**5.15.** Mostre que a transformação $T(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ transforma o quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$, $e$ $(0,1)$ num paralelogramo no plano uv, cuja área é $|J(T)|$.

**5.16.** Verifique que a transformação $T:\Re^2 \to \Re^2$; $T(x,y)=\left(\dfrac{x}{a},\dfrac{y}{b}\right)$ aplica a elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ na circunferência unitária de centro na origem. Encontre uma transformação $T:\Re^3 \to \Re^3$ que aplica o elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ na esfera unitária de centro na origem.

**5.17.** Qual a imagem da circunferência $x^2+y^2=a^2$ pela transformação $T:\Re^2 \to \Re^2$ definida por $T(x,y)=(4x,y)$?

**5.18.** Determine as imagens das retas $x=c$ pela transformação $T(x,y)=(e^x\cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

**5.20.** Determine a imagem da região $|x|+|y|\le 1$ pela transformação $T(x,y)=(x+y,x-y)$.

## COORDENADAS CILÍNDRICAS E COODENADAS ESFÉRICAS

As quantidades $r, q, z$ definidas no exercício 5.7 (g) são denominadas "coordenadas clíndricas", enquanto $r, q, j$ definidas em 5.7 (h) são as "coordenadas esféricas". Temos

COORDENADAS CILÍNDRICAS

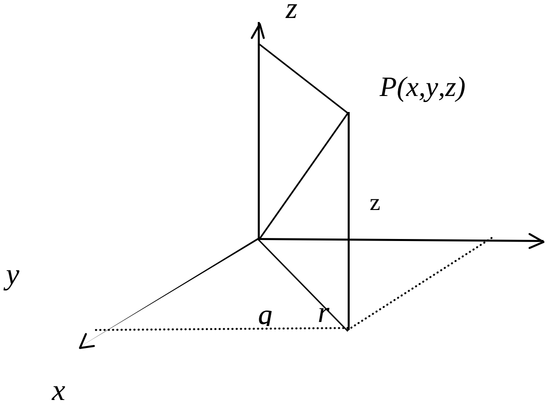
$$\begin{cases} x = r\cos q \\ y = r\operatorname{sen} q \\ z = z \end{cases}$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

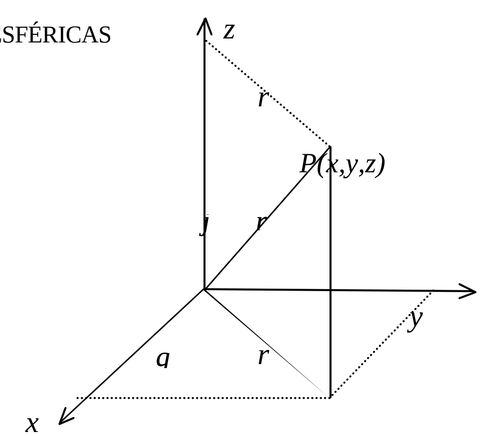
$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} j \cos q \\ y = r \operatorname{sen} j \operatorname{sen} q \\ z = r \cos j \end{cases}$$

Geometricamente, temos a seguinte configuração:

CILÍNDRICAS




ESFÉRICAS



**5.25.** Complete a seguinte tabela de coordenadas:

| cartesianas | cilíndricas | esféricas |
|---|---|---|
| $(2,2,-1)$ | | |
| | | $(12, p/6, 3p/4)$ |
| $(1,1,-2\sqrt{2})$ | | |
| | $(1, p/4, 1)$ | |

**5.26.** Identifique a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é:

$(a)\ r = 4$ $\quad (b)\ q = p/4$ $\quad (c)\ z = 2r$ $\quad (d)\ 3r^2 + z^2 = 9$ $\quad (e)\ r^2 + z^2 = 16$ $\quad (f)\ r \sec q = 4$

**5.27.** Identifique a superfície cuja equação em coordenadas esféricas é:

$(a)\ r = 6\cos q \ \text{sen}\, j$ $\quad (b)\ r = 5\cos ec j$ $\quad (c)\ q = p/6$ $\quad (d)\ r\ \text{sen}\, j = 4$
$(e)\ j = p/4$ $\quad (f)\ r^2 - 3r = 0$ $\quad (g)\ r\ \text{sen}\, j\ \cos q = 1$ $\quad (h)\ r = 2\cos j$
$(i)\ tg q = 4$ $\quad (j)\ r = a$ $\quad (l)\ r^2 + 3r + 2 = 0$ $\quad (m)\ r = \cos ec j\ \cot g j$

**5.28.** As superfícies dadas abaixo estão representadas por suas equações cartesianas. Passe as equações para as coordenadas cilíndricas e esféricas:

$(a)\ Esfera : x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $\quad (b)\ Parabolóide : 4z = x^2 + y^2$
$(c)\ Cone : x^2 - 4z^2 + y^2 = 0$ $\quad (d)\ Hiperbolóide : x^2 - 4y^2 - z^2 = 1$
$(e)\ Plano : 3x + y - 4z = 12$ $\quad (f)\ Cilindro : x^2 + y^2 = 4$

## 6. INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA

**6.2.** Calcule as seguintes integrais iteradas. Em cada caso esboce a região de integração e inverta a ordem. Compare o grau de dificuldade no cálculo da integral nas duas ordens possíveis:

$(a)\ \int_0^3\int_1^2 (12xy^2 - 8x^3)dydx$ $\quad (b)\ \int_0^2\int_0^2 (2xy - y^3)dydx$ $\quad (c)\ \int_1^2\int_0^1 (x - 3\log y)dxdy$
$(d)\ \int_0^2\int_1^3 |x-2|\ \text{sen}\, y dxdy$ $\quad (e)\ \int_o^p\int_{-y}^{y} \text{sen}\, x dxdy$ $\quad (f)\ \int_0^p\int_0^x \cos x^2$
$(g)\ \int_0^1\int_0^{|x|} dydx$ $\quad (h)\ \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} ydydx$ $\quad (i)\ \int_o^p\int_0^{\cos y} x\ \text{sen}\, y dxdy$
$(j)\ \int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} ydxdy$ $\quad (k)\ \int_0^2\int_1^{e^x} dydx$ $\quad (l)\ \int_0^9\int_{\sqrt{y}}^3 \text{sen}\, x^3 dxdy$

**6.3.** Em cada caso abaixo esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x,y)dxdy$. Escolha a ordem de integração de modo a simplificar o cálculo da integral iterada:

$(a)\, D: 0 \le x \le 1 e\, 2x \le y \le 2;\ f = e^{y^2}$ $(b)\, D: x \ge 0 e 1 \le x^2 + y^2 \le 2;\ f = x^2$

$(c)\, D: -1 \le x \le 2 e -\sqrt{4-x^2} \le y \le 4 - x^2;\ f = 1$ $(d)\, D: 0 \le y \le 8 e \sqrt[3]{y} \le x \le 2;\ f = xy$

**6.4.** Nos casos a seguir, esboce a região D descrita e calcule a integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$. Se necessário utilize uma mudança de coordenadas:

(a) D é a região triangular de vértices $(2,9),(2,1)$ e $(-2,1)$; $f = xy^2$

(b) D é a região retangular de vértices $(-1,-1),(2,-1),(2,4)$ e $(-1,4)$; $f = 2x + y$

(c) D é a região delimitada por $8y = x^3,\ y - x = 4\ e\ 4x + y = 9$; $f = x$

(d) D é a região do 1º quadrante delimitada por $x^2 + y^2 = 1$; $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(e) D é a região delimitada por $y^2 = x, x = 0\ e\ y = 1$; $f = \exp(x/y)$

(f) D é a região delimitada por $y = \frac{1}{2}x^2\ e\ y = x$; $f = x(x^2 + y^2)^{-1}$

(g) D é a região do delimitada por $y = x,\ y = 0,\ x = 8\ e\ xy = 16$; $f = 1$

**6.5.** Usando coordenadas polares, calcule as seguintes integrais:

$(a)\ \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx\,dy$ $(d)\ \int_1^2 \int_0^x (x^2 + y^2)^{-1}\,dy\,dx$

$(b)\ \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp(-x^2 - y^2)\,dy\,dx$ $(e)\ \iint_D \sqrt{x^2+y^2}\,dA,\ D\colon 0 \le x \le 3\ e\ 0 \le y \le x.$

$(c)\ \iint_{x^2+y^2 \le 1} (x^2 + y)\,dA$ $(f)\ \iint_D (x+y)\,dA,\ D\ é\ o\ \text{interior}\ de\ x^2 + y^2 = 2y$

**6.6.** Usando a mudança de variáveis $u = x + y, e\ v = x - y$, calcule a integral dupla $\iint_{|x|+|y| \le p} (x+y)^2 \operatorname{sen}^2(x-y)\,dA$.

**6.8.** Usando a mudança de variáveis do exercício 6.6 calcule $\iint_D \operatorname{sen}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) dA$, onde D é a região compacta delimitada pelo trapézio de vértices (1,1), (2,2), (4,0) e (2,0).

**6.9.** Usando a mudança de variáveis $u = vx\ e\ y = v$ calcule $\iint_D (x^2 + 2y^2)\,dA$, onde D é a região delimitada pelas curvas $xy = 1,\ xy = 2,\ y = |x|\ e\ y = 2x$.

**6.10.** Usando a mudança de variáveis $x = v + u\ e\ y = v - u^2$, calcule $\iint_D (4x - 4y + 1)^{-2}\,dA$, onde D é a região delimitada pelas curvas $x = \sqrt{-y},\ x = y\ e\, x = 1$.

**6.11.** Usando a mudança de variáveis $u = \frac{1}{2} y\ e\, v = x - 2y$ calcule $\iint_D (\sqrt{x - 2y} + \frac{1}{4} y^2)\,dA$, onde D é a região delimitada pelo triângulo de vértices (0,0), (4,0) e (4,2).

**6.12.** Calcule a integral de $f(x,y) = x^2$ na região delimitada pela cardióide $r = 1 - \cos q$ .

**B. ÁREAS e VOLUMES**

**6.13.** Por integração dupla calcule a área de um círculo de raio R e a área da elipse de semi-eixos *a* e *b*.

**6.14.** Em cada caso abaixo, calcule por integração dupla a área da região plana D delimitada pelas curvas indicadas:

(a) $x = 1, x = 2, y = -x^2 \ e \ y = 1/x^2$

(b) $x = 1, \ x = 4, \ y = -x \ e \ y = \sqrt{x}$

(c) $y = x^2 \ e \ y = 1/(1+x^2)$

(d) $y^2 = -x, \ x - y = 4, \ y = -1 \ e \ y = 2$

(e) $y = 0, \ x + y = 3a \ e \ y^2 = 4ax, \ a > 0$

(f) $y = e^x, \ y = \operatorname{sen} x, \ x = p \ \ e \ x = -p$

**6.15.** Por integração dupla, calcule a área da região D compreendida entre a cardióide $r = a(1 + \operatorname{sen} q)$ e o círculo $r = a$.

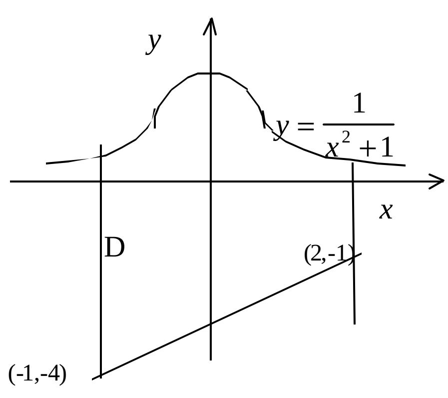
**6.16.** Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $x^2 = y, \ x^2 = 2y, \ y^2 = x \ e \ y^2 = 2x$.

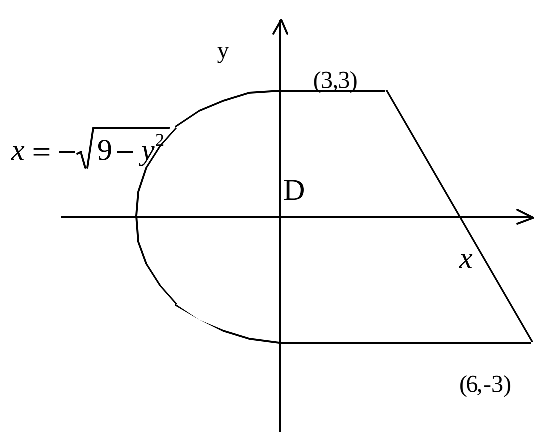
**6.17.** Calcule a área da região delimitada pelas retas $y = x \ e \ y = 0$ e pelos círculos $x^2 + y^2 = 2x \ e \ x^2 + y^2 = 4x$.

**6.18.** Calcule a área da região delimitada pelas parábolas $y^2 = 10x + 25 \ e \ y^2 = -6x + 9$.

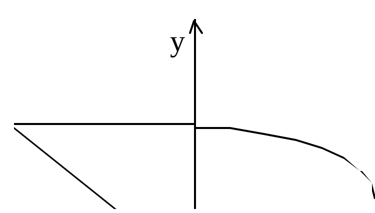
**6.19.** A expressão $\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} \int_{1}^{1+\cos q} r\,dr\,dq$ representa o valor da área de uma certa região. Esboce graficamente a região e calcule o valor da área.

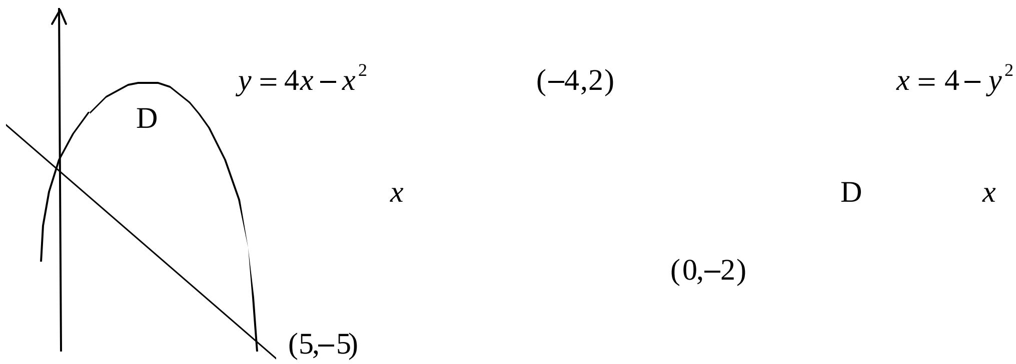
**6.20.** Usando integral dupla, calcule a área da região D indicada na figura:




y

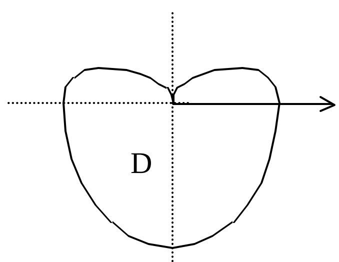




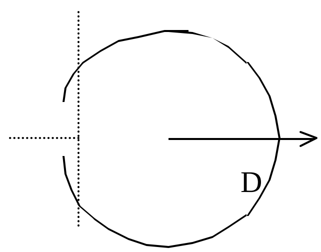

**6.21.** Calcule a área da região do primeiro quadrante delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 8$, e pela curva $xy = 16$.

**6.22.** Usando coordenadas polares, calcule a integral dupla $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, onde D é a região do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt{2x - x^2}$ $e$ $y = x$.

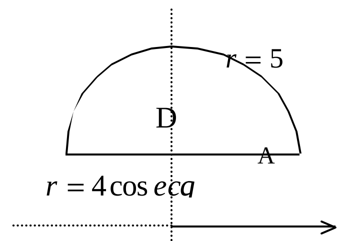
**6.24.** Expresse a área da região D indicada como uma integral dupla iterada em coordenadas polares:




$r = 3 - \operatorname{sen}\theta$




$r = 1 + 2\cos\theta$




A $(5, arctg\, \frac{4}{3})$

**6.25.** Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0$ $e$ $x + y + z = 1$.

**6.26.** A base de um sólido é a região do plano xy delimitada pelo disco $x^2 + y^2 \leq a^2$. A parte superior é a superfície do parabolóide $az = x^2 + y^2$. Calcule seu volume.

**6.27.** Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano xy, nas laterais delimitado pelas superfícies $y = 4 - x^2$ e $y = 3x$ e cuja parte superior jaz no plano $z = x + 4$.

**6.28.** Ao calcular o volume de um sólido S abaixo de um parabolóide e acima de uma certa região D do plano xy, obteve-se a seguinte expressão

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Indique a região D, exprima vol(S) por uma integral iterada com a ordem invertida e em seguida calcule a integral.

**6.29.** Calcule o volume da região comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2 \ e \ x^2 + z^2 = a^2$.

**6.30.** Um sólido S do primeiro octante tem seu volume dado pela expressão

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dydx.$$

Esboce graficamente o sólido e calcule o valor do seu volume. Idem para

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\, dydx.$$

**6.31.** Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$, e pelos planos $y = 0, z = 0, \ e \ y = x$.

**6.32.** Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$.

**6.33.** Calcule o volume do sólido interior à esfera de centro na origem e raio 5, e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

**6.34.** Calcule o volume do sólido interior ao cubo $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$, e exterior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

**6.35.** Calcule o volume do sólido limitado pelos planos $y = 1 \ e \ z = 0$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e pelo cilindro $y = x^2$.

**6.36.** Verifique que o parabolóide $x^2 + y^2 = z$, divide o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$, $0 \le z \le 4$, em dois sólidos de volumes iguais.

**6.37.** Calcule o volume do "pedaço" do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ cortado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

**6.38.** Calcule o volume da maior região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro circular $x^2 + y^2 = 4y$.

**6.39.** Um sólido é limitado pela superfície $x^2 + y^2 = z$ e pelos planos $z = 0,\ x = 1 \ e \ x = 3$. Calcule seu volume.

## C. MASSA, MOMENTOS e CENTRO DE MASSA

**6.40.** Calcule a massa de um disco de raio $a$, se a densidade é proporcional ao quadrado da distância a um ponto da circunferência.

**6.41.** Uma lâmina tem a forma de um triângulo retângulo isósceles com lados iguais de comprimento $a$. A densidade de massa por área em cada ponto da lâmina é diretamente proporcional ao quadrado distância do ponto ao vértice oposto à hipotenusa. Determine o centro de massa.

**6.42.** Uma lâmina tem a forma da região D do plano xy delimitada pela parábola $x = y^2$ e pela reta $x = 4$. A densidade de massa por área no ponto P é proporcional a distância do ponto ao eixo-y. Determine o centro de massa da lâmina.

**6.43.** Determine a massa, as coordenadas do centro de massa e os momentos de inércia $I_x, I_y$ e $I_o$ para a lâmina que tem a forma da região D indicada e cuja densidade de massa por área é $d\,(x, y)$:

(a) $y = \sqrt{x}, x = 9, y = 0; d = x$ (b) $y = \sqrt[3]{x}, x = 8, y = 0; d = y^2$ (c) $y = x^2, y = 4; d = ky$

**6.44.** Uma lâmina homogênea tem o formato de um quadrado de lado $a$. Determine o momento de inércia em relação a um lado, em relação a uma diagonal e em relação ao centro de massa.

## D. INTEGRAIS DUPLAS IMPRÓPRIAS

Nas integrais que aparecem no exercício (6.44) ou a região de integração D não é limitada ou, sendo D compacta, a função que se deseja integrar possui uma singularidade essencial em algum ponto da fronteira de D. Em qualquer um destes casos a integral será denominada *"imprópria"*.

**6.45.** Calcular as seguintes integrais impróprias:

(a) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (b) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{xy}}; D: 0 < x, y \le 1$ (c) $\displaystyle\iint_D x^2 e^{-x^2-y^2}\,dxdy;\ D: x \ge 0, y \ge 0$

(d) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$ (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}\,\mathrm{sen}^2\,y}{(1+x^2+y^2)^2}dxdy$ (f) $\displaystyle\iint_D e^{x/y}dxdy;\ D: 0 \le x \le y^2,\ 0 \le y \le 1$

(g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$ (h) $\displaystyle\iint_{x^2+y^2\le 1} \ln\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ (i) $\displaystyle\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{|x-y|}}; D: 0 \le x, y \le 1$.

**6.46.** Usando o resultado do exercício 6.45 (g), mostre que $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{2p}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}dx = 1$.

[sugestão: use o fato que $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\,dy\right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right)^2$.]

**6.47.** Mostre que a função $f\,(x, y) = 1/(x-y)$ não é integrável no domínio D: $0 \le y < x \le 1$, embora seja contínua neste domínio. Isto contradiz algo resultado do Cálculo que você conhece?

**E. ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE**

A integral dupla pode ser utilizada para calcular a área de uma superfície S que representa o gráfico de uma função diferenciável $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$. A área de S é dada por

$$\boxed{A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^{\,2} + f_y^{\,2}}\, dA.}$$

**6.48.** Calcule a área da superfície de equação $z = f(x,y)$, descrita por:

(a) $z = 3 + x - 2y;\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x$
(b) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2};\ 1 \le x^2 + y^2 \le 2$
(c) $z = xy;\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$
(d) $z = 3 - x^2 - y^2;\ x^2 + y^2 \le 1,\ x \ge 0,\ y \ge 0$

**6.49.** Calcule a área da porção da superfície de equação $z = y + \frac{1}{2}x^2$ que se encontra acima do quadrado do plano $xy$ de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ e $(0,1)$.

**6.50.** Corta-se uma parte do plano $x + y + z = 1$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Determine a área da parte cortada.

**6.51.** Calcule a área da porção do cilindro $x^2 + z^2 = 9$ interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

**6.52.** Uma tenda em forma de cúpula deve ter o chão circular com raio de 5 metros e teto na forma do parabolóide $z = 7 - \frac{7}{25}(x^2 + y^2)$. Calcule a quantidade de material necessária para construir a tenda.

**6.53.** Seja $z = G(r,\theta)$, $(r,\theta) \in D$, a equação de uma superfície S em coordenadas cilíndricas. Mostre que a área de S é dada por

$$A(S) = \iint \sqrt{1 + G_r^{\,2} + \tfrac{1}{r^2} G_\theta^{\,2}}\; r\,dr\,d\theta\ .$$

**6.54.** Mostre que, em coordenadas cilíndricas, a equação $z = G(r),\ a \le r \le b,\ 0 \le \theta \le 2\pi$, representa uma superfície de revolução cuja área é dada por

$$A(S) = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + G_r^{\,2}}\; r\,dr\,.$$

## 6.2 INTEGRAL TRIPLA

O cálculo de integrais triplas se reduz ao cálculo de uma integral dupla seguida de uma integral simples e, dependendo da região de integração, a integral pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. Veja as seguintes situações, quando se deseja calcular $\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dV$:

(a) $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \Re^3; (x,y) \in D \; e \; j\,(x,y) \le z \le y\,(x,y)\right\}$.

Neste caso D é a projeção no plano xy da região de integração $\Omega$ e

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{j\,(x,y)}^{y\,(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dA}$$

(b) $\Omega = \left\{(x,y,z) \in \Re^3; a \le x \le b, j\,(x) \le y \le y\,(x) \; e \; \mathbf{a}\,(x,y) \le z \le b\,(x,y)\right\}$.

Neste caso a integral tripla é calculada como uma integral iterada

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \int_a^b \left\{\int_{j\,(x)}^{y\,(x)} \left[\int_{a\,(x,y)}^{b\,(x,y)} f(x,y,z)dz\right]dy\right\}dx}$$

Naturalmente, uma mudança na descrição da região $\Omega$ acarreta inversões na ordem de integração.

**6.55.** Expresse a integral $\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$ como uma integral iterada e em seguida calcule o seu valor para $f = xyz$ e $\Omega$ dado por:

$(a)\ \Omega: -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2$ $\quad (b)\ \Omega: -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 4 - y.$

$(c)\ \Omega: x + z \le y \le x - z, 0 \le x \le z^2, 1 \le z \le 2$ $\quad (d)\ \Omega: 0 \le z \le x + y, 1 \le y \le x^2, -1 \le x \le 2$

**6.56.** Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

$(a)\ \int_0^1\int_2^3\int_4^5 e^{xyz}\,dxdydz$ $\quad (b)\ \int_0^1\int_0^y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \operatorname{sen}(xy)dzdxdy$ $\quad (c)\ \int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\sqrt{(z-1)^2-x^2}} x(y+z)dydzdx$

**6.57.** Em cada caso a integral iterada representa o volume de uma região S. Descreva S:

$(a)\ \int_0^1\int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}}\int_2^3 dxdydz$ $\quad (b)\ \int_0^1\int_{z^3}^{\sqrt{z}}\int_0^{4-x} dydxdz$ $\quad (c)\ \int_0^2\int_{x^2}^{2x}\int_0^{x+y} dzdydx$

$(d)\ \int_0^1\int_x^{3x}\int_0^{xy} dzdydx$ $\quad (e)\ \int_1^2\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dydxdz$ $\quad (f)\ \int_1^4\int_{-z}^{z}\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dxdydz$

**A. VOLUMES**

Nos exercícios (6.57) a (6.64), esboce graficamente o sólido indicado e calcule seu volume por integração tripla:

**6.58.** Sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4\ e\ z = 0$.

**6.59.** Sólido delimitado pelos planos $x = 0,\ y = 0,\ x = z$ e pelo cilindro $z = 1 - y^2$.

**6.60.** Sólido delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y = 0,\ y + z = 6$.

**6.61.** Sólido interseção dos parabolóides $z \leq 1 - x^2 - y^2 \ e \ z \geq x^2 + y^2 - 1$.

**6.62.** Sólido delimitado pelos planos $z = 0$, $z = 5 + x + y$ e pelos cilindros $y^2 = x \ e \ y^2 = 1 - x$.

**6.63.** Sólido interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq 6$ com o parabolóide $z \geq x^2 + y^2$.

**6.64.** Sólido delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x \ e \ z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**6.65.** Em cada caso abaixo calcule o volume do sólido descrito pelas desigualdades:

$(a)\ 0 \leq x \leq z \leq 1 - y^2$ $\qquad$ $(b)\ x^2 + y^2 \leq z \leq 2x$

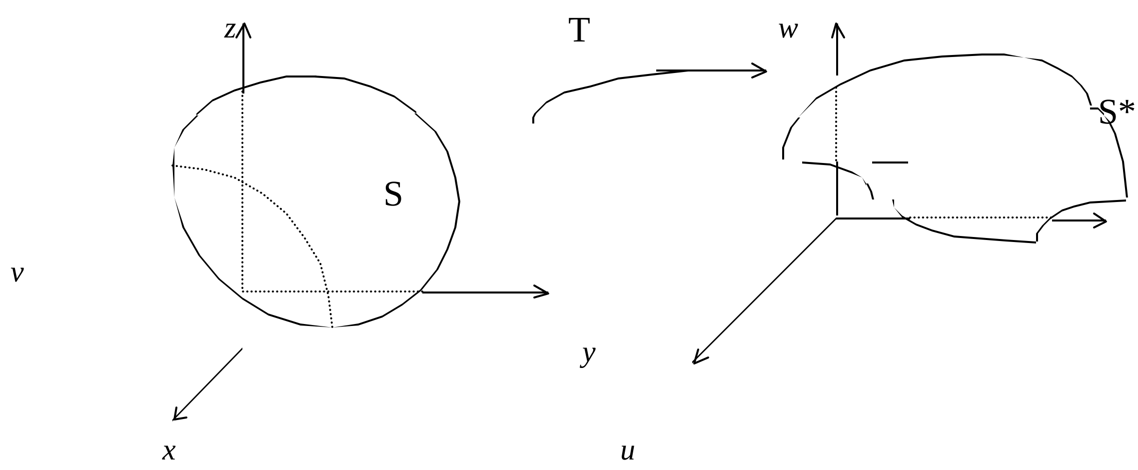
$(c)\ x^2 + y^2 \leq z \leq 1 - x^2$ $\qquad$ $(d)\ x^2 + 4y^2 \leq 4 \ e \ x + y \leq z \leq x + y + 1$

**B. MUDANÇA DE COORDENADAS**

Consideremos uma transformação $T:\Re^3 \to \Re^3$ com Jacobiano diferente de zero, isto é,

$$T: \begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \quad com \quad J(T) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \neq 0.$$

Seja S* a imagem da região S pela transformação T, como sugere a figura abaixo.




Temos a seguinte "fórmula de mudança de variáveis" em integrais triplas:

$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{S^*} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)] \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| dudvdw}$$

**6.66.** Escreva as fórmulas de mudança de variáveis no caso das coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas.

**6.67.** Calcule o volume de uma esfera de raio R, usando no cálculo da integral tripla coordenadas cilíndricas e depois coordenadas esféricas.

**6.68.** Calcule o volume do elipsóide de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

**6.69.** Usando coordenadas cilíndricas, calcule as seguintes integrais:

$(a)\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dV$ $\quad (b)\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dV$ $\quad (c)\iiint_\Omega xydV;\Omega : x^2+y^2\le 1, 0\le z\le 1$

**6.70.** Usando coordenadas esféricas, calcule as seguintes integrais:

$(a)\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)dzdydx$ $\qquad (b)\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdxdy$

**6.71.** Usando uma mudança de coordenadas adequada, calcule o volume dos seguintes sólidos:

(a) sólido delimitado pelo parabolóide $x^2+y^2=az$, pelo plano $z=0$ e pelo cilindro $x^2+y^2=2ax$, $a>0$.

(b) sólido delimitado pelas superfícies $z=x^2+y^2$ $e$ $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)$.

(c) sólido delimitado acima pela esfera $x^2+y^2+z^2=2a^2$ e abaixo pelo paraboloíde $az=x^2+y^2$, $a>0$.

(d) sólido interseção da bola $x^2+y^2+(z-1)^2\le 1$ com o cone $z^2\ge x^2+y^2$, $z\ge 0$.

(e) sólido delimitado pelo parabolóide $z=-2(x^2+y^2)$ e pelo plano $z=4$.

(f) sólido interior à esfera $4y=x^2+y^2+z^2$ e limitado acima pelo cone $y^2=x^2+z^2$.

(g) sólido interior à esfera $z^2+x^2+y^2=1$ e exterior ao cone $z^2=x^2+y^2$.

(h) calota interseção da bola $x^2+y^2+z^2\le R^2$ como semi-espaço $z\ge a$, $0<a<R$.

(i) sólido interseção da esfera $x^2+y^2+z^2\le R^2$ com o cilindro $x^2+y^2\le a^2$.

**6.72.** Faz-se um orifício circular em uma esfera, o eixo do orifício coincidindo com o eixo da esfera. O volume do sólido resultante é dado por

$$V=2\int_0^{2p}\int_0^{\sqrt{3}}\int_1^{\sqrt{4-z^2}} rdrdzdq$$

Por observação da integral determine o raio do orifício e o raio da esfera. Calcule V.

**C. MASSA, CENTRO DE MASSA e MOMENTO DE INÉRCIA**

Um sólido S é dito "não-homogêneo" quando sua densidade de massa não é constante. Por definição, densidade de massa é massa por unidade de volume. Denotando massa, volume e densidade de massa respectivamente por $m, V \; e \; d$ temos que $d = \dfrac{m}{V}$. Na integral tripla $\iiint\limits_S f(x,y,z)dV$ se o integrando é interpretado como densidade, a integral representará a massa do sólido S.

**6.73.** Calcule a massa contida numa esfera de raio R, cuja densidade de massa é proporcional à distância r ao centro da esfera. E se a densidade de massa fosse inversamente proporcional a r qual seria a massa da esfera?

**6.74.** Ache a massa do sólido delimitado pelo cone $z^2 = x^2 + y^2$, $0 \le z \le 4$, se a densidade no ponto P é proporcional à distância de P ao eixo-$z$.

**6.75.** Um sólido S é cortado da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2y$. A densidade no ponto P é proporcional à distância de P ao plano-$xy$. Calcule a massa de S.

**6.76.** Para uma altitude $z$ de até dez mil metros, a densidade $d \; (em \; kg/m^3)$ da atmosfera terrestre pode ser aproximada por $d = 1{,}2 - (1{,}05 \times 10^{-4})z + (2{,}6 \times 10^{-9})z^2$. Estime a massa de uma coluna de ar de 10 quilômetros de altura com base circular de 3 metros de raio.

Para um sólido S com densidade de massa $d(x,y,z)$ o "centro de massa" é o ponto $C(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{m}\iiint\limits_S x d(x,y,z)dV \qquad \bar{y} = \frac{1}{m}\iiint\limits_S y d(x,y,z)dV \qquad \bar{z} = \frac{1}{m}\iiint\limits_S z d(x,y,z)dV$$

e o "momento de inércia" com relação a um eixo $L$ é dado por $I_L = \iiint\limits_S d^2 d dV$, onde $d(x,y,z)$ é a distância do ponto $P(x,y,z)$ do sólido S ao eixo L. Os momentos de inércia relativos eixos $x$, $y$ e $z$ serão denotados respectivamente por $I_x, I_y \; e \; I_z$.

**6.77.** Para um sólido S de densidade de massa $d(x,y,z)$, mostre que

$$(a) I_x = \iiint (y^2 + z^2) d \; dV \qquad (b) I_y = \iiint (x^2 + z^2) d \; dV \qquad (c) I_z = \iiint (x^2 + y^2) d \; dV$$

**6.78.** Determine o centro de massa de um hemisfério $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$, $z \geq 0$, cuja densidade é proporcional à distância à base do hemisfério: $d = kz$.

**6.79.** Calcule o momento de inércia, em relação ao seu eixo, de um cilindro circular reto de raio R e altura H, com densidade $d(x,y,z) = k\sqrt{x^2 + y^2}$.

**6.80.** Mostre que o centróide do hemisfério $0 \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ é o ponto $C(0,0,3R/8)$.

**6.81.** Um sólido tem a forma da região S interior ao cilindro $r = a$, interior à esfera $r^2 + z^2 = 4a^2$ e acima do plano-$xy$. A densidade em um ponto P é diretamente proporcional à distância de P ao plano-$xy$. Calcule a massa e o momento de inércia $I_z$ do sólido.

**6.82.** Um sólido esférico tem raio $a$, e a densidade no ponto *P(x,y,z)* é diretamente proporcional à distância de *P* a uma reta fixa *l* que passa pelo centro do sólido. Calcule sua massa.

**6.83.** Calcule o volume e o centróide da região S delimitada acima pela esfera $r = a$ e abaixo pelo cone $j = a$, $0 < a < p/2$.

**6.84.** Considere um sólido hemisférico de raio $a$, cuja densidade no ponto *P(x,y,z)* é diretamente proporcional à distância de *P* ao centro da base. Calcule a massa, o centro de massa do sólido e o momento de inércia em relação ao eixo de simetria.