4. Superfícies Quádricas

4.1 Superfície Cilíndrica

Uma *superfície cilíndrica* (ou simplesmente *cilindro*) é a superfície gerada por uma reta que se move ao longo de uma curva plana, denominada *diretriz*, paralelamente a uma reta fixa, denominada *geratriz*. Quando a geratriz for perpendicular ao plano que contém a curva diretriz o cilindro é denominado *cilindro reto*.

Se $\vec{v}$ é o vetor diretor da reta g, então o ponto $P(x, y, z)$ está sobre a superfície S se, e somente se, a reta que passa por P, paralela ao vetor $\vec{v}$ intercepta a curva diretriz γ

$$P\,(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q\,(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) \in \gamma \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

A Figura 4.1 ilustra uma superfície cilíndrica S com diretriz γ e geratriz g.

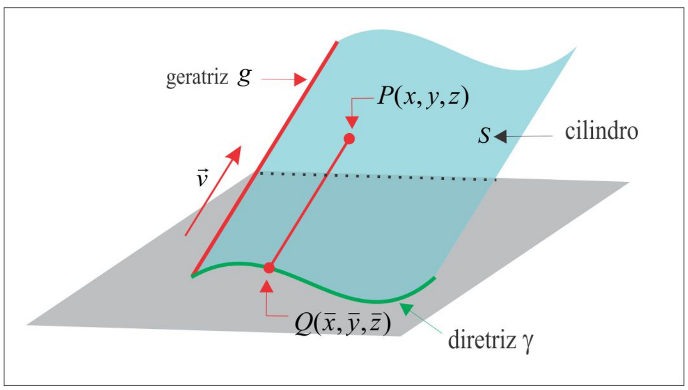


Figura 4.1: Superfície Cilíndrica.

Exemplo 4.1 *Suponha que a geratriz de um cilindro S seja a reta $g : x = t,\ y = t,\ z = t$ e que a diretriz é a parábola c do plano xy dada por $y = x^2,\ z = 0$. Temos:*

$$P\,(x, y, z) \in S \Leftrightarrow Q\,(\overline{x}, \overline{y}, 0) \in c \ e\ \overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0}.$$

Ora, o vetor diretor da gertariz é $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ e o ponto $Q\,(\overline{x}, \overline{y}, 0)$ está sobre a curva c se, e somente se, $\overline{y} = \overline{x}^2$. Assim, $\overrightarrow{PQ} = (\overline{x} - x)\vec{i} + (\overline{y} - y)\vec{j} - z\vec{k}$ e a relação $\overrightarrow{PQ} \times \vec{v} = \vec{0}$ nos dá:

$$\overline{x} = x - z;\ \overline{y} = y - z \ e\ \overline{x} - x - \overline{y} + y = 0.$$

Considerando que $\overline{y} = \overline{x}^2$, deduzimos a equação do cilindro

$$S : x^2 + z^2 - 2xz + z - y = 0.$$

Exemplo 4.2 (Cilindro Reto) *A diretriz γ é uma curva do plano xy e a geratriz g é o eixo z. Neste caso, o cilindro S é gerado por uma reta paralela ao eixo z, que desliza ao longo da curva γ. Supondo que a curva γ seja descrita pela equação $f(x,y)=0$, teremos*

$$P(x,y,z)\in S \Longleftrightarrow Q(x,y,0)\in\gamma \Leftrightarrow f(x,y)=0.$$

Logo, a equação do cilindro S será $f(x,y)=0$.

Observação 4.3 *É oportuno ressaltar que a descrição do cilindro S e da diretriz γ parecem ser a mesma, mas, há uma diferença substancial Enquanto no cilindro a variável z é livre e, portanto, assume qualquer valor real, na curva γ a variável z assume apenas o valor $z=0$, já que γ é uma curva do plano xy, como ilustra a Figura 4.2.*

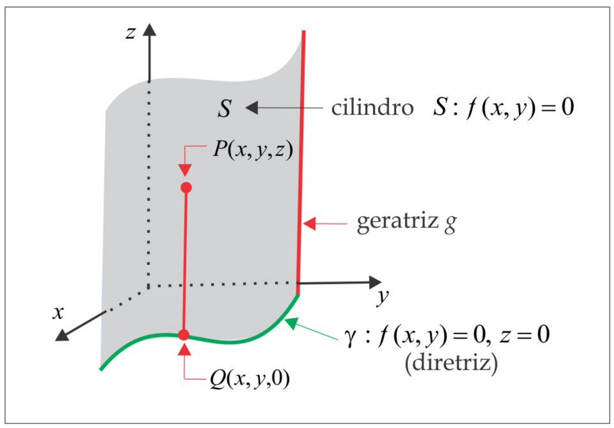


Figura 4.2: Cilindro Reto.

Uma equação onde figuram apenas duas das tês coordenadas cartesianas define um cilindro, com geratriz paralela ao eixo correspondente à terceira coordenada. Assim:

(a) a equação $F(x,y)=0$ ou $y=f(x)$, na forma explícita, representa um clindro com reta geratriz paralela ao eixo z e diretriz $\gamma: F(x,y)=0,\ z=0$;

(b) a equação $G(x,z)=0$ ou $x=g(z)$, na forma explícita, representa um clindro com reta geratriz paralela ao eixo y e diretriz $\gamma: G(x,z)=0,\ y=0$;

(c) a equação $H(y,z)=0$ ou $z=h(y)$, na forma explícita, representa um clindro com reta geratriz paralela ao eixo x e diretriz $\gamma: H(y,z)=0,\ x=0$.

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 4.1

1. Esboce o gráfico das seguintes superfícies cilíndricas:

   (a) $z = y^2$ (b) $y = |z|$ (c) $z^2 = x^3$ (d) $(z-2)^2 + x^2 = 1$ (e) $x^2 - y + 1 = 0$.

2. Considere no plano xy a curva $\gamma : y - x^3 - 2 = 0$. Sob que condições o ponto $P(x, y, z)$ está no cilindro de diretriz γ e geratriz paralela ao eixo z?

3. Em cada caso, determine a equação da superfície cilíndrica.

   (a) Diretriz $x^2 = 4y;\ z = 0$ e geratriz $x = y = z/3$. (resp.: $9x^2 + z^2 - 6xz - 36y + 12z = 0$)

   (b) Diretriz $x^2 + y = 1;\ z = 0$ e geratriz $x = 2z;\ y = 1$. (resp.: $x^2 + 4z^2 - 4xz + y = 1$)

   (c) Diretriz $x^2 - z^2 = 1;\ y = 0$ e geratriz paralela ao vetor $-\vec{j} + 2\vec{k}$. (resp.: $x^2 - z^2 - 4y^2 - 4yz = 1$)

4. Os cilindros $S_1 : z^3 = x$ e $S_2 : x^2 = y$ cortam-se segundo uma curva γ. Encontre a equação do cilindro S_3 com diretriz γ e geratriz paralela ao eixo x. (resp.: $y = z^6$)

4.2 Superfície Cônica

Uma *superfície Cônica* (ou simplesmente *cone*) é a superfície gerada por uma reta (*geratriz*) que se move de modo que sempre passa por uma curva plana fixa γ (*diretriz*) e por um ponto fixo V (*vértice*) não situado no plano da curva. Quando a geratriz for perpendicular ao plano que contém a curva diretriz o cone será denominado *Cone Reto*. A figura (4.3) mostra uma superfície cônica S com diretriz γ e vértice V.

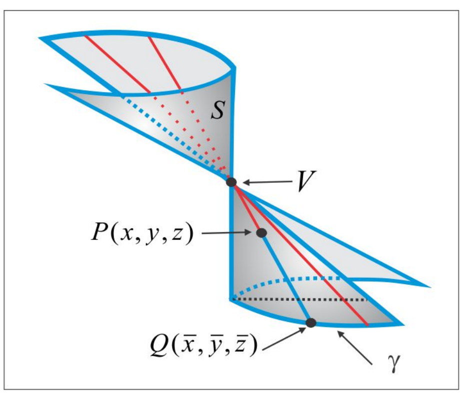


Figura 4.3: Superfície Cônica.

Um ponto $P(x,y,z)$ está sobre a superfície S se, e somente se, a reta que passa por P e V intercepta a diretriz γ. Assim, a equação do cone S é deduzida observando que:

$$P(x,y,z) \in S \Leftrightarrow Q(\overline{x},\overline{y},\overline{y}) \in \gamma \quad \text{e} \quad \overrightarrow{PV} \times \overrightarrow{QV} = \vec{0}.$$

Exemplo 4.4 *Se a diretriz de um cone S de vértice $V(0,0,1)$ é a parábola no plano xy dada por $\gamma : y = x^2,\ z = 0$, usando a relação $\overrightarrow{PV} \times \overrightarrow{QV} = \vec{0}$ e notando que $Q\left(\overline{x},\overline{x}^2,0\right)$, chegamos ao sistema:*

$$\begin{cases} y + \overline{x}^2(z-1) = 0 & (I) \\ x + \overline{x}(z-1) = 0 & (II) \\ x\overline{x}^2 - \overline{x}y = 0 & (III) \end{cases}$$

e combinando as equações (I) (II) e (III), encontramos $x^2 + yz - y = 0$, que é a equação do cone S.

4.2.1 Cone de Revolução

Uma superfície cônica particular é aquela gerada pela rotação de uma reta g (*geratriz*) em torno de uma reta L (*eixo*), onde as retas g e L se interceptam em um ponto V que é o vértice do cone. A figura (4.4) ao lado mostra um cone de revolução S, onde observamos que a interseção do cone com um plano perpendicular ao eixo é uma circunferência. Representando por $\vec{v}_L$ e $\vec{v}_g$ os vetores diretores do eixo L e da geratriz g, respectivamente, então uma condição necessária e suficiente para que um ponto $P(x,y,z)$ esteja sobre o cone S é que

$$|\cos(\vec{v}_L,\vec{v}_g)| = |\cos(\vec{v}_L,\overrightarrow{VP})|.$$

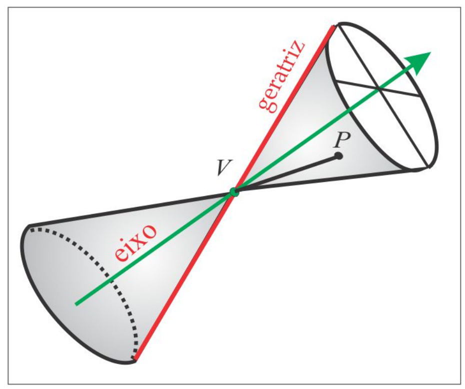


Figura 4.4: Cone de Revolução

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 4.2

1. Determine a equação do cone obtido por rotação da reta $y = ax + b,\ z = 0$ em torno do eixo y.
   (resp.: $a^2(x^2+z^2) = (y-b)^2$)

2. Determine a equação do cone de revolução gerado pela rotação da reta $x = t,\ y = 2t,\ z = 3t$ em torno da reta $-x = y = z/2$. (resp.: $5(x^2+y^2) - z^2 + 4xy + 8xz - 8yz = 0$)

3. Determine a equação do cone de revolução com eixo x, vértice na origem e geratriz formando com o eixo um ângulo de $\pi/3$ *rad*. (resp.: $y^2 + z^2 = 3x^2$)

4.3 Superfície de Revolução (caso geral)

A figura (4.5) ao lado mostra uma superfície de revolução S obtida pela rotação de uma curva g, denominada *geratriz*, em torno de um eixo L, denominado *eixo de revolução.*

Para chegar à equação da superfície S, deixe-nos considerar por um ponto $P(x, y, z)$ de S um plano perpendicular ao eixo de rotação, cuja interseção com a superfície S é uma circunferência. Sejam C e Q as interseções desse plano com o eixo L e com a geratriz g, respectivamente. A equação da superfície S é

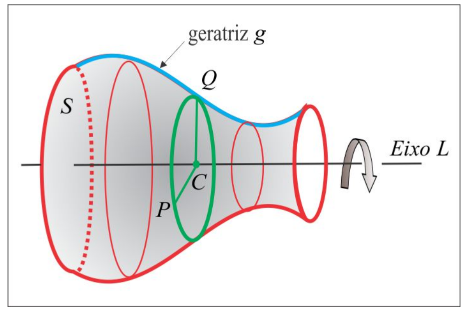


Figura 4.5: Superfície de Revolução

$$\left\|\overrightarrow{CP}\right\| = \left\|\overrightarrow{CQ}\right\|. \tag{4.1}$$

A equação cartesiana de S será determinada em um caso particular e deixaremos as variantes desse caso para o leitor. Suponhamos, então, que a geratriz seja uma curva g do plano yz descrita por uma equação do tipo $F(y, z) = 0$ ou, como é mais comum, $y = f(z)$. Suponhamos, ainda, que o eixo de rotação seja o eixo z. Então, as interseções C e Q são: $C(0, 0, z)$ e $Q(0, \overline{y}, z)$ e da equação vetorial (4.1), resulta $\sqrt{x^2 + y^2} = |\overline{y}|$ e daí segue que $\overline{y} = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$. Como o ponto $Q(0, \overline{y}, z)$ está sobre a geratriz, então $F(\overline{y}, z) = 0$ e, conseqüentemente, a equação da superfície S é:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0.$$

Se a geratriz é dada na forma $y = f(z)$, a equação de S é $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$.

Observação 4.5 *A equação $y^2 + z^2 = [f(x)]^2$ representa uma superfície de revolução em torno do eixo x. O problema de encontrar uma geratriz consiste em "zerar"uma das variáveis do termo quadrático $y^2 + z^2$. Por exemplo, com $z = 0$, encontramos a geratriz $y = f(x)$.*

Exemplo 4.6 (A Esfera) *A superfície S obtida pela rotação do arco de circunferência*

$$y^2 + z^2 = R^2,\ y \geq 0,\ x = 0,$$

em torno do eixo z é uma esfera com geratriz dada por $F(y, z) = y^2 + z^2 - R^2 = 0$. A equação da superfície S é, portanto, $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$, isto é, $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

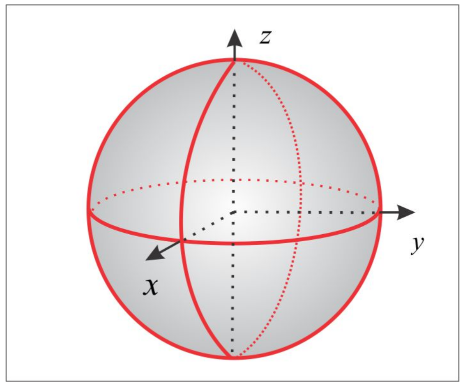


Figura 4.6: Esfera.

Exemplo 4.7 (O Paraboloide de Revolução) *A superfície S obtida pela rotação da parábola $y^2 = 4pz, \ x = 0$, em torno do eixo z é um Paraboloide de Revolução. Neste caso, a geratriz é dada por*

$$F(y, z) = y^2 - 4pz = 0,$$

e a equação da superfície S é, portanto, $F(\pm\sqrt{x^2+y^2}, z) = 0$, isto é, $x^2 + y^2 = 4pz$.

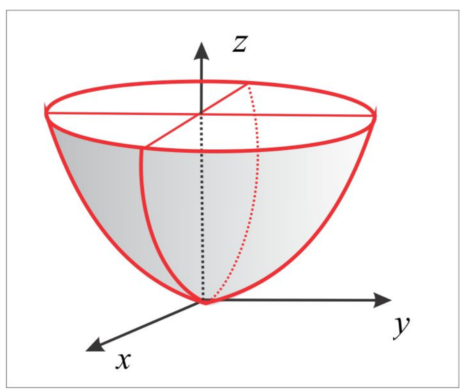


Figura 4.7: Paraboloide de Revolução.

Exemplo 4.8 (O Elipsoide de Revolução) *A superfície S obtida pela rotação da elipse (geratriz)*

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \quad z = 0,$$

em torno do eixo x recebe o nome Elipisóide de Revolução e está ilustrado na Figura 4.8.

A equação do Elipsóide de Revolução é $F(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y) = 0$, isto é:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

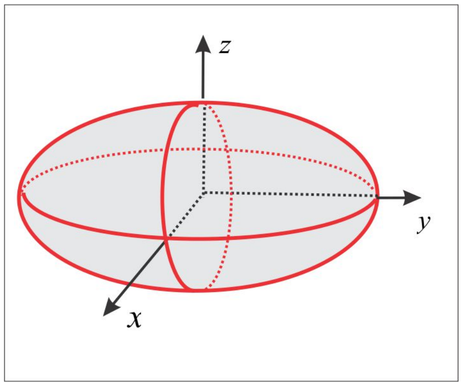


Figura 4.8: Elipsoide de Revolução.

Exemplo 4.9 (Os Hiperboloides de Revolução) *Suponhamos que a hipérbole* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ *no plano* xy *gira em torno do eixo* x*. A superfície resultante recebe o nome de Hiperbolóide de Revolução de Duas Folhas (veja a Figura 4.9). A geratriz é descrita por* $F(x, y) = \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ *e a equação da superfície é* $F(x, \pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$*, isto é,* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{b^2} = 1$*. No caso em que a rotação é realizada em torno do eixo* y*, a superfície resultante recebe o nome de Hiperbolóide de Revolução de Uma Folha (veja a Figura 4.10). Nesse caso, a equação da superfície é* $F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$*, ou seja,* $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{a^2} = 1$.

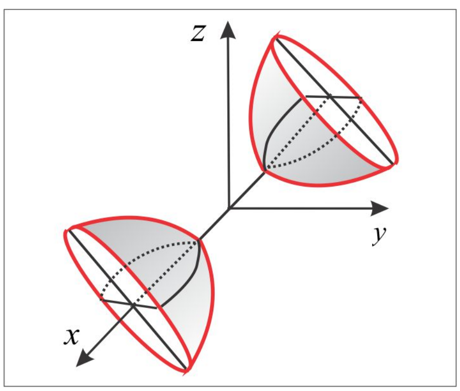


Figura 4.9: Hiperboloide de duas Folhas

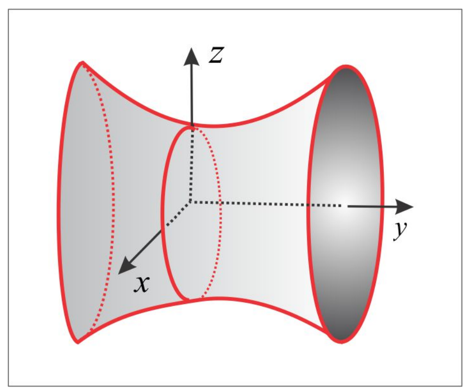


Figura 4.10: Hiperboloide de uma Folha

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 4.3

1. Em cada caso, determine a equação e esboce o gráfico da superfície de revolução gerada pela rotação da curva g em torno do eixo indicado.

   (a) $g : x^2 + 2y = 6, \ z = 0$; eixo y. (resp.: $x^2 + z^2 + 2y = 6$)

(b) $g : y^2 = 2z,\ x = 0;$ eixo y. (resp.: $y^4 - 4x^2 - 4z^2 = 0$)

(c) $g : y^2 - 2z^2 + 4z = 6,\ x = 0;$ eixo z. (resp.: $x^2 + y^2 - 2z^2 + 4z = 6$)

(d) $g : y = x^3,\ z = 0;$ eixo x. (resp.: $x^6 - y^2 - z^2 = 0$)

(e) $g : z = e^x,\ y = 0;$ eixo z. (resp.: $z - \exp(\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$)

(f) $g : yz = 1,\ x = 0;$ eixo z. (resp.: $(x^2 + y^2)z^2 = 1$)

(g) $g : y = R,\ x = 0;$ eixo z. (resp.: $x^2 + y^2 = R^2$)

(h) $g : x^2 = 4y,\ z = 0;$ eixo y. (resp.: $x^2 + z^2 = 4y$)

(i) $g : x^2 + 4z^2 = 16,\ y = 0;$ eixo x. (resp.: $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$)

(j) $g : y = \operatorname{sen} x,\ z = 0;$ eixo x. (resp.: $y^2 + z^2 = \sin^2 x$)

2. Em cada caso, encontre a geratriz (g) e o eixo de rotação (l) da superfície de revolução S.

(a) $S : x^2 + y^2 - z^2 = 4$. (resp.: $g : x^2 - z^2 = 4,\ y = 0;$ eixo z)

(b) $S : x^2 + y^2 = |z|$. (resp.: $g : y = \sqrt{|z|},\ x = 0;$ eixo z)

(c) $S : x^2 + y^2 - \sqrt{x^2 + y^2} - z = 0$. (resp.: $g : y^2 - |y| - z = x,\ x = 0;$ eixo z)

3. A superfície de revolução S, gerada pela rotação da circunferência $g : x^2 + y^2 - 4y + 3 = 0,\ z = 0$, em torno do eixo x, recebe o nome de *Toro de Revolução*. Encontre a equação de S e faça um esboço do gráfico. (resp.: $(x^2 + y^2 + z^2 + 3)^2 = 16(y^2 + z^2)$)

4. Repita o exercício precedente com a circunferência no plano yz de centro $C(0,4,0)$ e raio $R = 2$, que gira em torno do eixo z. (resp.: $(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 40(x^2 + y^2) + 24z^2 + 144 = 0$)

5. Identifique e esboce o gráfico do conjunto dos pontos $P(x,y,z)$ do $\mathbb{R}^3$ descrito por:

(a) $x^2 + 4z^2 = 1,\ y = 1$. (resp.: uma elipse)

(b) $x^2 + z^2 = 4,\ y = 2$. (resp.: a circunferência de centro $C(0,2,0)$ e raio $R = 1$)

(c) $x^2 + y^2 = 1$. (resp.: cilindro circular reto)

(d) $x^2 - z^2 = 1,\ y = 1$. (resp.: uma hipérbole)

(e) $x^2 + 4z^2 = y,\ z = 1$. (resp.: uma parábola)

6. Os eixos y e z sofrem uma rotação de um ângulo $\theta = \pi/4$, no plano yz, enquanto o eixo x permanece fixo. Determine as coordenadas dos pontos $P(1,2,\sqrt{2})$ e $Q(3,\sqrt{2},-1)$ no novo sistema de coordenadas. (resp.: $P(1, 1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$; e $Q(3, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$)

7. Determine os valores de k, de modo que a interseção do plano $x + ky = 1$ com o hiperbolóide de duas folhas $y^2 - x^2 - z^2 = 1$ seja:

   (a) uma elipse (b) uma hipérbole. (resp.: (a) $1 < |k| < \sqrt{2}$; (b) $|k| < 1$)

4.4 Quádricas Especiais

Denominamos *Quádrica* à superfície que pode ser descrita por uma equação geral do 2º grau nas variáveis x, y e z. Uma tal equação é da forma:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{4.2}$$

As superfícies de revolução: *esfera*, *parabolóide*, *elipsóide* e os dois *hiperbolóides* encontradas nos exemplos 4.6, 7, 8 e 9 são quádricas particulares. Elas são caracetrizadas pelas seções circulares determinadas por planos perpendiculares aos respectivos eixos de rotação e, por isso, denominadas *quádricas de revolução*. A seguir classificamos essas quádricas de forma um pouco mais geral, fixando uma *equação padrão* para cada uma delas.

(a) Elipsoide: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1.$ (veja o Exemplo 5)

(b) Paraboloide Elíptico: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = cz$ (veja o Exemplo 4)

(c) Paraboloide Hiperbólico (sela): $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = cz$ (veja a Figura 3.13)

(d) Hiperbolóide de Uma Folha: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (veja o Exemplo 6)

(e) Hiperboloide de Duas Folha: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ (veja o Exemplo 6)

(f) Cone Quádrico: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2$ (veja a Figura 4.4)

EXERCÍCIOS & COMPLEMENTOS 4.4

1. Determine o vértice e o foco da parábola interseção do plano $y = 2$ com o paraboloide hiperbólico $9y^2 - 36x^2 = 16z$. (resp.: $V(0, 2, 9/4)$; ; $F(0, 2, 77/36)$)

2. Determine os vértices e os focos da elipse interseção do plano $y = 3$ com o elipsoide
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{4} = 1.$$
(resp.: $V(\pm 12/5, 3, 0)$ e $V(0, 3, \pm 8/5)$; ; $F(\pm 4\sqrt{5}/5, 3, 0)$)

3. Determine a interseção do parabolóide $4y^2 - 9x^2 = 36z$ com o plano $3x + 2y - z = 0$. (resp.: as retas concorrentes $r_1 : x = 2t,\ y = 3t,\ z = 12t$ e $r_2 : x = 2t,\ y = 18 - 3t,\ z = 36$)

4. Identifique o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$, tais que $\left\|\overrightarrow{AP}\right\|^2 + \left\|\overrightarrow{BP}\right\|^2 = 9$, sendo $A(1, -1, 2)$ e $B(2, 1, 0)$. (resp.: a esfera de centro $C(3/2, 1, 3/2)$ e raio $R = \sqrt{15}/2$)

5. Determine a equação da esfera de centro $C(3, 2, -2)$ e tangente ao plano $x + 3y - 2z + 1 = 0$.(resp.: $(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z+2)^2 = 14$)

6. Determine a equação do parabolóide elíptico com vértice na origem, eixo sobre o eixo z e que passa nos pontos $A(1, 0, 1)$ e $B(0, 2, 1)$. (resp.: $4x^2 + y^2 = 4z$)

7. A reta $2x - 3y = 6,\ z = 0$, gira em torno do eixo y. Determine a equação do cone resultante, seu vértice e sua interseção com o plano yz. (resp.: $4x^2 - 9(y-2)^2$; $V(0, 2, 0)$; $3y \pm 2z = 6$)

8. Considere um sistema de coordenadas onde os eixos $\overline{x}$, $\overline{y}$ e $\overline{z}$ são as retas suportes dos vetores $\vec{u} = 2\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$ e $\vec{w} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$. Escreva a equação da superfície $S : xy + yz + xz = 0$ no novo sistema de coordenadas e identifique-a. (resp.: o cone $\bar{x}^2 + \bar{y}^2 = 2\bar{z}^2$)

9. Considere um sistema de coordenadas $O\overline{x}$, $O\overline{y}$ e $O\overline{z}$ determinado pela origem e pelos pontos $A(1, -1, 1)$, $B(2, 1, -1)$ e $C(0, 1, 1)$. Descreva a superfície $S : 5x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz - 6yz + 8 = 0$ nesse sistema de coordenadas e identifique-a. (resp.: o hiperboloide $3\bar{x}^2 + 6\bar{y}^2 - 2\bar{z}^2 + 8 = 0$)

10. Identifique as seguintes quádricas.

    (a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4 = 0$. (resp.: esfera)

    (b) $x^2 + y^2 - 2y - z + 1 = 0$. (resp.: paraboloide de revolução)

    (c) $-x^2 - 3y^2 + z^2 = 0$. (resp.: cone)

    (d) $2x^2 + 3y^2 - z^2 - 12x + 12y + 2z + 29 = 0$. (resp.: hiperboloide de uma folha)

    (e) $8x^2 - 4xy + 5y^2 + z^2 = 36$. (resp.: elipsoide)

    (f) $3x^2 = 2y + 2z$. (resp.: cilindro)

    (g) $z^2 - 2xy + 2x + 2y - 4z = 0$. (resp.: hiperboloide de duas folhas)

    (h) $z = xy$. (resp.: paraboloide hiperbólico (sela))

11. Determine e esboce as interseções do cone quádrico $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = z^2$ com os seguintes planos:

    (a) $z = 2$ (b) $y = 2$ (c) $x + z = 1$. (resp.: (a) elipse (b) hipérbole (c) parábola)

12. Seja γ a curva interseção do plano $x + y + z = 0$ com a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Identifique a curva γ e sua projeção no plano xy. (resp.: γ é uma circunferência e sua projeção no plano xy é uma elipse)

4.5 Equações e Gráficos

Para associarmos uma quádrica a uma equação ou vice-versa, é fundamental observarmos dois aspectos: primeiro a equação padrão da quádrica e, segundo, a disposição dos eixos coordenados. Nas Figuras 4.11 e 4.12 apresentamos a mesma quádrica (desenho) correspondendo às equações $z = x^2 - y^2$ e $z = xy$. No primeiro caso, isto é, na Figura 4.11, poderímaos ter girado a quádrica de 45º, que é o ângulo de rotação que transforma a equação $z = xy$ em $2z = \overline{x}^2 - \overline{y}^2$. Para uma melhor visualização geométrica, preferimos deixar a quádrica e o eixo z fixos e girar os eixos x e y de 45º.

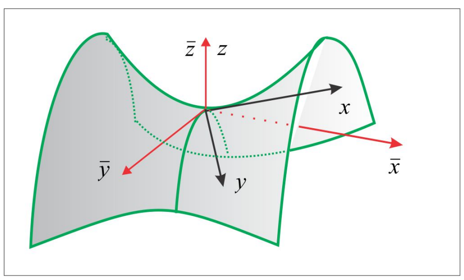


Figura 4.11: A Sela $z = xy$

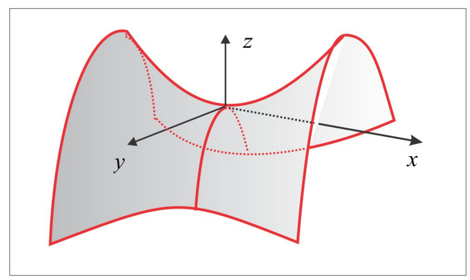
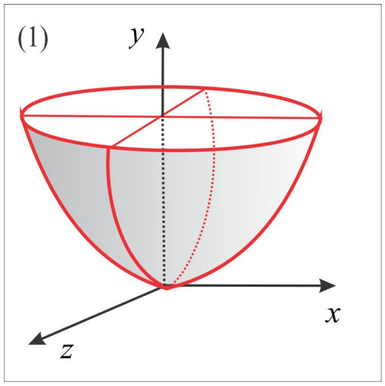
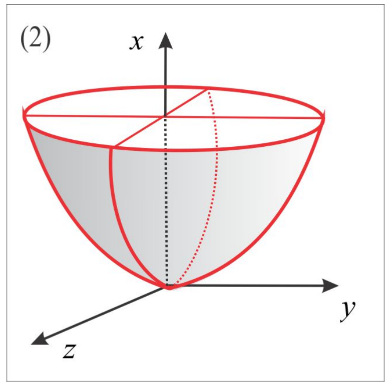


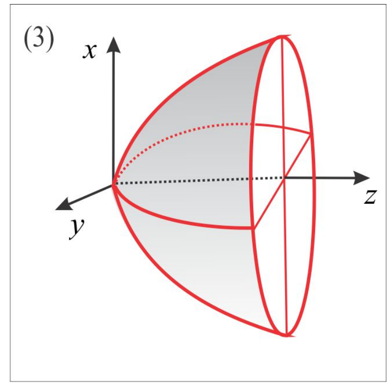
Figura 4.12: A Sela $z = x^2 - y^2$

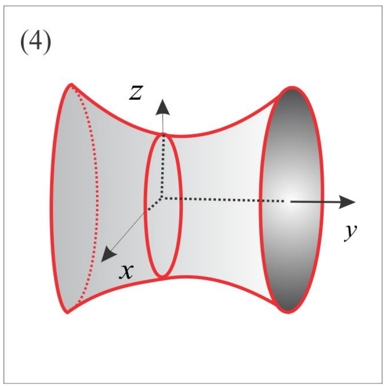
A seguir apresentamos algumas quádricas, onde efetuamos mudanças no posicionamento dos eixos coordenados. Faça a associação entre a quádrica e a equação.

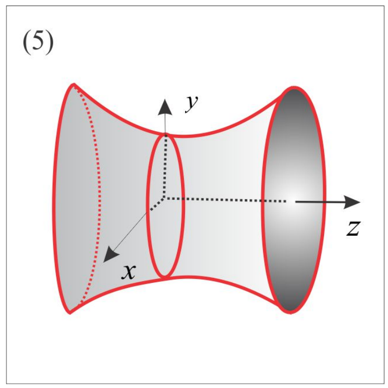
( ) $\dfrac{x}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	( ) $y - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$	( ) $x + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$	( ) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
( ) $\dfrac{x^2}{a^2} - y + \dfrac{z^2}{c^2} = k$	( ) $x - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$	( ) $\dfrac{x^2}{a^2} - y^2 + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$	( ) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$
( ) $z - \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = k$	( ) $x^2 - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$	( ) $\dfrac{x}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	( ) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$

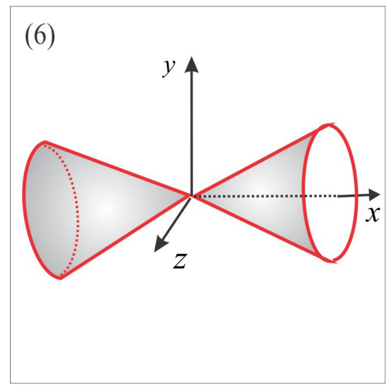

(1)
y
x
z

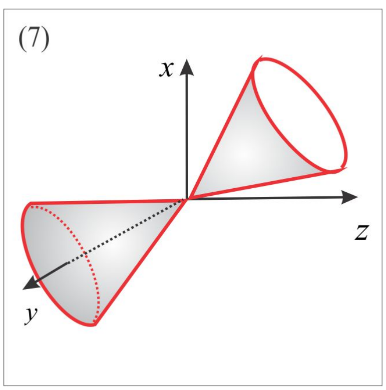

(2)
x
y
z

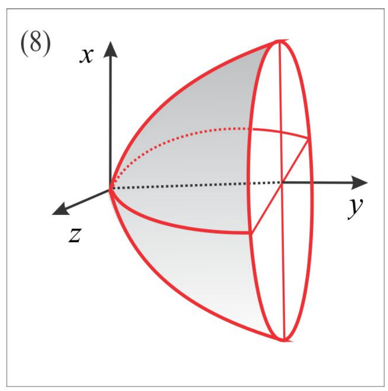

(3)
x
z
y

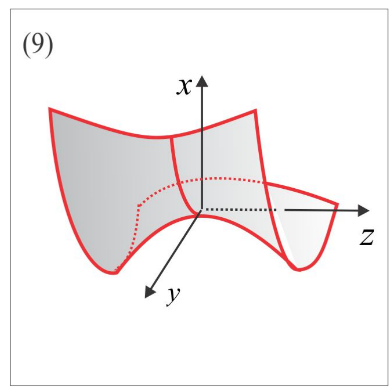

(4)
z
y
x

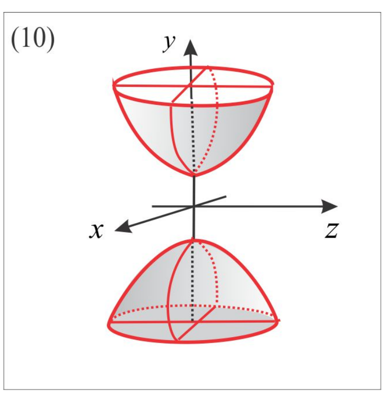

(5)
y
z
x

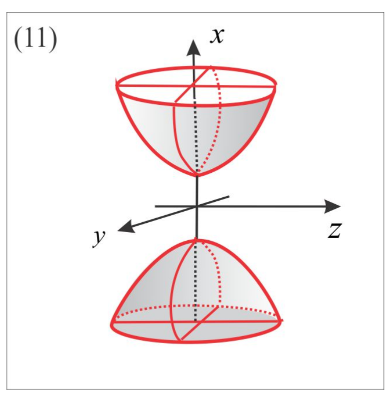

(6)
y
x
z

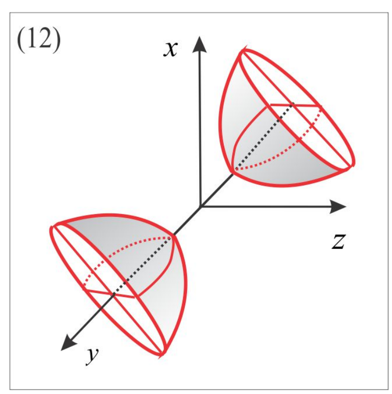

(7)
x
z
y


(8)
x
y
z


(9)
x
z
y


(10)
y
x
z


(11)
x
y
z


(12)
x
z
y