TÓPICOS ESPECIAIS DE MATEMÁTICA APLICADA (COMPUTAÇÃO GRÁFICA) – EXERCÍCIOS

20 de setembro de 2001

23) Usando os algoritmos de Bresenham determine:
  a) Todos os pontos do segmento de reta cujas extremidades são $(2,3)$ e $(9,7)$.
  b) Pelo menos 10 pontos consecutivos na circunferência de centro $(4,3)$ e raio 5.

24) Descreva, passo a passo, o que você usaria para pintar o interior de um triângulo cujas coordenadas dos vértices são dadas.

25) Descreva um algoritmo que rasterize uma circunferência no primeiro octante, no sentido anti-horário.

26) O algoritmo de rasterização do primeiro quadrante da elipse $F(x,y) = b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2 = 0$ pode ser dividido em duas partes: a primeira parte em uma região 1 (identificada pelo teste $a^2(y_P - \frac{1}{2}) > b^2(x_P+1)$) onde o próximo ponto a ser desenhado é L (leste) ou SE (sudeste), e uma região 2 onde o próximo ponto é S (sul) ou SE. Usando uma notação análoga a do caso da circunferência, verifique que na região 1 temos

$$d_{novo} = d_{velho} + b^2(2x_P + 3) + a^2(-2y_P + 2)$$

enquanto que na região 2 temos

$$d_{novo} = d_{velho} + b^2(2x_P + 2) + a^2(-2y_P + 3).$$

27) Escreva a matriz 4×4 usada no *dithering* de ordem 4 ($n = 4$) e a matriz 8×8 usada no *dithering* de ordem 8 ($n = 8$). Todos os inteiros de 0 a $n^2 - 1$ aparecem nessas matrizes?

28) No *dithering* de ordem 2 ($n = 2$), em que é transformado um trecho de uma imagem (digamos um retângulo 8×8) cujos *pixels* são todos iguais a 0? E se usássemos o *dithering* de ordem 4, obteríamos a mesma resposta?

29) Usando o algoritmo do **limiar constante**

```
Se (I(i, j) > (Preto + Branco)/2) entao
   I(i, j) = Branco
Senao
   I(i, j) = Preto
```

determine em que é transformada a seguinte imagem:

0	0	1	2	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0
1	6	6	7	7	7	1	1	0	0	7	7	7	7	7	7	0	0
0	5	6	7	1	2	7	0	0	1	7	6	7	0	1	0	7	1
2	5	7	7	2	2	2	6	0	0	6	6	6	0	0	1	7	2
1	5	5	6	2	1	0	7	0	0	7	6	7	0	1	0	7	0
0	7	7	7	0	0	7	0	0	1	5	6	7	5	6	7	2	2
0	7	6	6	6	7	0	0	1	0	7	6	5	0	1	2	7	0
1	5	5	5	2	2	2	2	2	2	7	7	7	0	0	1	7	0
0	7	6	5	0	0	1	1	0	0	7	7	6	0	0	1	5	1
2	5	6	7	0	0	1	1	1	1	7	5	7	5	6	6	1	2
0	1	1	1	1	2	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2

Convenções: Preto = 0, Azul = 1, Verde = 2, Ciano = 3, Marron = 4, Magenta = 5, Amarelo = 6, Branco = 7

Observação: A imagem em preto-e-branco é formada por 2 letras maiúsculas.

30) Considere $B_0(1,1),\ B_1(2,3),\ B_2(4,3),\ B_3(3,1)$ como sendo os vértices de um polígono de controle de uma curva de Bézier.

a) Escreva por extenso a parametrização $P(t) = (f(t),\, g(t))$ dessa curva;

b) Determine $P(0)$, $P(0,15)$, $P(0,35)$, $P(0,5)$, $P(0,65)$, $P(0,85)$ e $P(1)$;

c) Faça um esboço do gráfico da curva juntamente com o polígono de controle.

31) Considere os polinômios de Bernstein $B_{nr}(t) = \binom{n}{r}(1-t)^{n-r}t^r,\ t \in [0,\, 1]$.

a) Mostre que $\sum_{r=0}^{n} B_{nr}(t) = 1$;

b) $\max_{t\in[0,\,1]} B_{nr}(t) = B_{nr}(r/n)$;

c) $B_{nr}(t) = B_{n\,n-r}(1-t)$.

d) Calcule $B'_{nr}(t)$.

7) Sejam α a curva de Bézier cujo polígono de controle ABC é $A(0,0)$, $B(1,2)$, $C(m,n)$ e β a curva de Bézier cujo polígono de controle DEF é $D(5,4)$, (p,q), $F(r,s)$. Determine os valores de m e n para que a união das curvas α e β seja uma curva diferenciável (isto é, possua vetor tangente) em todos os pontos.

32) Verifique que o algoritmo de *de Casteljau* para construção de curvas de Bézier é válido no caso em que o polígono de controle tem apenas 4 pontos.

33) Os polinômios de Lagrange são da forma

$$L_{ni}(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}.$$

Mostre que:

a) $L_{ni}(x_i) = 1$ e $L_{ni}(x_j) = 0$ se $i \neq j$.

b) Dados os pontos $P_0(x_0,\, y_0),\, P_1(x_1,\, y_1),\, \cdots,\, P_n(x_n,\, y_n)$, com os x_i's dois a dois distintos, então o gráfico do polinômio de grau n

$$f(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_{ni}(x)$$

passa por todos os pontos P_i.

c) Determine um polinômio cujo gráfico passe pelos pontos $(-1,\, 2),\ (0,\, 3),\ (4,\, 1)$ e $(5,\, -1)$.

d) Cite uma desvantagem do uso de polinômios de Lagrange na interpolação de "muitos" pontos.

34) Dados $n+1$ pontos $(x_i,\, y_i)$, $i = 0, \cdots, n$ e $n+1$ inclinações m_i, $i = 0, = \cdots, n$, as funções polinomiais por partes de grau 3 de Hermite $H_i(x)$ e $\overline{H}_i(x)$ são definidos por:

$$H_i(x) = \begin{cases} -\dfrac{2(x-x_{i-1})^3}{(x_i-x_{i-1})^3} + \dfrac{3(x-x_{i-1})^2}{(x_i-x_{i-1})^2}, & \text{se} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ -\dfrac{2(x_{i+1}-x)^3}{(x_{i+1}-x_i)^3} + \dfrac{3(x_{i+1}-x)}{(x_{i+1}-x_i)^2}, & \text{se} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{se} \quad x \notin [x_{i-1},\, x_{i+1}] \end{cases}$$

$$\overline{H}_i(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-x_{i-1})^2(x-x_i)}{(x_i-x_{i-1})^2}, & \text{se} \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ \dfrac{(x-x_i)(x_{i+1}-x)^2}{(x_{i+1}-x_i)^2}, & \text{se} \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{se} \quad x \notin [x_{i-1},\, x_{i+1}] \end{cases}$$

Seja $H(x) = \sum_{i=0}^{n}(y_i H_i(x) + m_i \overline{H}_i(x))$.
a) Esboce os gráficos de $H_2(x)$ e de $\overline{H}_2(x)$ no caso particular em que $x_i = i$.
b) Mostre que $H(x_i) = y_i$ para todo i (ou seja, $H(x)$ passa pelos pontos (x_i, y_i), $i = 0, \cdots, n$).
c) Mostre que $H'(x_i) = m_i$.

35) Escreva a parametrização da superfície de Bézier em que $m = n = 2$ definida pleos pontos de controle $(0,0,0)$, $(0,1,1)$, $(0,2,-1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,-3)$, $(1,2,2)$, $(2,0,1)$, $(2,1,-1)$, $(2,2,0)$.

36) Sendo $J_{nr}(t)$ os polinômios de Bernstein, mostre que

$$J_{nr}(t) = (1-t)J_{n-1,\,r}(t) + tJ_{n-1,\,r-1}(t)$$

Sugestão: use a relação de Stiefel para números binomiais para determinar quanto vale a soma $\binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}$.

37) Mostre que uma curva B-spline com $n = k = 3$ e vetor de nós aberto-uniforme $X = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2)$ coincide com uma curva de Bézier.

38) Escreva pelo menos 6 funções básicas B-splines N_{ik} com $n = 4$, $k = 3$ e vetor de nós uniforme igual a $X = (0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7)$.

39) Sendo $P(t)$ a curva B-spline $P(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N_{ik}(t)$, mostre que sua derivada é dada por $P'(t) = \sum_{i=1}^{n+1} B_i N'_{ik}(t)$, onde $N'_{i1}(t) = 0$, $\forall t$, e em geral

$$N'_{ik}(t) = \frac{N_{i,\,k-1}(t) + (t-x_i)N'_{i,\,k-1}(t)}{x_{i+k-1}-x_i} + \frac{(x_{i+k}-t)N'_{i+1,\,k-1}(t) - N_{i+1,\,k-1}(t)}{x_{i+k}-x_{i+1}}.$$

40 – 43) Exercícios 2, 3, 4, 12 das págs. 259/260 do livro de Jonas/Luiz Velho

44) Encontre $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear de modo que $T(x,y)$ corresponda a uma reflexão através da reta $y = 3x$. (*Adaptado do livro em Álgebra Linear de Boldrini & outros*)

45) Determine a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que corresponda a uma reflexão de um ponto (x,y,z) com relação ao plano $3x + 2y + z = 0$. (*Adaptado do livro em Álgebra Linear de Boldrini & outros*)

Último dia para entrega da lista: **13/julho/2000**