Universidade Federal da Paraíba

Centro de Ciências Exatas e da Natureza

Departamento de Matemática

3ª Lista de Exercícios – Cálculo Dif. e Integral II – 00.1

2. FUNÇÕES, LIMITES e CONTINUIDADE

2.1. Esboce os subconjuntos do plano cartesiano $\Re^2$ dados abaixo, fazendo uma análise topológica dos mesmos. Determine a fronteira e o conjunto dos pontos de acumulação de cada um deles:

$(a)\, A = \{(x,y); (x^2 + y^2 - 1)y < 0\}$ $\quad (b)\, B = [0,1]\times[1,2]$ $\quad (c)\, C = \{(x,y); x > 0 \text{ e } y > 0\}$

$(d)\, D = \{(x,y); x \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 \leq 1\}$ $\quad (e)\, E = \Re \times [1,2]$ $\quad (f)\, F = \{(x,y); |x| + |y| \leq 1\}$

2.2. Encontre os subconjuntos nos quais as expressões abaixo definem funções:

$(a)\, f(x,y) = \dfrac{x^4 y^3}{x^2 + y^4}$ $\quad (b)\, f(x,y) = \dfrac{xy(1+x^2) + tg\, x}{\sqrt{x + y^2}}$ $\quad (c)\, f(x,y) = \log(1 - 4x^2 - y^2/9)$

$(d)\, f(x,y) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{y^2 - 1}}$ $\quad (e)\, g(x,y,z) = \sqrt{1 - x^2 + y - z^2}$ $\quad (f)\, f(x,y) = \sqrt{\log(x^2 + y^2) - 3}$

$(g)\, f(x,y) = \dfrac{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$ $\quad (h)\, h(x,y,z,u) = xu - \sqrt{yz}$ $\quad (i)\, f(x,y) = x^2 y + \sqrt{y^2 + 4} - 1/x$

2.3. Para cada função dada abaixo, esboce algumas de suas curvas de nível de modo a ter uma idéia do gráfico da função:

$(a)\, z = x^2 + y^2$ $\quad (b)\, z = \log(1 + x^2 + y^2)$ $\quad (c)\, z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

$(d)\, z = xy$ $\quad (e)\, z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\quad (f)\, z = \sqrt{1 - x^2/4 - y^2/9}$

$(g)\, z = 8 - x^2 - 2y$ $\quad (h)\, z = (x^2 + y^2)^{-1}$ $\quad (i)\, z = x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2}$

2.4. Esboce a curva de nível da função $z = 2y - 4x^3$ que passa pelo ponto (1,2).

2.5. Identifique as superfícies de nível da função $w = x^2 + y^2 + z^2$, correspondentes $w = 0, 1, 2, 3$.

2.6. Identifique e esboce a superfície de nível da função $j(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, que passa pelo ponto (1,1,1).

2.7. Para a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2 + y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$, calcule os limites:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h,1) - f(1,1)}{h} \text{ e } \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h}.$$

2.8. Verifique se as funções abaixo têm limite na origem:

$(a)\, z=\dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ $(b)\, z=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ $(c)\, z=\dfrac{4xy}{x^2+y^2}$ $(d)\, z=\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{1/2}}$ $(e)\, z=\dfrac{xy}{2x^2+3y^2}$

$(f)\, z=\dfrac{xy^2}{x^2+y^4}$ $(g)\, z=\dfrac{x^6}{(x^3+y^2)^2}$ $(h)\, z=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y}$ $(i)\, z=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$ $(j)\, z=\dfrac{x^4+3xy^2}{x^2+y^2}$

2.9. Mostre que a função de três variáveis $f(x,y,z)=\dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$ não tem limite na origem.

2.10. Calcule os seguintes limites:

$(a)\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \log(xy-1)$ $(b)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{(1-y^2)\operatorname{sen} x}{x}$ $(c)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$

$(d)\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sen} xy}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}$ $(e)\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 2}} arctg(y/x)$ $(f)\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 4}} y\sqrt{x^2+2y}$

2.11. Mostre que:

(a) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{1-\cos\sqrt{xy}}{x}=0,$ (b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{\operatorname{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=2$ (c) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{|x|+|y|}{x^2+y^2}=+\infty$

2.12. Para a função $f(x,y)=\dfrac{3x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$, calcule o limite na origem ao longo dos caminhos: eixo x, reta $y=x$, curva $y=-x^4$. O que você pode concluir sobre o limite da função na origem?

2.13. Verifique se a função dada é contínua no ponto indicado:

$(a)\, f(x,y)=exp(-xy)\log(x^2-2y+7);\, P_0=(0{,}0)$ $(b)\, f(x,y)=\sqrt{25-x^2-y^2};\, P_0=(-3{,}4)$

$(c)\, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{y-2x}, & se\ y\neq 2x\\ 1, & se\ y=2x\end{cases};\, P_0=(1{,}2)$ $(d)\, f(x,y,z)=\dfrac{xz}{x^2+y^2+z^2};\, P_0=(0{,}0{,}0).$

2.15. Discuta a continuidade das seguintes funções:

$(a)\, f(x,y,z)=\begin{cases}x^2+y^2+z^2, se\, x^2+y^2+z^2\le 1\\ 0, se\, x^2+y^2+z^2>1\end{cases}$ $(b)\, g(x,y)=\begin{cases}4x^2+9y^2, se\, 4x^2+9y^2\le 1\\ (4x^2+9y^2)^{-1}, se\, 4x^2+9y^2>1\end{cases}$

$(c)\, h(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{x+y}, se\, x+y\neq 0\\ z, se\, x+y=0\end{cases}$ $(d)\, f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x-y}, se\, x\neq y\\ x-y, se\, x=y\end{cases}$

$(e)\, f(x,y,z)=\begin{cases}\dfrac{xz-y^2}{x^2+y^2+z^2}, se\,(x,y,z)\neq(0{,}0{,}0)\\ 0, se\,(x,y,z)=(0{,}0{,}0)\end{cases}$ $(f)\, f(x,y)=\begin{cases}1, se\, x^2+y^2>4\\ 0, se\, x^2+y^2\le 4\end{cases}$

2.16. Considere *g* e *h* funções definidas em $\Re^2$ por

$$g(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, se\,(x,\ y) \neq (0,0) \\ 1, se\,(x,\ y) = (0,0) \end{cases} \qquad h(x,\ y) = \begin{cases} \dfrac{x\ y}{x^2+y^2}, se\,(x,\ y) \neq (0,0) \\ 1, se\,(x,\ y) = (0,0) \end{cases}.$$

Mostre que (0,0) é uma descontinuidade removível da função *g* e essencial da função *h*.

2.17. Mostre que a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen}(x^2+y^2)}{1-\cos(x^2+y^2)}, se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0,\ se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é descontínua na origem. É esta descontinuidade essencial ou removível?

2.18. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)},\ se\ (x,y) \neq (0,0)\ \ e\ \ f(0,0) = 0.$ Defina a função g pela expressão $g(x,y) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h,y) - f(x,y)}{h}$. Calcule $g(0,0),\ g(1,0)\ e\ g(0,1).$

2.19. Mostre que a função definida em $\Re^2$ por $f(x,y) = \begin{cases} \exp(-\dfrac{1}{x^2+y^2}), se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0,\ se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$ é contínua em todos os pontos do $\Re^2$. Calcule os limites $\lim\limits_{h\to o} \dfrac{f(h,0)}{h}\ e\ \lim\limits_{h\to o} \dfrac{f(0,h)}{h}$.

2.20. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^3},\ se\ (x,y) \neq (0,0)\ e\ f(0,0) = 1.$

(a) Calcule o limite de *f* na origem, ao longo de um feixe de retas passando pela origem;

(b) Calcule o limite de *f* na origem, ao longo do caminho $y = -x^{\frac{2}{3}}e^x$;

(c) Calcule o limite de *f* na origem, ao longo do caminho $r = \cos^2 q\ , -\dfrac{p}{2} \leq q\ \leq 0$;

(d) Estude a continuidade de f .

3. DERIVADAS, DIFERENCIABILIDADE e APLICAÇÕES

A. DERIVADAS PARCIAIS

3.1. Para cada função dada abaixo, calcule as derivadas $\dfrac{\P z}{\P x}, \dfrac{\P z}{\P y}\ e\ \dfrac{\P^2 z}{\P x \P y}$:

$(a)\ z = 3x^2 - 5xy^3 - \text{sen}(xy)$ $\quad (b)\ z = (x-\sqrt{y})(x^2+y^2)$ $\quad (c)\ \sqrt[3]{xy - x^2y^2 + y^4}$

$(d)\ z = arctg(\dfrac{y}{x})$ $\quad (e)\ z = \dfrac{x}{y}\exp(x^2+y^2)$ $\quad (f)\ z = \dfrac{1}{x}\log(1-x^2-y^2)$

3.2. Para cada função abaixo, calcule a derivada parcial indicada:

$(a)\ f(x,y) = x\,\text{arcsen}(x-y);\ f_x(1,1/2)$ $\quad (b)\ f(x,y) = e^{xy}\sec(x/y);\ f_y(3,4)$

$(c)\ f(x,y) = arctg(\dfrac{x+y}{x});\ f_{xy}(1,1)\ e\ f_{yx}(1,1)$ $\quad (d)\ f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{1+x^2+y^2};\ f_x(0,0)\ e\ f_y(0,0)$

3.3. Para a função $f(x,y) = \exp(\dfrac{-1}{x^2+y^2}),\ se\ (x,y) \neq (0,0),\ e\ f(0,0) = 0.$, calcule, caso existam, as derivadas $f_x(0,0), f_y(0,0), f_{xy}(0,0)\ \ e\ \ f_{yx}(0,0)$

3.4. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2 - y^2)}{x^2 + y^2}, \; se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \; se\ (x,y) = (0,0). \end{cases}$

(a) Mostre que $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$;

(b) Estude a continuidade das derivadas $f_x \; e \; f_y$ na origem.

3.5. Mostre que as derivadas parciais de 1ª ordem da função $z = \sqrt{|xy|}$ embora existam em todo ponto (x,y) do $\Re^2$, com $x \neq 0, \; y \neq 0$, não são contínuas na origem.

3.6. Considere três funções reais $\varphi(t), \xi(t) \; e \; \psi(t)$, deriváveis até 2ª ordem e satisfazendo às condições $\varphi''(x) + \lambda^2 \varphi(x) = 0 \; e \; \psi''(t) + c^2 \lambda^2 \psi(t) = 0$, sendo λ constante. Mostre que as funções $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t) \; e \; v(x,t) = \xi(x - ct)$ satisfazem a "equação linear de ondas" $w_{tt} - c^2 w_{xx} = 0$.

3.7. Mostre que a função $u(x,t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}} \exp(-\dfrac{x^2}{4kt}), \; t > 0, \; k = cte$, satisfaz a "equação de transmissão de calor $w_t - c^2 w_{xx} = 0$

3.8. O "Operador Laplaciano" Δ em $\Re^2$ é definido por $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$. Mostre que as funções $u(x,y) = arctg(y/x) \; e \; u(x,y) = e^x \cos y$ satisfazem a equação de Laplace $\Delta u = 0$.

3.9. Determine condições sobre as constantes A, B, C, D, E, e F para que a função $u(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ satisfaça a equação de Laplace.

3.10. Sejam $u(x,y) \; e \; v(x,y)$ funções com derivadas parciais contínuas até 2ª ordem e satisfazendo as equações $u_x = v_y \; e \; u_y = -v_x$. Mostre que u e v satisfazem a equação de Laplace.

3.11. Mostre que $w = x^2 y + y^2 z + z^2 x$ satisfaz a equação $\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = (x + y + z)^2$.

B. REGRA DA CADEIA

3.12. Considere as funções $f(x,y) = \int_x^y \log(1 + \operatorname{sen}^2 t)dt \; e \; g(x,y) = \int_x^{x^2 y} \exp(\cos t)dt$. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a Regra da Cadeia, calcule as derivadas de segunda ordem f_{xy} e g_{xy}.

3.13. Se $f(x,y) = \operatorname{sen}(\dfrac{x}{y}) + \log(\dfrac{y}{x})$, mostre que $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0.$

3.14. Seja $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x^2 + 2xy + y^2}}{x + y}$ definida no aberto $D = \{(x,y) \in \Re^2; \; x + y \neq 0\}$. Mostre que $f_x \; e \; f_y$ são identicamente nulas em D, mas f não é constante.

3.15. Considere uma função real derivável $f: \Re \to \Re$ e a partir dela defina as seguintes funções $\varphi(x,y) = f(x - y) \; e \; \psi(x,y) = f(xy)$. Mostre que as funções $\varphi \; e \; \psi$ satisfazem $\varphi_x + \varphi_y = 0$ e $x\psi_x - y\psi_y = 0.$

3.16. Calcule $\dfrac{dz}{dt}$ nos seguintes casos:

$(a)\; z = ye^x + xe^y; \; x = t \; e \; y = \operatorname{sen} t$

$(b)\; z = \sqrt{x^2 + y^2}; \; x = tg(1 + t) \; e \; y = \cos t$

$(c)\ z = \log(x^2 + y^2 + 1);\ x = \log t\ e\ y = e^t$ $\qquad (d)\ z = u^2v + w^2v + uvw^3;\ u = t^2,\ v = t\ e\, w =$

3.17. Em cada caso abaixo, calcule as derivadas $w_x\ e\ w_y$:

$(a)\ w = u^2 + v^3;\ u = 3x - y\ e\ v = x + 2y$ $\qquad (b)\ w = \log(t^2 + s^2);\ t = x^3 + y^2\ e\ s = 2x + 3xy$
$(c)\ w = \cosh(3u + 7v);\ u = x^2y\ e\ v = \sqrt{xy}$ $\qquad (d)\ w = \cos(x + h);\ x = x + y\ e\ h = \sqrt{xy}.$

3.18. Para a função $f(x,y) = \int_x^y \exp(t^2)dt$ e admitindo que $x = rs^4$ e $y = r^4 s$, calcule as derivadas $\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial r}\ e\ \frac{\partial^2 f}{\partial r \partial s}$.

3.19. Se $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}\ e\ r = \|\vec{r}\|$, mostre que $z = f(r)$ satisfaz a equação $\Delta z = z_{rr} + \frac{1}{r} z_r$, onde a função real f é suposta duas vêzes derivável.

3.20. Admitindo a existência e continuidade das derivadas envolvidas e considerando $w = f(u)\ e\ u = g(x,y)$, mostre que $\Delta w = f''(u)[g_x^2 + g_y^2]\, f'(u)\Delta g.$

3.21. Admitindo a continuidade das derivadas parciais de primeira ordem das funções u e v e supondo válida a relação $e^u + u^2 + uv = 0$, prove que

$$\frac{\partial u}{\partial x} e^u + 2u\frac{\partial u}{\partial x} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

C. DIFERENCIABILIDADE

3.22. Considere a função $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3x^2y}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

(*a*) Prove que f é contínua na origem;

(*b*) Prove que as derivadas parciais $f_x\ e\ f_y$ existem na origem, mas aí estas funções não são contínuas;

(*c*) Verifique que f não é diferenciável na origem. Por que isto não contradiz o Lema Fundamental?

3.23. Discuta a veracidade das seguintes afirmações:

(*a*) Toda função diferenciável possui derivadas parciais de 1ª ordem contínuas;
(*b*) Toda função diferenciável é contínua;
(*c*) Se uma função de duas variáveis possui derivadas parciais de primeira ordem, então ela é contínua.

3.24. Usando o Lema Fundamental, verifique que as funções dadas a seguir são diferenciáveis nos domínios indicados:

$(a)\ z = x^2y^4;\ D = \Re^2$ $\qquad (b)\ z = \log(x^2 + y^2);\ D = \Re^2 \setminus \{(0,0)\}$

$(c)\ z = \dfrac{xy}{x^2+y^2};\ D = \Re^2 \setminus \{(0,0)\}$ $\qquad (d)\ z = \dfrac{e^{xy}}{x - y};\ D = \{(x,y) \in \Re^2; x \neq y\}$

3.25. Estude a diferenciabilidade da função dada no ponto indicado:

$(a)\ f(x,y) = xe^{-y}:\ P_0 = (1,0)$ $\qquad (b)\ f(x,y) = |xy^2|;\ P_0 = (0,1)$

$(c)\ f(x,y) = \sqrt{|y|}\cos x;\ P_0 = (0,0)$ $\qquad (d)\ f(x,y) = \sqrt{|x|(1+y^2)};\ P_0 = (x,y)$

$(e)\ f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2};\ P_0 = (0,0)$ $\qquad (f)\ f(x,y,z) = |xyz|;\ P_0 = (1,1,1)$

$(g)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3xy}{x^2+y^2} \\ 0\ se\ (x,y) = (0,0) \end{cases};\ P_0 = (1,2)$ $\qquad (h)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{xy}, se\ x \neq 0\ e\ y \neq 0 \\ 1,\ se\ x = 0\ ou\ y = 0 \end{cases};\ P_0 = (0,0)$

3.26. Calcule a diferencial das seguintes funções:

$(a)\ f(x,y) = 5x^3 + 4x^2y - 2y^3$ $\qquad$ $(b)\ f(x,y,z) = e^x yz$

$(c)\ f(x,y) = x \operatorname{sen} \dfrac{y}{x^2+1}$ $\qquad$ $(d)\ f(x,y) = arctg(\dfrac{y}{x})$

3.27. Seja $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$, $se\ (x,y,z) \neq (0,0,0)\ e\ f(0,0,0) = 0$. Verifique que as derivadas parciais de primeira ordem de *f* embora existam na origem, *f* não é aí diferenciável.

3.28. Se *f* é uma função diferenciável de duas variáveis e $z = f(x-y, y-x)$, mostre que $z_x + z_y = 0$.

D. APLICAÇÕES

3.29. Encontre as equações paramétricas da reta tangente à curva dada, no ponto indicado:

$(a) \left| \begin{array}{l} 3x - 5y - z + 7 = 0 \\ y = 2 \end{array} \right. \quad P_0(1,2,0)$ $\qquad$ $(b) \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x = 1 \end{array} \right. \quad P_0(1,3,2)$

$(c) \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x = 1 \end{array} \right. \quad P_0(1,1,\sqrt{2})$ $\qquad$ $(d) \left| \begin{array}{l} z = 2xy(x^2+y^2)^{-1} \\ y = 4 \end{array} \right. \quad P_0(3,4,\tfrac{24}{25})$

3.30. Uma função diferenciável $z = f(x,y)$ satisfaz as condições: $f(1,2) = 3$, $f_x(1,2) = 5$ e $f_y(1,2) = 8$. Encontre valores aproximados para $f(1.1, 1.8)$, $f(1.3, 1.8)$.

3.31. Usando diferencial, calcule o valor aproximado de $\operatorname{sen}[1.99 \log(1.03)]$ e $\sqrt{4.02} + \sqrt[3]{8.03}$.

3.32. Um tanque cilíndrico metálico tem altura de 1,2 m e raio de 80 cm em suas dimensões internas. Se a espessura das paredes é de 5 mm, calcular a quantidade aproximada de metal usada na fabricação do tanque. [resp. 50.265,6 cm^3 com ero da ordem $23x10^{-6}$]

3.33. Dois lados de uma área triangular medem *x=200* m e *y=220* m, com possíveis erros de 10 cm. O ângulo entre eles é de 60^0, com possível de 1^0. Calcule o erro aproximado da área triangular [resp. *210,15 m²*]

3.34. Um observador vê o topo de uma torre sob um ângulo de elevação de 30^0, com um possível erro de $10'$. Sua distância da torre é de 300 m, com um possível erro de 10 cm. Qual a altura aproximada da torre e seu possível erro? [resp. $h = \dfrac{300}{\sqrt{3}} m$ e o erro 1,2756 m. Usar $10' = 0{,}003$rd]

3.35. As dimensões de uma caixa retangular são 5m, 6m e 8m. Se cada dimensão aumenta de 0,01m, qual é aproximadamente o volume resultante?

E. DERIVADA DIRECIONAL e GRADIENTE

3.36. Calcule a derivada direcional da função $z = f(x,y)$ no ponto P_0, na direção indicada:

$(a)\ z = x^3 + 5x^2y;\ P_0 = (2,1)$ na direção da reta $y = x$;

$(b)\ z = ye^{xy};\ P_0 = (0,0)$ na direção do vetor $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$.

$(c)\ z = x^2 - y^2;\ P_0 = (2,3)$ na direção tangente à curva $2x + 5y^2 = 15$ em $(0,\sqrt{3})$.

3.37. Calcule $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ nos seguintes casos:

$(a)\ f(x,y,z) = e^{-y} \operatorname{sen} x + \tfrac{1}{3} e^{-3y} \operatorname{sen} 3x + z^2;\ P_0 = (\tfrac{\pi}{3},0,1)\ e\ \vec{u} = -\tfrac{1}{2}\vec{i} + \tfrac{\sqrt{2}}{2}\vec{j} + \tfrac{1}{2}\vec{k}$.

$(b)\ f(x,y,z) = x^2y + 3yz^2;\ P_0 = 1,-1,1)\ e\ \vec{u} = \tfrac{1}{3}\vec{i} - \dfrac{2}{3}\vec{j} + \dfrac{2}{3}\vec{k}$.

$(c)\ f(x,y,z) = \log(x^2 + y^2 + z^2);\ P_0 = (1,1,1)\ e\ \vec{u} = \tfrac{-2}{3}\vec{i} + \tfrac{1}{3}\vec{j} + \tfrac{2}{3}\vec{k}$.

3.38. Calcule o valor máximo da derivada direcional da função, no ponto indicado:

$$(a)\ w=(x^2+y^2+z^2)^{-1};\ P_0=(1,2,-3). \qquad (b)\ w=e^x\cos(yz);\ P_0=(1,0,p).$$

3.39. Seja $z=f(x,y)$ uma função diferenciável em cada ponto do círculo $x^2+y^2=1$. Mostre que a derivada direcional de *f* no ponto (*x*,*y*) na direção da tangente ao círculo é $-yf_x+xf_y$.

3.40. Encontre o plano tangente e a reta normal à superfície dada, no ponto indicado:

$$(a)\ z=x^2-y^2\ ;\ P_0=(1,1,0) \qquad (b)\ x^2+2y^2+3z^2=6\ ;\ P_0=(1,1,1)$$
$$(c)\ z=x\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ P_0=(3,-4,15) \qquad (d)\ z=\sqrt{9-x^2-y^2}\ ;\ P_0=(-1,2,2)$$

3.41. Seja c a curva no espaço descrita pelas equações $x=\operatorname{sen} t,\ y=\operatorname{sen} t,\ z=\cos 2t$.

(a) Determine a reta tangente e o plano normal à curva c no ponto correspondente a $t=\frac{p}{4}$.

(b) Mostre que a curva c está contida na superfície de equação $x^2+y^2+z=1$.

3.42. Determine em cada caso ∇f e verifique diretamente que este vetor é normal às curvas ou superfícies de nível:

$$(a)\ f(x,y)=x^2+y^2 \qquad (b)\ f(x,y,z)=2x^2+y^2-xz.$$

3.43. Seja $f(x,y,z)=3x+5y+2z$ e denote por $\vec{v}$ o campo de vetores normais exteriores à esfera de equação $x^2+y^2+z^2=R^2$. Calcule a derivada direcional $D_{\vec{v}}f(x,y,z)$.

3.44. Calcule a derivada direcional no ponto $P_0=(3,4,5)$ da função $w=x^2+y^2+z^2$, na direção da tangente à curva $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=0 \\ 2x^2+2y^2-z^2=25 \end{array}\right.$ no ponto considerado.

3.45. Considere a função $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}\ se\ (x,y)\neq(0,0)\ e\ f(0,0)=0$. Mostre que a função *f* tem derivada direcional na origem em qualquer direção, mas não é aí diferenciável.

3.46. Admitindo as operações possíveis e considerando l constante, prove as seguintes regras do cálculo:

$$(a)\nabla(af+g)=a\nabla f+\nabla g, \qquad (b)\ \nabla(fg)=f\nabla g+g\nabla f \qquad (c)\nabla(f/g)=[1/g^2](g\nabla f-f\nabla g).$$

3.47. Seja $\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ o vetor posição do ponto $P=(x,y,z)$ e denote por *r* sua norma. Dada uma função real derivável $f(t)$, mostre que $\nabla f(r)=f'(r)\dfrac{\vec{r}}{r}$. Como conseqüência calcule $\nabla(r),\nabla(\frac{1}{r})\ e\ \nabla(\log r)$

3.48. Sejam $0<a<1/2\ e\ f(x,y)=(xy)^a$. Mostre que $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$ e que *f* não possui derivada em qualquer outra direção, na origem.

3.49. Encontre a reta tangente a curva dada no ponto indicado:

$$(a)\left|\begin{array}{l} 3x^2+y^2+z-4=0 \\ x^2-y^2-z^2+12=0 \end{array}\right.;\ P_0=(1,2,-3) \qquad (b)\left|\begin{array}{l} 3xy+2yz+6=0 \\ x^2-2xz+y^2z-1=0 \end{array}\right.;\ P_0=(1,-2,0)$$

3.50. Calcule a derivada no ponto $P_0=(1,2,3)$ da função $w=2x^2-y^2+z^2$, na direção da reta que passa pelos pontos $A=(1,2,1)\ e\ B=(3,5,0)$.

3.51. Considere as funções diferenciáveis $f(x,y)$ e $g(x,y)$ tais que $f_x = g_y$ e $f_y = -g_x$ e denote por $\nabla_\alpha f$ a derivada direcional de f na direção do vetor $\cos\alpha\,\vec{i} + \operatorname{sen}\alpha\,\vec{j}$. Prove que $\nabla_\alpha f = \nabla_{\alpha+\frac{\pi}{2}} g$ e $\nabla_{\alpha+\beta} f = \cos\beta\,\nabla_\alpha f + \operatorname{sen}\beta\,\nabla_{\alpha+\frac{\pi}{2}} f$.

3.52. Seja $f:\Re \to \Re$ derivável com $f'(t) \neq 0$, $\forall t$. Se $g(x,y) = f(x^2 + y^2)$, mostre que a derivada direcional $D_{\vec{v}}\,g(x,y)$ será máxima quando $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

3.53. Se $f:\Re \to \Re$ é uma função derivável, mostre que os planos tangentes à superfície de equação $z = yf(y/x)$ passam todos pela origem.

3.54. Encontre o plano tangente à superfície $z = 2x^2 + y^2 - 3xy$ que é paralelo ao plano de equação $10x - 7y - 2z + 5 = 0$.