Instituto Central de Matemática, ...

<u>1ª Prova</u> - <u>25/9/1971</u>.

1. E' dada a série $\sum_{n=2}^{\infty} \log\left(\frac{n}{n-1}\right)$

   (a) Calcule a soma parcial s_n

   (b) Verifique a convergência ou divergência da séri[e] dada usando a definição, isto é, verificando se $\exists \lim_{n\to\infty}$.

2. (a) Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge e $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ diverge, que se pode dizer sobre a convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$? Justifique.

   (b) Se ambas são divergentes, será verdade que a série $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ diverge? Porquê?

3. Testar a convergencia das series

   (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^2}$

4. Quando se diz que uma serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge condicionalmente?

5. Mostre que são convergentes as séries (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

6. Quais os valores de x para os quais $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(\log n)\cdot 2^n x^n}{n^2\cdot 3^n}$ converg[e]

7. (a) Calcule o raio de convergencia da serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1}{\sqrt{n}}$

   (b) Discuta a convergencia nos extremos do intervalo de convergência

8. Se $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$, será verdade que a sucessão (a_n) definida por $a_n = f(n)$ será divergente? Justifique-o. Por outro lado, dada uma sucessão (a_n), seja $f(x)$ tal que $f(n) = a_n$. Neste caso, se a sequência é divergente, pode-se afirmar que $\nexists \lim_{x\to\infty} f(x)$? Porquê?

9. Ache os 4 primeiros termos da serie de Taylor das funções abaixo, em tôrno do ponto $a=0$

   (a) $f(x) = e^x - e^{-x}$

   (b) $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$.

10. Dê um exemplo de uma série divergente $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ tal que a série dos modulos $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ converge, justificando as afirmativas.