Universidade Aberta do Brasil - UFPB Virtual
Curso de Licenciatura em Matemática

Argumentação em Matemática

Prof. Lenimar Nunes de Andrade
e-mail: numerufpb@gmail.com ou lenimar@mat.ufpb.br

versão 1.0 – 15/novembro/2009

Sumário

Capítulo 1

Noções de Lógica Matemática

1.1 Proposições

Definição: Uma **proposição** ou **sentença** é uma oração declarativa que pode ser classificada em *verdadeira* ou *falsa*.

- Sendo uma oração, toda proposição tem sujeito e predicado.
- Toda proposição é declarativa; não pode ser interrogativa e nem exclamativa.
- Toda proposição é verdadeira ou falsa.
- Uma proposição não pode ser ao mesmo tempo verdadeira e falsa.

Exemplos: São exemplos de proposições:

- Sete é maior do que três (em símbolos: $7 > 3$)
- Dois e dois são cinco (em símbolos: $2 + 2 = 5$)
- Quatro é divisor de dezesseis (em símbolos: $4 \mid 16$)
- Marte é um planeta próximo da Terra

Não são proposições:

- $1 + 2 + 3 + 4$ (falta o predicado)
- Que dia é hoje? (oração interrogativa)
- $4x + 1 = 3x + 7$ (não pode ser classificada em verdadeira ou falsa pois o x não é conhecido)
- A área do quadrado de lado $2\,cm$ (falta o predicado)

1.2 Conectivos - Proposições compostas

A partir de proposições dadas, podemos construir novas proposições denominadas *compostas* através do uso dos conectivos E ($\wedge$), OU ($\vee$) e NÃO ($\neg$ ou $\sim$). Parênteses também podem ser usados em proposições que tenham dois ou mais conectivos.

Exemplo: Dadas as proposições p, q e r (consideradas *simples*), a partir delas, podemos formar novas proposições compostas:

- $p \vee q$
- $\neg p \wedge \neg q$
- $\neg(q \wedge r)$
- $(p \vee q) \wedge r$
- $(\neg p \wedge q) \vee (q \wedge \neg r)$

1.3 Negação – O conectivo $\neg$

A proposição $\neg p$ tem o valor lógico oposto ao de p: $\neg p$ é falsa quando p é verdadeira e $\neg p$ é verdadeira quando p é falsa. Isso pode ser resumido na seguinte tabela, onde o V representa o valor lógico verdadeiro e o F representa o falso.

p	$\neg p$
V	F
F	V

Observação: O conectivo NÃO também costuma ser denotado por $\sim$.

1.4 Conjunção – O conectivo $\wedge$

Dadas as proposições p e q, a conjunção $p \wedge q$ é verdadeira quando p e q são ambas verdadeiras; se pelo menos uma delas for falsa, $p \wedge q$ é falsa. Isso pode ser resumido na tabela:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemplo: Consideremos as proposições p: "5 é maior do que 4" e q: "12 é divisível por 7". Temos que $p \wedge q$ é a proposição "5 é maior do que 4 e 12 é divisível por 7" é falsa porque q é falsa.

1.5 Disjunção – O conectivo $\vee$

Dadas as proposições p e q, a disjunção $p \vee q$ é verdadeira se pelo menos p ou q é verdadeira; se as duas forem falsas, $p \vee q$ é falsa. Isso pode ser resumido na tabela:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemplo: Consideremos as proposições p: "5 é maior do que 4" e q: "12 é divisível por 7". Temos que $p \vee q$ é a proposição "5 é maior do que 4 ou 12 é divisível por 7" é verdadeira porque p é verdadeira.

1.6 Tabelas-verdade

- Os possíveis valores lógicos de uma proposição composta costumam ser organizados em forma de tabelas, denominadas *tabelas-verdade.*
- Nessas tabelas, o valor lógico de uma proposição verdadeira é representado por V e o valor lógico de uma sentença falsa é denotado por F.
- Cada possibilidade de combinação dos valores lógicos das proposições que compõem uma proposição composta dá origem a uma linha da tabela-verdade.
- Em geral, se uma proposição composta for formada a partir de n proposições simples (componentes), então a tabela-verdade dessa proposição composta terá 2^n linhas.

Exemplo: Sendo p, q e r proposições, construir a tabela-verdade de $(p \wedge \neg q) \vee \neg r$

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \vee \neg r$
V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V
V	F	V	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	F	V

A última coluna dessa tabela é a mais importante e a 4^a, 5^a e 6^a colunas servem apenas para auxiliar na obtenção dessa última coluna.

1.7 Proposições equivalentes

- Dadas as proposições p e q, dizemos que "p é equivalente a q"(em símbolos: $p \equiv q$) quando elas têm sempre o mesmo valor lógico para quaisquer valores das proposições componentes.
- $p \equiv q$ somente quando há uma coincidência nos valores das últimas colunas de suas tabelas-verdade.
- $p \equiv q$ também costuma ser denotado por $p \Leftrightarrow q$.

Exemplo A seguir, verificamos que

- $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
- $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$

Essas duas equivalências são muito importantes porque mostram como fazer a negação de uma conjunção e de uma disjunção.

Tabela-verdade de $\neg(p \vee q)$

p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	F	V

Tabela-verdade de $\neg p \wedge \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Podemos observar que os valores lógicos das últimas colunas das duas tabelas são os mesmos. Logo, concluímos que

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Tabela-verdade de $\neg(p \wedge q)$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	F	V
F	F	F	V

Tabela-verdade de $\neg p \vee \neg q$

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	F	F	F
V	F	F	V	V
F	V	V	F	V
F	F	V	V	V

Podemos observar que os valores lógicos das últimas colunas das duas tabelas são os mesmos. Logo, concluímos que

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

1.8 Outras equivalências

Suponhamos que p, q e r sejam proposições quaisquer.

- **Negação**
  - $\neg(\neg p) \equiv p$
- **Conjunção**

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- $p \wedge p \equiv p$
- $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$

- **Disjunção**
  - $p \vee q \equiv q \vee p$
  - $p \vee p \equiv p$
  - $p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$
- **Distributividade**
  - $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
  - $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge q)$
- **Conjunção e disjunção**
  - $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
  - $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

1.9 Exercícios resolvidos

Exercício 1: Considerando p e q como sendo as seguintes proposições:

- p: $3 + 2 = 5$
- q: $4 > 10$

Descreva as proposições $(p \wedge q)$ e $\neg(p \wedge q)$ e determine seus valores lógicos.

Solução:

- $p \wedge q$: $3 + 2 = 5$ e $4 > 10$.
- Como $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$, podemos considerar que a negação de $(p \wedge q)$ é a proposição $(\neg p \vee \neg q)$. Portanto:
  $\neg(p \wedge q)$: $3 + 2 \neq 5$ ou $4 \leq 10$.
- p é verdadeira e q é falsa; logo, $(p \wedge q)$ é falsa e sua negação $\neg(p \wedge q)$ é verdadeira.

Exercício 2: Considerando r e s como sendo as seguintes proposições:

- r: “O triângulo ABC é retângulo”

- s: “O triângulo ABC é equilátero”

Descreva as proposições $(r \vee s)$ e $\neg(r \vee s)$.

Solução:

- $r \vee s$: “O triângulo ABC é retângulo ou equilátero”
- Como $\neg(r \vee s) \equiv \neg r \wedge \neg s$, podemos considerar que a negação de $(r \vee s)$ é a proposição $(\neg r \wedge \neg s)$. Portanto:
  $\neg(r \vee s)$: “O triângulo ABC não é retângulo e não é equilátero”.

Exercício 3: Descreva quais são as **negações** das seguintes sentenças:

1) p: “A função $f(x) = x^2 + 5x - 3$ é derivável **e** a sua derivada é a função $g(x) = 2x + 5$”.
2) q: “A função $f(x) = x^2 + 5x - 3$ é derivável **ou** a sua derivada é a função $g(x) = 2x + 5$”.

Solução:

1) $\neg p$: “A função $f(x) = x^2 + 5x - 3$ não é derivável **ou** a sua derivada não é a função $g(x) = 2x + 5$”.
2) $\neg q$: “A função $f(x) = x^2 + 5x - 3$ não é derivável **e** a sua derivada não é a função $g(x) = 2x + 5$”.

Exercício 4: Sendo p e q proposições tais que $(\neg p \vee \neg q)$ é falsa, determine o valor lógico de $\neg((p \vee q) \wedge \neg q)$.

Solução:

- A disjunção $(\neg p \vee \neg q)$ só é falsa quando as componentes $\neg p$ e $\neg q$ forem ambas falsas.
- Mas, se $\neg p$ é falsa, p é verdadeira e se $\neg q$ for falsa, q também será verdadeira.
- Sendo p e q verdadeiras, $(p \vee q)$ também é verdadeira.
- Como $\neg q$ é falsa, temos que $((p \vee q) \wedge \neg q)$ é falsa.
- Concluímos, então, que $\neg((p \vee q) \wedge \neg q)$ é verdadeira.

Exercício 5: Sendo p, q e r proposições, mostre que

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Solução:

- Para mostrar uma equivalência dessas proposições, podemos construir as tabelas-verdade de $p \vee (q \wedge r)$ e de $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ e verificar que os valores lógicos das últimas colunas coincidem.

- Como temos três proposições componentes (p, q e r), temos um total de $2^3 = 8$ linhas em cada tabela-verdade.

Tabela-verdade de $p \vee (q \wedge r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	F	V
V	F	V	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	F	F
F	F	V	F	F
F	F	F	F	F

Tabela-verdade de $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

p	q	r	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F
F	F	F	F	F	F

Observando os valores lógicos das últimas colunas das duas tabelas, vemos que são os mesmos e, por causa disso, concluímos que

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Capítulo 2

Proposições condicionais e quantificadores

2.1 Condicional

Definição: Sendo p e q proposições, podemos construir uma nova proposição $p \to q$ através do emprego do conectivo *condicional*, cujo símbolo é $\to$. Neste caso, a proposição p é denominada *antecedente* e q é denominada *consequente* (ou *conclusão*).

A proposição $p \to q$ pode ser lida de várias formas:

- "Se p, então q."
- "p é condição necessária para q."
- "q é condição suficiente para p."
- "q, se p."

O condicional $p \to q$ é considerado **falso** somente quando p é verdadeira e q é falsa; nos demais casos, $p \to q$ é considerada **verdadeiro**. Este critério está resumido na seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \to q$
V	F	F
V	V	V
F	V	V
F	F	V

2.2 Bicondicional

Definição: Sendo p e q proposições, podemos construir uma nova proposição $p \leftrightarrow q$ através do emprego do conectivo *bicondicional*, cujo símbolo é $\leftrightarrow$.

A proposição $p \leftrightarrow q$ pode ser lida de várias formas:

- "p se e somente se q."
- "p é condição necessária e suficiente para q."
- "q é condição necessária e suficiente para p."

O bicondicional $p \leftrightarrow q$ é considerado **verdadeiro** somente quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas; nos demais casos, $p \leftrightarrow q$ é considerada **falso**. Este critério está resumido na seguinte tabela-verdade:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

2.3 Recíprocas e contrapositivas

Definição: Consideremos proposições p e q. Definimos:

- A *recíproca* do condicional $p \to q$ é o condicional $q \to p$.
- A *contrapositiva* do condicional $p \to q$ é o condicional $\neg q \to \neg p$.

Exemplo: Seja p a proposição condicional *"Se n é um inteiro primo, então n não é divisível por 3."*

- A recíproca de p é *"Se n não é divisível por 3, então n é um inteiro primo."*
- A contrapositiva de p é *"Se n é divisível por 3, então n não é um inteiro primo."*

2.4 Tautologias e contradições

- Sendo v uma proposição formada a partir de outras proposições p, q, ... através do emprego dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\to$ e $\leftrightarrow$. Dizemos que v é uma *tautologia* ou uma *proposição logicamente verdadeira* quando ela for sempre **verdadeira**, independentemente dos valores lógicos das componentes p, q, ...
- Dessa forma, a tabela-verdade de uma tautologia só apresenta V na última coluna.

Exemplo: Qualquer que seja o valor lógico de uma proposição p, temos que $p \vee \neg p$ será sempre verdadeira. Logo, $p \vee \neg p$ é uma tautologia.

- Sendo f uma proposição formada a partir de outras proposições p, q, ... através do emprego dos conectivos lógicos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$ e $\leftrightarrow$. Dizemos que f é uma *contradição* ou uma *proposição logicamente falsa* quando ela for sempre **falsa**, independentemente dos valores lógicos das componentes p, q, ...

- Dessa forma, a tabela-verdade de uma contradição só apresenta F na última coluna.

- A negação de uma tautologia é uma contradição, e vice-versa.

Exemplo: Qualquer que seja o valor lógico de uma proposição p, temos que $p \wedge \neg p$ será sempre falsa. Logo, $p \wedge \neg p$ é uma contradição.

2.5 Tautologias e equivalências

Exemplo importante: Sendo p e q proposições, mostre que $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ é uma tautologia.

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Observação: Em geral, quando $p \leftrightarrow q$ for uma tautologia, então $p \equiv q$. Assim, neste exemplo, ficou mostrado que $p \rightarrow q$ é equivalente a $\neg p \vee q$.

Exemplo: Sendo p e q proposições, mostre que a proposição s definida por $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$ é uma tautologia.
Tabela-verdade:

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	s
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V

Observação: Neste exemplo, ficou mostrado que $p \leftrightarrow q$ é equivalente a $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$.

Exemplo: Sendo p e q proposições, mostre que a proposição $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ é uma tautologia.

Tabela-verdade

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \to \neg p$	$(p \to q) \leftrightarrow (\neg q \to \neg p)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Observação: Neste exemplo, ficou mostrado que o condicional $p \to q$ é equivalente à sua contrapositiva $\neg q \to \neg p$.

2.6 Quantificadores lógicos

Sentenças abertas

Há expressões como:

- $x + 5 = 9$
- $x^2 + y^2 = 1$
- x é uma cidade do sertão paraibano

que contém variáveis x, y, ... e que não são consideradas proposições porque não podem ser classificadas em verdadeiras ou falsas, dependem dos valores atribuídos às variáveis.

Variáveis livres

Uma sentença do tipo $p(x)$, ou do tipo $p(x, y)$, ... que exprime algo dependendo de variáveis x, y, ... são denominadas *sentenças abertas* ou *funções proposicionais* e as variáveis x, y, ... são chamadas *variáveis livres*.

Conjunto-universo

O conjunto U de todos os possíveis valores que podem ser atribuídos às variáveis livres de uma sentença aberta é chamado *conjunto-universo* ou *universo de discurso*.

Conjunto-verdade

O *conjunto-verdade* de uma sentença aberta é formado por todos os elementos do universo de discurso que tornam a sentença verdadeira.

Exemplo: Consideremos a sentença aberta $p(x)$: $x + 5 = 9$ e o universo como sendo o conjunto dos inteiros $\mathbb{Z}$. Se atribuirmos a x o valor 4, então a sentença se torna uma proposição verdadeira: $4 + 5 = 9$. E esse é o único valor que pode torná-la verdadeira. Assim, seu conjunto-verdade é $V = \{4\}$.

Quantificadores

Há duas maneiras de transformar uma sentença aberta em uma proposição:

- atribuir valor às variáveis livres
- utilizar quantificadores.

São dois os quantificadores:

- **Quantificador universal**, simbolizado por $\forall$, que se lê *"qualquer que seja", "para todo", "para cada".*
- **Quantificador existencial**, simbolizado por $\exists$, que se lê: *"existe", "existe algum", "existe pelo menos um".*

Quantificador universal

Em um universo U, uma sentença aberta $p(x)$ que exprime algo a respeito de $x \in U$ pode ser transformada em proposição da forma $\forall x(p(x))$ e que se lê: *"qualquer que seja x, temos $p(x)$".*

Exemplos:

- $\forall x(x+3=7)$ que se lê *"qualquer que seja x, temos $x+3=7$".* Se considerarmos o conjunto-universo como sendo $U=\mathbb{R}$ temos que essa é uma proposição falsa.
- $\forall x(2x+1>0)$ que se lê *"qualquer que seja x, temos $2x+1>0$".* Se considerarmos o conjunto-universo como sendo $U=\mathbb{N}$ temos que essa proposição é verdadeira; mas, se considerarmos $U=\mathbb{Z}$, é falsa.

Quantificador existencial

Em um universo U, uma sentença aberta $p(x)$ que exprime algo a respeito de $x \in U$ pode ser transformada em proposição da forma $\exists x(p(x))$ e que se lê: *"existe algum x tal que $p(x)$".*

Exemplos:

- $\exists x(x+3=7)$ que se lê: *"existe x tal que $x+3=7$."* Se considerarmos o universo $U=\mathbb{Z}$ temos que é uma proposição verdadeira
- $\exists x(x^2+1=0)$ que se lê: *"existe x tal que $x^2+1=0$."* Se considerarmos $U=\mathbb{R}$, é falsa; mas, se considerarmos $U=\mathbb{C}$, é verdadeira.

Observação: Às vezes, é utilizado também o quantificador $\exists|$ que se lê: *"existe um único"* ou *"existe um só"*.

Observações: Em muitas situações da Matemática os quantificadores ficam subentendidos. Por exemplo:

- Uma conhecida fórmula de Trigonometria é $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$. Sendo o universo de discurso o conjunto dos números reais, um enunciado mais completo dessa fórmula seria

$$\forall x \ (\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1)$$

- De modo análogo, a propriedade comutativa da adição de números reais, $x + y = y + x$, seria melhor enunciada na forma

$$\forall x \ \forall y \ (x + y = y + x)$$

- Considere a afirmação: *"O inteiro 13 é a soma de dois quadrados perfeitos"*. Sendo o universo de discurso o conjunto dos números inteiros, essa afirmação pode ser escrita na forma

$$\exists m \ \exists n \ (13 = m^2 + n^2)$$

2.7 Negação de proposições quantificadas

Exemplo: Considere o conjunto-universo como sendo $U = \{1, 2, 3\}$.

- Descreva o que significa $\forall x(p(x))$ ser verdadeira;
- Descreva o que significa $\exists x(p(x))$ ser verdadeira;
- Determine as negações das proposições dos itens anteriores.

Solução:

- Como x só pode assumir os valores em U, só podemos ter $x = 1$ ou $x = 2$ ou $x = 3$. Assim, $\forall x(p(x))$ ser verdadeira é o mesmo que $p(1)$ e $p(2)$ e $p(3)$ serem todas verdadeiras. Portanto,

$$\forall x(p(x)) \equiv p(1) \wedge p(2) \wedge p(3).$$

- Como $x \in U = \{1, 2, 3\}$, temos que $\exists x(p(x))$ é verdadeira é o mesmo que $p(1)$ ou $p(2)$ ou $p(3)$ ser verdadeira. Portanto,

$$\exists x(p(x)) \equiv p(1) \vee p(2) \vee p(3).$$

- Nos itens anteriores, vimos que $\forall x(p(x)) \equiv p(1) \wedge p(2) \wedge p(3)$ e que $\exists x(p(x)) \equiv p(1) \vee p(2) \vee p(3)$ se o conjunto-universo for $U = \{1, 2, 3\}$. Daí, podemos obter suas negações:

$$\neg(\forall x(p(x))) \equiv \neg p(1) \vee \neg p(2) \vee \neg p(3)$$

$$\neg(\exists x(p(x))) \equiv \neg p(1) \wedge \neg p(2) \wedge \neg p(3)$$

de onde observamos que

$$\neg(\forall x(p(x))) \equiv \exists x(\neg p(x))$$

$$\neg(\exists x(p(x))) \equiv \forall x(\neg p(x))$$

Negação de uma proposição com $\forall$

A negação de proposições quantificadas é inspirada em situações comuns:

- Negar que *"todo político é rico"* equivale a dizer que *"existe pelo menos um político que não é rico";*
- Negar que *"toda cidade tem um clima quente"* equivale a dizer que *"existe pelo menos uma cidade que não tem o clima quente";*
- Negar que *"todo número real tem um logaritmo decimal"* equivale a dizer que *"existe pelo menos um número real que não tem logaritmo decimal".*

Definição: Formalizamos o que foi observado em vários exemplos de negações de proposições com o quantificador universal, definindo:

$$\neg(\forall x(p(x))) \equiv \exists x(\neg p(x))$$

Negação de uma proposição com $\exists$

Observe as seguintes proposições, baseadas em situações do dia-a-dia:

- Negar que *"existe um estudante rico"* equivale a dizer que *"todo estudante não é rico".*
- Negar que *"existe um lugar do sertão que tem muita água"* equivale a dizer que *"todo lugar do sertão não tem muita água".*
- Negar que *"existe pelo menos um leão mansinho"* equivale a dizer que *"todo leão não é mansinho".*

Definição: Formalizamos o que foi observado em vários exemplos de negações de proposições com o quantificador existencial, definindo:

$$\neg(\exists x(p(x))) \equiv \forall x(\neg p(x))$$

Negação de proposições quantificadas – resumo

- Uma proposição quantificada com o quantificador universal, por exemplo $\forall x(p(x))$, é negada da seguinte forma:
  - Troca-se o quantificador universal $\forall$ pelo existencial $\exists$;
  - Nega-se $p(x)$;

  Dessa forma, obtém-se $\exists x(\neg p(x))$ como sendo a negação.

- Uma proposição quantificada com o quantificador existencial, por exemplo $\exists x(q(x))$, é negada da seguinte forma:
  - Troca-se o quantificador existencial $\exists$ pelo universal $\forall$;
  - Nega-se $q(x)$;

  Dessa forma, obtém-se $\forall x(\neg q(x))$ como sendo a negação.

2.8 Exercícios resolvidos

Exercício 1 : Determine o valor lógico das seguintes proposições compostas:

a) Se $2 + 2 = 4$, então $3 + 1 = 8$;

b) Se $2 + 2 = 4$, então $3 + 1 = 4$;

c) Se $2 + 2 = 3$, então $3 + 1 = 8$;

d) Se $2 + 2 = 3$, então $3 + 1 = 4$.

Solução:

a) Falsa, porque $2 + 2 = 4$ é verdadeira e $3 + 1 = 8$ é falsa;

b) Verdadeira, porque $2 + 2 = 4$ é verdadeira e $3 + 1 = 4$ é verdadeira;

c) Verdadeira, porque $2 + 2 = 3$ é falsa e $3 + 1 = 8$ é falsa;

d) Verdadeira, porque $2 + 2 = 3$ é falsa e $3 + 1 = 4$ é verdadeira.

Exercício 2: Sendo p e q proposições

- p: *"Eu estou gripado"*
- q: *"Eu vou fazer a prova final"*

- r: *"Eu vou querer ser aprovado"*

expresse as proposições

- $(p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$

na linguagem natural.

Solução:

- $(p \vee \neg q) \rightarrow \neg r$: *"Se eu estiver gripado ou não fizer a prova final, então não vou querer ser aprovado".*
- $\neg p \rightarrow (q \wedge r)$: *"Se eu não estiver gripado, então eu vou fazer a prova final e vou querer ser aprovado".*

Exercício 3 : Considere p, q, r, s, t as seguintes proposições:

- p: "Diana estuda"
- q: "Diana joga voleibol"
- r: "Diana vai passar no vestibular"
- s: "Se Diana estuda e não joga voleibol, então ela vai passar no vestibular"
- t: "Diana vai passar no vestibular se, e somente se, ela estuda ou joga voleibol"

Escreva as proposições s e t usando os conectivos lógicos e as proposições p, q e r.

Solução:

- s: $(p \wedge \neg q) \rightarrow r$
- t: $r \leftrightarrow (p \vee q)$

Exercício 4 : Considere a proposição *"Se* $4 + 2 = 9$*, então o gráfico de* $y = x^2$ *é uma parábola".*

a) Qual é a sua recíproca?

b) Qual é a sua contrapositiva?

c) Incluindo a sentença dada, quais são verdadeiras e quais são falsas?

Solução:

a) Recíproca: *"Se o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola, então $4 + 2 = 9$".*

b) Contrapositiva: *"Se o gráfico de $y = x^2$ não é uma parábola, então $4+2 \neq 9$".*

c)
- A sentença dada é verdadeira, porque $4 + 2 = 9$ é falsa e "o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola" é verdadeira. Logo, a contrapositiva também é verdadeira (pois é equivalente à sentença dada)
- A recíproca é falsa porque "o gráfico de $y = x^2$ é uma parábola" é verdadeira e $4 + 2 = 9$ é falsa.

Exercício 5:

a) Sendo p e q proposições, determine qual é a negação de $p \to q$.

b) Determine qual é a negação de

"Se vai chover amanhã, então não irei à praia".

Solução:

a) $p \to q$ é equivalente a $\neg p \vee q$, logo, $\neg(p \to q)$ é equivalente a $\neg(\neg p \vee q)$, ou seja, $\neg(p \to q) \equiv (\neg\neg p \wedge \neg q)$ que é o mesmo que

$$\neg(p \to q) \equiv (p \wedge \neg q)$$

b) A proposição dada é da forma $p \to q$ onde

- p: *"Vai chover amanhã"*
- q: *"Não irei à praia".*

Logo, sua negação é $p \wedge \neg q$, ou seja,

"Vai chover amanhã e irei à praia".

Exercício 6:

a) Sendo p e q proposições, determine qual é a negação de $p \leftrightarrow q$.

b) Determine qual é a negação de

$$(3 + 4 = 7) \leftrightarrow (4 < 8)$$

Solução:

a) Como $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$, $p \to q \equiv \neg p \vee q$ e $q \to p \equiv \neg q \vee p$, temos que

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg((\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)) \equiv (\neg(\neg p \vee q) \vee \neg(\neg q \vee p))$$

Portanto:

$$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$$

b) Usando o item (a), a negação da proposição dada é

$$(3 + 4 = 7 \;\wedge\; 4 \geq 8) \vee (3 + 4 \neq 7 \;\wedge\; 4 < 8).$$

Exercício 7: Sabendo que p e s são proposições verdadeiras e que q e r são falsas, determine o valor lógico de:

a) $p \wedge (r \leftrightarrow \neg r \wedge s)$

b) $(r \vee s) \to (q \to (\neg p \leftrightarrow \neg s))$

Solução:

a) Sendo r falsa e s verdadeira, temos que

- $\neg r$ é verdadeira;
- $(\underbrace{\neg r}_{V} \wedge \underbrace{s}_{V})$ é verdadeira;
- $\underbrace{r}_{F} \leftrightarrow (\underbrace{\neg r \wedge s}_{V})$ é falsa;

Como p é verdadeira, temos que $\underbrace{p}_{V} \wedge \underbrace{(r \leftrightarrow \neg r \wedge s)}_{F}$ é **falsa.**

b) Como p e s são verdadeiras e q e r são falsas, temos:

$$\underbrace{\underbrace{(\underbrace{r}_{F} \vee \underbrace{s}_{V})}_{V} \to \underbrace{(\underbrace{q}_{F} \to \underbrace{(\underbrace{\neg p}_{F} \leftrightarrow \underbrace{\neg s}_{F})}_{V})}_{V}}_{V}$$

Dessa forma, concluímos que $(r \vee s) \to (q \to (\neg p \leftrightarrow \neg s))$ é **verdadeira.**

Exercício 8 : Sabendo que $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ é uma proposição verdadeira, determine o valor lógico de $(r \leftrightarrow p) \vee (q \rightarrow r)$.

Solução:

- Sendo $\neg(p \wedge q \rightarrow r)$ verdadeira, temos que $(p \wedge q \rightarrow r)$ é falsa;
- Uma proposição condicional só é falsa quando o antecedente for verdadeiro e o consequente for falso. Logo, $p \wedge q$ é verdadeira e r é falsa;
- Se $p \wedge q$ é verdadeira, então p e q são verdadeiras;
- Sendo r falsa e p verdadeira, o bicondicional $r \leftrightarrow p$ é falsa;
- Sendo q verdadeira e r falsa, o condicional $q \rightarrow r$ é falsa;
- Concluímos assim que $(r \leftrightarrow p) \vee (q \rightarrow r)$ é **falsa.**

Exercício 9: Considere a proposição $(p \vee q) \leftrightarrow ((\neg r \wedge s) \rightarrow t)$, onde p, q, r, s, t são proposições.

a) A tabela-verdade da proposição dada tem quantas linhas?

b) Qual o valor lógico da proposição dada, se p, q e r forem verdadeiras e s e t forem falsas?

Solução:

a) A proposição dada é composta de 5 componentes: p, q, r, s e t. Logo, sua tabela-verdade tem $2^5 = 32$ linhas.

b) $\underbrace{(\underbrace{p}_{V} \vee \underbrace{q}_{V})}_{V} \leftrightarrow \underbrace{(\underbrace{(\underbrace{\neg r}_{F} \wedge \underbrace{s}_{F})}_{F} \rightarrow \underbrace{t}_{F})}_{V}$ é **verdadeira** se p, q e r forem verdadeiras e s e t forem falsas.

Exercício 10 : Sendo p e q proposições, mostre que

$$(p \wedge (p \rightarrow q)) \wedge \neg q$$

é uma contradição.

Solução:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$\neg q$	$(p \wedge (p \to q)) \wedge \neg q$
V	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	F	F
F	F	V	F	V	F

Como só temos F na última coluna da tabela-verdade, temos que se trata de uma contradição.

Exercício 11 : Sejam p, q e r proposições quaisqer. Mostre que s definida por

$$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$$

é uma tautologia.

Solução:

- Neste caso, podemos construir a tabela-verdade da proposição dada;
- Como temos 3 proposições componentes, temos $2^3 = 8$ linhas na tabela;
- Observamos que a última coluna da tabela só tem V e concluímos que a proposição dada é uma tautologia.

Exercício 11:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$(p \to q) \wedge (q \to r)$	$p \to r$	s
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V

Quaisquer que sejam os valores lógicos das componentes p, q e r, a proposição composta s é sempre verdadeira; logo, é uma tautologia.

Exercício 12 : Considere a proposição $\forall m \; \exists n \; (m + n = 4)$ no universo de discurso U.

a) Qual é o valor lógico da proposição se $U = \mathbb{N}$?

b) Qual é o valor lógico da proposição se $U = \mathbb{Z}$?

Solução:

a) Quando $U = \mathbb{N}$ a proposição dada é *"Para todo número natural m, existe um número natural n tal que a soma $m + n$ é igual a 4"* que é **falsa**. Por exemplo, atribuindo-se a m o valor 10, não existe outro natural n cuja soma com m seja igual a 4.

b) Quando $U = \mathbb{Z}$ a proposição dada é *"Para todo inteiro m, existe um inteiro n tal que a soma $m + n$ é igual a 4"* que é **verdadeira**. Para todo inteiro m, basta considerar o inteiro $n = 4 - m$ para obtermos $m + n = 4$.

Exercício 13: Considerando o universo de discurso como sendo o conjunto dos números reais $\mathbb{R}$, determine o valor lógico das seguintes proposições:

a) $\forall x \; \exists y \; (x + y = 0)$

b) $\exists y \; \forall x \; (x + y = 0)$

Solução:

a) A proposição dada é: *"Para qualquer número real x, existe um número real y tal que a soma $x + y$ é igual a 0"* que é **verdadeira**. Qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, basta considerar $y = -x \in \mathbb{R}$ para termos $x + y = 0$.

b) A proposição do item (b) é: *"Existe um número real y tal que para todo número real x temos $x + y = 0$"* é **falsa**. Não existe um número real y que possa ser somado com todos os outros números reais e o resultado seja sempre igual a 0.

Exercício 14: Seja $p(x, y)$ a sentença aberta "$x > y$" e $U = \mathbb{R}$ o universo de discurso. Determine qual é o valor lógico da proposição:

$$\forall y \; \exists x \; p(x, y) \rightarrow \exists x \; \forall y \; p(x, y)$$

Solução:

- $\forall y \; \exists x \; p(x, y)$ significa que *"Para todo número real y, existe um outro real x tal que $x > y$"* que é verdadeiro;

- $\exists x \; \forall y \; p(x, y)$ significa que *"Existe um número real x tal que para todo real y temos $x > y$"*, ou seja, *"Existe um número real x que é maior do que todos os outros reais y"* é falsa.

- Pelo que mostramos nos itens anteriores, o condicional $\underbrace{\forall y\ \exists x\ p(x,y)}_{V} \to \underbrace{\exists x\ \forall y\ p(x,y)}_{F}$ é **falso.**

Exercício 15 : Sendo $p(x,y)$, $q(x,y)$ e $r(x,y)$ três sentenças abertas com variáveis livres x e y, qual é a negação da seguinte proposição?

$$\forall x\ \exists y\ ((p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y))$$

Solução:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall x\ \exists y\ ((p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \neg(\exists y\ ((p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \forall y\ \neg((p(x,y) \wedge q(x,y)) \to r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \forall y\ \neg(\neg(p(x,y) \wedge q(x,y)) \vee r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \forall y\ (\neg\neg(p(x,y) \wedge q(x,y)) \wedge \neg r(x,y)))\\
&\equiv \exists x\ \forall y\ ((p(x,y) \wedge q(x,y)) \wedge \neg r(x,y)))
\end{aligned}$$

Exercício 16 : Sendo a e L constantes dadas, determine qual é a negação da seguinte proposição:

$$\forall \epsilon\ \exists \delta\ \forall x\ ((0 < |x-a| < \delta) \to (|f(x) - L| < \epsilon)).$$

Solução:

$$\begin{aligned}
&\neg(\forall \epsilon\ \exists \delta\ \forall x\ ((0 < |x-a| < \delta) \to (|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ \neg((0 < |x-a| < \delta) \to (|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ \neg(\neg(0 < |x-a| < \delta) \vee (|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ (\neg\neg(0 < |x-a| < \delta) \wedge \neg(|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ ((0 < |x-a| < \delta) \wedge \neg(|f(x) - L| < \epsilon)))\\
&\equiv \exists \epsilon\ \forall \delta\ \exists x\ ((0 < |x-a| < \delta) \wedge (|f(x) - L| \geq \epsilon)))
\end{aligned}$$

Capítulo 3

Argumentos e regras de inferência

3.1 Argumentos válidos

Dadas as proposições p_1,, p_2, ..., p_n e q chamaremos *argumento* a um condicional da forma

$$\underbrace{p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n}_{\text{premissas}} \to \underbrace{q}_{\text{conclusão}}$$

As proposições p_1,, p_2, ..., p_n são as *premissas* do argumento e q é a *conclusão.*

Argumento válido

- Quando o condicional anterior for uma tautologia, então o argumento é denominado *válido.*
- Em um argumento válido, a proposição q é verdadeira sempre que p_1,, p_2, ..., p_n forem todas verdadeiras.

Outra notação

O argumento

$$p_1 \wedge p_2 \wedge p_3 \wedge \cdots \wedge p_n \to q$$

também costuma ser denotado por

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \cdots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

3.2 Modus Ponens

Sendo p e q proposições quaisquer, vamos mostrar que o argumento

$$[p \wedge (p \to q)] \to q$$

é válido. Para isso, construímos sua tabela-verdade e verificamos que só ocorre V na última coluna:

p	q	$p \to q$	$p \wedge (p \to q)$	$[p \wedge (p \to q)] \to q$
F	F	V	F	V
F	V	V	F	V
V	F	F	F	V
V	V	V	V	V

Esse tipo de argumento ocorre com frequência e é conhecido pelo nome de *"Modus Ponens"*, expressão em latim que significa *"Modo de Afirmar"*.

3.3 Exemplos de "Modus Ponens"

Exemplo 1

- Se eu tenho dinheiro, então irei viajar ($p \to q$)
- Eu tenho dinheiro (p)
- Portanto, irei viajar ($\therefore\ q$)

Exemplo 2

- Eu gosto de estudar (p)
- Se eu gosto de estudar, então eu tirarei boas notas ($p \to q$)
- Portanto, eu tirarei boas notas ($\therefore\ q$)

Exemplo 3

- Se $x > 3$, então $x^2 > 9$ ($p \to q$)
- $x > 3$ (p)
- Portanto, $x^2 > 9$ ($\therefore\ q$)

3.4 Modus Tollens

Sendo p e q proposições quaisquer, vamos mostrar que o argumento

$$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$$

é válido. Para isso, construímos sua tabela-verdade e verificamos que só ocorre V na última coluna:

p	q	$p \to q$	$\neg q$	$(p \to q) \wedge \neg q$	$\neg p$	$[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	V	F	F	F	V

Esse tipo de argumento também ocorre com frequência e é conhecido pelo nome de *"Modus Tollens"*, expressão em latim que significa *"Modo de Negar"*.

3.5 Exemplos de "Modus Tollens"

Exemplo 4

- Se eu tenho dinheiro, então irei viajar $(p \to q)$
- Eu não irei viajar $(\neg q)$
- Portanto, eu não tenho dinheiro $(\therefore\ \neg p)$

Exemplo 5

- Eu não tirarei boas notas $(\neg q)$
- Se eu gosto de estudar, então eu tirarei boas notas $(p \to q)$
- Portanto, eu não gosto de estudar $(\therefore\ \neg p)$

Exemplo 6

- Se $x > 3$, então $x^2 > 9$ $(p \to q)$
- $x^2 \leq 9$ $(\neg q)$
- Portanto, $x \leq 3$ $(\therefore\ \neg p)$

3.6 Lei do Silogismo

Um outro argumento válido que ocorre com frequência é a *Lei do Silogismo:*

$$[(p \to q) \wedge (q \to r)] \to (p \to r)$$

onde p, q, r são proposições. Denotando-o por s, sua tabela-verdade é:

p	q	r	$p \to q$	$q \to r$	$p \to r$	s
F	F	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V

3.7 Exemplos da "Lei do Silogismo"

Exemplo 7

- Se eu tiver dinheiro, então vou viajar $(p \to q)$
- Se vou viajar, então conhecerei novas cidades $(q \to r)$
- Portanto, se eu tiver dinheiro, então conhecerei novas cidades $(\therefore\ p \to r)$

Exemplo 8

- Se 80 é divisível por 16, então 80 é divisível por 4 $(p \to q)$
- Se 80 é divisível por 4, então 80 é um inteiro par $(q \to r)$
- Portanto, se 80 é divisível por 16, então 80 é um inteiro par $(\therefore\ p \to r)$

3.8 Regras diversas

Diversos argumentos válidos podem ser demonstrados usando proposições p, q, r e s. Alguns deles estão citados na tabela abaixo, juntamente com os nomes pelos quais eles são conhecidos.

- *Simplificação Conjuntiva:* $(p \wedge q) \to p$
- *Amplificação Disjuntiva:* $p \to (p \vee q)$

- *Silogismo Disjuntivo:* $[(p \vee q) \wedge \neg p] \rightarrow q$
- *Prova Por Casos:* $[(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \vee q) \rightarrow r]$
- *Dilema Construtivo:* $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (p \vee r)] \rightarrow (q \vee s)]$
- *Dilema Destrutivo:* $[(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \wedge (\neg q \vee \neg s)] \rightarrow (\neg p \vee \neg r)]$

Todos esses argumentos válidos são conhecidos como sendo as *regras de inferência* e podem ser usadas para verificar se outros argumentos são válidos ou não.

3.9 Regras de Inferência

Mostrando validades sem usar tabelas-verdade

- Se o argumento envolver várias premissas, com várias proposições componentes p, q, r, etc. pode ser muito inconveniente fazer uma tabela-verdade para mostrar a validade do argumento.
- Nesses casos, é mais conveniente usar regras cujas validades foram mostradas anteriormente (Regras de Inferência) tais como
  - $p \wedge q \rightarrow p$ (*"Simplificação Conjuntiva"*)
  - $(p \rightarrow q) \wedge \neg q \rightarrow \neg p$ (*"Modus Tollens"*)
  - $p \wedge (p \rightarrow q) \rightarrow q$ (*"Modus Ponens"*), etc.
- Podemos usar também equivalências lógicas conhecidas como
  - $\neg\neg p \equiv p$
  - $\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$
  - $p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$
  - $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$, etc.

Exemplo 9

Verifique se o argumento

$$\underbrace{[p \wedge (p \rightarrow \neg q) \wedge (\neg q \rightarrow \neg r)]}_{\text{premissas}} \rightarrow \underbrace{\neg r}_{\text{conclusão}}$$

é válido, onde p, q e r são proposições.

Solução Temos os seguintes passos com as devidas justificativas:

1) $p \to \neg q$ (premissa)

2) $\neg q \to \neg r$ (premissa)

3) $p \to \neg r$ (passos 1 e 2 e a Lei do Silogismo)

4) p (premissa)

5) $\neg r$ (passos 3 e 4 e a regra Modus Ponens)

Dessa forma, fica mostrada a validade do argumento. Neste caso, é possível mudar a ordem de alguns itens.

Exemplo 10

Sendo p, q, r, s, t proposições, mostre que o argumento

$$[(p \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \vee \neg s) \wedge (\neg t \vee u) \wedge \neg u] \to \neg p$$

é válido. (*Note que, neste caso, uma tabela-verdade teria* $2^5 = 32$ *linhas!*)

Solução

1) $p \to r$ (premissa)

2) $r \to s$ (premissa)

3) $p \to s$ (passos 1 e 2 e a Lei do Silogismo)

4) $t \vee \neg s$ (premissa)

5) $\neg s \vee t$ (passo 4 e a comutatividade do conectivo $\vee$)

6) $s \to t$ (passo 5 e a equivalência $s \to t \equiv \neg s \vee t$)

7) $p \to t$ (passos 3 e 6 e a Lei do Silogismo)

8) $\neg t \vee u$ (premissa)

9) $t \to u$ (passo 8 e a equivalência $t \to u \equiv \neg t \vee u$)

10) $p \to u$ (passos 7 e 9 e a Lei do Silogismo)

11) $\neg u$ (premissa)

12) $\neg p$ (passos 10 e 11 e Modus Tollens)

Dessa forma, fica mostrado que quando os passos 1–11 forem verdadeiros, o passo 12 também será verdadeiro, ou seja, que o argumento dado é válido.

3.10 Argumentos com conclusão condicional

Pode-se mostrar (através de tabela-verdade) a seguinte equivalência:

$$[p \to (q \to r)] \equiv [(p \wedge q) \to r]$$

A partir daí, substituindo p por $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$, temos que

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \to (q \to r) \equiv [(p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n) \wedge q] \to r$$

de onde podemos concluir o seguinte: um argumento cuja conclusão for um condicional $q \to r$ é equivalente a outro argumento no qual a proposição q é uma das premissas e a conclusão é a proposição r.

Exemplo 11

$\underbrace{(p \wedge \neg q \wedge r)}_{\text{premissas}} \to \underbrace{(\neg s \to t)}_{\text{conclusão}}$ é equivalente a $\underbrace{(p \wedge \neg q \wedge r \wedge \neg s)}_{\text{premissas}} \to \underbrace{t}_{\text{conclusão}}$.

3.11 Exercícios

Exercício 1

Verifique se o seguinte argumento é válido:

- Eu vou ao cinema ou vou à praia.
- Eu não vou à praia.
- Portanto, eu vou ao cinema.

Solução Denotando por p: "Eu vou ao cinema" e q: "Eu vou à praia", temos que o argumento dado pode ser escrito na forma

$$[(p \vee q) \wedge \neg q] \to p$$

que é a Regra de Inferência conhecida como Silogismo Disjuntivo. Logo, é um argumento **válido**. Outra opção seria construir sua tabela-verdade para verificar a validade do argumento.

Exercício 2

Verifique se o seguinte argumento é válido:

- 100 é um inteiro par.
- 100 é um inteiro ímpar.

- Portanto, 100 é um inteiro par ou ímpar.

Solução Denotando por p: "100 é um inteiro par" e por q: "100 é um inteiro ímpar", temos que o argumento dado é $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ cuja tabela-verdade tem somente V na última coluna. Logo, o argumento dado é **válido**.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$
F	F	F	F	V
F	V	F	V	V
V	F	F	V	V
V	V	V	V	V

Exercício 3

Verifique se o seguinte argumento é válido:

- Se Ratinho é o presidente do Brasil, então ele tem mais de 18 anos.
- Ratinho tem mais de 18 anos.
- Portanto, Ratinho é o presidente do Brasil.

Solução Denotando por p a proposição "Ratinho é o presidente do Brasil" e por q a proposição "Ratinho tem mais de 18 anos", temos que o argumento dado pode ser escrito na forma

$$[(p \rightarrow q) \wedge q] \rightarrow p$$

cuja tabela-verdade não tem somente V na última coluna (por exemplo, quando p é F e q é V, temos um F na última coluna). Logo, o argumento dado **não é válido**.

Exercício 4

Verifique se o seguinte argumento é válido:

- Se $1 + 3 = 7$, então $2 + 7 = 9$.
- $1 + 3 \neq 7$.
- Portanto, $2 + 7 \neq 9$.

Solução Denotando por p: $1+3 = 7$ e por q: $2+7 = 9$, temos que o argumento dado pode ser escrito como

$$[(p \rightarrow q) \wedge \neg p] \rightarrow \neg q$$

cuja tabela-verdade não tem somente V na última coluna (por exemplo, quando p é F e q é V, temos um F na última coluna). Logo, o argumento dado **não é válido**.

Exercício 5

Sendo p, q, r proposições, mostre que o seguinte argumento

$$[((q \wedge r) \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow \neg r)] \rightarrow p$$

não é válido.

Solução Basta tentar encontrar uma atribuição de valor lógico a p, q, r de modo que a proposição completa tenha valor lógico F. Por exemplo, quando p, q, r assumem todas o valor F, temos:

$$\underbrace{\underbrace{[\underbrace{(\underbrace{(\underbrace{q}_{F} \wedge \underbrace{r}_{F})}_{F} \rightarrow \underbrace{p}_{F})}_{V} \wedge \underbrace{(\underbrace{q}_{F} \rightarrow \underbrace{\neg r}_{V})}_{V}]}_{V} \rightarrow \underbrace{p}_{F}}_{F}$$

Exercício 6

Demonstrar a **validade** do argumento: *"Se João Pessoa não fica na Bahia, então Recife não fica em Pernambuco. Mas, Recife fica em Pernambuco. Logo, João Pessoa fica na Bahia".*

Solução Representando por p e q as proposições "João Pessoa fica na Bahia" e "Recife fica em Pernambuco", respectivamente, o argumento dado fica escrito na forma $[(\neg p \rightarrow \neg q) \wedge q] \rightarrow p$ cuja validade pode ser verificada através dos seguintes passos:

1) $\neg p \rightarrow \neg q$ (premissa)

2) q (premissa)

3) $\neg\neg p \vee \neg q$ (equivalente a 1)

4) $p \vee \neg q$ (equivalente a 3)

5) $\neg\neg q$ (equivalente a 2)

6) $\therefore\ p$ (passos 4 e 5 e Silogismo Disjuntivo)

Outra solução Outra demonstração da validade do argumento

$$[(\neg p \to \neg q) \wedge q] \to p$$

está listada a seguir:

1) $\neg p \to \neg q$ (premissa)

2) q (premissa)

3) $q \to p$ (contrapositiva de 1)

4) $\therefore\ p$ (passos 2 e 3 e Modus Ponens)

Observação A validade de um argumento não deve ser confundida com o valor lógico das proposições que compõem o argumento. Um argumento pode ser válido mesmo sendo composto por proposições que isoladamente são falsas.

Exercício 7

Verifique que o argumento

$$[(p \to q) \wedge (p \wedge r)] \to q$$

é válido, onde p, q, r são proposições.

Solução Temos a seguinte sequência de proposições:

1) $p \to q$ (premissa)

2) $p \wedge r$ (premissa)

3) p (passo 2 e Simplificação Conjuntiva)

4) $\therefore\ q$ (passos 3 e 1 e Modus Ponens)

Logo, o argumento é **válido**.

Exercício 8

Considere as proposições p, q, r, s, t, u e o argumento

$$[(p \wedge q \to r) \wedge (r \to s) \wedge (t \to \neg u) \wedge t \wedge (\neg s \vee u)] \to \neg(p \wedge q)$$

cuja demonstração está nos seguintes passos:

1) $p \wedge q \to r$

2) $r \to s$

3) $t \to \neg u$

4) t

5) $\neg s \vee u$

6) $\neg u$

7) $\neg s$

8) $\neg r$

9) $\therefore\ \neg(p \wedge q)$

Apresente uma **justificativa** para cada um desses passos mostrados.

Solução As justificativas dos passos da demonstração anterior são:

1) premissa

2) premissa

3) premissa

4) premissa

5) premissa

6) passos 3 e 4 e Modus Ponens

7) passos 5 e 6 e Silogismo Disjuntivo

8) passos 2 e 7 e Modus Tollens

9) passos 1 e 8 e Modus Tollens

Exercício 9

Verifique a validade do argumento

$$[(p \to (q \to r)) \wedge (p \to q) \wedge p] \to r$$

onde p, q, r são proposições.

Solução Temos, sucessivamente,

1) $p \to (q \to r)$ (premissa)

2) $p \to q$ (premissa)

3) p (premissa)

4) $q \to r$ (passos 1 e 3 e Modus Ponens)

5) q (passos 2 e 3 e Modus Ponens)

6) $\therefore\ r$ (passos 4 e 5 e Modus Ponens)

Logo, o argumento dado é **válido**.

Exercício 10

Mostre a validade do seguinte argumento:

$$\underbrace{[(u \to r) \wedge ((r \wedge s) \to (p \vee t)) \wedge (q \to (u \wedge s)) \wedge \neg t]}_{\text{premissas}} \to \underbrace{(q \to p)}_{\text{conclusão}}$$

Solução Como a conclusão do argumento dado é um condicional, temos que ele é equivalente a

$$\underbrace{[(u \to r) \wedge ((r \wedge s) \to (p \vee t)) \wedge (q \to (u \wedge s)) \wedge \neg t \wedge q]}_{\text{premissas}} \to \underbrace{p}_{\text{conclusão}}$$

Temos que os seguintes passos são todos verdadeiros (com as devidas justificativas):

1) q (premissa)

2) $q \to (u \wedge s)$ (premissa)

3) $u \wedge s$ (passos 1 e 2 e Modus Ponens)

4) u (passo 3 e a Simplificação Conjuntiva)

5) $u \to r$ (premissa)

6) r (passos 4 e 5 e Modus Ponens)

7) s (passo 3 e a Simplificação Conjuntiva)

8) $r \wedge s$ (passos 6 e 7 e o conectivo $\wedge$)

9) $(r \wedge s) \to (p \vee t)$ (premissa)

10) $p \vee t$ (passo 8 e 9 e Modus Ponens)

11) $\neg t$ (premissa)

12) $\therefore\ p$ (passos 10 e 11 e Silogismo Disjuntivo)

Dessa forma, chegamos à conclusão que o argumento dado é **válido**.

Capítulo 4

Demonstração em Matemática

4.1 Implicação e equivalência lógicas

Implicação lógica

- Dadas proposições p e q, dizemos que p *implica logicamente* q (em símbolos: $p \Rightarrow q$) quando o condicional $p \to q$ for uma tautologia.
- Se o argumento $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \to q$ for válido, então podemos escrever $p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n \Rightarrow q$.

Equivalência lógica

- Dizemos que p é *logicamente equivalente* a q (em símbolos: $p \Leftrightarrow q$) quando o bicondicional $p \leftrightarrow q$ for uma tautologia.
- $p \Leftrightarrow q$ é o mesmo que $p \equiv q$ e é o mesmo que $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

4.2 Teorema, lema e corolário

Teorema

- Um *teorema* é uma afirmação que pode ser provada.
- Um teorema é um argumento válido que é usualmente escrito na forma

$$\underbrace{H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n}_{\text{hipóteses}} \Rightarrow \underbrace{C}_{\text{conclusão}}$$

  As premissas $H_1, \ldots, H_n$ são chamadas *hipóteses* do teorema e a conclusão C é a *tese.*

- Uma demonstração de um teorema consiste em uma sequência de proposições verdadeiras que inicia nas hipóteses $H_1, \ldots H_n$ e termina na conclusão C. Na demonstração, podem ser usadas tautologias e regras de inferência conhecidas.

Lema Um *lema* é uma espécie de "pré-teorema". É um tipo particular de teorema sem importância própria, usado na demonstração de outros teoremas.

Corolário Um *corolário* é uma consequência direta e imediata de outro teorema ou de uma definição. Também é um tipo particular de teorema.

4.3 Instância de um teorema

Em um teorema (ou proposição), normalmente encontramos variáveis livres tanto nas hipóteses, quanto na tese. Essas variáveis livres representam objetos genéricos do universo de discurso do teorema. Quando atribuímos valores particulares a essas variáveis livres, obtemos uma *instância* do teorema (ou da proposição).

Exemplo 1 Consideremos o teorema *"Para o número real x temos que $x^2 + 1 > 0$"* em que a variável livre é x.

- Quando substituímos x por 3, obtemos uma instância do teorema: *"Para o número real 3 temos que $3^2 + 1 > 0$"*.
- Quando substituímos x por -5, obtemos outra instância: *"Para o número real -5 temos que $(-5)^2 + 1 > 0$"*.

Contra-exemplo Se existir uma instância de uma proposição na qual ela seja falsa, então essa instância é denominada um *contra-exemplo* para aquela proposição.

Exemplo (de um contra-exemplo)

- Consideremos a proposição *"Se n é um inteiro positivo, então $n^2 + n + 41$ é um número primo"*.
- Existem várias instâncias dessa proposição na qual ela é verdadeira. Por exemplo, para $n = 2$ obtemos que *"$2^2 + 2 + 41$ é um número primo"*. Para $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ também obtemos outras instâncias que são verdadeiras.

- No entanto, para $n = 41$ obtemos que *"$41^2 + 41 + 41$ é um número primo"* que é falsa porque $41^2 + 41 + 41$ é divisível por 41. Dessa forma, obtemos um contra-exemplo para a proposição.

4.4 Siglas no final de uma demonstração

É muito comum encontrarmos ao final de uma demonstração de um teorema uma das seguintes siglas: c.q.d. ou q.e.d.

- c.q.d. significa "**c**omo **q**ueríamos **d**emonstrar"
- q.e.d. significa "**q**uod **e**rat **d**emonstrandum" que é a tradução de "como queríamos demonstrar" para o Latim.

4.5 Técnicas de demonstração

Demonstração direta

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \Rightarrow C$$

Iniciando com as hipóteses $H_1, H_2, \ldots, H_n$ e usando as regras de inferência, tautologias (equivalências) e outras proposições válidas, tentamos chegar à conclusão C.

Demonstração por contradição

$$H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n \wedge \neg C \Rightarrow \text{contradição}$$

Negamos a conclusão, juntamos às outras hipóteses e tentamos chegar a uma contradição.

Demonstração do contrapositivo

$$\neg C \Rightarrow \neg(H_1 \wedge H_2 \wedge \cdots \wedge H_n)$$

Negamos a conclusão e, a partir daí, tentamos chegar à negação das hipóteses.

Demonstração por enumeração de casos Usa o fato de que

$$H_1 \vee H_2 \vee \cdots \vee H_n \Rightarrow C$$

é equivalente a

$$(H_1 \Rightarrow C) \wedge (H_2 \Rightarrow C) \wedge \cdots \wedge (H_n \Rightarrow C)$$

onde cada implicação pode ser mostrada separadamente.

Demonstração por indução Usa a regra de inferência

$$[P(1) \land \forall k\,(P(k) \to P(k+1))] \Rightarrow \forall n\,(P(n))$$

em que o universo de discurso é o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Princípio de Indução Finita Uma demonstração por indução para provar que uma proposição $P(n)$ é verdadeira para qualquer número natural n consiste em

- Mostrar que $P(1)$ é verdadeira;
- Supondo P(k) verdadeira, mostrar que P(k+1) é verdadeira.

Exemplo 3 Seja $P(n)$ a proposição "$1 + 2 + \cdots + n$ é igual a $\frac{n(n+1)}{2}$". Usando o princípio de indução, mostre que $P(n)$ é verdadeira para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração

- Para $n = 1$ temos que $P(1)$ afirma que "1 é igual a $\frac{1\times(1+1)}{2} = 1$ e vemos que ela é verdadeira;
- Supondo $P(k)$ verdadeira, vamos investigar $P(k+1)$:
  $\underbrace{1 + 2 + \cdots + k}_{k(k+1)/2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$
  de onde temos que $P(k+1)$ é verdadeira.
- Logo, pelo princípio de indução, $P(n)$ é verdadeira para todo n natural.

Observações

- O princípio de indução é uma propriedade exclusiva dos números naturais, ou seja, ele só pode ser aplicado para se demonstrar proposições $P(n)$ que tenha uma variável livre $n \in \mathbb{N}$.
- Se no lugar do passo inicial $P(1)$ for verificado $P(n_0)$ é verdadeira, então a proposição só poderá ser válida para $n \geq n_0$.
- A demonstração por indução é comparável a se derrubar uma fila de dominós colocados de pé, um ao lado do outro: para se derrubar toda a fila, basta se derrubar o primeiro que todos os outros caem.

4.6 Teoremas cujas conclusões são condicionais

Teoremas do tipo $H \Rightarrow (C_1 \to C_2)$

Esse tipo de teorema é equivalente a um teorema do tipo

$$(H \wedge C_1) \Rightarrow C_2,$$

ou seja, consideramos H e C_1 como hipóteses e tentamos chegar em C_2.

Teoremas do tipo $H \Rightarrow (C_1 \leftrightarrow C_2)$ Como $C_1 \leftrightarrow C_2$ é equivalente a $(C_1 \to C_2) \wedge (C_2 \to C_1)$, temos que esse tipo de teorema equivale a um teorema na forma $[H \Rightarrow (C_1 \to C_2)] \wedge [H \Rightarrow (C_2 \to C_1)]$ e que também equivale a

$$[(H \wedge C_1) \Rightarrow C_2] \wedge [(H \wedge C_2) \Rightarrow C_1].$$

4.7 Demonstração direta

Exemplo 4 Mostre que a soma de três inteiros consecutivos é divisível por 3.

Demonstração

- Devemos mostrar que
$\underbrace{n, p, q \text{ são inteiros consecutivos}}_{\text{hipótese}} \Rightarrow \underbrace{n + p + q \ \text{ é divisível por 3.}}_{\text{tese}}$
- Sendo n, p, q inteiros consecutivos, temos que $p = n + 1$ e que $q = p + 1$.
- Substituindo-se $p = n + 1$ em $q = p + 1$, obtemos $q = (n + 1) + 1 = n + 2$.
- Logo, os inteiros consecutivos são $n, \overbrace{n + 1}^{p}$ e $\overbrace{n + 2}^{r}$ e sua soma é $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3 \times (n + 1)$ que é divisível por 3, c.q.d.

4.8 Demonstração por contradição

A justificativa teórica para esse tipo de método está na seguinte tautologia T:

$$(p \to q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \to F_0]$$

onde p e q são proposições e F_0 é uma contradição. Para verificar que essa proposição T é uma tautologia, basta construir sua tabela-verdade:

p	q	F_0	$p \wedge \neg q$	$(p \wedge \neg q) \to F_0$	$p \to q$	T
F	F	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V
V	V	F	F	V	V	V

Desse modo, fica mostrado que $p \to q$ é logicamente equivalente a $(p \wedge \neg q) \to F_0$, onde F_0 é uma contradição.

Demonstração por contradição

- A demonstração por contradição de um teorema consiste em se negar a conclusão (tese) e verificar que essa negação, juntamente com as hipóteses do teorema, levam a uma situação absurda, ou seja, a uma contradição.
- Dessa forma, verificamos que não se pode negar a conclusão porque, se negarmos, chegamos a um absurdo. Portanto, a conclusão deve ser verdadeira.
- É por isso que a demonstração por contradição também é conhecida pelo nome de *"redução a um absurdo"*.

Exemplo 5 Mostre que se a soma dos preços de duas mercadorias é maior do que R$ 10,00, então pelo menos uma das duas tem preço maior do que R$ 5,00.

Demonstração

- Sendo H a proposição "A soma dos preços de duas mercadorias é maior do que R$ 10,00" (hipótese) e C a proposição "Pelo menos uma das duas tem preço maior do que R$ 5,00" (tese ou conclusão), queremos mostrar que $H \Rightarrow C$.
- Negamos a conclusão, mantendo a hipótese, e verificamos que $H \wedge \neg C$ vai levar a uma contradição (absurdo).
- A negação da conclusão é "As duas mercadorias têm preços menores ou iguais a R$ 5,00". Sendo assim, a soma dos seus preços será menor ou igual a R$ 10,00. Com a hipótese, isso é uma **contradição.** Portanto, fica mostrado que $H \Rightarrow C$, c.q.d.

4.9 Demonstração pelo contrapositivo

Exemplo 6 Mostre que se n^2 é um inteiro ímpar, então n é ímpar.

Demonstração Se queremos usar a *demonstração pelo contrapositivo*, negamos a hipótese, negamos a tese, trocamos a hipótese pela tese e mostramos que

"Se n é par, então n^2 é par"

Se n é par, então $n = 2k$ para algum inteiro k. Elevando-se ao quadrado temos que $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ de onde concluímos que n^2 é par, c.q.d.

Observação A demonstração pelo contrapositivo é muito parecida com a demonstração por contradição.

4.10 Demonstração por enumeração de casos

A justificativa teórica para esse tipo de método está na seguinte tautologia:

$$(p \vee q \to r) \leftrightarrow [(p \to r) \wedge (q \to r)]$$

cuja demonstração consiste em se observar a seguinte sequência de equivalências lógicas:

- $(p \vee q) \to r$
- $\Leftrightarrow \neg(p \vee q) \vee r$
- $\Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee r$
- $\Leftrightarrow (\neg p \vee r) \wedge (\neg q \vee r)$
- $\Leftrightarrow (p \to r) \wedge (q \to r)$

Assim, para mostrar que $p \vee q \Rightarrow r$, basta mostrar ambas as implicações $p \Rightarrow r$ e $p \Rightarrow r$.

Exemplo 7 Mostre que se n for um inteiro que não é múltiplo de 3, então a divisão de n^2 por 3 deixa sempre resto 1.

Demonstração

- Se n não é múltiplo de 3, isso significa que a divisão de n por 3 deixa resto 1 ou resto 2. Se deixar resto 1, então $n = 3k + 1$ para algum inteiro k; se deixar resto 2, então $n = 3k + 2$ para algum k.
- Devemos, então, mostrar que para k inteiro:

$$\underbrace{\overbrace{n = 3k+1}^{\text{caso 1}}}_{H_1} \vee \underbrace{\overbrace{n = 3k+2}^{\text{caso 2}}}_{H_2} \Rightarrow \underbrace{n^2 \ \text{ dividido por 3 deixa resto 1}}_{T}$$

- Para mostrar que $(H_1 \vee H_2) \Rightarrow T$, vamos mostrar separadamente que $H_1 \Rightarrow T$ (caso 1) e também $H_2 \Rightarrow T$ (caso 2).
- No caso 1, temos $n = 3k + 1$. Daí, $n^2 = (3k + 1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3 \times (3k^2 + 2k) + 1$ que é um múltiplo de 3, mais 1. Portanto, neste caso, n^2 deixa resto 1 ao ser dividido por 3. Fica mostrado assim que $H_1 \Rightarrow T$.
- No caso 2, temos $n = 3k + 2$ e daí temos que $n^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3 \times (3k^2 + 4k + 1) + 1$ que também é um múltiplo de 3, mais 1. Portanto, n^2 também deixa resto 1 ao ser dividido por 3 o que significa que $H_2 \Rightarrow T$.
- Dessa forma, mostramos que $(H_1 \Rightarrow T) \wedge (H_2 \Rightarrow T)$ que equivale a mostrar que $(H_1 \vee H_2) \Rightarrow T$, c.q.d.

4.11 Exercícios

Exercício 1 Utilizando a técnica da demonstração direta, mostre que o produto de dois números ímpares é um número ímpar.

Demonstração

- Devemos mostrar que $\underbrace{m \text{ e } n \text{ são ímpares}}_{\text{hipóteses}} \Rightarrow \underbrace{mn \text{ é ímpar}}_{\text{tese}}$
- Como m é ímpar, $m = 2k + 1$ para algum k inteiro;
- Como n é ímpar, temos também que $n = 2j + 1$ para algum inteiro j;
- Calculando-se o produto de m e n, obtemos:

$$mn = (2k + 1)(2j + 1) = 4kj + 2k + 2j + 1 = 2(\underbrace{2kj + k + j}_{\text{inteiro}}) + 1$$

  que é um número ímpar, c.q.d.

Exercício 2 Mostre que se $3n + 2$ for um inteiro ímpar, então n também é ímpar. Use a técnica da demonstração por contradição.

Demonstração

- Devemos mostrar que $\underbrace{3n + 2 \text{ é ímpar}}_{H} \Rightarrow \underbrace{n \text{ é ímpar}}_{C}$.
- Negamos C e verificamos que $H \wedge \neg C$ leva a uma contradição.
- A negação de C é "n é par", ou seja, $n = 2k$ para algum inteiro k.

- Temos que $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2 \times (3k + 1)$ é um múltiplo de 2, ou seja, é par. Mas, isso entra em **contradição** com a hipótese de que o número $3n + 2$ é ímpar.

- Assim, mostramos que $H \Rightarrow C$, c.q.d.

Exercício 3 Usando a técnica da demonstração por contradição, mostre que o conjunto vazio $\emptyset$ está contido em qualquer outro conjunto.

Demonstração

- Devemos mostrar que $\underbrace{A \text{ é um conjunto}}_{\text{hipótese } H} \Rightarrow \underbrace{\emptyset \subset A}_{\text{tese } T}$

- Negamos a tese (conclusão) e verificamos que $H \wedge \neg T$ leva a um absurdo. A negação da conclusão é $\emptyset \not\subset A$.

- Sendo A e $\emptyset$ conjuntos, $\emptyset \not\subset A$ significa que $\emptyset$ contém algum elemento que não pertence ao conjunto A. Mas, isso é um **absurdo** porque $\emptyset$ não contém elemento algum.

- Fica mostrado assim que $H \Rightarrow T$, c.q.d.

Exercício 4 O número real $x = \log_{10} 2$ é denominado *"logaritmo decimal de 2"* e é o único número positivo tal que $10^x = 2$. Mostre que o logaritmo decimal de 2 é irracional.

Demonstração

- Devemos mostrar que $\underbrace{x = \log_{10} 2}_{\text{hipótese } H} \Rightarrow \underbrace{x \text{ é irracional}}_{\text{conclusão } C}$.

- Para isso, negamos a conclusão e verificamos onde $H \wedge \neg C$ leva.

- A negação de C é "x não é irracional", ou seja, "x é racional". Assim, existem inteiros positivos p e q tais que $x = p/q$.

- Como $10^x = 2$, temos que $10^{p/q} = 2$. Elevando-se ambos os membro à q-ésima potência, temos $(10^{p/q})^q = 2^q$, isto é, $10^p = 2^q$.

- Obtemos dessa forma uma **contradição**: uma potência de 10 (que sempre termina em 0) sendo igual a uma potência de 2.

Exercício 5 Se m e n são números inteiros, então mostre que $m^2 - n^2$ é par se, e somente se, $m - n$ é par.

Demonstração Mostrar que "m^2-n^2 é par $\Leftrightarrow m-n$ é par" equivale a mostrar que "m^2-n^2 é par $\Rightarrow m-n$ é par e "$m-n$ é par $\Rightarrow m^2-n^2$ é par".

- Para mostrar que "m^2-n^2 é par $\Rightarrow m-n$ é par" vamos usar a técnica da demonstração pelo contrapositivo: supondo $m-n$ ímpar, temos que m e n não podem ser ambos pares ou ambos ímpares, eles tem que ser um par e o outro ímpar. Daí, a soma $m+n$ é ímpar. Multiplicando-se os dois números ímpares $m+n$ e $m-n$ obtemos que m^2-n^2 é ímpar. Dessa forma $m-n$ ímpar $\Rightarrow m^2-n^2$ ímpar que é equivalente a m^2-n^2 par $\Rightarrow m-n$ par.

- Para mostrar que "$m-n$ é par $\Rightarrow m^2-n^2$ é par", vamos usar uma demonstração direta. Antes de tudo, observe que $m^2-n^2=(m+n)(m-n)$. Supondo $m-n$ par, basta multiplicar pelo inteiro $m+n$ para obter que m^2-n^2 é par.

Portanto, m^2-n^2 é par $\Leftrightarrow m-n$ é par, c.q.d.

Exercício 6

Usando o *Princípio de Indução Finita,* mostre que para todo $n \in \mathbb{N}^*$ temos:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Demonstração

- Para $n=1$ temos $\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1+1}$ o que é verdadeiro.

- Supondo a fórmula verdadeira para $n=k$, verifiquemos a fórmula para $n=k+1$: $\underbrace{\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{k\cdot(k+1)}}_{\frac{k}{k+1}}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)\cdot(k+2)}=$ $\frac{k(k+2)+1}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{(k+1)^2}{(k+1)\cdot(k+2)}=\frac{k+1}{k+2}$.

- Logo a fórmula vale para $n=k+1$ e, pelo Princípio de Indução, temos que é válida (verdadeira) para todo n natural positivo.

Exercício 7 Mostre que o número de diagonais de um polígono convexo com n lados, $n\geq 3$, é igual a $d_n=\frac{n(n-3)}{2}$.

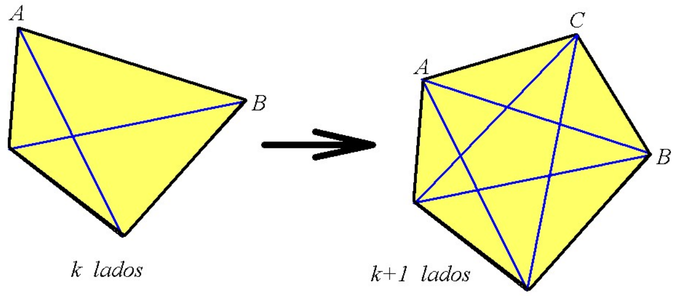
Demonstração Vamos mostrar usando a técnica da demonstração por indução que essa proposição é válida para todo $n\geq 3$.

- Para $n = 3$ temos que um polígono convexo com 3 lados é um triângulo e, consequentemente, ele tem zero diagonal. Esse número de diagonais é exatamente o que a fórmula para d_n fornece quando fazemos $n = 3$. Logo, a fórmula é válida para esse valor inicial $n = 3$. (*Note que não faria sentido iniciar com um $n < 3$ porque não existem polígonos convexos com 1 ou 2 lados.*)

- Suponhamos que d_n seja verdadeira para $n = k$, ou seja, que um polígono convexo com k lados tenha $\frac{k(k-3)}{2}$ diagonais.

- Vamos agora investigar o que ocorre um polígono com $k + 1$ lados.

Quando entre dois vértices A e B de um polígono for acrescentado mais um vértice C, então, se o polígono tinha k lados, ele passará a ter $k + 1$ lados com esse acréscimo do vértice.



O polígono com k lados tinha os vértices A e B e mais $k - 2$ outros vértices. As diagonais do polígono com $k + 1$ lados são:

- as $k(k - 3)/2$ diagonais do polígono com k lados;

- mais o segmento AB que passou a ser diagonal;

- mais as $k - 2$ diagonais que contém o vértice C.

Portanto, o total de diagonais no polígono com $k + 1$ lados é de

$$\underbrace{\frac{k(k-3)}{2}}_{d_k} + 1 + (k-2) = \frac{k(k-3)+2+2(k-2)}{2} = \frac{k^2-k-2}{2} = \underbrace{\frac{(k+1)(k-2)}{2}}_{d_{k+1}}$$

que é exatamente o valor que obtemos quando substituímos $n = k+1$ na fórmula do d_n. Logo, por indução, a fórmula é válida para todo $n \geq 3$.

Observação Apesar da técnica da demonstração por indução só poder ser utilizada quando a proposição $P(n)$ tiver uma variável livre que pertença ao conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, ela é útil nas mais diversas áreas da Matemática: Geometria, Álgebra, Aritmética, Análise, etc.

Exercício 8 Usando a demonstração por indução, mostre que n^3+2n é divisível por 3 para qualquer n inteiro positivo.

Demonstração Seja $P(n)$ a proposição *"$n^3 + 2n$ é divisível por 3"*.

- Para $n = 1$ obtemos que $1^3 + 2 \cdot 1 = 3$ é divisível por 3; logo, $P(1)$ é verdadeira.
- Suponhamos que $P(k)$ seja verdadeira e vamos investigar $P(k+1)$. Para isso, substituímos n por $k+1$ e obtemos $(k+1)^3 + 2(k+1)$ que é equivalente a $(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + (2k + 2) = k^3 + 3k^2 + 2k + 3k + 3 = \overbrace{(\underbrace{k^3 + 2k}_{P(k)})}^{\text{múltiplo de 3}} + \overbrace{3(\underbrace{k^2 + k + 1}_{\text{inteiro}})}^{\text{múltiplo de 3}}$ que é a soma de dois múltiplos de 3, logo também é um múltiplo de 3.
- Pelo Princípio de Indução, temos que $P(n)$ é verdadeira para todo n inteiro positivo.

Apêndice A

Leituras adicionais

A.1 O inverso do cálculo da tabela-verdade

Dadas n proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ e uma tabela com 2^n linhas com sequências de V e F que correspondem a atribuições de valores das sequências p_i, queremos descobrir uma proposição P, composta de p_1, p_2, $\ldots$, p_n ligadas por conectivos lógicos, de tal forma que a tabela-verdade de P seja formada pelos 2^n linhas de V e F dados.

Por exemplo, qual é a proposição P, composta de p, q e r, cuja tabela-verdade está mostrada abaixo?

p	q	r	P
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Para descobrir qual é a proposição P basta seguir o seguinte roteiro:

1) Procuramos todas as linhas da tabela que terminam em V. Se todas as linhas terminarem em F, então basta considerar P como sendo qualquer contradição envolvendo p_1, p_2, $\ldots$, como por exemplo, $p_1 \wedge \neg p_1$;

2) Para cada linha terminada em V, consideramos uma proposição $(q_1 \wedge q_2 \wedge q_3 \wedge \cdots \wedge q_n)$ onde q_i é igual a p_i se o valor de p_i for V (ou seja se a i-ésima coluna da linha for V) e q_i é igual a $\neg p_i$ se o valor de p_i for F;

3) Conectamos todas as proposições obtidas no item anterior por $\vee$ e obtemos a proposição P desejada. Às vezes é possível fazer simplificações em P, como se fossem operações algébricas.

Exemplo: Descobrir a proposição x na tabela-verdade abaixo (ou seja, escrever x como combinação de p e q)

p	q	x
V	V	F
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Solução: As linhas que aparecem V em x são (F, V, V) e (F, F, V). Associamos a essas linhas as seguintes proposições:

- (**F, V**, V) $\longrightarrow (\neg p \wedge q)$
- (**F, F**, V) $\longrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$

Concluímos, então, que x é $(\neg p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

Às vezes é possivel simplificar usando regras conhecidas. Por exemplo, temos que x é equivalente a $\neg p \wedge (q \vee \neg q)$ e, como $(q \vee \neg q)$ é tautologia, temos que x pode ser reduzida simplesmente a $\neg p$.

Exemplo: Determine qual é a proposição P da tabela-verdade abaixo:

p	q	r	P
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	V

Solução: As linhas em que P vale V são (V, V, V, V), (V, F, V, V), (F, F, V, V) e (F, F, F, V).

Logo, a proposição P procurada é dada por $(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r)$.

Alguma simplicação é possível. Por exemplo, pode-se mostrar que a P encontrada é equivalente a $[(p \wedge r) \wedge (q \vee \neg q)] \vee [(\neg p \wedge \neg q) \wedge (r \vee \neg r)]$ e que equivale a $(p \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q)$.

A.2 Formas conjuntiva e disjuntiva normais

Graças às propriedades $p \vee q \equiv \neg\neg p \vee \neg\neg q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$ temos que é sempre possível substituir a ocorrência de um conectivo $\vee$ pelos conectivos $\neg$ e $\wedge$.

De modo análogo, como $p \wedge q \equiv \neg\neg p \wedge \neg\neg q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$ temos que é possível substituir as ocorrências de $\wedge$ por uma combinação de $\neg$ e $\vee$.

Como $p \to q$ é equivalente a $\neg p \vee q$ e $p \leftrightarrow q$ é equivalente a $(p \to q) \wedge (q \to p)$, ou seja, é equivalente a $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$, é possível substituir qualquer ocorrência de $\to$ ou $\leftrightarrow$ por $\neg$ e $\wedge$ ou por $\neg$ e $\vee$.

A *forma conjuntiva normal* de uma proposição é a proposição equivalente na qual aparecem apenas $\neg$ e $\wedge$. De modo semelhante, a *forma disjuntiva normal* é a proposição equivalente na qual aparecem apenas $\neg$ e $\vee$.

Exemplo: Determine a forma conjuntiva normal da proposição $(\neg p \vee q) \to r$.

Solução: Temos a seguinte sequência de equivalências lógicas:

- $(\neg p \vee q) \to r$
- $\equiv \neg(p \wedge \neg q) \to r$
- $\equiv \neg(\neg(p \wedge \neg q)) \vee r$
- $\equiv (p \wedge \neg q) \vee r$
- $\equiv \neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$.

Portanto, a forma conjuntiva normal da proposição dada é $\neg(\neg(p \wedge \neg q) \wedge \neg r)$.

Exemplo: Determine a forma disjuntiva normal da proposição $(\neg p \wedge q) \to (\neg r \wedge s)$.

Solução: Temos a seguinte sequência de equivalências lógicas:

- $(\neg p \wedge q) \to (\neg r \wedge s)$
- $\equiv \neg(p \vee \neg q) \to \neg(r \vee \neg s)$
- $\equiv \neg(\neg(p \vee \neg q)) \vee \neg(r \vee \neg s)$

Portanto, a forma normal disjuntiva da proposição dada é

$$\neg(\neg(p \vee \neg q)) \vee \neg(r \vee \neg s)$$

ou seja,

$$(p \vee \neg q) \vee \neg(r \vee \neg s)$$

Apêndice B

Exercícios Suplementares

UFPBVIRTUAL
Licenciatura em Matemática a Distância
Disciplina: Argumentação em Matemática
Exercícios de Revisão – 2009.2
Professor: Lenimar N. Andrade

1) Qual é o valor lógico das seguintes proposições?
a) Se $1 + 2 = 3$, então 15 é um número primo.
b) Se 15 é um número primo, então $1 + 2 = 3$.
c) 15 é um número primo se, e somente se, $1 + 2 = 3$.
d) 15 é um número primo se, e somente se, $1 + 2 = 7$.

2) Escreva a recíproca e a contrapositiva das sentenças:
a) *"Se eu vou estudar bastante, então não serei reprovado"*.
b) *"Se x é tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então* $\cos(x) < 0$ *e* $\operatorname{sen}(x) < 0$*"*.

3) Escreva a negação de cada uma das seguintes sentenças:
a) $\sqrt{11}$ não é racional ou $1 + 1 = 6$.
b) Existe um x real tal que $1 < |x + 1| < 7$.
c) Existe um aluno que é muito competente ou muito esforçado
d) Para todo ângulo θ temos que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

4) Sendo p e q proposições tais que $(p \leftrightarrow q)$ e $(p \vee q)$ são ambas verdadeiras, determine o valor lógico de $((\neg p \wedge q) \vee (q \to \neg p))$.

5) Sendo p, q e r proposições, construa a tabela-verdade de

$$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$$

e decida se essa proposição é uma tautologia.

1) Qual é o valor lógico das seguintes proposições?

a) Se $1 + 2 = 3$, então 15 é um número primo;

b) Se 15 é um número primo, então $1 + 2 = 3$;

c) 15 é um número primo se, e somente se, $1 + 2 = 3$;

d) 15 é um número primo se, e somente se, $1 + 2 = 7$.

Solução:

a) Falsa:

$$\underbrace{\underbrace{1+2=3}_{V} \to \underbrace{15 \text{ é um número primo}}_{F}}_{F}$$

b) Verdadeira:

$$\underbrace{\underbrace{15 \text{ é um número primo}}_{F} \to \underbrace{1+2=3}_{V}}_{V}$$

c) Falsa:

$$\underbrace{\underbrace{15 \text{ é um número primo}}_{F} \leftrightarrow \underbrace{1+2=3}_{V}}_{F}$$

d) Verdadeira:

$$\underbrace{\underbrace{15 \text{ é um número primo}}_{F} \leftrightarrow \underbrace{1+2=7}_{F}}_{V}$$

2) Escreva a recíproca e a contrapositiva das sentenças:

a) *"Se eu vou estudar bastante, então não serei reprovado"*.

b) *"Se x é tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$, então $\cos(x) < 0$ e $\operatorname{sen}(x) < 0$"*.

Solução:

a)
- Recíproca: *"Se não serei reprovado, então eu vou estudar bastante"*.
- Contrapositiva: *"Se serei reprovado, então eu não vou estudar bastante"*.

b)
- Recíproca: *"Se $\cos(x) < 0$ e $\operatorname{sen}(x) < 0$, então x é tal que $\pi < x < \frac{3\pi}{2}$"*.
- Contrapositiva: *"Se $\cos(x) \geq 0$ ou $\operatorname{sen}(x) \geq 0$, então x é tal que $x \leq \pi$ ou $x \geq \frac{3\pi}{2}$"*.

3) Escreva a negação de cada uma das seguintes sentenças:

a) $\sqrt{11}$ não é racional ou $1 + 1 = 6$.

b) Existe um x real tal que $1 < |x + 1| < 7$.

c) Existe um aluno que é muito competente ou muito esforçado

d) Para todo ângulo θ temos que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$.

Solução:

a) $\sqrt{11}$ é racional e $1 + 1 \neq 6$.

b) Para todo x real temos que $|x + 1| \leq 1$ ou $|x + 1| \geq 7$.

c) Todo aluno não é muito competente e não é muito esforçado

d) Existe um ângulo θ tal que $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta \neq 1$.

4) Sendo p e q proposições tais que $(p \leftrightarrow q)$ e $(p \vee q)$ são ambas verdadeiras, determine o valor lógico de $((\neg p \wedge q) \vee (q \rightarrow \neg p))$.

Solução:

- Como $p \leftrightarrow q$ é V, temos que p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas;
- Como também $p \vee q$ é V, temos que p e q são ambas verdadeiras;

- Sendo p e q verdadeiras, temos: $\underbrace{\underbrace{((\underbrace{\neg p}_{F} \wedge \underbrace{q}_{V})}_{F} \vee \underbrace{(\underbrace{q}_{V} \to \underbrace{\neg p}_{F}))}_{F}}_{F}$

Concluímos assim que a proposição dada é **falsa**.

5) Sendo p, q e r proposições, construa a tabela-verdade de

$$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$$

e decida se essa proposição é uma tautologia.

Solução:

- A proposição dada possui 3 componentes: p, q e r; logo, precisaremos de $2^3 = 8$ linhas na sua tabela-verdade.
- Para cada atribuição de valores lógicos a p, q e r, calculamos $p \vee q$, $p \to r$, $q \to r$, $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)$ e $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$ e vamos preenchendo cada coluna da tabela a seguir.
- A coluna com o valor de $(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r)$ foi omitida por falta de espaço.

p	q	r	$p \vee q$	$p \to r$	$q \to r$	$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V

Observando que na última coluna dessa tabela só tem V, concluímos que a proposição

$$(p \vee q) \wedge (p \to r) \wedge (q \to r) \to r$$

é uma **tautologia**.

UFPBVIRTUAL
Licenciatura em Matemática a Distância
Disciplina: Argumentação em Matemática
Exercícios de Revisão – 2009.2
Professor: Lenimar N. Andrade

1) Sendo p e q proposições, mostre que o argumento

$$[(p \to \neg q) \wedge q] \to \neg p$$

é válido.

2) Verifique se o seguinte argumento é válido:

> "Se eu estudar ou se eu for esperto, então vou passar por média em Cálculo I. Se eu passar por média em Cálculo I, vou ter umas boas férias. Portanto, se eu não tiver umas boas férias, não sou esperto."

3) Usando demonstração direta, mostre que a soma de dois números ímpares fornece como resultado um número par.

4) Usando a técnica da demonstração por contradição, mostre que se n for um inteiro tal que n^2 não é múltiplo de 3, então n também não é múltiplo de 3.

5) Considere a proposição:

> "Se m e n são inteiros quadrados perfeitos, então $m + n$ também é um quadrado perfeito".

Decida se essa proposição é um teorema. Se for, faça sua demonstração.

6) Usando o Princípio de Indução, mostre que para todo n inteiro positivo temos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

1) Sendo p e q proposições, mostre que o argumento

$$[(p \to \neg q) \wedge q] \to \neg p$$

é válido.

Solução: Temos a seguinte sequência de proposições verdadeiras, com as respectivas justificativas:

1) $p \to \neg q$ (premissa)

2) q (premissa)

3) $\neg(\neg q)$ (2, dupla negação)

4) $\neg p$ (1, 3 e Modus Tollens)

Isso mostra que o argumento é válido.

Outra solução:

1) $p \to \neg q$ (premissa)

2) q (premissa)

3) $\neg(\neg q) \to \neg p$ (contrapositiva de 1)

4) $q \to \neg p$ (3, dupla negação)

5) $\neg p$ (2, 4 e Modus Ponens)

Outra solução: Construir a tabela-verdade da proposição dada e observar que na última coluna só aparece V.

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \to \neg q$	$(p \to \neg q) \wedge q$	$[(p \to \neg q) \wedge q] \to \neg p$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	F	V

2) Verifique se o seguinte argumento é válido:

> "Se eu estudar ou se eu for esperto, então vou passar por média em Cálculo I. Se eu passar por média em Cálculo I, vou ter umas boas férias. Portanto, se eu não tiver umas boas férias, não sou esperto."

Solução: Consideremos as seguintes proposições:

p: "eu estudo"

q: "eu sou esperto"

r: "vou passar por média em Cálculo I"

s: "vou ter umas boas férias"

Devemos investigar a validade do seguinte argumento

$$[((p \vee q) \to r) \wedge (r \to s)] \to (\neg s \to \neg q)$$

que é equivalente a

$$[((p \vee q) \to r) \wedge (r \to s) \wedge \neg s] \to \neg q$$

1) $(p \vee q) \to r$ (premissa)

2) $r \to s$ (premissa)

3) $\neg s$ (premissa)

4) $(p \vee q) \to s$ (1, 2 e a Lei do Silogismo)

5) $\neg s \to \neg(p \vee q)$ (contrapositiva de 4)

6) $\neg s \to (\neg p \wedge \neg q)$ (5, negação de uma disjunção)

7) $\neg p \wedge \neg q$ (3, 6 e Modus Ponens)

8) $\neg q$ (7, Simplificação Conjuntiva)

Dessa forma, fica mostrado que o argumento é válido.

3) Usando demonstração direta, mostre que a soma de dois números ímpares fornece como resultado um número par.

Solução: Devemos mostrar que

$$m \text{ e } n \text{ são ímpares} \Rightarrow m + n \text{ é par.}$$

- Como m é ímpar, $m = 2k + 1$ para algum inteiro k;
- Pelo mesmo motivo, $n = 2j + 1$ para algum inteiro j;
- Somando-se m e n, obtemos:
$m + n = (2k + 1) + (2j + 1) = 2k + 2j + 2 = 2 \times (k + j + 1)$;
- Como $k + j + 1$ é um inteiro, temos que $m + n$ é um múltiplo de 2, ou seja, é par, c.q.d.

4) Usando a técnica da demonstração por contradição, mostre que se n for um inteiro tal que n^2 não é múltiplo de 3, então n também não é múltiplo de 3.

Solução: Devemos mostrar que

$$\underbrace{n \text{ inteiro tal que } n^2 \text{ não é múltiplo de } 3}_{\text{hipótese}} \Rightarrow \underbrace{n \text{ não é múltiplo de } 3}_{\text{conclusão (tese)}}$$

- Negando-se a conclusão, obtemos: n é múltiplo de 3.
- Daí, temos que $n = 3k$ para algum inteiro k.
- Elevando-se ao quadrado: $n^2 = (3k)^2 = 9k^2 = 3 \times (3k^2)$ de onde obtemos que n^2 é um múltiplo de 3.
- Mas isso entra em contradição com a hipótese que afirma que n^2 não é múltiplo de 3.
- Dessa forma, fica demonstrada a proposição dada, c.q.d.

5) Considere a proposição:

> "Se m e n são inteiros quadrados perfeitos, então $m + n$ também é um quadrado perfeito".

Decida se essa proposição é um teorema. Se for, faça sua demonstração.

Solução: Para mostrar que uma proposição não é um teorema, basta apresentar um contra-exemplo. Tentando, por exemplo, os quadrados perfeitos $m = 4 = 2^2$ e $n = 9 = 3^2$, temos $m + n = 4 + 9 = 13$ que não é um quadrado perfeito. Obtivemos um contra-exemplo e, por causa disso, concluímos que a proposição não é um teorema.

6) Usando o Princípio de Indução, mostre que para todo n inteiro positivo temos que

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$$

Solução:

- Para $n = 1$ a proposição se reduz a $1 = 1^2$ e é verdadeira;
- Suponhamos a proposição verdadeira para $n = k$, ou seja, suponhamos que $1 + 3 + \cdots + (2k - 1) = k^2$;
- Vamos investigar o que acontece quando $n = k + 1$: $\underbrace{1 + 3 + \cdots + (2k - 1)}_{k^2} + (2k+1) = (k+1)^2$ que é equivalente a $k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2$, isto é, $(k + 1)^2 = (k + 1)^2$ que é verdadeira.
- Logo, pelo Princípio de Indução, a proposição é verdadeira para todo n inteiro positivo.

Referências Bibliográficas

[1] Antônio Sales da Silva, *Licenciatura em Matemática a Distância – Livro 2 – Argumentação em Matemática,* Editora Universitária da UFPB, 2008.

[2] Benedito Castrucci, *Introdução à Lógica Matemática*, Grupo de Estudos do Ensino da Matemática, Série Professor N. 4, Editora Nobel, 1986.

[3] Edgard de Alencar Filho, *Iniciação à Lógica Matemática*, Editora Nobel, 1975.

[4] Kenneth H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 6th. edition, China Machine Press, WCB–McGraw-Hill, 2007.

[5] Ralph P. Grimaldi, *Discrete and Combinatorial Mathematics – An Applied Introduction*, 5th. edition, Pearson–Addison Wesley, 2004.