UFPB – CCEN – Departamento de Matemática
4ª Lista de Exercícios – Cálculo Diferencial e Integral II – 00.1

4. MÁXIMOS e MÍNIMOS

4.1. Encontre e classifique os pontos críticos de cada função dada abaixo:

$(a)\ z = xy$ $\quad (b)\ z = 1 - x^2 - 2y^2$ $\quad (c)\ z = xy^2 + x^2y - xy$

$(d)\ z = x^2 - xy + y^2$ $\quad (e)\ z = x^2 + 2xy + 3y^2 + 4x + 6y$ $\quad (f)\ z = \log(xy) - 2x - 3y$

$(g)\ z = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{3}y^3 - 3x - 4y - 3$ $\quad (h)\ z = x^4 + y^3 + 32x - 9y$ $\quad (i)\ z = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 4xy + y^2$

4.2. Encontre o máximo e o mínimo (absolutos) em D de cada função dada abaixo:

$(a)\ z = xy\ ;\ D\colon 2x^2 + y^2 \le 1$ $\quad (b)\ z = x + y\ ;\ D\colon [-1,1]x[-1,1]$

$(c)\ z = (x^2 + y^2)^{-1}\ ;\ D\colon (x-2)^2 + y^2 \le 1$ $\quad (d)\ z = xe^{-x}\cos y\ ;\ D\colon [-1,1]x[-p\ ,p\ ]$

4.3. Encontre os pontos da curva $x = \cos t\ ,\ y = \operatorname{sen} t\ \ e\ \ z = \operatorname{sen}(t/2)$ mais distantes da origem.

4.4. Encontre o(s) ponto(s) da superfície de equação $z = xy + 2$ mais próximo(s) da origem.

4.5. Encontre a menor distância da origem à curva $y^2 = (x-1)^3$. Porque o método dos multiplicadores de Lagrange não funciona neste caso?

4.6. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange, resolva os seguintes problemas de extremos vinculados:

$(a)\ z = 3x + 4y\ ;\ \ x^2 + y^2 = 1$ $\quad (b) z = \cos^2 x + \cos^2 y; x - y = \frac{p}{4}, 0 \le x \le p$

$(c)\ z = x + y\ ;\ x^{-1} + y^{-1} = 1$ $\quad (d)\ z = xy + yz + xz\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$(e)\ z = x + y + z\ ;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ $\quad (f)\ z = xyz\ ;\ xy + yz + xz = 2\ ,\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$

$(g) z = x^2 + y^2 ; x^4 + y^4 = 1$ $\quad (h)\ z = (x + y + z)^2\ ;\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$

4.7. Calcule a distância mínima do ponto $P_0 = (1{,}0)$ à parábola $y^2 = 4x$.

4.8. Ache a menor e a maior distância da origem à curva de equação $5x^2 + 5y^2 + 6xy = 1$.

4.9. Seja c a curva interseção do elipsóide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 1$ com o plano $x - 4y - z = 0$. Encontre o ponto da curva c mais próximo da origem.

4.10. Encontre 3 números positivos cuja soma seja 5 e seu produto seja o maior possível.

4.11. Prove que: se x,y e z são números reais não negativos, então $\sqrt[3]{xyz} \le \frac{1}{3}(x + y + z)$.

4.12. Encontre o ponto do parabolóide $z = x^2 + y^2$ mais próximo do ponto (3,-6,4).

4.13. Encontre o ponto da elipse $x^2 + 4y^2 = 16$ mais próximo da reta $x - y - 10 = 0$.

4.14. Calcule o maior valor assumido pela função $f(x, y) = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen}(x + y)$ na região compacta R: $0 \le x \le p$; $0 \le y \le p$; $0 \le x + y \le p$.

4.15. Encontre os extremos da função $z = 8x^3 - 3xy + y^3$ no quadrado Q: [0,1]x[0,1].

PROBLEMAS DE MÁXIMOS e MÍNIMOS

4.16. A temperatura T no disco $x^2 + y^2 \le 1$ é dada por $T(x, y) = 2x^2 + y^2 - y$. Em que ponto do disco a temperatura é mais alta e em que ponto ela é mais baixa?

4.17. A temperatura T no ponto P da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ é dada por $T(P) = 100xy^2z$. Em que ponto da esfera a temperatura é máxima? Em que ponto ela é mínima?

4.18. Uma caixa retangular sem tampa deve ter 32 m^3 de volume. Determine suas dimensões de modo que sua área total seja mínima.

4.19. Determine o volume da maior caixa retangular com lados paralelos aos planos coordenados que pode ser colocada dentro do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$.

4.20. Encontre a reta que melhor se ajusta aos dados (1,3), (2,7) e (3,8). Utilize o Método dos Mínimos Quadrados: seja $f(x) = ax + b$ a reta procurada e determine a e b que minimizam a função $E(a, b) = \sum_{i=1}^{3} \left[f(x_i) - y_i \right]^2$. Esta reta é denominada "Regressão Linear".

4.21. De todos os paralelepípedos retângulos com mesmo volume, mostre que o de menor área é o cubo.

4.22. Dentre os triângulos com perímetro p, mostre que o eqüilátero é o que possui área máxima. [sug. a área é $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$,onde $p = 2s = a + b + c$]

4.23. Um paralelepípedo retângulo possui 3 de suas faces nos planos coordenados. Seu vértice oposto a origem está no plano $4x + 3y + z = 36$ e no primeiro octante. Ache esse vértice de modo que o paralelepípedo tenha volume máximo.

4.24. Uma indústria planeja fabricar caixas retangulares de 8 m^3 de volume. Determine as dimensões que minimizem o custo, se o material para a tampa e o fundo custa o dobro do material para os lados.

4.25. Calcule o volume da maior caixa retangular que tem três de seus vértices no primeiro octante sobre os eixos x, y e z e um quarto vértice no plano de equação $2x + 3y + 4z = 12$.