UFPB – CCEN – Departamento de Matemática
Exercícios – Cálculo II – 00.1

1) Suponha que, para todo x, $f(3x, x^3) = arctg\, x$.

a) Calcule $f_x(3,1)$ admitindo que $f_y(3,1) = 3$.

b) Determine a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(3, 1, f(3, 1))$.

2) Admita que, para todo x, $4y\, f_x(x,y) - x\, f_y(x,y) = 0$. Prove que f é constante sobre elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

3) Considere a função $F(x,y) = f(\frac{x}{y}, \frac{y}{x})$. Mostre que $x.F_x + y.F_y = 0$.

4) Seja $z = f(x, y)$ uma função diferenciável em um ponto (x, y). Suponhamos que $y = g(x)$, derivável em todo x do domínio da g. Se $f_y(x,y) \neq 0$, mostre que

$$g'(x) = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}$$

5) Considere as funções w = $F(x, y, u, v)$ e w = $G(x, y, u, v)$. Chama-se de jacobiano entre F e G, em relação a u e v, ao determinante

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

Dadas as funções $F(x, y, u, v) = x + y + sen\, uv$ e $G(x, y, u, v) = 3x + 2y + u^2 + v^2$, calcule o jacobiano entre F e G em relação a x e v.

6) Seja $w = f(x, y)$ uma função diferenciável. Suponhamos que $x = r\cos\theta$ e $y = r\, sen\, \theta$. Mostre que

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial \theta}\right)^2$$

7) Se $w = f(x^2 + y^2)$, mostre que $y\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) - x\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) = 0$.

8) Uma função f de duas variáveis é dita *homogênea de grau n* se $f(tx, ty) = t^n f(x,y)$, para todo t tal que (tx, ty) esteja no domínio da f. Mostre que, para tais funções,

$$x f_x(x,y) + y f_y(x,y) = n f(x,y)$$