 9y \cos 9x}{5(x^2+y^2)}$	O) $\frac{x \cos 4x \,\text{senh}\, 4y - y \,\text{sen}\, 4x \cosh 4y}{4(x^2+y^2)}$

4) Considerando $f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = (x^2 + y^2 + 10x - 6y) + i(x^2 + y^2 - 10x + 10y)$, determine um ponto $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ no qual as equações de Cauchy-Riemann são satisfeitas.

A) $(-5,-5)$	B) $(-5,5)$	C) $(5,5)$	D) $(-4,-4)$	E) $(4,-4)$	F) $(4,4)$	G) $(-3,-3)$	H) $(0,0)$
I) $(3,-3)$	J) $(3,3)$	K) $(-2,-2)$	L) $(2,-2)$	M) $(2,2)$	N) $(-1,-1)$	O) $(1,1)$	P) $(-1,1)$

5) Determine v de modo que a função $f(z) = -3e^{-y}\cos x + 5x^2 - 5y^2 + iv(x,y)$ seja analítica em todo o plano $\mathbb{C}$.

A) $v = 3e^{-y} \operatorname{sen} x + 10xy$	B) $v = 5e^{-y} \operatorname{sen} x + 6xy$	C) $v = 3e^{-y} \operatorname{sen} x - 10xy$	D) $v = 5e^{-y} \operatorname{sen} x - 6xy$
E) $v = -3e^{-y} \operatorname{sen} x - 10xy$	F) $v = -5e^{-y} \operatorname{sen} x - 6xy$	G) $v = -5e^{-y} \operatorname{sen} x + 6xy$	H) $v = -3e^{-y} \operatorname{sen} x + 10xy$
I) $v = e^{3y} \cos x + 10xy$	J) $v = e^{3y} \cos x - 10xy$	K) $v = e^{-3y} \cos x + 6xy$	L) $v = e^{-3y} \cos x - 6xy$
M) $v = e^{5y} \cos x - 8xy$	N) $v = e^{-5y} \cos x + 8xy$	O) $v = e^{5y} \cos x - 6xy$	P) $v = e^{-5y} \cos x + 6xy$
Q) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x + 8xy$	R) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x - 8xy$	S) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x + 5xy$	T) $v = 6e^{-y} \operatorname{sen} x - 5xy$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 2ª PROVA – A

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é parametrizada por $z(t) = e^{it}$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{5}$.

A) $\cos\frac{2\pi}{3} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$	B) $\cos\frac{2\pi}{4} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4}$	C) $\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$	D) $4(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$
E) $9(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	F) $2(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	G) $3(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	H) $5(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$
I) $7(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	J) $4(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	K) $10(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	L) $16(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$
M) $2(\cos\frac{\pi}{16} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16})$	N) $3(\cos\frac{\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5})$	O) $10(\cos\frac{\pi}{13} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{13})$	P) $7(\cos\frac{\pi}{17} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{17})$

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{1+2i} \left(\frac{3z^2}{1+2i} - 2z + 1\right) \mathrm{d}z$.

A) 0	B) $1-i$	C) $1+i$	D) $1+2i$	E) $1-2i$	F) $1+3i$	G) $1-3i$	H) $1+4i$	I) $1-4i$	J) $4+i$
K) $1+5i$	L) $1-5i$	M) $4+6i$	N) $4-6i$	O) $4+8i$	P) $4-8i$	Q) $2+7i$	R) $2-7i$	S) $3+8i$	T) $3-8i$

3) Sendo C o quadrado orientado positivamente com vértices nos pontos $-1-i$, $1-i$, $1+i$ e $-1+i$, calcule

$$\oint_C \frac{-e^{3zi} + e^{zi} + 5}{\left(z + \frac{i}{2}\right)^3}\,\mathrm{d}z.$$

A) 0	B) 1	C) πi	D) $2\pi i$	E) $4\pi i$
F) $\frac{\pi i}{8}(9e^{1/2} - e)$	G) $\frac{\pi i}{2}(9e^{3/2} - e)$	H) $\frac{\pi i}{3}(9e^{3/4} - 1)$	I) $\frac{\pi i}{4}(9e^{3/8} - 1)$	J) $\frac{\pi i}{5}(9e^{2/5} - 1)$
K) $\pi i(9e^{3/2} - e^{1/2})$	L) $\pi i(9e - e^{1/3})$	M) $\pi i(9e^{3/4} - 2e^{1/4})$	N) $\pi i(9e^{3/5} - 2e^{1/5})$	O) $\pi i(9e^{1/2} - 3e^{1/6})$
P) $\pi i(9e^{3/7} - 3e^{1/7})$	Q) $\pi i(9e^{3/8} - 4e^{1/8})$	R) $\pi i(9e^{1/3} - 4e^{1/9})$	S) $\pi i(e^{3/2} - 9e^{5/2})$	T) $\pi i(e^{3/8} - 9e^{3/2})$

4) Seja C a circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(zi)}{z(z+2\pi i)}\,\mathrm{d}z.$

A) 0	B) 1	C) i	D) πi	E) $2\pi i$	F) $\frac{5\pi i}{2}$	G) $\frac{7\pi i}{3}$	H) $\frac{9\pi i}{4}$	I) $\frac{13\pi i}{6}$	J) $\frac{5\pi i}{3}$	K) $\frac{7\pi i}{4}$	L) $\frac{11\pi i}{6}$	M) [illegible]
N) $\frac{1}{3}$	O) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	P) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	W) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	X) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$	Y) $\frac{\sqrt{5}}{3}$	Z) [illegible]

5) Calcule o valor de $f(3+4i)$, sabendo que f é uma função inteira tal que $f(1) = 5i$ e $|f(z)| > 2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $-i$	F) 2	G) -2	H) $2i$	I) $-2i$	J) 3	K) -3	L) $3i$	M) $-3i$
N) 4	O) -4	P) $4i$	Q) $-4i$	R) 5	S) -5	T) $5i$	U) $-5i$	V) 6	W) -6	X) $6i$	Y) $-6i$	Z) $7i$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 2ª PROVA – B

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{7}$.

A) $\cos\frac{2\pi}{3} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$	B) $\cos\frac{2\pi}{4} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4}$	C) $\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$	D) $4(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$
E) $9(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	F) $2(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	G) $3(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	H) $5(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$
I) $7(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	J) $4(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	K) $10(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	L) $16(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$
M) $2(\cos\frac{\pi}{16} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16})$	N) $3(\cos\frac{\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5})$	O) $10(\cos\frac{\pi}{13} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{13})$	P) $7(\cos\frac{\pi}{17} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{17})$

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{1-2i} \left(\frac{3z^2}{1-2i} - 2z + 1\right) \mathrm{d}z$.

A) 0	B) $1-i$	C) $1+i$	D) $1+2i$	E) $1-2i$	F) $1+3i$	G) $1-3i$	H) $1+4i$	I) $1-4i$	J) $4+i$
K) $1+5i$	L) $1-5i$	M) $4+6i$	N) $4-6i$	O) $4+8i$	P) $4-8i$	Q) $2+7i$	R) $2-7i$	S) $3+8i$	T) $3-8i$

3) Sendo C o quadrado orientado positivamente com vértices nos pontos $-1-i$, $1-i$, $1+i$ e $-1+i$, calcule

$$\oint_C \frac{-e^{3zi} + e^{zi} + 8}{\left(z + \frac{i}{3}\right)^3}\,\mathrm{d}z.$$

A) 0	B) 1	C) πi	D) $2\pi i$	E) $4\pi i$
F) $\frac{\pi i}{8}(9e^{1/2} - e)$	G) $\frac{\pi i}{2}(9e^{3/2} - e)$	H) $\frac{\pi i}{3}(9e^{3/4} - 1)$	I) $\frac{\pi i}{4}(9e^{3/8} - 1)$	J) $\frac{\pi i}{5}(9e^{2/5} - 1)$
K) $\pi i(9e^{3/2} - e^{1/2})$	L) $\pi i(9e - e^{1/3})$	M) $\pi i(9e^{3/4} - 2e^{1/4})$	N) $\pi i(9e^{3/5} - 2e^{1/5})$	O) $\pi i(9e^{1/2} - 3e^{1/6})$
P) $\pi i(9e^{3/7} - 3e^{1/7})$	Q) $\pi i(9e^{3/8} - 4e^{1/8})$	R) $\pi i(9e^{1/3} - 4e^{1/9})$	S) $\pi i(e^{3/2} - 9e^{5/2})$	T) $\pi i(e^{3/8} - 9e^{3/2})$

4) Seja C a circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(zi)}{\left(z + \frac{\pi i}{2}\right)\left(z + \frac{5\pi i}{2}\right)}\,\mathrm{d}z.$

A) 0	B) 1	C) i	D) πi	E) $2\pi i$	F) $\frac{5\pi i}{2}$	G) $\frac{7\pi i}{3}$	H) $\frac{9\pi i}{4}$	I) $\frac{13\pi i}{6}$	J) $\frac{5\pi i}{3}$	K) $\frac{7\pi i}{4}$	L) $\frac{11\pi i}{6}$	M) [illegible]
N) $\frac{1}{3}$	O) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	P) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	W) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	X) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$	Y) $\frac{\sqrt{5}}{3}$	Z) [illegible]

5) Calcule o valor de $f(3-2i)$, sabendo que f é uma função inteira tal que $f(i) = -3$ e $|f(z)| > 2$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $-i$	F) 2	G) -2	H) $2i$	I) $-2i$	J) 3	K) -3	L) $3i$	M) $-3i$
N) 4	O) -4	P) $4i$	Q) $-4i$	R) 5	S) -5	T) $5i$	U) $-5i$	V) 6	W) -6	X) $6i$	Y) $-6i$	Z) $7i$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 2ª PROVA – C

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é parametrizada por $z(t) = 3e^{it}$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{9}$.

A) $\cos\frac{2\pi}{3} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$	B) $\cos\frac{2\pi}{4} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4}$	C) $\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$	D) $4(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$
E) $9(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	F) $2(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	G) $3(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	H) $5(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$
I) $7(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	J) $4(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	K) $10(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	L) $16(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$
M) $2(\cos\frac{\pi}{16} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16})$	N) $3(\cos\frac{\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5})$	O) $10(\cos\frac{\pi}{13} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{13})$	P) $7(\cos\frac{\pi}{17} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{17})$

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{2+3i} \left(\frac{3z^2}{2+3i} - 2z + 2\right) \mathrm{d}z$.

A) 0	B) $1-i$	C) $1+i$	D) $1+2i$	E) $1-2i$	F) $1+3i$	G) $1-3i$	H) $1+4i$	I) $1-4i$	J) $4+i$
K) $1+5i$	L) $1-5i$	M) $4+6i$	N) $4-6i$	O) $4+8i$	P) $4-8i$	Q) $2+7i$	R) $2-7i$	S) $3+8i$	T) $3-8i$

3) Sendo C o quadrado orientado positivamente com vértices nos pontos $-1-i$, $1-i$, $1+i$ e $-1+i$, calcule

$$\oint_C \frac{-e^{3zi} + 2e^{zi} + 9}{\left(z + \frac{i}{4}\right)^3}\,\mathrm{d}z.$$

A) 0	B) 1	C) πi	D) $2\pi i$	E) $4\pi i$
F) $\frac{\pi i}{8}(9e^{1/2} - e)$	G) $\frac{\pi i}{2}(9e^{3/2} - e)$	H) $\frac{\pi i}{3}(9e^{3/4} - 1)$	I) $\frac{\pi i}{4}(9e^{3/8} - 1)$	J) $\frac{\pi i}{5}(9e^{2/5} - 1)$
K) $\pi i(9e^{3/2} - e^{1/2})$	L) $\pi i(9e - e^{1/3})$	M) $\pi i(9e^{3/4} - 2e^{1/4})$	N) $\pi i(9e^{3/5} - 2e^{1/5})$	O) $\pi i(9e^{1/2} - 3e^{1/6})$
P) $\pi i(9e^{3/7} - 3e^{1/7})$	Q) $\pi i(9e^{3/8} - 4e^{1/8})$	R) $\pi i(9e^{1/3} - 4e^{1/9})$	S) $\pi i(e^{3/2} - 9e^{5/2})$	T) $\pi i(e^{3/8} - 9e^{3/2})$

4) Seja C a circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(zi)}{\left(z + \frac{\pi i}{3}\right)\left(z + \frac{7\pi i}{3}\right)}\,\mathrm{d}z.$

A) 0	B) 1	C) i	D) πi	E) $2\pi i$	F) $\frac{5\pi i}{2}$	G) $\frac{7\pi i}{3}$	H) $\frac{9\pi i}{4}$	I) $\frac{13\pi i}{6}$	J) $\frac{5\pi i}{3}$	K) $\frac{7\pi i}{4}$	L) $\frac{11\pi i}{6}$	M) [illegible]
N) $\frac{1}{3}$	O) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	P) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	W) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	X) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$	Y) $\frac{\sqrt{5}}{3}$	Z) [illegible]

5) Calcule o valor de $f(2+5i)$, sabendo que f é uma função inteira tal que $f(1) = 4$ e $|f(z)| > \frac{1}{2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $-i$	F) 2	G) -2	H) $2i$	I) $-2i$	J) 3	K) -3	L) $3i$	M) $-3i$
N) 4	O) -4	P) $4i$	Q) $-4i$	R) 5	S) -5	T) $5i$	U) $-5i$	V) 6	W) -6	X) $6i$	Y) $-6i$	Z) $7i$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 2ª PROVA – D

NOME: ____________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é parametrizada por $z(t) = \sqrt{2}e^{it}$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{5}$.

A) $\cos\frac{2\pi}{3} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$	B) $\cos\frac{2\pi}{4} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4}$	C) $\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$	D) $4(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$
E) $9(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	F) $2(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	G) $3(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	H) $5(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$
I) $7(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	J) $4(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	K) $10(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	L) $16(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$
M) $2(\cos\frac{\pi}{16} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16})$	N) $3(\cos\frac{\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5})$	O) $10(\cos\frac{\pi}{13} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{13})$	P) $7(\cos\frac{\pi}{17} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{17})$

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{2-3i} \left(\frac{3z^2}{2-3i} - 2z + 2\right) \mathrm{d}z$.

A) 0	B) $1-i$	C) $1+i$	D) $1+2i$	E) $1-2i$	F) $1+3i$	G) $1-3i$	H) $1+4i$	I) $1-4i$	J) $4+i$
K) $1+5i$	L) $1-5i$	M) $4+6i$	N) $4-6i$	O) $4+8i$	P) $4-8i$	Q) $2+7i$	R) $2-7i$	S) $3+8i$	T) $3-8i$

3) Sendo C o quadrado orientado positivamente com vértices nos pontos $-1-i$, $1-i$, $1+i$ e $-1+i$, calcule

$$\oint_C \frac{-e^{3zi} + 2e^{zi} + 10}{\left(z + \frac{i}{5}\right)^3}\,\mathrm{d}z.$$

A) 0	B) 1	C) πi	D) $2\pi i$	E) $4\pi i$
F) $\frac{\pi i}{8}(9e^{1/2} - e)$	G) $\frac{\pi i}{2}(9e^{3/2} - e)$	H) $\frac{\pi i}{3}(9e^{3/4} - 1)$	I) $\frac{\pi i}{4}(9e^{3/8} - 1)$	J) $\frac{\pi i}{5}(9e^{2/5} - 1)$
K) $\pi i(9e^{3/2} - e^{1/2})$	L) $\pi i(9e - e^{1/3})$	M) $\pi i(9e^{3/4} - 2e^{1/4})$	N) $\pi i(9e^{3/5} - 2e^{1/5})$	O) $\pi i(9e^{1/2} - 3e^{1/6})$
P) $\pi i(9e^{3/7} - 3e^{1/7})$	Q) $\pi i(9e^{3/8} - 4e^{1/8})$	R) $\pi i(9e^{1/3} - 4e^{1/9})$	S) $\pi i(e^{3/2} - 9e^{5/2})$	T) $\pi i(e^{3/8} - 9e^{3/2})$

4) Seja C a circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(zi)}{\left(z + \frac{\pi i}{4}\right)\left(z + \frac{9\pi i}{4}\right)}\,\mathrm{d}z.$

A) 0	B) 1	C) i	D) πi	E) $2\pi i$	F) $\frac{5\pi i}{2}$	G) $\frac{7\pi i}{3}$	H) $\frac{9\pi i}{4}$	I) $\frac{13\pi i}{6}$	J) $\frac{5\pi i}{3}$	K) $\frac{7\pi i}{4}$	L) $\frac{11\pi i}{6}$	M) [illegible]
N) $\frac{1}{3}$	O) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	P) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	W) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	X) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$	Y) $\frac{\sqrt{5}}{3}$	Z) [illegible]

5) Calcule o valor de $f(-3-2i)$, sabendo que f é uma função inteira tal que $f(0) = 3i$ e $|f(z)| > 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $-i$	F) 2	G) -2	H) $2i$	I) $-2i$	J) 3	K) -3	L) $3i$	M) $-3i$
N) 4	O) -4	P) $4i$	Q) $-4i$	R) 5	S) -5	T) $5i$	U) $-5i$	V) 6	W) -6	X) $6i$	Y) $-6i$	Z) $7i$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 2ª PROVA – E

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é parametrizada por $z(t) = \sqrt{3}e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{7}$.

A) $\cos\frac{2\pi}{3} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$	B) $\cos\frac{2\pi}{4} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4}$	C) $\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$	D) $4(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$
E) $9(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	F) $2(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	G) $3(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	H) $5(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$
I) $7(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	J) $4(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	K) $10(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	L) $16(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$
M) $2(\cos\frac{\pi}{16} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16})$	N) $3(\cos\frac{\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5})$	O) $10(\cos\frac{\pi}{13} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{13})$	P) $7(\cos\frac{\pi}{17} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{17})$

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{2+4i} \left(\frac{3z^2}{2+4i} - 2z + 2\right) \mathrm{d}z$.

A) 0	B) $1-i$	C) $1+i$	D) $1+2i$	E) $1-2i$	F) $1+3i$	G) $1-3i$	H) $1+4i$	I) $1-4i$	J) $4+i$
K) $1+5i$	L) $1-5i$	M) $4+6i$	N) $4-6i$	O) $4+8i$	P) $4-8i$	Q) $2+7i$	R) $2-7i$	S) $3+8i$	T) $3-8i$

3) Sendo C o quadrado orientado positivamente com vértices nos pontos $-1-i$, $1-i$, $1+i$ e $-1+i$, calcule

$$\oint_C \frac{-e^{3zi} + 3e^{zi} + 2}{\left(z + \frac{i}{6}\right)^3}\,\mathrm{d}z.$$

A) 0	B) 1	C) πi	D) $2\pi i$	E) $4\pi i$
F) $\frac{\pi i}{8}(9e^{1/2} - e)$	G) $\frac{\pi i}{2}(9e^{3/2} - e)$	H) $\frac{\pi i}{3}(9e^{3/4} - 1)$	I) $\frac{\pi i}{4}(9e^{3/8} - 1)$	J) $\frac{\pi i}{5}(9e^{2/5} - 1)$
K) $\pi i(9e^{3/2} - e^{1/2})$	L) $\pi i(9e - e^{1/3})$	M) $\pi i(9e^{3/4} - 2e^{1/4})$	N) $\pi i(9e^{3/5} - 2e^{1/5})$	O) $\pi i(9e^{1/2} - 3e^{1/6})$
P) $\pi i(9e^{3/7} - 3e^{1/7})$	Q) $\pi i(9e^{3/8} - 4e^{1/8})$	R) $\pi i(9e^{1/3} - 4e^{1/9})$	S) $\pi i(e^{3/2} - 9e^{5/2})$	T) $\pi i(e^{3/8} - 9e^{3/2})$

4) Seja C a circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(zi)}{\left(z + \frac{\pi i}{6}\right)\left(z + \frac{13\pi i}{6}\right)}\,\mathrm{d}z.$

A) 0	B) 1	C) i	D) πi	E) $2\pi i$	F) $\frac{5\pi i}{2}$	G) $\frac{7\pi i}{3}$	H) $\frac{9\pi i}{4}$	I) $\frac{13\pi i}{6}$	J) $\frac{5\pi i}{3}$	K) $\frac{7\pi i}{4}$	L) $\frac{11\pi i}{6}$	M) [illegible]
N) $\frac{1}{3}$	O) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	P) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	W) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	X) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$	Y) $\frac{\sqrt{5}}{3}$	Z) [illegible]

5) Calcule o valor de $f(1+2i)$, sabendo que f é uma função inteira tal que $f(-5) = i$ e $|f(z)| > \frac{1}{2}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $-i$	F) 2	G) -2	H) $2i$	I) $-2i$	J) 3	K) -3	L) $3i$	M) $-3i$
N) 4	O) -4	P) $4i$	Q) $-4i$	R) 5	S) -5	T) $5i$	U) $-5i$	V) 6	W) -6	X) $6i$	Y) $-6i$	Z) $7i$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 2ª PROVA – F

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é parametrizada por $z(t) = \sqrt{5}e^{it}$, $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{9}$.

A) $\cos\frac{2\pi}{3} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$	B) $\cos\frac{2\pi}{4} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4}$	C) $\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$	D) $4(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$
E) $9(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	F) $2(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	G) $3(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	H) $5(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$
I) $7(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	J) $4(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	K) $10(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	L) $16(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$
M) $2(\cos\frac{\pi}{16} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16})$	N) $3(\cos\frac{\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5})$	O) $10(\cos\frac{\pi}{13} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{13})$	P) $7(\cos\frac{\pi}{17} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{17})$

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{2-4i} \left(\frac{3z^2}{2-4i} - 2z + 2\right) \mathrm{d}z$.

A) 0	B) $1-i$	C) $1+i$	D) $1+2i$	E) $1-2i$	F) $1+3i$	G) $1-3i$	H) $1+4i$	I) $1-4i$	J) $4+i$
K) $1+5i$	L) $1-5i$	M) $4+6i$	N) $4-6i$	O) $4+8i$	P) $4-8i$	Q) $2+7i$	R) $2-7i$	S) $3+8i$	T) $3-8i$

3) Sendo C o quadrado orientado positivamente com vértices nos pontos $-1-i$, $1-i$, $1+i$ e $-1+i$, calcule

$$\oint_C \frac{-e^{3zi} + 3e^{zi} + 1}{\left(z + \frac{i}{7}\right)^3}\,\mathrm{d}z.$$

A) 0	B) 1	C) πi	D) $2\pi i$	E) $4\pi i$
F) $\frac{\pi i}{8}(9e^{1/2} - e)$	G) $\frac{\pi i}{2}(9e^{3/2} - e)$	H) $\frac{\pi i}{3}(9e^{3/4} - 1)$	I) $\frac{\pi i}{4}(9e^{3/8} - 1)$	J) $\frac{\pi i}{5}(9e^{2/5} - 1)$
K) $\pi i(9e^{3/2} - e^{1/2})$	L) $\pi i(9e - e^{1/3})$	M) $\pi i(9e^{3/4} - 2e^{1/4})$	N) $\pi i(9e^{3/5} - 2e^{1/5})$	O) $\pi i(9e^{1/2} - 3e^{1/6})$
P) $\pi i(9e^{3/7} - 3e^{1/7})$	Q) $\pi i(9e^{3/8} - 4e^{1/8})$	R) $\pi i(9e^{1/3} - 4e^{1/9})$	S) $\pi i(e^{3/2} - 9e^{5/2})$	T) $\pi i(e^{3/8} - 9e^{3/2})$

4) Seja C a circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(zi)}{\left(z - \frac{\pi i}{3}\right)\left(z + \frac{5\pi i}{3}\right)}\,\mathrm{d}z.$

A) 0	B) 1	C) i	D) πi	E) $2\pi i$	F) $\frac{5\pi i}{2}$	G) $\frac{7\pi i}{3}$	H) $\frac{9\pi i}{4}$	I) $\frac{13\pi i}{6}$	J) $\frac{5\pi i}{3}$	K) $\frac{7\pi i}{4}$	L) $\frac{11\pi i}{6}$	M) [illegible]
N) $\frac{1}{3}$	O) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	P) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	W) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	X) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$	Y) $\frac{\sqrt{5}}{3}$	Z) [illegible]

5) Calcule o valor de $f(-3-i)$, sabendo que f é uma função inteira tal que $f(2i) = 4$ e $|f(z)| > 1$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $-i$	F) 2	G) -2	H) $2i$	I) $-2i$	J) 3	K) -3	L) $3i$	M) $-3i$
N) 4	O) -4	P) $4i$	Q) $-4i$	R) 5	S) -5	T) $5i$	U) $-5i$	V) 6	W) -6	X) $6i$	Y) $-6i$	Z) $7i$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 2ª PROVA – G

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ________________ CURSO: ________________

RESPOSTAS: 1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é parametrizada por $z(t) = \sqrt{7}e^{it}$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{5}$.

A) $\cos\frac{2\pi}{3} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}$	B) $\cos\frac{2\pi}{4} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4}$	C) $\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5}$	D) $4(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$
E) $9(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	F) $2(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	G) $3(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	H) $5(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$
I) $7(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	J) $4(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	K) $10(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	L) $16(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{5})$
M) $2(\cos\frac{\pi}{16} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{16})$	N) $3(\cos\frac{\pi}{5} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{5})$	O) $10(\cos\frac{\pi}{13} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{13})$	P) $7(\cos\frac{\pi}{17} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{17})$

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{1+5i} \left(\frac{3z^2}{1+5i} - 2z + 1\right) \mathrm{d}z$.

A) 0	B) $1-i$	C) $1+i$	D) $1+2i$	E) $1-2i$	F) $1+3i$	G) $1-3i$	H) $1+4i$	I) $1-4i$	J) $4+i$
K) $1+5i$	L) $1-5i$	M) $4+6i$	N) $4-6i$	O) $4+8i$	P) $4-8i$	Q) $2+7i$	R) $2-7i$	S) $3+8i$	T) $3-8i$

3) Sendo C o quadrado orientado positivamente com vértices nos pontos $-1-i$, $1-i$, $1+i$ e $-1+i$, calcule

$$\oint_C \frac{-e^{3zi} + 4e^{zi} + 2}{\left(z + \frac{i}{8}\right)^3}\,\mathrm{d}z.$$

A) 0	B) 1	C) πi	D) $2\pi i$	E) $4\pi i$
F) $\frac{\pi i}{8}(9e^{1/2} - e)$	G) $\frac{\pi i}{2}(9e^{3/2} - e)$	H) $\frac{\pi i}{3}(9e^{3/4} - 1)$	I) $\frac{\pi i}{4}(9e^{3/8} - 1)$	J) $\frac{\pi i}{5}(9e^{2/5} - 1)$
K) $\pi i(9e^{3/2} - e^{1/2})$	L) $\pi i(9e - e^{1/3})$	M) $\pi i(9e^{3/4} - 2e^{1/4})$	N) $\pi i(9e^{3/5} - 2e^{1/5})$	O) $\pi i(9e^{1/2} - 3e^{1/6})$
P) $\pi i(9e^{3/7} - 3e^{1/7})$	Q) $\pi i(9e^{3/8} - 4e^{1/8})$	R) $\pi i(9e^{1/3} - 4e^{1/9})$	S) $\pi i(e^{3/2} - 9e^{5/2})$	T) $\pi i(e^{3/8} - 9e^{3/2})$

4) Seja C a circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(zi)}{\left(z - \frac{\pi i}{4}\right)\left(z + \frac{7\pi i}{4}\right)}\,\mathrm{d}z.$

A) 0	B) 1	C) i	D) πi	E) $2\pi i$	F) $\frac{5\pi i}{2}$	G) $\frac{7\pi i}{3}$	H) $\frac{9\pi i}{4}$	I) $\frac{13\pi i}{6}$	J) $\frac{5\pi i}{3}$	K) $\frac{7\pi i}{4}$	L) $\frac{11\pi i}{6}$	M) [illegible]
N) $\frac{1}{3}$	O) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	P) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	W) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	X) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$	Y) $\frac{\sqrt{5}}{3}$	Z) [illegible]

5) Calcule o valor de $f(-2+5i)$, sabendo que f é uma função inteira tal que $f(1) = -4i$ e $|f(z)| > \frac{1}{3}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $-i$	F) 2	G) -2	H) $2i$	I) $-2i$	J) 3	K) -3	L) $3i$	M) $-3i$
N) 4	O) -4	P) $4i$	Q) $-4i$	R) 5	S) -5	T) $5i$	U) $-5i$	V) 6	W) -6	X) $6i$	Y) $-6i$	Z) $7i$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 2ª PROVA – H

NOME: ____

Nº MATRÍCULA: ____________________ CURSO: ______________________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Calcule $\displaystyle\int_C |z|\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é parametrizada por $z(t) = \sqrt{10}e^{it}$, $0 \le t \le \frac{2\pi}{7}$.

A) $\cos\frac{2\pi}{3} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{3}$	B) $\cos\frac{2\pi}{4} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{4}$	C) $\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5}$	D) $4(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{7})$
E) $9(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	F) $2(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	G) $3(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	H) $5(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{9})$
I) $7(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5})$	J) $4(\cos\frac{2\pi}{9} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{9})$	K) $10(\cos\frac{2\pi}{7} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{7})$	L) $16(\cos\frac{2\pi}{5} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{5})$
M) $2(\cos\frac{\pi}{16} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{16})$	N) $3(\cos\frac{\pi}{5} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{5})$	O) $10(\cos\frac{\pi}{13} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{13})$	P) $7(\cos\frac{\pi}{17} - 1 + i\,\text{sen}\,\frac{\pi}{17})$

2) Calcule $\displaystyle\int_0^{1-5i} \left(\frac{3z^2}{1-5i} - 2z + 1\right) \mathrm{d}z$.

A) 0	B) $1-i$	C) $1+i$	D) $1+2i$	E) $1-2i$	F) $1+3i$	G) $1-3i$	H) $1+4i$	I) $1-4i$	J) $4+i$
K) $1+5i$	L) $1-5i$	M) $4+6i$	N) $4-6i$	O) $4+8i$	P) $4-8i$	Q) $2+7i$	R) $2-7i$	S) $3+8i$	T) $3-8i$

3) Sendo C o quadrado orientado positivamente com vértices nos pontos $-1-i$, $1-i$, $1+i$ e $-1+i$, calcule

$$\oint_C \frac{-e^{3zi} + 4e^{zi} + 4}{\left(z + \frac{i}{9}\right)^3}\,\mathrm{d}z.$$

A) 0	B) 1	C) πi	D) $2\pi i$	E) $4\pi i$
F) $\frac{\pi i}{8}(9e^{1/2} - e)$	G) $\frac{\pi i}{2}(9e^{3/2} - e)$	H) $\frac{\pi i}{3}(9e^{3/4} - 1)$	I) $\frac{\pi i}{4}(9e^{3/8} - 1)$	J) $\frac{\pi i}{5}(9e^{2/5} - 1)$
K) $\pi i(9e^{3/2} - e^{1/2})$	L) $\pi i(9e - e^{1/3})$	M) $\pi i(9e^{3/4} - 2e^{1/4})$	N) $\pi i(9e^{3/5} - 2e^{1/5})$	O) $\pi i(9e^{1/2} - 3e^{1/6})$
P) $\pi i(9e^{3/7} - 3e^{1/7})$	Q) $\pi i(9e^{3/8} - 4e^{1/8})$	R) $\pi i(9e^{1/3} - 4e^{1/9})$	S) $\pi i(e^{3/2} - 9e^{5/2})$	T) $\pi i(e^{3/8} - 9e^{3/2})$

4) Seja C a circunferência de raio 2 e centro na origem, orientada no sentido anti-horário. Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\cos(zi)}{\left(z - \frac{\pi i}{6}\right)\left(z + \frac{11\pi i}{6}\right)}\,\mathrm{d}z.$

A) 0	B) 1	C) i	D) πi	E) $2\pi i$	F) $\frac{5\pi i}{2}$	G) $\frac{7\pi i}{3}$	H) $\frac{9\pi i}{4}$	I) $\frac{13\pi i}{6}$	J) $\frac{5\pi i}{3}$	K) $\frac{7\pi i}{4}$	L) $\frac{11\pi i}{6}$	M) [illegible]
N) $\frac{1}{3}$	O) $\frac{\sqrt{2}}{2}$	P) $\frac{\sqrt{3}}{2}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{-\sqrt{2}}{2}$	W) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$	X) $\frac{-\sqrt{5}}{2}$	Y) $\frac{\sqrt{5}}{3}$	Z) [illegible]

5) Calcule o valor de $f(5+3i)$, sabendo que f é uma função inteira tal que $f(-1) = -2i$ e $|f(z)| > \frac{2}{3}$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $-i$	F) 2	G) -2	H) $2i$	I) $-2i$	J) 3	K) -3	L) $3i$	M) $-3i$
N) 4	O) -4	P) $4i$	Q) $-4i$	R) 5	S) -5	T) $5i$	U) $-5i$	V) 6	W) -6	X) $6i$	Y) $-6i$	Z) $7i$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 3^{a} PROVA – A

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Determine o coeficiente a_{-2} do desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(2z)}{z^7} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

A) -1	B) 0	C) 2	D) $\frac{-4}{3}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{4}{15}$	G) $\frac{-4}{15}$	H) $\frac{9}{2}$	I) $\frac{-9}{2}$	J) $\frac{81}{40}$	K) $\frac{-81}{40}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{3}{8}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{3}{4}$	W) $\frac{-3}{4}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{3}{13}$	Z) 1

2) Sendo $f(z) = \dfrac{z^5 + 11}{(z-1)^2(z^2+3)}$, calcule $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$.

A) -1	B) 0	C) 1	D) 2	E) -2	F) $\frac{8}{15}$	G) $\frac{-8}{15}$	H) $\frac{7}{5}$	I) $\frac{-7}{5}$	J) $\frac{3}{10}$	K) $\frac{-3}{10}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{-1}{6}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{25}{18}$	S) $\frac{-5}{2}$	T) $\frac{-17}{2}$	U) $\frac{-11}{4}$	V) $\frac{5}{2}$	W) $\frac{9}{5}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{1}{25}$	Z) $\frac{1}{6}$

3) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z^2+1)(z^2+49)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é o quadrado de vértices $\pm 5 \pm 5i$ descrito no sentido positivo.

A) 0	B) 1	C) -1	D) 2	E) -2	F) πi	G) $-\pi i$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$	K) $-4\pi i$	L) $\frac{-\pi i}{24}$	M) $\frac{-\pi}{63}$
N) $\frac{\pi i}{40}$	O) $\frac{\pi i}{63}$	P) $\frac{2\pi i}{63}$	Q) $\frac{\pi i}{24}$	R) $\frac{\pi i}{30}$	S) $\frac{\pi i}{20}$	T) $\frac{\pi i}{10}$	U) $\frac{\pi i}{45}$	V) $\frac{2\pi i}{45}$	W) $\frac{2\pi i}{77}$	X) $\frac{2\pi i}{55}$	Y) $\frac{\pi i}{42}$	Z) $\frac{\pi i}{36}$

4) Se C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2 + \frac{\pi^2}{4}}\,\mathrm{d}z$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $e^{\pi} - e^{-\pi}$
F) $\pi i/4$	G) $-\pi i/4$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$
K) $2(e^{-\pi/2} - e^{\pi/2})$	L) $3(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3})$	M) $4(e^{-\pi/4} - e^{\pi/4})$	N) $5(e^{-\pi/5} - e^{\pi/5})$	O) $6(e^{-\pi/6} - e^{\pi/6})$
P) $7(e^{-\pi/7} - e^{\pi/7})$	Q) $8(e^{-\pi/8} - e^{\pi/8})$	R) $9(e^{-\pi/9} - e^{\pi/9})$	S) $10(e^{-\pi/10} - e^{\pi/10})$	T) $11(e^{-\pi/11} - e^{\pi/11})$

5) Determine o valor da integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+9}\,\mathrm{d}x$.

A) 0	B) 1	C) 2	D) π	E) 2π	F) $\frac{\pi}{2}$	G) $\frac{\pi}{3}$	H) $\frac{\pi}{4}$	I) $\frac{\pi}{5}$	J) $\frac{\pi}{6}$	K) $\frac{\pi}{7}$	L) $\frac{\pi}{8}$	M) $\frac{\pi}{9}$
N) $\frac{\pi}{10}$	O) $\frac{\pi}{11}$	P) $\frac{\pi}{12}$	Q) $\frac{\pi}{13}$	R) $\frac{\pi}{14}$	S) $\frac{\pi}{15}$	T) $\frac{\pi}{16}$	U) $\frac{\pi}{17}$	V) $\frac{\pi}{18}$	W) $\frac{\pi}{19}$	X) $\frac{\pi}{20}$	Y) $\frac{\pi}{21}$	Z) $\frac{\pi}{22}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 3ª PROVA – B

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Determine o coeficiente a_{-3} do desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(-2z)}{z^8} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

A) -1	B) 0	C) 1	D) $\frac{-4}{3}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{4}{15}$	G) $\frac{-4}{15}$	H) $\frac{9}{2}$	I) $\frac{-9}{2}$	J) $\frac{81}{40}$	K) $\frac{-81}{40}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{3}{8}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{3}{4}$	W) $\frac{-3}{4}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{3}{13}$	Z) $\frac{1}{17}$

2) Sendo $f(z) = \dfrac{z^5+11}{(z-1)^2(z^2+5)}$, calcule $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$.

A) -1	B) 0	C) 1	D) 2	E) -2	F) $\frac{8}{15}$	G) $\frac{-8}{15}$	H) $\frac{7}{5}$	I) $\frac{-7}{5}$	J) $\frac{3}{10}$	K) $\frac{-3}{10}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{-1}{6}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{25}{18}$	S) $\frac{-5}{2}$	T) $\frac{-17}{2}$	U) $\frac{-11}{4}$	V) $\frac{5}{2}$	W) $\frac{9}{5}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{1}{25}$	Z) $\frac{1}{6}$

3) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z^2+1)(z^2+64)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é o quadrado de vértices $\pm5\pm5i$ descrito no sentido positivo.

A) 0	B) 1	C) -1	D) 2	E) -2	F) πi	G) $-\pi i$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$	K) $-4\pi i$	L) $\frac{-\pi i}{24}$	M) $\frac{-\pi}{63}$
N) $\frac{\pi i}{40}$	O) $\frac{\pi i}{63}$	P) $\frac{2\pi i}{63}$	Q) $\frac{\pi i}{24}$	R) $\frac{\pi i}{30}$	S) $\frac{\pi i}{20}$	T) $\frac{\pi i}{10}$	U) $\frac{\pi i}{45}$	V) $\frac{2\pi i}{45}$	W) $\frac{2\pi i}{77}$	X) $\frac{2\pi i}{55}$	Y) $\frac{\pi i}{42}$	Z) $\frac{\pi i}{36}$

4) Se C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2+\frac{\pi^2}{9}}\,\mathrm{d}z$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $e^{\pi}-e^{-\pi}$
F) $\pi i/4$	G) $-\pi i/4$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$
K) $2(e^{-\pi/2}-e^{\pi/2})$	L) $3(e^{-\pi/3}-e^{\pi/3})$	M) $4(e^{-\pi/4}-e^{\pi/4})$	N) $5(e^{-\pi/5}-e^{\pi/5})$	O) $6(e^{-\pi/6}-e^{\pi/6})$
P) $7(e^{-\pi/7}-e^{\pi/7})$	Q) $8(e^{-\pi/8}-e^{\pi/8})$	R) $9(e^{-\pi/9}-e^{\pi/9})$	S) $10(e^{-\pi/10}-e^{\pi/10})$	T) $11(e^{-\pi/11}-e^{\pi/11})$

5) Determine o valor da integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+16}\,\mathrm{d}x$.

A) 0	B) 1	C) 2	D) π	E) 2π	F) $\frac{\pi}{2}$	G) $\frac{\pi}{3}$	H) $\frac{\pi}{4}$	I) $\frac{\pi}{5}$	J) $\frac{\pi}{6}$	K) $\frac{\pi}{7}$	L) $\frac{\pi}{8}$	M) $\frac{\pi}{9}$
N) $\frac{\pi}{10}$	O) $\frac{\pi}{11}$	P) $\frac{\pi}{12}$	Q) $\frac{\pi}{13}$	R) $\frac{\pi}{14}$	S) $\frac{\pi}{15}$	T) $\frac{\pi}{16}$	U) $\frac{\pi}{17}$	V) $\frac{\pi}{18}$	W) $\frac{\pi}{19}$	X) $\frac{\pi}{20}$	Y) $\frac{\pi}{21}$	Z) $\frac{\pi}{22}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 3ª PROVA – C

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Determine o coeficiente a_{-4} do desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(3z)}{z^9} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

A) -1	B) 0	C) 2	D) $\frac{-4}{3}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{4}{15}$	G) $\frac{-4}{15}$	H) $\frac{9}{2}$	I) $\frac{-9}{2}$	J) $\frac{81}{40}$	K) $\frac{-81}{40}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{3}{8}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{3}{4}$	W) $\frac{-3}{4}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{3}{13}$	Z) 1

2) Sendo $f(z) = \dfrac{z^5+11}{(z+1)^2(z^2+5)}$, calcule $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$.

A) -1	B) 0	C) 1	D) 2	E) -2	F) $\frac{8}{15}$	G) $\frac{-8}{15}$	H) $\frac{7}{5}$	I) $\frac{-7}{5}$	J) $\frac{3}{10}$	K) $\frac{-3}{10}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{-1}{6}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{25}{18}$	S) $\frac{-5}{2}$	T) $\frac{-17}{2}$	U) $\frac{-11}{4}$	V) $\frac{5}{2}$	W) $\frac{9}{5}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{1}{25}$	Z) $\frac{1}{6}$

3) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z^2+1)(z^2+81)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é o quadrado de vértices $\pm5\pm5i$ descrito no sentido positivo.

A) 0	B) 1	C) -1	D) 2	E) -2	F) πi	G) $-\pi i$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$	K) $-4\pi i$	L) $\frac{-\pi i}{24}$	M) $\frac{-\pi}{63}$
N) $\frac{\pi i}{40}$	O) $\frac{\pi i}{63}$	P) $\frac{2\pi i}{63}$	Q) $\frac{\pi i}{24}$	R) $\frac{\pi i}{30}$	S) $\frac{\pi i}{20}$	T) $\frac{\pi i}{10}$	U) $\frac{\pi i}{45}$	V) $\frac{2\pi i}{45}$	W) $\frac{2\pi i}{77}$	X) $\frac{2\pi i}{55}$	Y) $\frac{\pi i}{42}$	Z) $\frac{\pi i}{36}$

4) Se C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2+\frac{\pi^2}{16}}\,\mathrm{d}z$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $e^{\pi}-e^{-\pi}$
F) $\pi i/4$	G) $-\pi i/4$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$
K) $2(e^{-\pi/2}-e^{\pi/2})$	L) $3(e^{-\pi/3}-e^{\pi/3})$	M) $4(e^{-\pi/4}-e^{\pi/4})$	N) $5(e^{-\pi/5}-e^{\pi/5})$	O) $6(e^{-\pi/6}-e^{\pi/6})$
P) $7(e^{-\pi/7}-e^{\pi/7})$	Q) $8(e^{-\pi/8}-e^{\pi/8})$	R) $9(e^{-\pi/9}-e^{\pi/9})$	S) $10(e^{-\pi/10}-e^{\pi/10})$	T) $11(e^{-\pi/11}-e^{\pi/11})$

5) Determine o valor da integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+25}\,\mathrm{d}x$.

A) 0	B) 1	C) 2	D) π	E) 2π	F) $\frac{\pi}{2}$	G) $\frac{\pi}{3}$	H) $\frac{\pi}{4}$	I) $\frac{\pi}{5}$	J) $\frac{\pi}{6}$	K) $\frac{\pi}{7}$	L) $\frac{\pi}{8}$	M) $\frac{\pi}{9}$
N) $\frac{\pi}{10}$	O) $\frac{\pi}{11}$	P) $\frac{\pi}{12}$	Q) $\frac{\pi}{13}$	R) $\frac{\pi}{14}$	S) $\frac{\pi}{15}$	T) $\frac{\pi}{16}$	U) $\frac{\pi}{17}$	V) $\frac{\pi}{18}$	W) $\frac{\pi}{19}$	X) $\frac{\pi}{20}$	Y) $\frac{\pi}{21}$	Z) $\frac{\pi}{22}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 3ª PROVA – D

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: ☐ 2: ☐ 3: ☐ 4: ☐ 5: ☐

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Determine o coeficiente a_{-2} do desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(-3z)}{z^7} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

A) -1	B) 0	C) 2	D) $\frac{-4}{3}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{4}{15}$	G) $\frac{-4}{15}$	H) $\frac{9}{2}$	I) $\frac{-9}{2}$	J) $\frac{81}{40}$	K) $\frac{-81}{40}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{3}{8}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{3}{4}$	W) $\frac{-3}{4}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{3}{13}$	Z) 1

2) Sendo $f(z) = \dfrac{z^5 + 11}{(z+1)^2(z^2+3)}$, calcule $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$.

A) -1	B) 0	C) 1	D) 2	E) -2	F) $\frac{8}{15}$	G) $\frac{-8}{15}$	H) $\frac{7}{5}$	I) $\frac{-7}{5}$	J) $\frac{3}{10}$	K) $\frac{-3}{10}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{-1}{6}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{25}{18}$	S) $\frac{-5}{2}$	T) $\frac{-17}{2}$	U) $\frac{-11}{4}$	V) $\frac{5}{2}$	W) $\frac{9}{5}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{1}{25}$	Z) $\frac{1}{6}$

3) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z^2+4)(z^2+49)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é o quadrado de vértices $\pm 5 \pm 5i$ descrito no sentido positivo.

A) 0	B) 1	C) -1	D) 2	E) -2	F) πi	G) $-\pi i$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$	K) $-4\pi i$	L) $\frac{-\pi i}{24}$	M) $\frac{-\pi}{63}$
N) $\frac{\pi i}{40}$	O) $\frac{\pi i}{63}$	P) $\frac{2\pi i}{63}$	Q) $\frac{\pi i}{24}$	R) $\frac{\pi i}{30}$	S) $\frac{\pi i}{20}$	T) $\frac{\pi i}{10}$	U) $\frac{\pi i}{45}$	V) $\frac{2\pi i}{45}$	W) $\frac{2\pi i}{77}$	X) $\frac{2\pi i}{55}$	Y) $\frac{\pi i}{42}$	Z) $\frac{\pi i}{36}$

4) Se C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2 + \frac{\pi^2}{25}}\,\mathrm{d}z$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $e^{\pi} - e^{-\pi}$
F) $\pi i/4$	G) $-\pi i/4$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$
K) $2(e^{-\pi/2} - e^{\pi/2})$	L) $3(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3})$	M) $4(e^{-\pi/4} - e^{\pi/4})$	N) $5(e^{-\pi/5} - e^{\pi/5})$	O) $6(e^{-\pi/6} - e^{\pi/6})$
P) $7(e^{-\pi/7} - e^{\pi/7})$	Q) $8(e^{-\pi/8} - e^{\pi/8})$	R) $9(e^{-\pi/9} - e^{\pi/9})$	S) $10(e^{-\pi/10} - e^{\pi/10})$	T) $11(e^{-\pi/11} - e^{\pi/11})$

5) Determine o valor da integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+36}\,\mathrm{d}x$.

A) 0	B) 1	C) 2	D) π	E) 2π	F) $\frac{\pi}{2}$	G) $\frac{\pi}{3}$	H) $\frac{\pi}{4}$	I) $\frac{\pi}{5}$	J) $\frac{\pi}{6}$	K) $\frac{\pi}{7}$	L) $\frac{\pi}{8}$	M) $\frac{\pi}{9}$
N) $\frac{\pi}{10}$	O) $\frac{\pi}{11}$	P) $\frac{\pi}{12}$	Q) $\frac{\pi}{13}$	R) $\frac{\pi}{14}$	S) $\frac{\pi}{15}$	T) $\frac{\pi}{16}$	U) $\frac{\pi}{17}$	V) $\frac{\pi}{18}$	W) $\frac{\pi}{19}$	X) $\frac{\pi}{20}$	Y) $\frac{\pi}{21}$	Z) $\frac{\pi}{22}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 3ª PROVA – E

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Determine o coeficiente a_{-3} do desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(2z)}{z^8} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

A) -1	B) 0	C) 1	D) $\frac{-4}{3}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{4}{15}$	G) $\frac{-4}{15}$	H) $\frac{9}{2}$	I) $\frac{-9}{2}$	J) $\frac{81}{40}$	K) $\frac{-81}{40}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{3}{8}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{3}{4}$	W) $\frac{-3}{4}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{3}{13}$	Z) $\frac{1}{17}$

2) Sendo $f(z) = \dfrac{z^5 + 11}{(z-1)^2(z^2-3)}$, calcule $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$.

A) -1	B) 0	C) 1	D) 2	E) -2	F) $\frac{8}{15}$	G) $\frac{-8}{15}$	H) $\frac{7}{5}$	I) $\frac{-7}{5}$	J) $\frac{3}{10}$	K) $\frac{-3}{10}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{-1}{6}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{25}{18}$	S) $\frac{-5}{2}$	T) $\frac{-17}{2}$	U) $\frac{-11}{4}$	V) $\frac{5}{2}$	W) $\frac{9}{5}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{1}{25}$	Z) $\frac{1}{6}$

3) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z^2+4)(z^2+64)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é o quadrado de vértices $\pm 5 \pm 5i$ descrito no sentido positivo.

A) 0	B) 1	C) -1	D) 2	E) -2	F) πi	G) $-\pi i$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$	K) $-4\pi i$	L) $\frac{-\pi i}{24}$	M) $\frac{-\pi}{63}$
N) $\frac{\pi i}{40}$	O) $\frac{\pi i}{63}$	P) $\frac{2\pi i}{63}$	Q) $\frac{\pi i}{24}$	R) $\frac{\pi i}{30}$	S) $\frac{\pi i}{20}$	T) $\frac{\pi i}{10}$	U) $\frac{\pi i}{45}$	V) $\frac{2\pi i}{45}$	W) $\frac{2\pi i}{77}$	X) $\frac{2\pi i}{55}$	Y) $\frac{\pi i}{42}$	Z) $\frac{\pi i}{36}$

4) Se C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2 + \frac{\pi^2}{36}}\,\mathrm{d}z$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $e^{\pi} - e^{-\pi}$
F) $\pi i/4$	G) $-\pi i/4$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$
K) $2(e^{-\pi/2} - e^{\pi/2})$	L) $3(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3})$	M) $4(e^{-\pi/4} - e^{\pi/4})$	N) $5(e^{-\pi/5} - e^{\pi/5})$	O) $6(e^{-\pi/6} - e^{\pi/6})$
P) $7(e^{-\pi/7} - e^{\pi/7})$	Q) $8(e^{-\pi/8} - e^{\pi/8})$	R) $9(e^{-\pi/9} - e^{\pi/9})$	S) $10(e^{-\pi/10} - e^{\pi/10})$	T) $11(e^{-\pi/11} - e^{\pi/11})$

5) Determine o valor da integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{9x^2+4}\,\mathrm{d}x\,.$

A) 0	B) 1	C) 2	D) π	E) 2π	F) $\frac{\pi}{2}$	G) $\frac{\pi}{3}$	H) $\frac{\pi}{4}$	I) $\frac{\pi}{5}$	J) $\frac{\pi}{6}$	K) $\frac{\pi}{7}$	L) $\frac{\pi}{8}$	M) $\frac{\pi}{9}$
N) $\frac{\pi}{10}$	O) $\frac{\pi}{11}$	P) $\frac{\pi}{12}$	Q) $\frac{\pi}{13}$	R) $\frac{\pi}{14}$	S) $\frac{\pi}{15}$	T) $\frac{\pi}{16}$	U) $\frac{\pi}{17}$	V) $\frac{\pi}{18}$	W) $\frac{\pi}{19}$	X) $\frac{\pi}{20}$	Y) $\frac{\pi}{21}$	Z) $\frac{\pi}{22}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 3^{a} PROVA – F

NOME: ____

Nº MATRÍCULA: ____________________ CURSO: ____________________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Determine o coeficiente a_{-4} do desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(-2z)}{z^9} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

A) -1	B) 0	C) 2	D) $\frac{-4}{3}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{4}{15}$	G) $\frac{-4}{15}$	H) $\frac{9}{2}$	I) $\frac{-9}{2}$	J) $\frac{81}{40}$	K) $\frac{-81}{40}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{3}{8}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{3}{4}$	W) $\frac{-3}{4}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{3}{13}$	Z) 1

2) Sendo $f(z) = \dfrac{z^5 + 11}{(z-1)^2(z^2-5)}$, calcule $\operatorname*{Res}_{z=1} f(z)$.

A) -1	B) 0	C) 1	D) 2	E) -2	F) $\frac{8}{15}$	G) $\frac{-8}{15}$	H) $\frac{7}{5}$	I) $\frac{-7}{5}$	J) $\frac{3}{10}$	K) $\frac{-3}{10}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{-1}{6}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{25}{18}$	S) $\frac{-5}{2}$	T) $\frac{-17}{2}$	U) $\frac{-11}{4}$	V) $\frac{5}{2}$	W) $\frac{9}{5}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{1}{25}$	Z) $\frac{1}{6}$

3) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z^2+4)(z^2+81)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é o quadrado de vértices $\pm 5 \pm 5i$ descrito no sentido positivo.

A) 0	B) 1	C) -1	D) 2	E) -2	F) πi	G) $-\pi i$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$	K) $-4\pi i$	L) $\frac{-\pi i}{24}$	M) $\frac{-\pi}{63}$
N) $\frac{\pi i}{40}$	O) $\frac{\pi i}{63}$	P) $\frac{2\pi i}{63}$	Q) $\frac{\pi i}{24}$	R) $\frac{\pi i}{30}$	S) $\frac{\pi i}{20}$	T) $\frac{\pi i}{10}$	U) $\frac{\pi i}{45}$	V) $\frac{2\pi i}{45}$	W) $\frac{2\pi i}{77}$	X) $\frac{2\pi i}{55}$	Y) $\frac{\pi i}{42}$	Z) $\frac{\pi i}{36}$

4) Se C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2 + \frac{\pi^2}{49}}\,\mathrm{d}z$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $e^{\pi} - e^{-\pi}$
F) $\pi i/4$	G) $-\pi i/4$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$
K) $2(e^{-\pi/2} - e^{\pi/2})$	L) $3(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3})$	M) $4(e^{-\pi/4} - e^{\pi/4})$	N) $5(e^{-\pi/5} - e^{\pi/5})$	O) $6(e^{-\pi/6} - e^{\pi/6})$
P) $7(e^{-\pi/7} - e^{\pi/7})$	Q) $8(e^{-\pi/8} - e^{\pi/8})$	R) $9(e^{-\pi/9} - e^{\pi/9})$	S) $10(e^{-\pi/10} - e^{\pi/10})$	T) $11(e^{-\pi/11} - e^{\pi/11})$

5) Determine o valor da integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+1}\,\mathrm{d}x$.

A) 0	B) 1	C) 2	D) π	E) 2π	F) $\frac{\pi}{2}$	G) $\frac{\pi}{3}$	H) $\frac{\pi}{4}$	I) $\frac{\pi}{5}$	J) $\frac{\pi}{6}$	K) $\frac{\pi}{7}$	L) $\frac{\pi}{8}$	M) $\frac{\pi}{9}$
N) $\frac{\pi}{10}$	O) $\frac{\pi}{11}$	P) $\frac{\pi}{12}$	Q) $\frac{\pi}{13}$	R) $\frac{\pi}{14}$	S) $\frac{\pi}{15}$	T) $\frac{\pi}{16}$	U) $\frac{\pi}{17}$	V) $\frac{\pi}{18}$	W) $\frac{\pi}{19}$	X) $\frac{\pi}{20}$	Y) $\frac{\pi}{21}$	Z) $\frac{\pi}{22}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 3ª PROVA – G

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Determine o coeficiente a_{-2} do desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(3z)}{z^7} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

A) -1	B) 0	C) 2	D) $\frac{-4}{3}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{4}{15}$	G) $\frac{-4}{15}$	H) $\frac{9}{2}$	I) $\frac{-9}{2}$	J) $\frac{81}{40}$	K) $\frac{-81}{40}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{3}{8}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{3}{4}$	W) $\frac{-3}{4}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{3}{13}$	Z) 1

2) Sendo $f(z) = \dfrac{z^5+11}{(z+1)^2(z^2-3)}$, calcule $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$.

A) -1	B) 0	C) 1	D) 2	E) -2	F) $\frac{8}{15}$	G) $\frac{-8}{15}$	H) $\frac{7}{5}$	I) $\frac{-7}{5}$	J) $\frac{3}{10}$	K) $\frac{-3}{10}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{-1}{6}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{25}{18}$	S) $\frac{-5}{2}$	T) $\frac{-17}{2}$	U) $\frac{-11}{4}$	V) $\frac{5}{2}$	W) $\frac{9}{5}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{1}{25}$	Z) $\frac{1}{6}$

3) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z^2+9)(z^2+49)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é o quadrado de vértices $\pm5\pm5i$ descrito no sentido positivo.

A) 0	B) 1	C) -1	D) 2	E) -2	F) πi	G) $-\pi i$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$	K) $-4\pi i$	L) $\frac{-\pi i}{24}$	M) $\frac{-\pi}{63}$
N) $\frac{\pi i}{40}$	O) $\frac{\pi i}{63}$	P) $\frac{2\pi i}{63}$	Q) $\frac{\pi i}{24}$	R) $\frac{\pi i}{30}$	S) $\frac{\pi i}{20}$	T) $\frac{\pi i}{10}$	U) $\frac{\pi i}{45}$	V) $\frac{2\pi i}{45}$	W) $\frac{2\pi i}{77}$	X) $\frac{2\pi i}{55}$	Y) $\frac{\pi i}{42}$	Z) $\frac{\pi i}{36}$

4) Se C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2+\frac{\pi^2}{64}}\,\mathrm{d}z$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $e^{\pi}-e^{-\pi}$
F) $\pi i/4$	G) $-\pi i/4$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$
K) $2(e^{-\pi/2}-e^{\pi/2})$	L) $3(e^{-\pi/3}-e^{\pi/3})$	M) $4(e^{-\pi/4}-e^{\pi/4})$	N) $5(e^{-\pi/5}-e^{\pi/5})$	O) $6(e^{-\pi/6}-e^{\pi/6})$
P) $7(e^{-\pi/7}-e^{\pi/7})$	Q) $8(e^{-\pi/8}-e^{\pi/8})$	R) $9(e^{-\pi/9}-e^{\pi/9})$	S) $10(e^{-\pi/10}-e^{\pi/10})$	T) $11(e^{-\pi/11}-e^{\pi/11})$

5) Determine o valor da integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4x^2+49}\,\mathrm{d}x$.

A) 0	B) 1	C) 2	D) π	E) 2π	F) $\frac{\pi}{2}$	G) $\frac{\pi}{3}$	H) $\frac{\pi}{4}$	I) $\frac{\pi}{5}$	J) $\frac{\pi}{6}$	K) $\frac{\pi}{7}$	L) $\frac{\pi}{8}$	M) $\frac{\pi}{9}$
N) $\frac{\pi}{10}$	O) $\frac{\pi}{11}$	P) $\frac{\pi}{12}$	Q) $\frac{\pi}{13}$	R) $\frac{\pi}{14}$	S) $\frac{\pi}{15}$	T) $\frac{\pi}{16}$	U) $\frac{\pi}{17}$	V) $\frac{\pi}{18}$	W) $\frac{\pi}{19}$	X) $\frac{\pi}{20}$	Y) $\frac{\pi}{21}$	Z) $\frac{\pi}{22}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA – 3ª PROVA – H

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________

RESPOSTAS: 1: [ ] 2: [ ] 3: [ ] 4: [ ] 5: [ ]

Escolha apenas uma única letra como sendo a resposta de cada uma das questões.

1) Determine o coeficiente a_{-3} do desenvolvimento em série de Laurent da função

$$f(z) = \frac{\operatorname{sen}(-3z)}{z^8} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k.$$

A) -1	B) 0	C) 1	D) $\frac{-4}{3}$	E) $\frac{4}{3}$	F) $\frac{4}{15}$	G) $\frac{-4}{15}$	H) $\frac{9}{2}$	I) $\frac{-9}{2}$	J) $\frac{81}{40}$	K) $\frac{-81}{40}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{3}{8}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{1}{2}$	S) $\frac{-1}{2}$	T) $\frac{-3}{2}$	U) $\frac{3}{2}$	V) $\frac{3}{4}$	W) $\frac{-3}{4}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{3}{13}$	Z) $\frac{1}{17}$

2) Sendo $f(z) = \dfrac{z^5+11}{(z+1)^2(z^2+4)}$, calcule $\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)$.

A) -1	B) 0	C) 1	D) 2	E) -2	F) $\frac{8}{15}$	G) $\frac{-8}{15}$	H) $\frac{7}{5}$	I) $\frac{-7}{5}$	J) $\frac{3}{10}$	K) $\frac{-3}{10}$	L) $\frac{-5}{8}$	M) $\frac{5}{8}$
N) $\frac{-3}{8}$	O) $\frac{-1}{6}$	P) $\frac{1}{4}$	Q) $\frac{-1}{4}$	R) $\frac{25}{18}$	S) $\frac{-5}{2}$	T) $\frac{-17}{2}$	U) $\frac{-11}{4}$	V) $\frac{5}{2}$	W) $\frac{9}{5}$	X) $\frac{5}{11}$	Y) $\frac{1}{25}$	Z) $\frac{1}{6}$

3) Calcule $\displaystyle\oint_C \frac{z}{(z^2+9)(z^2+64)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é o quadrado de vértices $\pm5\pm5i$ descrito no sentido positivo.

A) 0	B) 1	C) -1	D) 2	E) -2	F) πi	G) $-\pi i$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$	K) $-4\pi i$	L) $\frac{-\pi i}{24}$	M) $\frac{-\pi}{63}$
N) $\frac{\pi i}{40}$	O) $\frac{\pi i}{63}$	P) $\frac{2\pi i}{63}$	Q) $\frac{\pi i}{24}$	R) $\frac{\pi i}{30}$	S) $\frac{\pi i}{20}$	T) $\frac{\pi i}{10}$	U) $\frac{\pi i}{45}$	V) $\frac{2\pi i}{45}$	W) $\frac{2\pi i}{77}$	X) $\frac{2\pi i}{55}$	Y) $\frac{\pi i}{42}$	Z) $\frac{\pi i}{36}$

4) Se C é parametrizada por $z(t) = 2e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{e^{zi}}{z^2 + \frac{\pi^2}{81}}\,\mathrm{d}z$.

A) 0	B) 1	C) -1	D) i	E) $e^{\pi} - e^{-\pi}$
F) $\pi i/4$	G) $-\pi i/4$	H) $2\pi i$	I) $-2\pi i$	J) $4\pi i$
K) $2(e^{-\pi/2} - e^{\pi/2})$	L) $3(e^{-\pi/3} - e^{\pi/3})$	M) $4(e^{-\pi/4} - e^{\pi/4})$	N) $5(e^{-\pi/5} - e^{\pi/5})$	O) $6(e^{-\pi/6} - e^{\pi/6})$
P) $7(e^{-\pi/7} - e^{\pi/7})$	Q) $8(e^{-\pi/8} - e^{\pi/8})$	R) $9(e^{-\pi/9} - e^{\pi/9})$	S) $10(e^{-\pi/10} - e^{\pi/10})$	T) $11(e^{-\pi/11} - e^{\pi/11})$

5) Determine o valor da integral imprópria $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{16x^2+25}\,\mathrm{d}x$.

A) 0	B) 1	C) 2	D) π	E) 2π	F) $\frac{\pi}{2}$	G) $\frac{\pi}{3}$	H) $\frac{\pi}{4}$	I) $\frac{\pi}{5}$	J) $\frac{\pi}{6}$	K) $\frac{\pi}{7}$	L) $\frac{\pi}{8}$	M) $\frac{\pi}{9}$
N) $\frac{\pi}{10}$	O) $\frac{\pi}{11}$	P) $\frac{\pi}{12}$	Q) $\frac{\pi}{13}$	R) $\frac{\pi}{14}$	S) $\frac{\pi}{15}$	T) $\frac{\pi}{16}$	U) $\frac{\pi}{17}$	V) $\frac{\pi}{18}$	W) $\frac{\pi}{19}$	X) $\frac{\pi}{20}$	Y) $\frac{\pi}{21}$	Z) $\frac{\pi}{22}$

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL COMPLEXA - PROVA FINAL - SET/2019

NOME: ______________________________

Nº MATRÍCULA: ______________ CURSO: ______________________

1) Determine todas as seis raízes complexas da equação $z^6 + 4z^3 - 21 = 0$.
Resposta: $\sqrt[3]{3},\ \sqrt[3]{3}(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}),\ \sqrt[3]{3}(-\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}), -\sqrt[3]{7},\ \sqrt[3]{7}(\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}),\ \sqrt[3]{7}(\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2})$

2) Determine as partes real e complexa da função $f(z) = iz^2 + 3z - 1$. Usando as equações de Cauchy-Riemann, mostre que ela é analítica em todos os pontos.
Resposta: $u(x,y) = -2xy + 3x - 1, v(x,y) = x^2 - y^2 + 3y, \frac{\partial u}{\partial x} = -2y+3 = \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y} = -2x = -\frac{\partial v}{\partial x}$

3) Faça o gráfico da curva C parametrizada por $z(t) = 4e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e determine seu sentido de percurso. Usando o gráfico desenhado e a *Fórmula Integral de Cauchy*, determine o valor da integral $\displaystyle\oint_C \frac{e^z \cos(5z)}{(z - \frac{\pi}{6})(z - 10i)}\,\mathrm{d}z$.

Resposta: $2\pi i \left[\frac{e^{\pi/6}\cos\frac{5\pi}{6}}{\frac{\pi}{6} - 10i}\right] = \frac{6\sqrt{3}\pi e^{\pi/6}}{\pi^2 + 3600}\left[60 - \pi i\right]$.

4) Escreva os seis primeiros termos do desenvolvimento em série de Laurent em torno de $z_0 = 0$ da função $f(z) = \dfrac{e^{z^2}}{z^7}$. Usando esse desenvolvimento em série, determine os valores de $\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)$ e $\displaystyle\oint_C f(z)\,\mathrm{d}z$.
Resposta: $f(z) = \frac{1}{z^7} + \frac{1}{z^5} + \frac{1}{2z^3} + \frac{1}{6z} + \frac{z}{24} + \frac{z^3}{120} + \cdots, \operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{6}, \oint_C f(z)\,\mathrm{d}z = \frac{\pi i}{3}$.

5) Usando o *Teorema dos Resíduos*, calcule $\displaystyle\oint_C \frac{\operatorname{sen} zi}{(16z^2 + \pi^2)(z^2 - 9)}\,\mathrm{d}z$ sabendo que C é um quadrado com vértices nos pontos $1 + i$, $-1 + i$, $-1 - i$ e $1 - i$, orientado positivamente.
Resposta: $\frac{4\sqrt{2}}{\pi^2 + 144}$