# Universidade Federal da Paraíba
# Centro de Ciências Exatas e da Natureza
# Departamento de Matemática
## Prova Final de Álg. Linear e Geo. Analítica - 00.2

**Nome:** **Mat.**

1. Sejam $\mathbf{V}$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ e $\alpha = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ uma base de $\mathbf{V}$. Mostrar que
$$\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3\}$$
é também uma base de $\mathbf{V}$.

2. Sejam $\alpha = \{(1,-1),(0,2)\}$ e $= \{(1,0,-1),(0,1,2),(1,2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação linear tal que
$$[T]^\alpha_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$
   1. Determinar $T(x,y)$.
   2. $T$ é sobrejetora?
   3. Se $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ é definida por $S(x,y) = (2y, x-y, x)$, determinar $[S]^\alpha_\beta$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ um operador linear definido por
$$T(x,y,z) = (-2z, x+2y+z, x+3z).$$
$T$ é diagonalizável? Em caso afirmativo, determinar a matriz $\mathbf{P}$ tal que $\mathbf{D} = \mathbf{P}[T]\mathbf{P}^{-1}$, onde $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal que representa $T$.

4. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e $\mathbf{W} = [(-1,2,-1),(1,-1,0)]$. Determinar uma base para $\mathbf{W}^\perp$.

5. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ um operador linear que tem $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_1 = 2$ como seus autovalores. Se
$$\mathbb{R}^2_{\lambda_1} = \{(-x,x) : x \in \mathbb{R}\} \text{ e } \mathbb{R}^2_{\lambda_2} = \{(x,-2x) : x \in \mathbb{R}\},$$
determinar $\ker(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.