TÓPICOS ESPECIAIS DE MATEMÁTICA APLICADA (COMPUTAÇÃO GRÁFICA) – EXERCÍCIOS

20 de setembro de 2001

1) Escreva as matrizes das projeções axonométricas nas direções dos eixos y e z.

2) Escreva as matrizes das projeções oblíquas nos planos $y = 0$ e $z = 0$ na direção do vetor $\vec{v} = (a, b, c)$.

3) Descreva o que você usaria para mostrar na tela o cubo cujos vértices, em coordenadas homogêneas, são dados pelas linhas da matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

girando "continuamente" em torno do eixo z.

4) Seja $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ um vetor qualquer no $\mathbb{R}^3$. Este exercício tem como objetivo a determinação da matriz da transformação que gira $\vec{n}$ de modo que ele fique paralelo ao vetor $\vec{k}$ (eixo z).

a) Desenhe uma vista "de perfil" (ou seja, uma projeção ortográfica na direção do eixo x) de $\vec{n}$, na qual apareçam apenas a projeção $\vec{u}$ de $\vec{n}$ e os eixos y e z (veja figura 1).

b) Calcule o comprimento do vetor $\vec{u}$ e o cosseno e o seno do ângulo θ_1 que $\vec{u}$ forma com o eixo z.

c) Verifique que a matriz de rotação R_1 de um ângulo θ_1 em torno do eixo x é:

$$[R_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{n_3}{\sqrt{n_2^2+n_3^2}} & \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2+n_3^2}} & 0 \\ 0 & \frac{-n_2}{\sqrt{n_2^2+n_3^2}} & \frac{n_3}{\sqrt{n_2^2+n_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

d) Seja Q o ponto do plano xOz obtido pela rotação de um ângulo θ_1 em torno do eixo x do ponto (n_1, n_2, n_3). Verifique que as coordenadas de Q são $(n_1, 0, \sqrt{n_2^2 + n_3^2})$.

e) Calcule o comprimento do vetor $\overrightarrow{OQ}$ e o cosseno e o seno do ângulo θ_2 que $\overrightarrow{OQ}$ forma com $\vec{k}$.

f) Verifique que a matriz de rotação R_2 de um ângulo $-\theta_2$ em torno do eixo y (veja figura 2) é

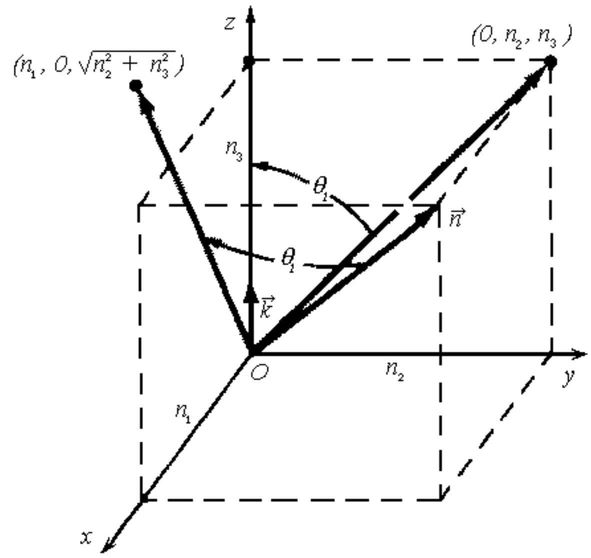

Figura 1: Exercício 4-a

dada por:

$$[R_2] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{n_2^2+n_3^2}}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} & 0 & \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{-n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} & 0 & \frac{\sqrt{n_2^2+n_3^2}}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

g) Verifique que girando Q de um ângulo $-\theta_2$ em torno do eixo y obtemos o ponto $S = (0, 0, \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2})$.

h) Sejam $\lambda = \sqrt{n_2^2 + n_3^2}$ e $\rho = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$. Mostre que a transformação que leva o vetor $\vec{n}$ a ficar paralelo ao vetor $\vec{k}$ é dada pela matriz:

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\rho} & 0 & \frac{n_1}{\rho} & 0 \\ \frac{-n_1 n_2}{\lambda\rho} & \frac{n_3}{\lambda} & \frac{n_2}{\rho} & 0 \\ \frac{-n_1 n_3}{\lambda\rho} & \frac{-n_2}{\lambda} & \frac{n_3}{\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Mostre que $T^{-1} = T^t$ (Sugestão: escreva T como produto de R_1 e R_2 e lembre-se que para matrizes quadradas A e B tem-se $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ e $(AB)^t = B^t A^t$. Além disso, use o fato de que a inversa das rotações em torno dos eixos x, y ou z são iguais às respectivas transpostas).

5) Um ponto Q é obtido girando-se o ponto $P = (a, b, c)$ de um ângulo θ em torno da reta de equação

$$\begin{cases} x = x_0 + n_1 t \\ y = y_0 + n_2 t \\ z = z_0 + n_3 t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Determine as coordenadas de Q. (Sugestão: use o exercício 4 e deixe os cálculos indicados).

6) Determine a transformação que leva um vetor $\vec{n}$ a ficar paralelo a um vetor $\vec{v}$. (Sugestão: use o exercício 4 e deixe os cálculos indicados).

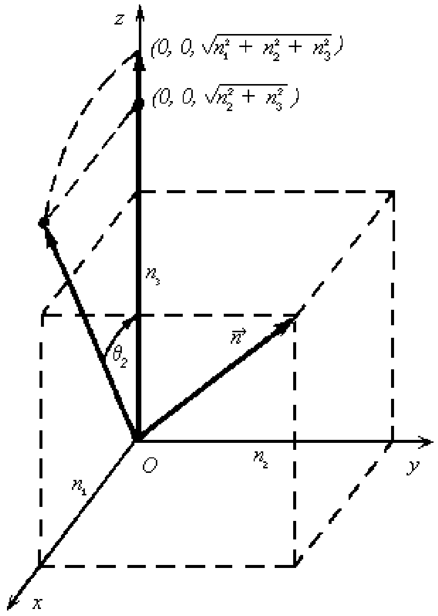

Figura 2: Exercício 4-b

7) Seja $T(a, b, c)$ a translação de a, b, c unidades nas direções dos eixos x, y, z respectivamente. Mostre que

$$T(a, b, c)T(d, e, f) = T(a + d, b + e, c + f).$$

8) Mostre que uma reflexão 2D com relação ao ao eixo x seguida de uma reflexão 2D com relação à reta $y = -x$ é equivalente a uma rotação "pura" em torno da origem.

9) Dados os vértices de um polígono plano $A(1, 1)$, $B(3, 1)$, $C(4, 2)$ e $D(2, 3)$, determine a matriz 3×3 da transformação que (simultaneamente)

- reflete com relação à reta $x = 0$
- e translada de -1 unidade em ambas as direções x e y
- e gira em torno da origem de 180^o.

Determine os vértices do polígono $A'B'C'D'$ após esta transformação. Desenhe os polígonos $ABCD$ e $A'B'C'D'$.

10) O quadrado $ABCD$, onde $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(1, 1)$, $D(1, 0)$, é transformado por uma T linear no paralelogramo A'B'C'D' cujos vértices são $A'(0, 0)$, $B'(2, 3)$, $C'(8, 4)$ e $D'(6, 1)$. Determine a matriz de T.

11) Se no exercício anterior tivéssemos $B'(1, 5)$, o problema teria solução?

12) Determine a matriz da transformação 2D que gira de um ângulo ϕ em torno de um ponto (a, b).

13) a) Uma transformação linear sempre transforma circunferências em circunferências?
b) Dê exemplo de transformações 2D que sempre transformam circunferências em circunferências.

14) Se fosse usada a *notação pós-fixada* (Ex.: $T \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}$) ao invés da *notação*

pré-fixada (Ex.: $T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$) como ficariam as matrizes de rotação ou translação? Que propriedade das operações com matrizes justifica sua resposta?

15) Seja θ o ângulo que a reta L determina no eixo x (desse modo, a inclinação de L é dada por $m = \operatorname{tg}\theta$). Supondo que L intercepte o eixo y no ponto $(0, b)$, mostre que a matriz da transformação 2D T que reflete com relação a L é dada por

$$[T] = \begin{bmatrix} \frac{1-m^2}{1+m^2} & \frac{2m}{1+m^2} & \frac{-2bm}{1+m^2} \\ \frac{2m}{1+m^2} & \frac{-1+m^2}{1+m^2} & \frac{2b}{1+m^2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

16) Determine a matriz da transformação 2D que amplia 2 vezes o triângulo cujos vértices são $A(0,0)$, $B(1,1)$ e $C(5,2)$ mantendo fixo o vértice C. Determine os vértices do triângulo ampliado.

17) Um **cisalhamento** (*shearing*) 2D é uma transformação linear cuja matriz é da forma $\begin{bmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{bmatrix}$. Considere o quadrado de vértices $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$ e $D(1,0)$. Faça 3 gráficos ilustrando a aplicação em separado dos cisalhamentos $R(x,y) = (x, 2x+y)$, $S(x,y) = (x+3y, y)$ e $T(x,y) = (x+3y, 2x+y)$ no quadrado $ABCD$.

18) a) Determine a transformação projetiva que leva o quadrado de vértices $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,1)$ e $D(1,0)$ em um quadrilátero qualquer.

b) Determine a transformação projetiva que leva um quadrilátero qualquer em um quadrilátero qualquer.

19) Interpretando o ponto $P = (x,y) \in \mathbb{R}^2$ como sendo o número complexo $x + yi$, através de uma multiplicação de números complexos obtenha as coordenadas de P' que correponda à rotação de P de θ radianos em torno de $O = (0,0)$.

20) Sabendo que o conjunto dos quatérnios $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk \mid a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R}\}$ é isomorfo ao conjunto das matrizes

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{bmatrix} \mid a,\, b,\, c,\, d \in \mathbb{R} \right\},$$

(soma e produto usuais) calcule o inverso multiplicativo de um quatérnio $a + bi + cj + dk$ através do cálculo da inversa de uma matriz de M.
Sugestão: o cálculo da inversa de uma matriz do tipo mencionado acima pode ser facilmente feito se for efetuado o produto da matriz pela sua transposta.

21) Usando quatérnios, determine as coordenadas do ponto P' obtido através da rotação de $P = (1,2,3)$ por um ângulo de 30^o em torno da reta cujas equações paramétricas são

$$\alpha(t) = (2 + 5t, 1 - 2t, 4 - 3t).$$

22) Descreva o que você faria para resolver o exercício 21 usando matrizes ao invés de quatérnios.