UFPB - CCEN - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CÁLC. DIFERENCIAL E INTEGRAL II - 98.2

LISTA DE EXERCÍCIOS - INTEGRAIS DUPLAS E TRIPLAS

1. Esboce a região de integração e calcule as integrais:

   (a) $\iint\limits_D (1 + 2x^2 + 2y^2)dxdy$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1,\, y \leq x \leq 2y\}$

   (b) $\iint\limits_D (2x + y)dxdy$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq 1,\, 0 \leq x \leq \sqrt{1 - y^2}\}$

   (c) $\iint\limits_D 2xdxdy$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 2,\, 3x^2 - 6x \leq y \leq 2y - y^2\}$

   (d) $\iint\limits_D rdrd\theta$; $D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2},\, 0 \leq r \leq 2\cos\theta.$

2. Inverta a ordem de integração e calcule as integrais:

   (a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 dydx$ e) $\int_1^e \int_0^{\ln x} y$
   $dydx$

   (b) $\displaystyle\int_0^1\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} dxdy$ f) $\int_0^9 \int_{\sqrt{y}}^3 sen$
   $x^3\ dydx$

   (c) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dydx$ g) $\int_0^\pi \int_0^{\cos y} x$
   $seny\ dydx$

   (d) $\displaystyle\int_1^2\int_{x^2}^{x^3} xy\ dydx$ h)
   $\displaystyle\int_0^2\int_1^{e^x} dydx$

3. Calcule o volume de cada sólido dados abaixo, usando integral dupla. Esboce o sólido.

   (a) sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies $z = 1 - y^2$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ e $x + y = 1$.

   (b) sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies $z = 4 - y^2$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ e $x - y = 0$.

   (c) sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies $z = 1 - x^2$, $x = 1 - y^2$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

   (d) sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies $z = e^{-x^2}$, $y = 0$, $y = x$, $z = 0$ e $x = 1$

(e) sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies $z = 0$, $z = x^2$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$ e $y = 4$.

(f) sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies $z = x + y$ e $x^2 + y^2 = 4$.

(g) sólido limitado pelas superfícies $z = 9 - x^2 - y^2$ e $z = 0$.

(h) sólido limitado pelas superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = 4$.

(i) sólido no primeiro octante limitado pelas superfícies $x = 1 - y^2$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ e $z = 6 - x$.

(j) sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ e exterior ao cilindro $x^2 + y^2 = 9$.

(k) sólido limitado pelas superfícies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $x^2 + y^2 = 2x$, $z = 0$.

(l) sólido limitado pela esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ e interior ao cilindro $x^2 + y^2 = 4y$.

4. Use integral dupla em coordenadas polares para encontrar o volume do sólido limitado pelos gráficos das equações dadas.

(a) $z = xy$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

(b) $z = x^2 + y^2 + 1$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 4$.

(c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 = 25$.

(d) $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 16$, $x^2 + y^2 \geq 4$

(e) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

5. Calcule, usando coordenadas polares, as seguintes integrais:

(a) $\iint\limits_D xy \; dxdy$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq x \leq 1\}$

(b) $\iint\limits_D xy \; dxdy$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1, \, 0 \leq y \leq \sqrt{x - x^2}\}$

(c) $\iint\limits_D xy \; dxdy$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq y, \, x^2 + y^2 \leq R^2\}$

(d) $\iint\limits_D (x + y) dxdy$; $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y, \, 0 \leq x, \, x^2 + y^2 \leq 4\}$

6. Calcule a área da cardióide $r = a(1 + \cos\theta)$.

7. Calcule a área da região limitada pela curva $r = 3\cos 2\theta$.

8. Calcule as integrais:

(a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x \; dzdydx$

(b) $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2 - 9x}} z \; dzdxdy$

(c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{y/2}\int_0^{1/y} sen\ y\ dzdydx$

9. Usando integrais triplas, calcule volume dos seguintes sólidos:

   (a) sólido interseção das superfícies $z \leq 1 - x^2 - y^2$ e $z \geq x^2 + y^2 - 1$.

   (b) sólido interseção das esferas $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ e $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

   (c) sólido limitado pelo parabolóide $z = a(x^2 + y^2)$ e pelo plano $z = b$, onde $a, b > 0$.

   (d) calota esférica interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ com o semi-espaço $z \geq a$, $0 < a < R$.

   (e) sólido interseção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ com o cone $z^2 \geq m^2(x^2 + y^2)$

10. Usando integral tripla, calcule o volume de um cone de raio R e altura H.

11. Usando integral tripla, calcule o volume de uma esfera de raio R.

12. Calcule o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$