UFPB – CCEN – Departamento de Matemática

Lista de Exercícios – 00.1

01. Mostre que a transformação $T(x,y) = (ax + by, cx + dy)$ transforma o quadrado de vértices $(0,0),\ (1,0),\ (1,1),\ e\ (0,1)$ num paralelogramo no plano uv, cuja área é $|J(T)|$.

02. Verifique que a transformação $T{:}\,\Re^2 \to \Re^2;\ T(x,y) = \left(\dfrac{x}{a}, \dfrac{y}{b}\right)$ aplica a elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ na circunferência unitária de centro na origem. Encontre uma transformação $T{:}\,\Re^3 \to \Re^3$ que aplica o elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ na esfera unitária de centro na origem.

03. Qual a imagem da circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ pela transformação $T{:}\,\Re^2 \to \Re^2$ definida por $T(x,y) = (4x, y)$?

04. Determine as imagens das retas $x = c$ pela transformação $T(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

05. Determine a imagem da região $|x| + |y| \le 1$ pela transformação $T(x,y) = (x + y, x - y)$.

COORDENADAS CILÍNDRICAS E COODENADAS ESFÉRICAS

As quantidades r, q, z definidas abaixo são denominadas "coordenadas cilí ndricas", enquanto r, q, j são as "coordenadas esféricas". Temos

COORDENADAS CILÍNDRICAS

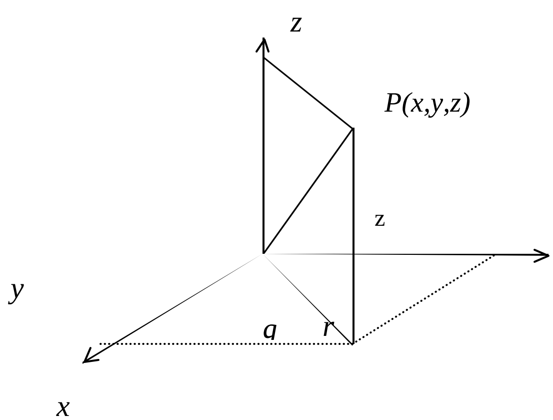
$$\begin{cases} x = r\cos q \\ y = r \operatorname{sen} q \\ z = z \end{cases}$$

COORDENADAS ESFÉRICAS

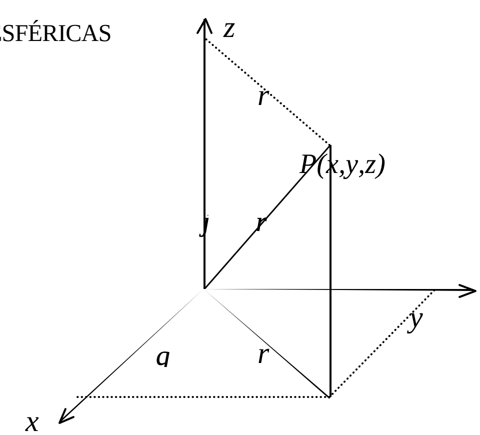
$$\begin{cases} x = r \operatorname{sen} j \cos q \\ y = r \operatorname{sen} j \operatorname{sen} q \\ z = r \cos j \end{cases}$$

Geometricamente, temos a seguinte configuração:

CILÍNDRICAS



ESFÉRICAS



06. Complete a seguinte tabela de coordenadas:

cartesianas	cilíndricas	esféricas
$(2,2,-1)$		
		$(12, p/6, 3p/4)$
	$(1, p/4, 1)$	

07. Identifique a superfície cuja equação em coordenadas cilíndricas é:

$(a)\ r = 4$ $(b)\ q = p/4$ $(c)\ z = 2r$ $(d)\ 3r^2 + z^2 = 9$ $(e)\ r^2 + z^2 = 16$ $(f)\ r\sec q = 4$

08. Identifique a superfície cuja equação em coordenadas esféricas é:

$(a)\ r = 6\cos q \text{ sen } j$ $(b)\ r = 5\operatorname{cosec} j$ $(c)\ q = p/6$ $(d)\ r \text{ sen } j = 4$
$(e)\ j = p/4$ $(f)\ r^2 - 3r = 0$ $(g)\ r \text{ sen } j \cos q = 1$ $(h)\ r = 2\cos j$

09. As superfícies dadas abaixo estão representadas por suas equações cartesianas. Passe as equações para as coordenadas cilíndricas e esféricas:

$(a)\ Esfera: x^2 + y^2 + z^2 = 4$ $(b)\ Parabolóide: 4z = x^2 + y^2$ $(e)\ Plano: 3x + y - 4z = 12$
$(c)\ Cone: x^2 - 4z^2 + y^2 = 0$ $(d)\ Hiperbolóide: x^2 - 4y^2 - z^2 = 1$ $(f)\ Cilindro: x^2 + y^2 = 4$

6. INTEGRAÇÃO MÚLTIPLA

10. Calcule as seguintes integrais iteradas. Em cada caso esboce a região de integração e inverta a ordem. Compare o grau de dificuldade no cálculo da integral nas duas ordens possíveis:

$(a)\ \int_0^3\int_1^2 (12xy^2 - 8x^3)\,dydx$ $(b)\ \int_0^2\int_0^2 (2xy - y^3)\,dydx$ $(c)\ \int_1^2\int_0^1 (x - 3\log y)\,dxdy$
$(d)\ \int_0^2\int_1^3 |x-2| \text{ sen } y\,dxdy$ $(e)\ \int_o^p\int_{-y}^{y} \text{sen } x\,dxdy$ $(f)\ \int_0^p\int_0^x \cos x^2$
$(g)\ \int_0^1\int_0^{|x|} dydx$ $(h)\ \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} y\,dydx$ $(i)\ \int_o^p\int_0^{\cos y} x \text{ sen } y\,dxdy$
$(j)\ \int_0^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y\,dxdy$ $(k)\ \int_0^2\int_1^{e^x} dydx$ $(l)\ \int_0^9\int_{\sqrt{y}}^{3} \text{sen } x^3\,dxdy$

11. Em cada caso abaixo esboce a região D e calcule a integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dxdy$. Escolha a ordem de integração de modo a simplificar o cálculo da integral iterada:

$(a)\ D: 0 \le x \le 1 e 2x \le y \le 2;\ f = e^{y^2}$ $(b)\ D: x \ge 0 e 1 \le x^2 + y^2 \le 2;\ f = x^2$
$(c)\ D: -1 \le x \le 2 e -\sqrt{4-x^2} \le y \le 4 - x^2;\ f = 1$ $(d)\ D: 0 \le y \le 8 e \sqrt[3]{y} \le x \le 2;\ f = xy$

12. Nos casos a seguir, esboce a região D descrita e calcule a integral dupla $\iint_D f(x,y)\,dA$. Se necessário utilize uma mudança de coordenadas:

(a) D é a região triangular de vértices $(2,9),(2,1)$ e $(-2,1)$; $f = xy^2$

(b) D é a região retangular de vértices $(-1,-1),(2,-1),(2,4)$ e $(-1,4)$; $f = 2x + y$

(c) D é a região delimitada por $8y = x^3,\ y - x = 4\ e\ 4x + y = 9$; $f = x$

(d) D é a região do 1º quadrante delimitada por $x^2 + y^2 = 1$; $f = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

(e) D é a região delimitada por $y^2 = x, x = 0\ e\ y = 1$; $f = \exp(x/y)$

(f) D é a região delimitada por $y = \frac{1}{2}x^2\ e\ y = x$; $f = x(x^2 + y^2)^{-1}$

(g) D é a região do delimitada por $y = x,\ y = 0,\ x = 8\ e\ xy = 16$; $f = 1$

13. Usando coordenadas polares, calcule as seguintes integrais:

$(a)\ \int_0^2 \int_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} x\,dx\,dy$

$(b)\ \int_{-a}^{a} \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \exp(-x^2 - y^2)\,dy\,dx$

$(c)\ \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (x^2 + y)\,dA$

$(d)\ \int_1^2 \int_0^x (x^2 + y^2)^{-1}\,dy\,dx$

$(e)\ \iint\limits_D \sqrt{x^2 + y^2}\,dA,\ D\colon 0 \le x \le 3\ e\ 0 \le y \le x.$

$(f)\ \iint\limits_D (x + y)\,dA,\ D$ é o interior de $x^2 + y^2 = 2y$

14. Usando a mudança de variáveis $u = x + y,\ e\ v = x - y$, calcule a integral dupla $\iint\limits_{|x|+|y|\le p} (x + y)^2\,\mathrm{sen}^2(x - y)\,dA$.

15. Usando a mudança de variáveis do exercício 6.6 calcule $\iint\limits_D \mathrm{sen}\left(\frac{x - y}{x + y}\right) dA$, onde D é a região compacta delimitada pelo trapézio de vértices (1,1), (2,2), (4,0) e (2,0).

16. Usando a mudança de variáveis $u = \frac{1}{2}y\ e\ v = x - 2y$ calcule $\iint\limits_D (\sqrt{x - 2y} + \frac{1}{4}y^2)\,dA$, onde D é a região delimitada pelo triângulo de vértices (0,0), (4,0) e (4,2).

17. Calcule a integral de $f(x, y) = x^2$ na região delimitada pela cardióide $r = 1 - \cos q$.

B. ÁREAS e VOLUMES

18. Por integração dupla calcule a área de um círculo de raio R e a área da elipse de semi-eixos *a* e *b*.

19. Em cada caso abaixo, calcule por integração dupla a área da região plana D delimitada pelas curvas indicadas:

(a) $x = 1, x = 2, y = -x^2\ e\ y = 1/x^2$

(b) $x = 1,\ x = 4,\ y = -x\ e\ y = \sqrt{x}$

(c) $y = x^2\ e\ y = 1/(1 + x^2)$

(d) $y^2 = -x,\ x - y = 4,\ y = -1\ e\ y = 2$

(e) $y = 0,\ x + y = 3a\ e\ y^2 = 4ax,\ a > 0$

(f) $y = e^x,\ y = \mathrm{sen}\,x,\ x = p\ e\ x = -p$

20. Por integração dupla, calcule a área da região D compreendida entre a cardióide $r = a(1 + \operatorname{sen} q)$ e o círculo $r = a$.

21. Calcule a área da região delimitada pelas retas $y = x$ *e* $y = 0$ e pelos círculos $x^2 + y^2 = 2x$ *e* $x^2 + y^2 = 4x$.

22. Calcule a área da região do primeiro quadrante delimitada pelas retas $y = x$, $y = 0$ e $x = 8$, e pela curva $xy = 16$.

23. Usando coordenadas polares, calcule a integral dupla $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2}\, dA$, onde D é a região do plano xy delimitada pelas curvas $y = \sqrt{2x - x^2}$ *e* $y = x$.

24. Calcule o volume do sólido delimitado pelos planos $x = 0, y = 0, z = 0$ *e* $x + y + z = 1$.

25. A base de um sólido é a região do plano xy delimitada pelo disco $x^2 + y^2 \le a^2$. A parte superior é a superfície do parabolóide $az = x^2 + y^2$. Calcule seu volume.

26. Calcule o volume do sólido limitado inferiormente pelo plano xy, nas laterais delimitado pelas superfícies $y = 4 - x^2$ e $y = 3x$ e cuja parte superior jaz no plano $z = x + 4$.

27. Ao calcular o volume de um sólido S abaixo de um parabolóide e acima de uma certa região D do plano xy, obteve-se a seguinte expressão

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\, dxdy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\, dxdy.$$

Indique a região D, exprima vol(S) por uma integral iterada com a ordem invertida e em seguida calcule a integral.

28. Calcule o volume da região comum aos cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ *e* $x^2 + z^2 = a^2$.

29. Um sólido S do primeiro octante tem seu volume dado pela expressão

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - x - y)\, dydx.$$

Esboce graficamente o sólido e calcule o valor do seu volume. Idem para

$$vol(S) = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (1 - x)\, dydx.$$

30. Calcule o volume do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + z^2 = 1$, e pelos planos $y = 0, z = 0,$ *e* $y = x$.

31. Calcule o volume do sólido limitado pelo plano $z = 0$, pelo cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ e pelo cone $x^2 + y^2 = z^2$.

32. Calcule o volume do sólido interior à esfera de centro na origem e raio 5, e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

33. Calcule o volume do sólido interior ao cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$, e exterior ao parabolóide $x^2 + y^2 = z$.

34. Calcule o volume do sólido limitado pelos planos $y = 1$ *e* $z = 0$, pelo parabolóide $x^2 + y^2 = z$ e pelo cilindro $y = x^2$.

35. Verifique que o parabolóide $x^2 + y^2 = z$, divide o cilindro de equação $x^2 + y^2 = 4$, $0 \leq z \leq 4$, em dois sólidos de volumes iguais.

36. Calcule o volume do "pedaço" do elipsóide $4x^2 + 4y^2 + z^2 = 16$ cortado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$.

37. Calcule o volume da maior região interior à esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e ao cilindro circular $x^2 + y^2 = 4y$.

38. Um sólido é limitado pela superfície $x^2 + y^2 = z$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ *e* $x = 3$. Calcule seu volume.

INTEGRAL TRIPLA

O cálculo de integrais triplas se reduz ao cálculo de uma integral dupla seguida de uma integral simples e, dependendo da região de integração, a integral pode ser calculada de forma iterada como três integrais simples. Veja as seguintes situações, quando se deseja calcular $\iiint_\Omega f(x,y,z)dV$:

(a) $\Omega = \{(x,y,z) \in \Re^3; (x,y) \in D \ e \ j(x,y) \leq z \leq y(x,y)\}$.

Neste caso D é a projeção no plano xy da região de integração Ω e

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \iint_D \left[\int_{j(x,y)}^{y(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dA}$$

(b) $\Omega = \{(x,y,z) \in \Re^3; a \leq x \leq b, j(x) \leq y \leq y(x) \ e \ \mathbf{a}(x,y) \leq z \leq \mathbf{b}(x,y)\}$.

Neste caso a integral tripla é calculada como uma integral iterada

$$\boxed{\iiint_\Omega f(x,y,z)dV = \int_a^b \left\{ \int_{j(x)}^{y(x)} \left[\int_{a(x,y)}^{b(x,y)} f(x,y,z)dz \right] dy \right\} dx}$$

Naturalmente, uma mudança na descrição da região Ω acarreta inversões na ordem de integração.

39. Expresse a integral $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)dV$ como uma integral iterada e em seguida calcule o seu valor para $f = xyz$ e Ω dado por:

(a) $\Omega: -1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1,\ 1 \le z \le 2$ $\quad$ (b) $\Omega: -\sqrt{y} \le x \le \sqrt{y}, 0 \le y \le 4,\ 0 \le z \le 4 - y.$

(c) $\Omega: x + z \le y \le x - z, 0 \le x \le z^2, 1 \le z \le 2$ $\quad$ (d) $\Omega: 0 \le z \le x + y, 1 \le y \le x^2, -1 \le x \le 2$

40. Escreva cada uma das integrais abaixo na ordem $dzdydx$:

(a) $\int_0^1\int_2^3\int_4^5 e^{xyz}dxdydz$ $\quad$ (b) $\int_0^1\int_0^y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 \operatorname{sen}(xy)dzdxdy$ $\quad$ (c) $\int_0^1\int_0^{1-x}\int_0^{\sqrt{(z-1)^2-x^2}} x(y+z)dydzdx$

41. Em cada caso a integral iterada representa o volume de uma região S. Descreva S:

(a) $\int_0^1\int_{\sqrt{1-z}}^{\sqrt{4-z}}\int_2^3 dxdydz$ $\quad$ (b) $\int_0^1\int_{z^3}^{\sqrt{z}}\int_0^{4-x} dydxdz$ $\quad$ (c) $\int_0^2\int_{x^2}^{2x}\int_0^{x+y} dzdydx$

(d) $\int_0^1\int_x^{3x}\int_0^{xy} dzdydx$ $\quad$ (e) $\int_1^2\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}\int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} dydxdz$ $\quad$ (f) $\int_1^4\int_{-z}^{z}\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}} dxdydz$

VOLUMES

Nos exercícios (6.57) a (6.64), esboce graficamente o sólido indicado e calcule seu volume por integração tripla:

42. Sólido delimitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $y + z = 4$ e $z = 0.$

43. Sólido delimitado pelos planos $x = 0,\ y = 0,\ x = z$ e pelo cilindro$z = 1 - y^2$.

44. Sólido delimitado pelos cilindros $z = 3x^2$, $z = 4 - x^2$ e pelos planos $y = 0,\ y + z = 6.$

45. Sólido interseção dos parabolóides $z \le 1 - x^2 - y^2$ e $z \ge x^2 + y^2 - 1.$

46. Sólido delimitado pelos planos $z = 0,\ z = 5 + x + y$ e pelos cilindros $y^2 = x$ e $y^2 = 1 - x.$

47. Sólido interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \le 6$ com o parabolóide $z \ge x^2 + y^2$.

48. Sólido delimitado pelo plano xy e pelas superfícies $x^2 + y^2 = 2x$ e $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

49. Em cada caso abaixo calcule o volume do sólido descrito pelas desigualdades:

(a) $0 \le x \le z \le 1 - y^2$ $\quad$ (b) $x^2 + y^2 \le z \le 2x$

(c) $x^2 + y^2 \le z \le 1 - x^2$ $\quad$ (d) $x^2 + 4y^2 \le 4$ e $x + y \le z \le x + y + 1$

MUDANÇA DE COORDENADAS

Consideremos uma transformação $T: \Re^3 \to \Re^3$ com Jacobiano diferente de zero, isto é,

$$T:\begin{cases} x = x(u,v,w) \\ y = y(u,v,w) \\ z = z(u,v,w) \end{cases} \quad com \quad J(T) = \frac{\P\,(x,y,z)}{\P\,(u,v,w)} \neq 0.$$

Seja S* a imagem da região S pela transformação T, como sugere a figura abaixo.Temos a seguinte "fórmula de mudança de variáveis" em integrais triplas:

$$\boxed{\iiint_S f(x,y,z)dxdydz = \iiint_{S^*} f[x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)]\left|\frac{\P\,(x,y,z)}{\P\,(u,v,w)}\right| dudvdw}$$

50. Escreva as fórmulas de mudança de variáveis no caso das coordenadas cilíndricas e coordenadas esféricas.

51. Calcule o volume do elipsóide de equação $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

52. Usando coordenadas cilíndricas, calcule as seguintes integrais:

$(a)\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z\,dV$ $\quad (b)\int_0^2\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\int_0^{x^2+y^2}\sqrt{x^2+y^2}\,dV$ $\quad (c)\iiint_\Omega xydV;\Omega: x^2+y^2\leq 1, 0\leq z\leq 1$

53. Usando coordenadas esféricas, calcule as seguintes integrais:

$(a)\int_{-2}^2\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{8-x^2-y^2}}(x^2+y^2+z^2)dzdydx$ $\qquad (b)\int_0^{\sqrt{2}}\int_y^{\sqrt{4-y^2}}\int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dzdxdy$

54. Usando uma mudança de coordenadas adequada, calcule o volume dos seguintes sólidos:

(a) sólido delimitado pelo parabolóide $x^2+y^2=az$, pelo plano $z=0$ e pelo cilindro $x^2+y^2=2ax$, $a>0$.

(b) sólido delimitado pelas superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2+1)$.

(c) sólido delimitado acima pela esfera $x^2+y^2+z^2=2a^2$ e abaixo pelo parabolóide $az=x^2+y^2$, $a>0$.

(d) sólido interseção da bola $x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1$ com o cone $z^2\geq x^2+y^2$, $z\geq 0$.

(e) sólido delimitado pelo parabolóide $z=-2(x^2+y^2)$ e pelo plano $z=4$.

(f) sólido interior à esfera $4y=x^2+y^2+z^2$ e limitado acima pelo cone $y^2=x^2+z^2$.

(g) sólido interior à esfera $z^2+x^2+y^2=1$ e exterior ao cone $z^2=x^2+y^2$.

(h) calota interseção da bola $x^2+y^2+z^2\leq R^2$ como semi-espaço $z\geq a$, $0<a<R$.

(i) sólido interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ com o cilindro $x^2 + y^2 \leq a^2$.