Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Sistema Elíptico Fortemente Indefinido

por

Surama Santos Ismael da Costa

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Agosto/2001
João Pessoa - PB

Sistema Elíptico Fortemente Indefinido

por

Surama Santos Ismael da Costa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: **Análise**

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Prof. Dr. Yang Jianfu

Prof. Dr. Daniel C. Morais Filho

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Agosto/2001

Agradecimentos

- A Deus,por me dar força e dicernimeto nos momentos de dúvida e aflição

- A meu pai e a minha mãe, meu maior exemplo, por sempre acreditarem em mim.

- A Adriano, pela colaboração e paciência.

- A todos os meus familiares, que sempre me incentivaram e me apoiaram, principalmente a minha irmã Suênia.

- Ao prof. João Marcos, pela orientação competente e amiga.

- A professora Ana Maria, pelas valiosas sugestões.

- Aproveitando a oportunidade, as professores Valdeck, Martinho e Flávia, pelo incentivo na primeira fase de minha formação.

- Ao prof. Andrade, pela colaboração na digitação deste trabalho.

- Ao Dr. Antônio Sérgio, sem seu apoio este trabalho seria inviável.

- Aos meus amigos do Departamento de Mecânica.

- Aos funcionários do Departamento de Matemática de UFPB, especialmente a Sônia, a qual sempre me encorajou.

- Aos colegas e a todas que, deuma forma ou de outra, me ajudaram a concluir esta dissertação.

Dedicatória

A meu filho Isaac e a meu tio José Pontes ("in memorian").

Resumo

A equação de Euler-Lagrange do lagrangiano, com a parte quadrática fortemente indefinida, foi estudada via o método min-max de Benci e Rabinowitz. Usando um espaço de Sobolev de ordem fracionária, provamos um resutado de existência para o seguinte sistema de duas equações de Poisson semiliares acopladas, envolvendo não linearidades com crescimento sub-crítico

$$(P_1) = \begin{cases} -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega \\ -\Delta u = g(v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} .$$

Abstract

The Euler-Lagrange equations of Lagrangians with a strongly indefinite quadratic part are studied by means of the direct min-max method of Benci and Rabinowitz. Using an anlytic framework of a suitable family of products of fractional Sobolev spaces it is proved the existence results for the following system of two coupled semilinear Poisson equations involving nonlinearites with subcritical grouth

$$(P_1) = \begin{cases} -\Delta v = f(u) & \text{em } \Omega \\ -\Delta u = g(v) & \text{em } \Omega \\ u = v = 0 & \text{na } \partial\Omega \end{cases} .$$

Glossário de Notações

$\mathbb{N}$: Conjunto dos Números Naturais

$\mathbb{Z}$: Conjunto dos Números Inteiros

$\mathbb{Q}$: Conjunto dos Números Racionais

$\mathbb{R}$: Conjunto dos Números Reais

$\mathbb{C}$: Conjunto dos Números Complexos

K : Corpo de nùmeros

$\mathbb{Z}_K$: Anel dos inteiros de um corpo K

$R[X]$: Anel dos polinômios sobre R em X

$|$: Divide

$\backsim$: Similar

$\approx$: Semelhante

$\det A$: Determinante de A

$\sum$: Soma

$\prod$: Produto

$[K : \mathbb{Q}]$: Grau de K sobre $\mathbb{Q}$

$(K : \mathbb{Q})$: Índice de K em $\mathbb{Q}$

$\ker f$: Núcleo do homomorfismo f

$N(\alpha)$: Norma do elemento α

$Tr(\alpha)$: Traço de α

$N(I)$: Norma do ideal I

B : Base minimal de $\mathbb{Z}_K$

$D(B)$: Discriminante de B

$f_\alpha(x)$: Polinômio caracteristico de α

$\forall$: Para todo

$\exists$: Existe

$\overline{\alpha}$: Conjugado complexo de α

∂f : Grau do polinômio f

$\equiv$: Congruente

$\mathrm{Cl}(I)$: Classe do ideal I

$[]$: Função parte inteiro

$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$: Ideal gerado por $x_1, \ldots, x_n$

Λ : Retitculado

$V(\Lambda)$: Volume da região fundamental de Λ

$\Delta(\Lambda)$: Área de Λ

Sumário

.

Introdução

Neste trabalho estudaremos a existência de soluções não triviais, para a seguinte classe de problemas

$$(P)\begin{cases} -\Delta v = H_u(u,v) \text{ em } \Omega \\ -\Delta u = H_v(u,v) \text{ em } \Omega \\ u = v = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, com fronteira $\partial\Omega$ suave e (P) um sistema Hamiltoniano variacional .

A termologia variacional decorre do fato do sistema acima ser uma equação Euler-Lagrange (ver Apêndice A) de um funcional

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega H(u,v), \qquad \mathbf{u} = (u,v), \tag{1}$$

associado ao sistema, onde $\mathcal{L}$ é bem definido e $\mathcal{L} \in C^1(E,\mathbb{R})$, E é um espaço de Hilbert. Portanto, como

$$\langle \acute{\mathcal{L}}(\mathbf{u}), \eta \rangle = \int_\Omega \nabla u \nabla \alpha + \nabla v \nabla \psi - \int_\Omega H_u \psi + H_v \alpha,$$

onde $\eta = (\alpha, \psi)$, $\mathbf{u} = (u,v)$ será uma solução fraca de (P), se $\mathbf{u} = (u,v)$ for um ponto crítico do funcional $\mathcal{L}$ dado por (1). Logo teremos como objetivo determinar pontos críticos de $\mathcal{L}$.

Observemos que, a parte quadrática de $\mathcal{L}$, $A(\mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$, é fortemente indefinida, isto é, se o espaço E for decomposto em soma direta dos subespaços E_1 e E_2 de dimensão infinita, implicará que, $A(\mathbf{u})$ é positivo definido em um, e negativo definido no outro.

Para a obtenção dos pontos críticos de $\mathcal{L}$, faremos uso do método de minimax, o qual tem como idéia básica, a mini-maximização do funcional sobre uma classe "adequada" de subconjuntos de E. O Teorema do Passo da Montanha e o Teorema do Ponto de Sela são os resultados mais clássicos deste método.

Como $\mathcal{L}$ é fortemente indefinido, não podemos utilizar os teoremas clássicos citados acima, já que, no Teorema do Passo da Montanha, usualmente, o funcional tem um mínimo local na origem, e o Teorema do Ponto de Sela, requer que um dos dois subespaços E_1 e E_2, tenha dimensão finita.

Um método de min-max para funcional indefinido, foi introduzido por *Benci* & *Rabinowitz* em 1979 (ver [2]) ao qual nos referiremos por Teorema do Passo da Montanha para Funcional Indefinido. Este resultado é uma extensão do Teorema do Passo da Montanha e do Teorema do Ponto de Sela, para funcionais definidos no espaço de Hilbert E da forma

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(L\mathbf{u}, \mathbf{u})_E - \mathcal{H}(\mathbf{u}),$$

onde L é um operador auto adjunto linear limitado em E, $\mathcal{H} : E \to E$ é não linear satisfazendo determinadas hipóteses. A seguir, enunciamos o Teorema do Passo da Montanha para Funcional Indefinido.

Teorema 0.1 *Seja H um espaço real de Hilbert com $H = H_1 \oplus H_2$ e $H_2 = H_1^{\perp}$. Suponha $\mathcal{L} \in C^1(H, \mathbb{R})$, satisfazendo (PS), e*

$(\mathcal{L}_1)$ *$\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) + \mathcal{H}(u)$, onde $L : H \to H$ é limitado e auto-adjunto, e L é invariante em H_1e H_2;*

$(\mathcal{L}_2)$ *$\mathcal{H}'$ é compacto.*

$(\mathcal{L}_3)$ *existe um subespaço $\widetilde{H} \subset H$ e conjuntos $S \subset H, Q \subset \widetilde{H}$ e constantes $\alpha > \varpi$ tal que*

(i) $S \subset H_1$ e $\mathcal{L}\,|_S \geq \alpha$,

(ii) Q é limitado e $\mathcal{L} \leq \varpi$ na fronteira ∂Q de Q em $\widetilde{H}$,

(iii) S e ∂Q estão em linking.

Então $\mathcal{L}$ possue um valor crítico $c \geq \alpha$.

No capítulo 1, veremos o espaço de Sobolev de Ordem Fracionária.

No capítulo 2, estudaremos o seguinte problema

$$(P_1) \begin{cases} -\Delta v = f(u) \text{ em } \Omega \\ -\Delta u = g(v) \text{ em } \Omega \\ u = v = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ com fronteira $\partial\Omega$ suave. O funcional de Lagrangiano associado é

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega F(u) - \int_\Omega G(v), \qquad \mathbf{u} = (u, v),$$

onde os funcionais F e G são as primitivas de f e g.

Aplicaremos o Teorema do Funcional Indefinido, onde o espaço de Hilbert a ser utilizado, estará relacionado com a condição de crescimento imposta a $F(u)$ e $G(v)$, para a obtenção dos pontos críticos.

No capítulo 3, trataremos da regularidade da solução, ou seja, veremos que as soluções fracas obtidas no capítulo 2 são, de fato, soluções clássicas do problema.

Nosso principal resultado será provar o

Teorema 0.2 *Suponha que as funções f e g satisfazem as hipóteses:*

(h_1) $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = g(0) = 0$, $F(u) = \int_0^u f(s)ds \geq 0$ *e* $G(v) = \int_0^v g(s)ds \geq 0$.

(h_2) $f(u) = O(|u|^p)$, $g(u) = O(|v|^q)$ *com* $|u|$, $|v| \to \infty$ *e*

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N} \qquad p,\, q > 1,\ N \geq 1,$$

(h_3) $f(u) = o(|u|)$, $g(u) = o(|v|)$ *com* $|u|$, $|v| \to 0$,

(h_4) *existem constantes* $\gamma > 2$ *e* $\eta > 0$ *tais que*

$$o < \gamma F(u) \leq uf(u), \qquad 0 < \gamma G(v) \leq vg(v) \ \text{ para } \ |u|, |v| \geq \eta.$$

Então o problema (P_1) *tem no mínimo uma solução* $(u, v) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ *do problema* (P_1)*. Além disso, se* f *e* g *são não negativas em* $[0, \infty]$*, então* (P_1) *tem uma solução com componentes positivas.*

A hipótese (h_2) expressa a superlinearidade do sistema, como também o fato do sistema ser subcrítico. Além disso, a notação $O(|u|^p)$ significa que existe uma constante $R > 0$ tal que $\frac{|f(u)|}{|u|^p} \leq C$ para todo $|u| \geq R$, onde C é uma constante. Na hipótese (h_3) a notação $o(|u|)$ significa que dado $\xi > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|u| < \delta$, implica que $\frac{|f(u)|}{|u|} < \xi$ ou seja, $\lim_{|u| \to 0} \frac{|f(u)|}{|u|} = 0$. E (h_4) é uma condição do tipo Ambrosetti-Rabinowitz.

Gostaríamos de citar que, este resultado foi apresentado originalmente em Hulshof & van der Vorst [15]. Veja também de Figueiredo & Felmer [9] os quais, indepedentemente, estudam uma classe mais geral de sistemas.

Capítulo 1

Espaço de Sobolev de Ordem Fracionária

A modo de introdução, apresentaremos a definição de Espaço de Sobolev: dado um número inteiro $m > 0$, por $W^{m,p}(\Omega), 1 \leq p \leq \infty$, representa-se o espaço de Sobolev de ordem m sobre Ω, isto é, o espaço vetorial das (classes de) funções $u \in L^p(\Omega)$ tais que $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$, para todo multi-índice α, com $|\alpha| \leq m$.

Munido da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ quando } 1 \leq p < \infty$$

e

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \lim funcsupess_{x \in \Omega} |D^\alpha u(x)|,$$

$W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach. Além disso $W^{m,p}(\Omega)$ é reflexivo para $1 < p < \infty$ e separável para $1 \leq p < \infty$.

Quando $p = 2$, o espaço $W^{m,2}(\Omega)$ é denotado por $H^m(\Omega)$, o qual munido do produto interno

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) D^\alpha v(x) dx,$$

é um espaço de Hilbert.

Seja $\mathcal{D}(\Omega)$ o conjunto de todos as funções C^∞ com suporte compacto em Ω, o qual é denso em $L^p(\Omega) = W^{0,p}(\Omega)$. Porém $\mathcal{D}(\Omega)$ nem sempre será denso em $W^{m,p}(\Omega)$, para $m \geq 1$.Denotemos por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o fecho de $\mathcal{D}(\Omega)$ em $W^{m,p}(\Omega)$. Para $\Omega = \mathbb{R}^N$, entretanto, temos a igualdade. O espaço de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega), 1 < p < \infty, m = 0, 1, 2, \ldots$ são também espaços de Banach reflexivos e separáveis.

Um caso particular dos $W^{m,p}(\Omega)$ é o *Espaço de Sobolev de Ordem Fracionária.*

Neste capítulo apresentaremos estes espaços, cuja construção dar-se-á por interpolação.

Organizaremos este capítulo da seguinte maneira: na primeira seção, construiremos operadores auto-adjuntos S associados ao terno $\{X, Y, a(.,.)\}$, onde X e Y são espaços de Hilbert e $a(.,.)$ é uma forma sesquilinear contínua, hermitiana e coerciva em X. Na segunda seção enuciaremos alguns resultados básicos da teoria espectral para operadores auto-adjuntos. Além disso, estabeleceremos também potências de operadores. Na terceira seção, definiremos a interpolação dos espaços de Hilbert X e Y como sendo $[X, Y]_{\theta,} = D(A^{1-\theta})$ (domínio de $A^{1-\theta}$) para $0 \leq \theta \leq 1$. Finalmente, usando interpolação, apresentaremos os Espaços de Sobolev de Ordem Fracionária.

1.1 Construção de Operadores Auto-adjuntos

Sejam X e Y dois espaços de Hilbert, X subespaço próprio de Y, cujos produtos internos e normas associadas denotamos respectivamente, por $(,)_X$, $\|.\|_X$, $(,)_Y$, $\|.\|_Y$. Suponhamos que X é denso em Y e que a imersão de X em Y é contínua, isto é,

$$\|u\|_Y \leq C \|u\|_X$$

para algum $C > 0$. Observamos que ao longo de nosso trabalho C denotará sempre uma constante positiva.

Consideremos $a : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$ uma função com as seguintes características :

1. **Sesquilinear**, isto é, para todo u, v, w em X e α e β em $\mathbb{C}$

$$\begin{array}{rcl} a(u, \alpha v + \beta w) & = & \overline{\alpha} a(u, v) + \overline{\beta} a(v, w) \\ a(\alpha u + \beta v, w) & = & \alpha a(u, w) + \beta a(v, w) \end{array}.$$

2. **Contínua**, ou seja, existe $C > 0$ tal que,

$$a(u, v) \leq C \|u\|_X \|v\|_X .$$

3. **Coerciva**, isto significa que, existe uma constante $\alpha > 0$ tal que,

$$|a(u, v)| \geq \alpha \|v\|_X^2 \ \forall v \in X.$$

4. **Hermitiana,** isto é, $a(u,v) = \overline{a(v,u)}$, para todo $u, v \in X$.

Fixado $u \in X$, consideremos a aplicação contínua em X dada por

$$T_u(v) : X \to \mathbb{C};\ \ v \longmapsto a(u,v). \tag{1.1}$$

Usando o Teorema de Representação de Riesz, garantimos a existência de um único elemento $\mathcal{A}u \in X$ tal que

$$a(u,v) = T_u(v) = (\mathcal{A}u, v)_X\,,\ \ \forall v \in X. \tag{1.2}$$

Seja $D(S)$ o conjunto dos u em X, para os quais a aplicação T_u, definida em (1.1) é contínua em X em relação a topologia induzida por Y, ou seja $|T_u(v)| \leq C\,\|v\|_Y$. Como X é denso em Y, existe um único prolongamento de T_u a todo Y, que denotaremos por $\widetilde{T}_u$. Usando novamente o Teorema de Representação de Riesz, temos que dado $u \in D(S)$ existe um único Su que satisfaz

$$a(u,v) = \widetilde{T}_u(v) = (Su, u)_Y\,,\ \ \forall v \in X. \tag{1.3}$$

Lema 1.1 *Para $f \in Y$ fixado, as seguintes assertivas são equivalentes:*

(i) $u \in D(S)$ *e* $Su = f$;

(ii) $u \in X$ *e* $a(u,v) = (f,v)_Y$, *para todo* $v \in X$.

Demonstração. $(i) \Rightarrow (ii)$ Seja $u \in D(S)$ com $Su = f$, segue de (1.3) que

$$a(u,v) = (Su,v)_Y = (f,v)_Y,\ \ \forall v \in X$$

$(ii) \Rightarrow (i)$ Seja $u \in X$ tal que $a(u,v) = (f,v)_Y$, para todo $v \in X$. Temos que $v \longmapsto a(u,v)$ é contínua em X munido da topologia induzida por Y, consequentemente $u \in D(S)$. Então de (1.3), obteremos que

$$(Su,v)_Y = a(u,v) = (f,v)_Y,\ \ \forall v \in X.$$

Como X é denso em Y, segue que $(Su,v)_Y = (f,v)_Y$, para todo $v \in Y$, logo $Su = f$. ■

Logo temos a seguinte caracterização de $D(S)$:

$$u \in D(S) \Leftrightarrow u \in X \text{ e } \exists f \in Y,\ a(u,v) = (f,v)_Y,$$

ou seja

$$D(S) = \{u \in X : \exists f \in Y \text{ satisfazendo } a(u,v) = (f,v)_{Y,}\ \forall v \in X\}.$$

Assim $D(S)$ é um subespaço linear de Y e $S : D(S) \to Y$ definido por (1.3) é um operador de Y. Neste contexto, diremos que o operador S é definido pela terno $\{X, Y, a(u,v)\}$.

Teorema 1.1 *Dada o terno $\{X, Y, a(u,v)\}$ e $\mathcal{A}$ definido em (1.2). Então $\mathcal{A}$ é um isomorfismo de X em X.*

Demonstração. Temos que

$$\alpha \|v\|_X^2 \leq |a(v,v)| = (\mathcal{A}v, v)_X \leq \|\mathcal{A}v\|_X \|v\|_X \tag{1.4}$$

o que mostra que $\mathcal{A}$ é injetora. Mostremos que $\mathcal{A}X$ é fechado em X. Seja (v_n) uma sequência em X e $z \in X$ tal que $\mathcal{A}v_n \to z$ em X. Decorre da desigualdade (1.4), para $v = v_n - v_m$, que

$$\|\mathcal{A}v_n - \mathcal{A}v_m\|_X \geq \alpha \|v_n - v_m\|_X.$$

Uma vez que $\mathcal{A}v_n$ é de Cauchy, temos que (v_n) é uma sequência de Cauchy em X, isto significa que, existe $v \in X$, tal que $v_n \to v$ e $\mathcal{A}v_n \to \mathcal{A}v$ em X. Desta forma, pela unicidade do limite, $z = \mathcal{A}_n$ concluindo que $\mathcal{A}X$ é fechado em X. Mostremos que $\mathcal{A}X$ é denso em X. Consideremos $z \in X$ tal que $(\mathcal{A}v, z)_X = 0$, para todo $v \in X$. Em particular, para $v = z$ temos

$$0 = (\mathcal{A}z, z)_X \geq \alpha \|z\|_x^2,$$

o que acarretará $z = 0$. Sendo $\mathcal{A}X$ fechado e denso em X, segue que $\mathcal{A}$ é sobrejetiva. Desta forma provamos o que queríamos. ■

Teorema 1.2 *S é um operador bijetivo de $D(S)$ em Y e S^{-1} é contínuo.*

Demonstração. S é injetiva e S^{-1} é contínua, pois

$$\|u\|_Y^2 \leq C\|u\|_X^2 = \frac{C}{\alpha}\alpha\|u\|_X^2 \leq \frac{C}{\alpha}|a(u,u)| = \frac{C}{\alpha}|(Su,u)_Y| \leq \frac{C}{\alpha}\|Su\|_Y \|u\|_Y, \forall u \in D(S).$$

Vejamos agora que S é sobrejetora. Dada $f \in Y$, pelo Lema 1.1, é suficiente mostrarmos que existe u pertencente Y tal que $a(u,v) = (f,v)_Y$, para todo $v \in X$. Como $v \longmapsto (f,v)_Y$ é uma forma sesquilinear contínua em Y, existe w pertencente X tal que $(f,v)_Y = (w,v)_X$, para todo $v \in X$. Agora tomando $u = \mathcal{A}^{-1}w$ e usando (1.2) obtém-se

$$a(u,v) = a\left(\mathcal{A}^{-1}w, v\right) = (w,v)_X = (f,v)_{Y,}\ \forall v \in X,$$

e o resultado segue. ■

Teorema 1.3 *Com as hipóteses do teorema anterior. Temos:*

(i) S é auto-adjunto;

(ii) $D(S)$ é denso em Y;

(iii) S é fechado.

Demonstração. *(i)* $(u, Sv)_Y = \overline{(Sv, u)_Y} = \overline{a(v,u)} = a(u,v) = (Su, v)_Y$.

(ii) Seja $f \in Y$ tal que $(f, u)_Y = 0$, para todo $u \in D(s)$

Consideremos $u_0 \in D(S)$ de forma que $Su_0 = f$. Temos

$$0 = (f, u)_Y = (Su_0, u) = a(u_0, u) \ \forall u \in D(s).$$

Fazendo $u = u_0$, pela coercividade de $a(u, v)$, seque que

$$0 = a(u_0, u_0) \geq \alpha \left\| u_0 \right\|_X^2 .$$

Como $\alpha > 0$, concluimos que $u_0 = 0$ e portanto $f = 0$. Assim $D(S)$ é denso em Y.

(iii) Sejam (u_n) sequência de $D(S)$, tal que

$$u_n \to u \text{em } Y \ \ e \ \ Su_n = f_n \to f \text{ em } Y.$$

Seja $v = S^{-1}f$, do teorema anterior S^{-1} é contínua, de modo que $u_n \to v$ em Y. Portanto $u = v \in D(S)$ e $Sv = f$. ■

Teorema 1.4 *S é um operador não limitado de Y.*

Demonstração. Suponhamos que S é limitado. Então existe uma constante $C > 0$ tal que $\left\| Su \right\|_Y \leq C \left\| u \right\|_Y$, para todo u $D(S)$. Daí temos

$$\alpha \left\| u \right\|_X^2 \leq |a(u,u)| = \left\| (Su, u) \right\|_Y \leq C \left\| u \right\|_Y^2 , \ \forall u \in D(s),$$

ou seja

$$\left\| u \right\|_X \leq C \left\| u \right\|_Y , \ \forall u \in D(s), \tag{1.5}$$

o que nos leva a concluir que em $D(s)$ as normas $\|.\|_{X,}$ $\|.\|_Y$ são equivalentes. Consideremos v em Y. Como $D(S)$ é denso em Y, existe uma sequência (v_n) de vetores de $D(S)$ tal que $v_n \to v$ em Y. Logo, v_n é de Cauchy em Y e, de (1.5), concluímos que v_n é de Cauchy, também, em X. Então existe $z \in X$ tal que $v_n \to z$ em X. Esta convergência ocorre também em Y. Portanto, pela unicidade do limite, vem que $v = z$. Segue que $X = Y$, o que é um absurdo. Assim S é não limitado. ■

Observação 1.1 *Como estamos interessados em obtermos um espaço entre X e Y, no decorrer do capítulo suporemos que Y tem dimensão infinita, pois caso contrário, a condição de X ser denso em Y é válida se, e somente se, $X = Y$.*

1.2 Teoria Espectral

Teorema 1.5 (Teorema Espectral) *Suponhamos que a imersão de X em Y é compacta e seja S o operador definido pela terno $\{X, Y, a(u,v)\}$. Temos que:*

1. *existe um sistema ortonormal completo e enumerável $(w_\nu)_{\nu\in\Lambda}$ de Y, constituído por vetores próprios de S.*

2. *Se λ_ν são os valores próprios de S correspondetes a w_ν então $\lambda_\nu \to \infty$,*

$$D(S) = \left\{ u \in Y : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^2 \left|(u, w_\nu)\right|^2 < \infty \right\}$$

e

$$Su = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu (u, w_\nu) w_\nu, \ \forall u \in D(S).$$

Além disso, se m é um número inteiro positivo

$$D(S^m) = \left\{ u \in Y : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2m} \left|(u, w_\nu)\right|^2 < \infty \right\}$$

e

$$S^m u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^m (u, w_\nu) w_\nu, \ \ \forall u \in D(S^m).$$

Definição 1.1 *Seja $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.uma função qualquer Definimos h(S) como o operador de Y com domínio*

$$D(h(S)) = \left\{ u \in Y : \sum_{\nu=1}^{\infty} h^2(\lambda_\nu) \left|(u, w_\nu)\right|^2 < \infty \right\} \tag{1.6}$$

e

$$h(S)u = \sum_{\nu=1}^{\infty} h(\lambda_\nu)(u, w_\nu) w_\nu, \ \forall u \in D(h(S)). \tag{1.7}$$

Proposição 1.1 *Suponhamos que S é positivo, isto é, $(Su, u) \geq 0$, para todo $u \in X$. Então o operador A de Y com domínio*

$$D(A) = \left\{ u \in Y : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu \left|(u, w_\nu)\right|^2 < \infty \right\}$$

definido por

$$Au = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_\nu}(u, w_\nu)w_\nu, \ \forall u \in D(A),$$

é o único operador auto-adjunto poitivo de Y que satisfaz a condiçaõ $A^2 = S$.

Observação 1.2 *As demonstrações do teorema (1.5) e da proposições (1.1), encontram-se em [18].*

1.3 Interpolação de Espaços de Hilbert

Consideremos os espaços de Hilbert X e Y nas condições anteriores, isto é, $X \subset Y$, a imersão de X em Y é compacta, X é denso em Y e Y tem dimensão infinita. Seja S o operador definido pela terno $\{X, Y, (u, v)_X\}$. Note que, neste caso temos $a(u, v) = (u, v)_X$, S é auto-adjunto e além disso, para todo $u \in D(S)$ temos

$$(Su, u)_Y = \|u\|_X^2 \geq \beta \|u\|_Y^2 \ \text{com } \beta > 0, \tag{1.8}$$

donde segue que, S é positivo. Aplicando o Teorema Espectral, temos uma sequência (λ_ν) dos valores próprios de S, correspondentes a vetores próprios (w_ν), os quais formam um sistema ortonormal completo de Y, $\lambda_\nu > 0$, para todo ν e $\lambda_\nu \to \infty$.

Denotemos por S^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, ao operador auto-adjunto positivo de Y definido pela função

$$h(\lambda) = \begin{cases} \lambda^\alpha, & \text{se } \lambda \geq 0 \\ 0, & \text{se } \lambda < 0 \end{cases}.$$

Temos que

$$D(S^\alpha) = \left\{ u \in Y : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{2\alpha} \left|(u, w_\nu)\right|^2 < \infty \right\}$$

e

$$S^\alpha u = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^\alpha (u, w_\nu) w_\nu.$$

Denotando por A à raiz quadrada positiva de S (ver a propocição 1.1), temos que

$$X = D(A) \qquad e \qquad (u, v)_X = (Su, v)_Y = (A^2 u, v)_Y = (Au, Av)_Y.$$

Definição 1.2 *O espaço intermédiário $[X, Y]_\theta$, $0 \leq \theta \leq 1$ é, por definição, o domínio do operador $A^{1-\theta}$ munido da norma do gráfico*

$$\|u\|_{[X,Y]_\theta}^2 = \|u\|_Y^2 + \left\|A^{1-\theta} u\right\|_Y^2$$

Explicitamente o domínio de $A^{1-\theta}$ é dado por

$$D\left(A^{1-\theta}\right) = \left\{ u \in Y : \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{1-\theta} \left|(u, w_\nu)\right|^2 < \infty \right\}.$$

Faremos a convenção $A^0 = I$ e para $\alpha = 1$, $A^\alpha = A$. Assim, segue da definição que $[X,Y]_0 = X$ e $[X,Y]_1 = Y$.

Proposição 1.2 *O espaço* $[X,Y]_\theta$ *, munido com a norma do gráfico, é um espaço de Hilbert.*

Demonstração. É suficiente mostrar que $(D(A^{1-\theta}), \|.\|_{[X,Y]_\theta})$ é completo. Sejam (u_n) e $(A^{1-\theta}u_n)$ sequências de Cauchy em Y. Como Y é Hilbert, existem $u, w \in Y$ tais que $u_n \to u$ e $A^{1-\theta}u_n \to w$ em Y, quando $n \to \infty$. Como $A^{1-\theta}u \in D(A^{1-\theta})$ e $w = A^{1-\theta}u$, segue que $u_n \to u$ em $(D(A^{1-\theta}), \|.\|_{[X,Y]_\theta})$, uma vez que $A^{1-\theta}$ é fechado. ■

Observação 1.3 *Em* $[X,Y]_\theta$ *a norma* $\|u\|_E = \left\|A^{1-\theta}u\right\|_Y$ *é equivalente a norma* $\|u\|_{[X,Y]_\theta}$ *. De fato*

$$\begin{aligned}
\left\|A^{1-\theta}u\right\|_Y \|u\|_Y &\geq (A^{1-\theta}u, u)_Y \\
&= \left(S^{\frac{1-\theta}{2}}u, u\right)_Y \\
&= \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{\frac{1-\theta}{2}} (u, w_\nu)^2 \\
&\geq \beta^{\frac{1-\theta}{2}} \sum_{\nu=1}^{\infty} (u, w_\nu)^2 \\
&= \beta^{\frac{1-\theta}{2}} \|u\|_Y^2,
\end{aligned}$$

e portanto, $\left\|A^{1-\theta}u\right\|_Y \geq \beta^{\frac{1-\theta}{2}} \|u\|_Y$ *. Onde* β *é dado em (1.8).*

Definição 1.3 *Definamos o produto interno em* $[X,Y]_\theta$ *por*

$$(u, v)_{[X,Y]_\theta} = (A^{1-\theta}u, A^{1-\theta}v)_Y.$$

Proposição 1.3 *Se* $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$*, então a imersão de* $[X,Y]_{\theta_1}$ *em* $[X,Y]_{\theta_2}$ *é contínua.*

Demonstração. Sabemos que para $\alpha \leq 1$ e $\beta_1 < \beta_2 < 1$ temos que $\alpha^{\beta_1} \geq \alpha^{\beta_2}$. Portanto como há no máximo um número finito de autovalores tais que $\lambda_\nu \leq 1$, por conseguinte, existe uma constante $c > 0$ que verifica a seguinte desigualdade

$$\|u\|_{[X,Y]_{\theta_2}}^2 = \left\|A^{1-\theta_2}u\right\|_Y^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{1-\theta_2} \left\|(u, w_\nu)\right\|_Y^2 \leq c \sum_{\nu=1}^{\infty} \lambda_\nu^{1-\theta_1} \left\|(u, w_\nu)\right\|_Y^2 = c \|u\|_{[X,Y]_{\theta 1}}^2 .$$

Mostrando o que queríamos. ■

Proposição 1.4 *Se a imersão $X \to Y$ é compacta, então a imersão*

$$[X,Y]_{\theta_1} \to [X,Y]_{\theta_2}\,,\ \theta_1 < \theta_2,\ \ (0 < \theta_i < 1)$$

é compacta.

Demonstração. ver [16]. ■

Proposição 1.5 *O espaço $[X,Y]_{\theta_1}$ é denso em $[X,Y]_{\theta_2}$, $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq 1$.*

Demonstração. ver [14]. ■

Proposição 1.6 *Para todo $\theta \in \,]0,1[$, temos que*

$$\left[[X,Y]_{\theta_1}\,, [X,Y]_{\theta_2}\right]_{\theta} = [X,Y]_{(1-\theta)\theta_1+\theta\theta_2}$$

com normas equuivalentes.

Demonstração. ver [16]. ■

Das Proposições antecedentes, resulta que $X \subset [X,Y]_\theta \subset Y$, sendo cada espaço, denso no seguinte. Temos por dualidade que:

$$Y' \subset [X,Y]'_\theta \subset X'$$

sendo cada espaço dual, denso no seguinte.

Teorema 1.6 *Para todo $\theta \in \,]0,1[$,*

$$[X,Y]'_\theta = [Y',X']_{1-\theta}\ \ ,$$

com normas equivalentes.

Demonstração. ver [16]. ■

Fazendo uma síntese do exposto, construímos espaços de Hilbert intermediários entre X e Y, em outras palavras, fizemos uma interpolação entre os espaços X e Y.

1.4 Os Espaços $\mathbf{H}^s$ (Ω)

Aplicaremos o método de interpolação, desenvolvido nas seções anteriores, para definir os Espaços de Sobolev de Ordem Fracionária. Para um estudo mais aprofundado, como também as demontrações dos resultados que seguem, ver Lions & Magenes [16].

Seja $s > 0$ um número real e $m \geq 0$ um inteiro. Os espaços

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \left[H^m(\mathbb{R}^N), H^0(\mathbb{R}^N)\right]_\theta \qquad (1-\theta)m = s \qquad 0 < \theta < 1,$$

são chamados de Espaços de Sobolev de Ordem Fracionária, onde $H^0(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N)$.

Observação 1.4 *Quando Ω é um aberto limitado regular do $\mathbb{R}^N$, definimos $H^s(\Omega)$ como sendo os elementos de $H^s(\mathbb{R}^N)$ restritos a Ω.*

Observação 1.5 *Da Proposição 1.3 temos que, $H^m(\mathbb{R}^N) \subset H^s(\mathbb{R}^N) \subset L^2(\mathbb{R}^N)$.*

O $H^s(\mathbb{R}^N)$ também pode ser definido como sendo o espaço vetorial

$$\left\{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) : \left(1 + \|x\|^2\right)^{\frac{S}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^N),\ x \in \mathbb{R}^N\right\},$$

com produto escalar definido por

$$(u, v)_{H^s(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(1 + \|x\|^2\right)^S \widehat{u}(x)\widehat{v}(x),$$

onde $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ é espaço vetorial das distribuições temperadas, com a convergência pontual de sequências e $\widehat{u}$ denota a transformada de Fourier de u.

Teorema 1.7 *Seja Ω um domínio regular do $\mathbb{R}^N$. Então*

$$[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)]_\theta = H^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega)$$

para todo $s_i > 0$, $s_2 < s_1$, $0 < \theta < 1$, com normas equivalentes.

Teorema 1.8 *Seja Ω um domínio regular do $\mathbb{R}^N$.O espaço $\mathcal{D}(\Omega)$ é denso em $H^s(\Omega)$ se, e somente se, $s \leq \frac{1}{2}$. Então $H_0^s(\Omega) = H^s(\Omega)$. Se $s > \frac{1}{2}$, $H_0^s(\Omega)$ está estritamente contido em $H^s(\Omega)$.*

Teorema 1.9 *Assuma que Ω satifaz as condições do teorema anterior. Seja $s > \frac{1}{2}$. Então as seguintes afirmações são equivalentes*

$$u \in H_0^s(\Omega),$$

$$\begin{cases} u \in H^s(\Omega) \\ \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j} = 0, \qquad 0 \leq j < s - \frac{1}{2}. \end{cases}$$

onde ν designa a normal exterior a fornteira de Ω.

Teorema 1.10 *Seja Ω um domínio limitado regular do $\mathbb{R}^N$. Seja*

$$s_1 > s_2 \geq 0 \qquad s_1 \ \textit{e}\ s_2 \neq \textit{inteiro} + \frac{1}{2} \quad \textit{se}$$

$(1-\theta)s_1 + \theta s_2 \neq z + \frac{1}{2}$ com $z \in \mathbb{Z}$, então

$$[H_0^{s_1}(\Omega), H_0^{s_2}(\Omega)]_\theta = H_0^{(1-\theta)s_1 + \theta s_2}(\Omega),$$

com normas equivalentes.

Capítulo 2

Existência de Solução para um Sistema Hamiltoniano Variacional

Como foi mencionado na introdução, neste capítulo estudaremos a existencia de soluções não triviais para a seguinte classe de sistema de equações :

$$(P_1)\begin{cases} -\Delta v = f(u) \text{ em } \Omega \\ -\Delta u = g(v) \text{ em } \Omega \\ u = v = 0 \text{ na } \partial\Omega \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N, N \geq 3$, com fronteira $\partial\Omega$ suave e Δ é o operador Laplaciano.

O funcional de Lagrangiano associado a (P_1) é dado por

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_\Omega F(u) - \int_\Omega G(v), \ \ \mathbf{u} = (u, v),$$

sendo F e G as funções primitivas de f e g.

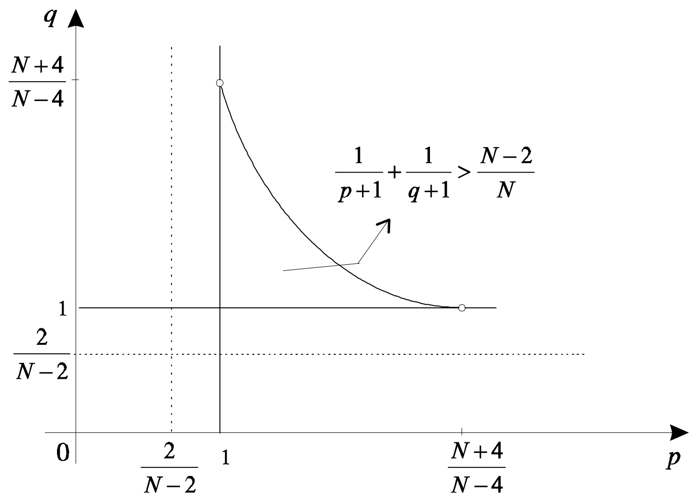
O objetivo deste capítulo é estabelecer resultados preliminares em análise funcional, principalmente no que diz respeito a escolha dos espaços de funções onde u e v deverão pertencer para que $\mathcal{L}_1$ esteja bem definido e, desta forma, obtermos um resultado de existência para pontos críticos de $\mathcal{L}_1$, por meios do Teorema do Passo da Montanha para Funcional Indefinido.

Na primeira seção, consideraremos o sistema (P_1) com condição de crescimento do tipo $f(u) = O(|u|^p)$, $g(v) = O(|v|^p)$ e $(p, q) \in (1, 2^*) \times (1, 2^*)$ onde $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Neste caso o funcional associado esta definido no espaço $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$.

Na segunda seção, veremos o espaço funcional adequado para estudar o sistema (P_1) com condição de crescimento do tipo $f(u) = O(|u|^p)$ e $g(v) = O(|v|^p)$ onde p, q satisfazem

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} > \frac{N-2}{N}, \tag{2.1}$$

conforme figura abaixo



A qual é conhecida como hipérbole crítica. A idéia chave de (2.1) é possibilitar uma maior flexibilidade na escolha de p e q, isto é, a medida que p cresce, q diminui, havendo portanto, uma compensação. Isto nos permitirá estudarmos, na terceira seção, uma classe maior de Sistemas Hamiltonianos.

Peletier & van der Vost em [19] assumindo condição de crescimento (2.1), via argumento de estimativa a priori, mostraram a existência de um par de soluções positivas de (P_1) na bola. Clement, de Figueiredo & Mitidieri em [5], independentemente, usando o mesmo tipo de argumento, provaram a existência de um par de soluções positivas de (P_1) para domínios convexos em geral. Nestes trabalhos foi introdizida esta noção de hipérbole crítica.

2.1 Solução no Espaço $E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$

Sejam $f(u) = |u|^{p-1} u$ e $g(v) = |v|^{q-1} v$ em (P_1), com $1 < p, q < \frac{N+2}{N-2}$. A nossa meta será encontrar pontos críticos do funcional associado ao problema, no espaço de funções $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, de modo a compreender a idéia geral das questões envolvidas no transcorrer do trabalho, como também percebermos a necessidade da introdução, na próxima seção, dos espaços de Sobolev de ordem fracionária e considerarmos $f(u) = O\left(|u|^p\right)$ e $g(u) = O\left(|v|^q\right)$, com (p, q) pontos abaixo da hipérbole crítica.

Feitas estas considerações, ficamos com o problema

$$(P_{2.1})\begin{cases} -\Delta v=|u|^{p-1}\,u \text{ em } \Omega \\ -\Delta u=|v|^{q-1}\,v \text{ em } \Omega \\ u=v=0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

com o funcional associado

$$\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})=B(u,v)-\mathcal{H}(u,v),$$

onde

$$\mathbf{u}=(u,v)\in E=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega),$$

$$B(u,v)=\int_\Omega \nabla u\nabla v \qquad \text{e} \qquad \mathcal{H}(u,v)=\frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}\,dx+\frac{1}{p+1}\int_\Omega |v|^{p+1}\,dx,$$

o qual é bem definido, devido ao teorema de imersão de Sobolev, já que

$$p,q<\frac{N+2}{N-2}. \tag{2.2}$$

Temos que $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})\in C^1(E,\mathbb{R})$, (ver [6]), com

$$\mathcal{L}'_{2.1}(u,v)(\varphi,\psi)=\int_\Omega \nabla u\nabla\psi+\int_\Omega \nabla v\nabla\varphi-\int_\Omega |u|^{q-1}\,u\varphi-\int_\Omega |v|^{p-1}\,v\psi. \tag{2.3}$$

Sejam $E^+=\{(u,+u):u\in H_0^1(\Omega)\}$ e $E^-=\{(u,-u):u\in H_0^1(\Omega)\}$. Observe que $E=E^+\oplus E^-$ com E^+ e E^- ortogonais. Percebemos que a parte quadrática de $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})$ é fortemente indefinido, uma vez que

$$\begin{aligned} B(u,u) &= \int_\Omega |u|^2 \text{ é positiva definida em } E^+, \\ B(u,-u) &= -\int_\Omega |u|^2 \text{ é negativa definida em } E^-. \end{aligned}$$

e $T^\pm: H_o^1(\Omega)\to E^\pm; u\longmapsto (u,\pm u)$ é um isomorfismo isométrico, e portanto B é positivo definido em E^+e negativo definido em E^-, sendo $E^\pm$ de dimensão infinita.

Teorema 2.1 $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})$ *tem um ponto crítico não trivial* $\mathbf{u}$ *em* $E=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$.

Precisaremos para a prova deste Teorema, a qual vira no final, dos Lemas abaixo.

Lema 2.1 *Existe* $L:E\times E$ *autoadjunto e limitado tal que* $L(E^+)\subset E^+, L(E^-)\subset E^-$ *e* $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})=\frac{1}{2}(L\mathbf{u},\mathbf{u})_E-\mathcal{H}(\mathbf{u})$.

Demonstração: Tome

$$L(u,v) = (P^+ - P^-)(u,v) = \left((\frac{u+v}{2}, \frac{u+v}{2}) - (\frac{u-v}{2}, \frac{v-u}{2}) \right) = (v,u),$$

temos que

$$\frac{1}{2}(L\mathbf{u}, \mathbf{u})_E = \frac{1}{2}\left((v,u),(u,v)\right)_E = \frac{1}{2}\left(\int \nabla v \nabla u + \int \nabla u \nabla v \right) = \int \nabla u \nabla v = B(u,v),$$

além disso,

$$(L(u,v),(u,v))_E = ((v,u),(u,v))_E = 2\int \nabla u \nabla v = ((u,v),(v,u))_E = ((u,v), L(u,v))_E$$

e

$$\|L(u,v)\|_E^2 = \|(v,u)\|_E^2 = ((u,v),(u,v))_E = \int |\nabla v|^2 + \int |\nabla u|^2 = \|(u,v)\|_E^2 .$$

Vejamos agora que L é invariante :

Sejam $z_1 = (u,u) \in E^+$ e $z_2 = (u,-u) \in E^-$. Logo $L(z_1) = (u,u) \in E^+$ e $L(z_2) = (u,-u) = (-u,u) \in E^+$. ■

Tome $e^+ = (\phi_1, \phi_1) \in E^+$, onde ϕ_1 é uma autofunção associada ao primeiro autovalor λ_1 de $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$. Sabemos que o problema de autovalor

$$-\Delta u = \lambda u \text{ em } \Omega, \;\; u = 0 \text{ na } \partial\Omega,$$

tem uma sequência crescente de autovalores (λ_n), e uma correspondente sequência de autofunções (ϕ_n), $\phi_n \in H_0^1(\Omega)$, $\int |\phi_n|^2 = 1$, com as propriedades

1. λ_1 é positivo e simples, e $\phi_1(x) > 0$ para $x \in \Omega$;

2. $\lambda_n \to \infty$;

3. $\int \phi_i \phi_j = \int \nabla\phi_i \nabla\phi_j = 0$, para $i \neq j$.

Desse modo, (ϕ_n) é um sistema ortonormal em $L^2(\Omega)$ e ortogonal em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, são sistemas completos.

Sejam

$$\widetilde{E} = \langle e^+ \rangle \oplus E^- = \left\{ \lambda(\phi_1,\phi_1) + (u,-u) : u \in H_0^1(\Omega) \right\},$$

$$S = \partial B_\varrho(0) \cap E^+,$$

$$Q = \left[0, s_1 e^+\right] \oplus \left(\overline{B_{s_2}(0)} \cap E^- \right),$$

onde $[0, s_1e^+] = \{se^+ : 0 < s \leq s_1\}$, B_R denotam uma bola com raio R centrada na origem e $\varrho, s_1 > \varrho$ e s_2 são números a serem determinados posteriormente.

Lema 2.2 *Existem contantes ϱ, α tais que $\mathcal{L}_{2.1}|_S \geq \alpha$.*

Demonstração: Temos que

$$\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u}^+) = \mathcal{L}_{2.1}(u,u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1} - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1}.$$

Do teorema de imersão de Sobolev, resulta que $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{q+1}$ e $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}$ com imersão contínua, ou seja

$$\|u\|_{L^{q+1}} \leq C\,\|u\|_{H_0^1} \;\; e \;\; \|u\|_{L^{p+1}} \leq C\,\|u\|_{H_0^1}.$$

Decorre então que

$$\mathcal{L}_{2.1}(u,u) = \|u\|_{H_0^1}^2 - \frac{C}{q+1}\,\|u\|_{H_0^1}^{q+1} - \frac{C}{p+1}\,\|v\|_{H_0^1}^{p+1} \;\text{ onde } p+1, q+1 > 2.$$

Desta forma para u pequeno, $\mathcal{L}_{2.1}(u,u)$ é positivo, já que a primeira parcela da direita domina as demais. Por outro lado

$$\mathcal{L}_{2.1}(u,u) = \|u\|_{H_0^1}^2 \left[1 - \left(\frac{C}{q+1}\,\|u\|_{H_0^1}^{q-1} + \frac{C}{p+1}\,\|u\|_{H_0^1}^{p-1}\right)\right].$$

Note que $\eta(u,u) = \frac{C}{q+1}\,\|u\|_{H_0^1}^{q+1} + \frac{C}{p+1}\,\|u\|_{H_0^1}^{p+1}$ é contínuo e $\eta(0) = 0$. Logo $\exists\sigma = \sigma(\varepsilon)$ tal que $\eta(u) \leq \varepsilon$ se $0 \leq u \leq \sigma$. Ficamos com

$$\mathcal{L}_{2.1}(u,u) \geq \|u\|_{H_0^1}^2 (1-\varepsilon).$$

Finalmente, tomando $\varrho = \sigma$ e $\alpha = \varrho^2(1-\varepsilon)$, concluímos a demonstração do lema. ■

Lema 2.3 *Existe uma contante $w < \alpha$ tal que $\mathcal{L}_{2.1}|_{\partial Q_{\widetilde{E}}} \leq w$, onde $\partial Q_{\widetilde{E}}$ denota a fronteira de Q com respeito a $\widetilde{E}$.*

Demonstração: Faremos a prova com $w = 0$, portanto teremos que determinar s_1 e s_2 para os quais $\mathcal{L}_{2.1}|_{\partial Q_{\widetilde{E}}} \leq 0$. Analizaremos por partes a a fronteira de Q com respeito a $\widetilde{E}$ a qual, consiste em três partes, $Q \cap \{s = 0\}$, o lado $Q \cap \{s = s_1\}$ e as laterais $[0, se^+] \oplus (\partial Bs_2 \cap E^-)$.

Em $Q \cap \{s = 0\}$ temos

$$\mathcal{L}_{2.1}(u,-u) = -\int_\Omega |\nabla u|^2 - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1} - \frac{1}{p+1}\int_\Omega |u|^{p+1} \leq 0,$$

o que prova o Lema neste caso.

Em $\partial Q_{\widetilde{E}} \diagdown E^{-}$, considere $\mathbf{u} = (u, -u) + se^{+} \in \widetilde{E}$, temos que $\mathbf{u} = (u, -u) + s(\phi_1, \phi_1) = (u + s\phi, -u + s\phi_1)$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u}) &= \int_\Omega \nabla (u + s\phi_1) \nabla (-u + s\phi_1) - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u + s\phi_1|^{q+1} \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |-u + s\phi_1|^{p+1} \\ &= -\int_\Omega |\nabla u|^2 + s^2 \int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 - \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u + s\phi_1|^{q+1} \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_\Omega |-u + s\phi_1|^{p+1} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Escrevendo $E^{-} = \langle \phi_1 \rangle \oplus \langle \phi_1 \rangle^{\perp}$, sendo $\langle . \rangle$ o espaço gerado, resulta que $u = t\phi_1 + u_2$, onde $u_2 \perp \langle \phi_1 \rangle$. Ficamos com

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{q+1} \int_\Omega |u + s\phi_1|^{q+1} + \frac{1}{p+1} \int_\Omega |-u + s\phi_1|^{p+1} \\ &\geq \frac{1}{q+1} \int_\Omega |t\phi_1 + u_2 + s\phi_1|^{q+1} + \frac{1}{p+1} \int_\Omega |-t\phi_1 - u_2 + s\phi_1|^{p+1} \\ &\geq \left(\frac{C}{q+1} \left(\int_\Omega |u_2 + (t+s)\phi_1|^2 \right)^{\frac{q+1}{2}} + \frac{C}{p+1} \left(\int_\Omega |-u_2 + (s-t)\phi_1|^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} \right) \\ &= \frac{C}{q+1} \left(\int_\Omega |u_2|^2 \right)^{\frac{q+1}{2}} + \frac{C}{q+1} |t+s|^{q+1} + \frac{C}{p+1} \left(\int_\Omega |u_2|^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} + \frac{C}{p+1} |s-t|^{p+1}, \end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u}) &\leq s^2 \int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 - \frac{C}{q+1} |t+s|^{q+1} - \frac{C}{p+1} |s-t|^{p+1} \\ &\quad - \frac{C}{q+1} \left(\int_\Omega |u_2|^2 \right)^{\frac{q+1}{2}} - \frac{C}{p+1} \left(\int_\Omega |u_2|^2 \right)^{\frac{p+1}{2}} - \int_\Omega |\nabla u|^2, \end{aligned}$$

onde $\gamma(s,t) = s^2 \int |\nabla \phi_1|^2 - \frac{C}{q+1} (t+s)^{q+1} - \frac{C}{p+1} (s-t)^{p+1} \leq 0$, para todo $s \geq s_1$. Desta forma, $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})$ é negativo em $Q \cap \{s = s_1\}$. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u}) &\leq s^2 \int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 - \frac{C}{q+1} |t+s|^{q+1} - \frac{C}{p+1} |s-t|^{p+1} \\ &\quad - \frac{C}{q+1} \|u_2\|_{L^2}^{q+1} - \frac{C}{p+1} \|u_2\|_{L^2}^{p+1} - \int |\nabla u|^2 \\ &\leq s^2 \int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 - \frac{C}{q+1} |t+s|^{q+1} - \frac{C}{p+1} |s-t|^{p+1} \\ &\quad - C \left(\frac{C}{q+1} \right) \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^{q+1} - C \left(\frac{C}{p+1} \right) \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} - \int |\nabla u|^2 \\ &\leq s^2 \int_\Omega |\nabla \phi_1|^2 - \frac{C}{q+1} s^{q+1} - \frac{C}{q+1} t^{q+1} - \frac{C}{p+1} |s-t|^{p+1} \\ &\quad - C \left(\frac{C}{q+1} \right) C - C \left(\frac{C}{p+1} \right) \|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^{p+1} - \int_\Omega |\nabla u|^2 . \end{aligned}$$

Analizando a expressão acima, vemos que é possível determinar s_2 grande o suficiente, para termos $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u}) \leq 0$ nas laterais $[0, se^+] \oplus (\partial B s_2 \cap E^-)$. ■

Definição 2.1 *Diz que um funcional $\phi : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais Smale no nível c $(c \in \mathbb{R})$, se toda sequência $(z_n) \subset E$ tal que*

$$|\phi(z_n)| \leq c, \qquad e \qquad |\langle \nabla\phi(z_n), \eta\rangle| \leq \epsilon_n \|\eta\|_E\,, \ \forall \eta \in E, \ e \ \epsilon_n \to 0$$

possui uma subsequência convergente. Quando ϕ satisfaz a condição de Palais Smale para todo nível c, dizemos que ϕ satisfaz a condição de Palais-Smale e denotamos por PS.

A seguir, verificaremos que o funcional $\mathcal{L}_{2.1}$ satisfaz a condição PS.

Lema 2.4 *Seja $(\mathbf{u}_n)$ em E, tal que $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u}_n)$ é limitada em E e $\acute{\mathcal{L}}_{2.1}(\mathbf{u}_n) \to 0$ com $n \to \infty$, então $(\mathbf{u}_n)$ é limitado.*

Demonstração: Temos por hipótese que

$$\left|\acute{\mathcal{L}}_{2.1}(u_n, v_n)(u_n, v_n)\right| \leq \epsilon_n \|(u_n, v_n)\|_E \ \text{ e } \ |\mathcal{L}_{2.1}(u_n, v_n)| \leq M,$$

logo

$$\begin{aligned} M + \epsilon_n \|(u_n, v_n)\|_E &\geq \mathcal{L}_{2.1}(u_n, v_n) - \frac{1}{2}\acute{\mathcal{L}}_{2.1}(u_n, v_n)(u_n, v_n) \qquad (2.5)\\ &= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right]\int_\Omega |u_n|^{q+1} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{p+1}\right]\int_\Omega |v_n|^{p+1}. \end{aligned}$$

Portanto, com o uso da desigualdade de Holder e o Teorema de Imersão de Sobolev, segue que

$$\begin{aligned} & \left\|P^+(u_n, v_n)\right\|_{E^+}^2 - \epsilon_n \left\|P^+(u_n, v_n)\right\|_{E^+} \\ \leq\ & \left|\left\langle L(u_n, v_n), P^+(u_n, v_n)\right\rangle_{E^+} - \left\langle \acute{\mathcal{L}}_{2.1}(u_n, v_n), P^+(u_n, v_n)\right\rangle_{E^+}\right| \\ =\ & \left|\acute{\mathcal{H}}(u_n, v_n)P^+(u_n, v_n)\right| \\ =\ & \left|\int_\Omega |u_n|^{q-1} u_n \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)\right| + \left|\int_\Omega |v_n|^{-1} u_n \left(\frac{u_n + v_n}{2}\right)\right| \\ \leq\ & \left\{\left[\int_\Omega (|u_n|^q)^{(q+1)'}\right]^{\left(\frac{1}{q+1}\right)'}\right\}\left(\int_\Omega \left|\frac{u_n + v_n}{2}\right|^{q+1}\right)^{\frac{1}{q+1}} + \\ & \left\{\left[\int_\Omega (|v_n|^p)^{(p+1)'}\right]^{\left(\frac{1}{p+1}\right)'}\right\}\left(\int_\Omega \left|\frac{u_n + v_n}{2}\right|^{p+1}\right)^{\frac{1}{p+1}} \\ \leq\ & \left[\left(\int_\Omega |u_n|^{q+1}\right)^{\frac{q}{q+1}} + \left(\int_\Omega |v_n|^{p+1}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right] C \left\|\frac{u_n + v_n}{2}\right\|_{H_0^1}, \end{aligned}$$

donde obtemos a desigualdade

$$\begin{aligned} & \left\|P^+(u_n,v_n)\right\|_{E^+}^2 - \epsilon_n \left\|P^+(u_n,v_n)\right\|_{E^+} \\ \leq \; & \left\|P^+(u_n,v_n)\right\|_{E^+} C \left[\left(\int_\Omega |u_n|^{q+1} \right)^{\frac{q}{q+1}} + \left(\int_\Omega |v_n|^{p+1} \right)^{\frac{p}{p+1}} \right]. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Agora, dividindo ambos membros de (2.6) por $\|P^+(u_n,v_n)\|_{E^+}$, obtém-se

$$\left\|P^+(u_n,v_n)\right\|_{E^+} - \epsilon_n \leq C \left[\left(\int_\Omega |u_n|^{q+1} \right)^{\frac{q}{q+1}} + \left(\int_\Omega |v_n|^{p+1} \right)^{\frac{p}{p+1}} \right].$$

Procedendo de forma análoga para $P^-(u_n,v_n)$, e utilizando (2.5), temos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_n\|_E &= \left\|P^+(u_n,v_n)\right\|_{E^+} + \left\|P^-(u_n,v_n)\right\|_{E^-} \\ &\leq C \left[\left(\int_\Omega |u_n|^{q+1} \right)^{\frac{q}{q+1}} + \left(\int_\Omega |v_n|^{p+1} \right)^{\frac{p}{p+1}} \right] \\ &\leq C \left[\left(M + \epsilon_n \|(u_n,v_n)\|_E^{\frac{q}{q+1}} \right) + \left(M + \epsilon_n \|(u_n,v_n)\|_E^{\frac{p}{p+1}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Isto implica que $\|\mathbf{u}_n\|_E \leq R$ como queríamos provar. ■

Lema 2.5 *Seja* $(\mathbf{u}_n)$ *em* E *satisfazendo as condições do lema anterior. Então* $\mathbf{u}_n$ *possui uma subsequência convergente.*

Demonstração: Pelo Lema anterior $\|\mathbf{u}_n\|_E \leq R, \forall u \in \mathbb{N}$ e daí obtemos uma subsequência $(\mathbf{u}_{n_k})$ de $(\mathbf{u}_n)$ tal que $\mathbf{u}_{nk} \to \mathbf{u}$ quando $k \to \infty$, em $L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega)$, devido a imersão compacta $E = H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega)$. Agora usando o fato de $H_o^1(\Omega) \times H_o^1(\Omega)$ ser reflexivo e que $\|\mathbf{u}_{n_k}\|_E \leq R$, obteremos uma outra subsequência de $(\mathbf{u}_{n_k})$, que continuaremos denotando por $\mathbf{u}_{n_k}$, tal que

$$\int_\Omega \nabla \mathbf{u}_{nk} \nabla \alpha \to \int_\Omega \nabla \mathbf{u} \nabla \alpha, \;\; \forall \alpha \in E, \tag{2.7}$$

o que significa que $\mathbf{u}_{n_k} \rightharpoonup \mathbf{u}$ quando $k \to \infty$.

Queremos provar que $\mathbf{u}_{nk} \to \mathbf{u}$ em E, isto é

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega |\nabla \mathbf{u}_{nk} - \nabla \mathbf{u}|^2 = 0. \tag{2.8}$$

Como $\int |\nabla \mathbf{u}_{nk} - \nabla \mathbf{u}|^2 = \int \langle \nabla \mathbf{u}_{nk} - \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}_{nk} - \nabla \mathbf{u} \rangle = \int |\nabla \mathbf{u}_{nk}|^2 - 2 \int \nabla \mathbf{u}_{nk} \nabla \mathbf{u} + \int |\nabla \mathbf{u}|^2$ e $\int \nabla \mathbf{u}_{nk} \nabla \mathbf{u} \to \int |\nabla \mathbf{u}|^2$ (obtido de (2.7), fazendo $\alpha = \mathbf{u}$), restá-nos apenas mostrar que $\int |\nabla \mathbf{u}_{nk}|^2 \to \int |\nabla \mathbf{u}|^2$, para obtermos o que queremos. Isto é equivalente a mostrar que

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \nabla \mathbf{u}_{nk} \left(\nabla \mathbf{u}_{nk} - \nabla \mathbf{u} \right) = 0.$$

Fazendo em (2.3) $\psi = u_{nk} - u$ e $\varphi = 0$, por hipótese, temos

$$\int_\Omega \nabla u_{nk} \left(\nabla u_{nk} - \nabla u\right) - \int_\Omega |v_n|^{p-1} |v_n(u_{nk} - u)| \leq \epsilon_n \|u_{nk} - u\|_{H_o^1(\Omega)} \to 0, \text{ quando } k \to \infty$$

Por outro lado temos que $\left|\int |v_n|^{p-1} v_n(u_{nk} - u)\right| \to 0$, já que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega |v_n|^{p-1} v_n(u_{nk} - u)\right| &\leq \int_\Omega |v_n|^q |u_{nk} - u| \\ &\leq \left(\int_\Omega |v_n|^{q(p+1)\acute{}}\right)^{\frac{1}{(p+1)\acute{}}} \left(\int_\Omega |u_{nk} - u|^{p+1}\right)^{p+1} \to 0, \text{ quando } k \to \infty.\end{aligned}$$

Logo $\int \nabla u_{nk} \left(\nabla u_{nk} - \nabla u\right) \to 0$, como pretendiamos provar. ■

Prova do teorema 2.1:

Do fato de $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})$ ser fortemente indefinido, usaremos o teorema (0.1) enuciado na introdução com $H = E = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$, $H_1 = E^+$ e $H_1 = E^+$. Decorre do lema (2.5) que, $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Ver-se em Rabinowitz [21] que a condição (iii) de($\mathcal{L}_3$) é atendida. Fora isto, temos as demais hipóteses do teorema (0.1) satisfeitas, decorrentes dos lemas (2.1), (2.2), (2.3) e (2.4). Consequentemente, podemos garantir a existência de um ponto crítico não trivial de $\mathcal{L}_{2.1}(\mathbf{u})$. ■

2.2 Resultados Preliminares

Nesta seção apresentaremos o espaço de Sobolev $\theta^s(\Omega)$, e definiremos a posteriori, $E^s(\Omega) = \theta^s(\Omega) \times \theta^{2-s}(\Omega)$, como também a definição precisa de $\mathcal{L}_2(\mathbf{u})$ para $\mathbf{u} = (u, v)$ em $E^s(\Omega)$. A escolha do parâmetro s dependerá da não linearidade de f e g.

Como vimos no capítulo 1, os espaços de Sobolev de ordem fracionária H^s, são definidos por interpolação entre dois espaços de Sobolev, isto é, $H^s(\Omega) = [H^m(\Omega), H^0(\Omega)]_\theta$, $s = (1-\theta)m$ e $0 \leq \theta \leq 1$. Por definição $H^s(\Omega)$ é o domínio de um operador $A^{1-\theta}$, onde $A = \sqrt{S}$, sendo S um operador auto-adjunto, positivo, e em geral não limitado, definido pelo terno $\{H^m(\Omega), H^0(\Omega), (,)_{H^m}\}$.

Seja o operador $A = -\Delta$, com domínio $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, auto-adjunto e positivo. Definiremos $\theta^s(\Omega)$ como o domínio de $A^{1-\theta}$, onde $s = (1-\theta)2$ e $0 \leq \theta \leq 1$, denotado por $D\left((-\Delta)^{s/2}\right) = \theta^s(\Omega)$.

Afim de mostrarmos explicitamente os elementos de $\theta^s(\Omega)$, usaremos coeficientes de Fourier de u e v com respeito a base ortonormal fixada de $L^2(\Omega)$, a qual consiste de autofunções ϕ_1,

ϕ_2, ϕ_3,... de $-\Delta$, $\phi_1 > 0$, correpondentes os autovalores positivos $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq ... \uparrow \infty$, contados com multiplicidade. Consideraremos que as autofunções são normalizadas em $L^2(\Omega)$ daí

$$\int_\Omega \phi_i \phi_j = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Então

$$L^2(\Omega) = \left\{ u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k : \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 < \infty \right\},$$

e

$$(u,v)_{L^2} = \int_\Omega uv = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k, \qquad u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k, \qquad v = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \phi_k.$$

Os operadores $(-\Delta)^{\frac{S}{2}}$ são definidos por

$$(-\Delta)^{\frac{S}{2}} u = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{s}{2}} \xi_k \phi_{k,}$$

com domínio

$$D\left((-\Delta)^{\frac{S}{2}}\right) = \theta^s(\Omega) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k \in L^2(\Omega) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \xi_k^2 < \infty \right\}.$$

Sabe-se que $D(A^s) = \theta^s(\Omega) = H^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$, $0 < s < 1/2$, e $\theta^{1/2}(\Omega) \subset H^{1/2}(\Omega)$, (ver teorema (1.8) ou [11]). Decorre do teorema (1.9) que $H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) = H_0^s(\Omega)$ para $1/2 < s \leq 1$, portanto temos $\theta^s(\Omega) = H_0^s(\Omega)$ para $1/2 < s \leq 1$ e $\theta^s(\Omega) = H^s(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ para $1 < s \leq 2$.

Para $s \geq 0$ o espaço $\theta^s(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$((u,v))_{\theta^s} = (u,v)_{L^2} + \left((-\Delta)^{s/2} u, (-\Delta)^{s/2} v\right)_{L^2}. \tag{2.9}$$

A norma correspondente é a norma do gráfico do operador $(-\Delta)^{s/2}$.

Como $T : \theta^s(\Omega) \to \varpi^s(\Omega)$; $u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k \longmapsto (\xi_k)$ é isomofismo isométrico, podemos identificar $\theta^s(\Omega)$ com o espaço de Hilbert

$$\varpi^s = \left\{ \xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \xi_k^2 < \infty \right\},$$

com o produto interno

$$(\xi, \eta)_s = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \xi_k \eta_k, \quad \forall \xi, \eta \in \varpi^s. \tag{2.10}$$

Se $s=0$, ϖ^s é o espaço de Hilbert separável l^2, o qual pode ser identificado com o L^2. Como u e v em θ^s, são representados por ξ e η em ϖ^s, então poderemos ver (2.9) como

$$((u,v))_{\theta^s} = (\xi,\eta)_0 + (\xi,\eta)_s\,,$$

além disso,

$$(u,v)_{\theta^s} = \left((-\Delta)^{s/2}u, (-\Delta)^{s/2}v\right)_{L^2} = (\xi,\eta)_s\,,$$

é um produto interno equivalente ao produto interno definido em (2.9), visto que, denotando as normas correspontendes por $\|u\|_{\theta^s} = |\xi|_s$ e observando que $|\xi|_s^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \xi_k^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1^s \xi_k^2 = \lambda_1^s \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k^2 = \lambda_1^s |\xi|_0^2$, temos

$$\|u\|_{L^2} = \|\xi\|_{l^2} = |\xi|_0 \leq \lambda_1^{\frac{-s}{2}} |\xi|_s = \lambda_1^{\frac{-s}{2}} \|u\|_{\theta^s}\,. \tag{2.11}$$

Definiremos $\theta^{-s}(\Omega)$ com $s>0$, como uma representação do espaço dual $\theta^s(\Omega)'$. Como $\theta^s(\Omega)$ pode ser identificado com ϖ^s, $\theta^s(\Omega)'$ pode ser identificado com o dual de ϖ^s. Por outro lado, $(\varpi^s)' \approx \varpi^{-s}$, uma vez que $U : (\varpi^s)' \to \varpi^{-s}$, definida por $U(f) \doteq f(\phi_k)$, é um isomorfismo. De fato, U está bem definida, já que pelo teorema de Riesz-Fréchet, $f(\phi_k) = (\phi_k, \sigma_k)_s$, para algum $\sigma_k \in \varpi^s$ e por (2.10)

$$(\phi_k, \sigma_k)_s = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \phi_k \sigma_k,$$

e portanto

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} f(\phi_k)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2s} \phi_k^2 \sigma_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{s} \sigma_k^2 \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k^2 \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{s} \sigma_k^2 < \infty,
\end{aligned}$$

logo $f(\phi_k) \in \varpi^{-s}$. Por outro lado, para todo $\beta_k \in \varpi^{-s}$, podemos obter um funcional linear e limitado $g \in \varpi^s$. Com efeito, defina g em ϖ^s por

$$g(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \beta_k, \text{ onde } \xi = (\xi_k) \in \varpi^s.$$

Então g é linear, e a limitação decorre de

$$\begin{aligned}
|g(\xi)| &\leq \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k \beta_k| = \sum_{k=1}^{\infty} \left| \lambda_k^{\frac{s}{2}} \xi_k \lambda_k^{-\frac{s}{2}} \beta_k \right| \qquad (2.12) \\
&\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \xi_k^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \beta_k^2 \right)^{1/2} \\
&\leq \|\xi\|_{\varpi^s} C.
\end{aligned}$$

Finalmente, provemos que a norma de f é igual a norma de $f(\phi_k) = \eta_k$. De (2.12) temos

$$|f(\xi)| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \eta_k\right| \leq \|\xi\|_{\varpi^s} \|\eta_k\|_{\varpi^{-s}}.$$

Tomando o supremo sobre todo ξ de norma um, segue que

$$\|f\| \leq \|\eta_k\|_{\varpi^{-s}}.$$

Juntamente com a inequação

$$\|\eta_k\|_{\varpi^{-s}} = \|f(\phi_k)\|_{\varpi^{-s}} \leq \|f\| \|\phi_k\| = \|f\|,$$

obtemos o desejado.

Desta maneira o espaço $\theta^s(\Omega)'$ é isomorfo a $(\varpi^s)'$, como também, para $0 < s \leq 2$, ϖ^{-s} é isomorfo a

$$\theta^{-s}(\Omega) = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k \in \left(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\right)' : \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{-s} \xi_k^2 < \infty \right\}.$$

O espaço $\theta^{-s}(\Omega)$ herda o produto interno de ϖ^{-s}. Da proposição (1.5), vemos que $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ é denso em $\theta^s(\Omega)$, portanto temos que $\theta^{-s}(\Omega)$ é o subespaço de elementos em $(H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))'$, os quais, são limitados com respeito a norma de $\theta^s(\Omega)$. A identificação de $\theta^{-s}(\Omega)$ com $\theta^s(\Omega)'$ pode ser vista de maneira similar da identificação de $(\varpi^s)'$ com ϖ^{-s}. Note que $(-\Delta)^r$: $\theta^s(\Omega) \to \theta^{s-2r}(\Omega)$ é um isomorfismo.

Definamos, o seguinte espaço produto de Hilbert

$$E^s(\Omega) = \theta^s(\Omega) \times \theta^{2-s}(\Omega), 0 < s < 2.$$

Introduzimos este espaço com a finalidade de podermos extender unicamente o domínio de $A(\mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ a funções u e v com melhores propriedades no sentido da regularidade. Como

$$A(\mathbf{u}) = (u,v)_{H_0^1} = (u,v)_{\theta^1} = (\xi,\eta)_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k \eta_k = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{s}{2}} \xi_k \lambda_k^{1-\frac{s}{1}} \eta_k,$$

temos que

$$|A(\mathbf{u})| \leq \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^s \xi_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{2-s} \eta_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}} = \|u\|_{\theta^s} \|v\|_{\theta^{2-s}}.$$

O nosso objetivo agora, é expor, explicitamente, a extensão única de $A(\mathbf{u})$ a $E^s(\Omega)$. Para isto, note que $-\Delta$ é uma função isométrica da primeira (segunda) componente de $E^s(\Omega)$ sobre o

segundo (primeira) componente, já que $\left((-\Delta)^{s/2}u, (-\Delta)^{s/2}v\right)_{L^2} = \left((-\Delta)^{(s-2)/2}(-\Delta)u, (-\Delta)^{(s-2)/2}(-\Delta)v\right)$
Portanto

$$-\Delta_R = \begin{pmatrix} 0 & -\Delta \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} : E^s(\Omega) \to \theta^{-s}(\Omega) \times \theta^{s-2}(\Omega) = (E^s(\Omega))',$$

definida por

$$-\Delta_R \mathbf{u} = (-\Delta v, -\Delta u)\,, \qquad \mathbf{u} = (u, v) \in E^s(\Omega),$$

é uma isometria. Fixado $\mathbf{u} \in E^s(\Omega)$, a aplicação

$$\begin{array}{ccc} & F\mathbf{u} & \\ \mathbf{v} & \longmapsto & \frac{1}{2}\left\langle -\Delta_R \mathbf{u}, \mathbf{v}\right\rangle \end{array}$$

é linear e contínua em $E^s(\Omega)$ logo, pelo teorema de representação de Riesz-Frechet, existe único $L\mathbf{u} \in E^s(\Omega)$, tal que

$$\frac{1}{2}\left\langle -\Delta_R \mathbf{u}, \mathbf{v}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(L\mathbf{u}, \mathbf{v}\right)_{E^s}, \forall \mathbf{v} \in E^s(\Omega),$$

em particular, temos

$$\frac{1}{2}\left\langle -\Delta_R \mathbf{u}, \mathbf{u}\right\rangle = \frac{1}{2}\left(L\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_{E^s}.$$

O próximo passo, será a determinação de L.

Para $u, v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, usando novamente o teorema de representação de Riesz-Fréchet e a segunda identidade de Green, temos que

$$\frac{1}{2}\left\langle -\Delta_R \mathbf{u}, \mathbf{u}\right\rangle = \frac{1}{2}\int_\Omega (-\Delta u)\, v + \frac{1}{2}\int_\Omega u\,(-\Delta v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v = A(\mathbf{u}),$$

nesse caso

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left\langle -\Delta_R \mathbf{u}, \mathbf{u}\right\rangle &= A(\mathbf{u}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{\frac{s}{2}} \xi_k \lambda_k^{1-\frac{s}{1}} \eta_k \\ &= \left((-\Delta)^{s/2}u, (-\Delta)^{1-s/2}v\right)_{L^2} \\ &= \frac{1}{2}\left((-\Delta)^{s/2}u, (-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{1-s}v\right)_{L^2} + \\ &\quad \frac{1}{2}\left((-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{s-1}u, (-\Delta)^{(1-s)/2}v\right)_{L^2} \\ &= \frac{1}{2}\left((-\Delta)^{s-1}u, v\right)_{\theta^{2-s}} + \frac{1}{2}\left(u, (-\Delta)^{1-s}v\right)_{\theta^s} \\ &= \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} 0 & (-\Delta)^{1-s} \\ (-\Delta)^{s-1} & 0 \end{pmatrix}\mathbf{u}, \mathbf{u}\right)_{E^s}, \end{aligned}$$

e daquí concluímos que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & (-\Delta)^{1-s} \\ (-\Delta)^{s-1} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.13}$$

Lema 2.6 *L definido em (2.13) é auto adjunto, limitado e uma isometria.*

Demonstração: Temos que,

$$\begin{aligned}
(L\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)_{E^s} &= \left(\left((-\Delta)^{1-s}v_{1,}(-\Delta)^{s-1}u_1\right),(u_2,v_2)\right)_{E^s} \\
&= \left((-\Delta)^{1-s}v_{1,}u_2\right)_{\theta^s}+\left((-\Delta)^{s-1}u_1,v_2\right)_{\theta^{2-s}} \\
&= \left((-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{1-s}v_{1,}(-\Delta)^{s/2}u_2\right)_{L^2}+ \\
&\quad \left((-\Delta)^{(2-s)/2}(-\Delta)^{s-1}u_1,(-\Delta)^{(2-s)/2}v_2\right)_{L^2} \\
&= \left((-\Delta)^{(2-s)/2}v_{1,}(-\Delta)^{s/2}u_2\right)_{L^2}+\left((-\Delta)^{s/2}u_1,(-\Delta)^{(2-s)/2}v_2\right)_{L^2} \\
&= \left(u_1,(-\Delta)^{1-s}v_2\right)_{\theta^s}+\left(v_{1,}(-\Delta)^{s-1}u_2\right)_{\theta^{2-s}} \\
&= \left((u_1,v_1),\left((-\Delta)^{1-s}v_2,(-\Delta)^{s-1}u_2\right)\right)_{E^s}=(\mathbf{u}_1,L\mathbf{u}_2)_{E^s}.
\end{aligned}$$

Portanto L é auto-adjunto. Além disso

$$\begin{aligned}
(L\mathbf{u}_1,L\mathbf{u}_2)_{E^s} &= \left(\left((-\Delta)^{1-s}v_{1,}(-\Delta)^{s-1}u_1\right),\left((-\Delta)^{1-s}v_{2,}(-\Delta)^{s-1}u_2\right)\right)_{E^s} \\
&= \left((-\Delta)^{1-s}v_{1,}(-\Delta)^{1-s}v_2\right)_{\theta^s}+\left((-\Delta)^{s-1}u_1,(-\Delta)^{s-1}u_2\right)_{\theta^{2-s}} \\
&= \left((-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{1-s}v_{1,}(-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{1-s}v_2\right)_{L^2}+ \\
&\quad \left((-\Delta)^{(2-s)/2}(-\Delta)^{s-1}u_1,(-\Delta)^{(2-s)/2}(-\Delta)^{s-1}u_2\right)_{L^2} \\
&= \left((-\Delta)^{(2-s)/2}v_{1,}(-\Delta)^{(2-s)/2}v_2\right)_{L^2}+\left((-\Delta)^{s/2}u_1,(-\Delta)^{s/2}u_2\right)_{L^2} \\
&= (\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2)_{E^s},
\end{aligned}$$

o que mostra que L é isométrico. Resta-nos mostrar que L é limitado. De fato,

$$\begin{aligned}
\|L(\mathbf{u})\|_{E^s}^2 &= \left\|\left((-\Delta)^{1-s}v,(-\Delta)^{s-1}u\right)\right\|_{E^s}^2 \\
&= \left(\left((-\Delta)^{1-s}v,(-\Delta)^{s-1}u\right),\left((-\Delta)^{1-s}v,(-\Delta)^{s-1}u\right)\right)_{E^s} \\
&= \left((-\Delta)^{1-s}v,(-\Delta)^{1-s}v\right)_{\theta^s}+\left((-\Delta)^{s-1}u,(-\Delta)^{s-1}u\right)_{\theta^{2-s}} \\
&= \left((-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{1-s}v,(-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{1-s}v\right)_{L^2}+ \\
&\quad \left((-\Delta)^{(2-s)/2}(-\Delta)^{s-1}u,(-\Delta)^{(2-s)/2}(-\Delta)^{s-1}u\right)_{L^2} \\
&= \left((-\Delta)^{(2-s)/2}v,(-\Delta)^{(2-s)/2}v\right)_{L^2}+\left((-\Delta)^{s/2}u,(-\Delta)^{s/2}u\right)_{L^2} \\
&= \|u\|_{\theta^s}^2+\|v\|_{\theta^{2-s}}^2=\|\mathbf{u}\|_{E^s}^2.
\end{aligned}$$

■

Introduzimos as diagonais

$$E^{\pm}=\left\{\left(u,\pm(-\Delta)^{s-1}u\right):u\in\theta^s(\Omega)\right\}.$$

Veja que E^+ e E^- são multualmente ortogonais:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)_{E^s} &= \left(\left(u, +(-\Delta)^{s-1}u\right), \left(u, -(-\Delta)^{s-1}u\right)\right)_{E^s} \\
&= (u,u)_{\theta^s} - \left((-\Delta)^{s-1}u, (-\Delta)^{s-1}u\right)_{\theta^{2-s}} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Temos

$$E^s(\Omega) = E^+ \oplus E^- = \left\{\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-, \mathbf{u}^\pm \in E^\pm\right\}.$$

Note que

$$L\mathbf{u}^\pm = L\left(u, \pm(-\Delta)^{s-1}u\right) = \left(\pm u, (-\Delta)^{s-1}u\right) = \pm\mathbf{u}^\pm, \tag{2.14}$$

desta forma, E^+ e E^- são os conjuntos das autofunções de L, com autovalores correspondentes 1 e -1 respectivamente. Bases ortonormais de autovetores de $E^\pm$, são dadas por

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_k^{-\frac{s}{2}}\phi_k, \pm\lambda_k^{\frac{s}{2}-1}\phi_k\right) : k = 1, 2, \ldots\right\}.$$

Para $\mathbf{u} = \mathbf{u}^+ + \mathbf{u}^-$ temos

$$A(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\langle -\Delta_R\mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle = \frac{1}{2}(L\mathbf{u}, \mathbf{u})_{E^s} = A(\mathbf{u}^+) + A(\mathbf{u}^-).$$

Além disso, de (2.14) temos

$$\begin{aligned}
A(\mathbf{u}^+) - A(\mathbf{u}^-) &= \frac{1}{2}(L\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+)_{E^s} - \frac{1}{2}(L\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^-)_{E^s} \\
&= \frac{1}{2}(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+)_{E^s} + \frac{1}{2}(\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^-)_{E^s} \\
&= \frac{1}{2}\|\mathbf{u}\|^2_{E^s}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

A derivada de $A(\mathbf{u})$ define uma forma bilinear

$$A(\mathbf{u}) = B(\mathbf{u}, \mathbf{\Phi}) = A'(\mathbf{u})\mathbf{\Phi} = (L\mathbf{u}, \mathbf{\Phi})_{E^s} = \langle -\Delta_R\mathbf{u}, \mathbf{\Phi}\rangle, \qquad \mathbf{u}, \mathbf{\Phi} \in E^s(\Omega),$$

com

$$\frac{1}{2}(B\mathbf{u}, \mathbf{u}) \text{ e } (B\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) = (L\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-)_{E^s} = (\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^-) = 0,$$

já que E^+ e E^- são ortogonais.

Examinaremos agora, para que valores de s, e para as quais não linearidade, $\mathcal{H}(u,v)$ é bem definido em $E^s(\Omega)$.

Teorema 2.2 *Dado $s > 0$ e $p \geq 1$ tais que*

$$p \leq \frac{2N}{N-2s}. \tag{2.16}$$

Então a seguinte inclusão

$$i : \theta^s(\Omega) \to L^p(\Omega) \tag{2.17}$$

está bem definida e é limitada. Se a desigualdade (2.16) for estrita então a inclusão é compacta.

Demonstração: ver [9]. ■

Observação 2.1 *Portanto segue de (2.17), que para $N > 2s$ e $N > 4-2s$, temos a seguinte imersão limitada*

$$E^s(\Omega) \to L^{p+1}(\Omega) \times L^{q+1}(\Omega), \tag{2.18}$$

se

$$1 \leq p+1 \leq \frac{2N}{N-2s}, \; 1 \leq q+1 \leq \frac{2N}{N+2s-4}. \tag{2.19}$$

A imersão será compacta se considerarmos a desigualdade estrita.

Deduzivamente, vemos que $\mathcal{L}_1$ estará bem definido em $E^s(\Omega)$, se encontrarmos p e q na hipótese (h_2), satisfazendo (2.19). Restrigiremos o valor de s, a $0 < s < 2$, por necessitarmos, posteriormente, a compacidade da imersão $E^s(\Omega) \to L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

2.3 Existência de Pontos Críticos.

Vimos na seção anterior, que $\mathcal{L}_1$ está bem definido em $E^s(\Omega)$. Nesta seção, mostraremos que $\mathcal{L}_1$ tem um ponto crítico $\mathbf{u} = (u, v)$ em $E^s(\Omega)$. Para isto, usaremos a extensão da forma quadrática $A(\mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ a $E^s(\Omega)$ e consideremos o funcional Lagrangiano

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}(L\mathbf{u}, \mathbf{u})_{E^s} - \mathcal{H}(u, v),$$

onde L é definido em (2.13) e

$$\mathcal{H}(u, v) = \int_\Omega F(u)dx + \int_\Omega G(v)dx$$

é o Hamiltoniano.

Como observamos, na introdução, $A(\mathbf{u}) = \int_\Omega \nabla u \nabla v$ é fortemente indefinido, e portanto usaremos o Teorema do Passo da Montanha para Funcional Indefinido, enunciado na Introdução, para provarmos o seguinte

Teorema 2.3 *Suponhamos $(h_1) - (h_4)$ satisfeitas, e seja $0 < s < 2$ tais que (2.19) vale com inequações estritas. Então $\mathcal{L}_1$ tem um ponto crítico não-trivial $\mathbf{u} \in E^s(\Omega)$.*

Demonstração: Consideremos $H = E^s(\Omega)$, $H_1 = E^+$, e $H_2 = E^-$, no enunciado do Teorema do Passo da Montanha para Funcional Indefinido. Das hipóteses $(h_1) - (h_2)$ segue-se que $\mathcal{L}_1 \in C^1(E^s, \mathbb{R})$, desde que $\mathcal{H}(\mathbf{u})$ é continuamente diferenciálvel e possui derivada compacta, provando desta forma também $(\mathcal{L}_2)$ (ver [10] e [21]). Para concluirmos a prova do teorema, precisaremos dos seguintes Lemas.

Lema 2.7 *Existe um subespaço $\widetilde{E} \subset E^s$ e conjuntos $S \subset E^s$, $Q \subset \widetilde{E}$ e constantes $\alpha > \omega$ tais que:*

(i) $S \subset E^+$, e $\mathcal{L}_1|_S \geq \alpha$.

(ii) Q é limitado e $\mathcal{L}_1 \leq \omega$ na fronteira ∂Q de Q em $\widetilde{E}$

(iii) S e ∂Q estão entrelaçados.

Demonstração: Sejam ρ, $r_1 > \rho$ e r_2 números reais poitivos, a serem determinados posteriormente, e sejam $e^{\pm}$ os primeiros vetores na base de $E^{\pm}$, isto é

$$e^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_1^{-\frac{s}{2}}\phi_1, \lambda_1^{\frac{s}{2}-1}\phi_1\right) \text{ e } e^- = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\lambda_1^{-\frac{s}{2}}\phi_1, -\lambda_1^{\frac{s}{2}-1}\phi_1\right).$$

Sejam

$$\left[0, r_1 e^+\right] = \left\{se^+ : 0 \leq r \leq r_1\right\},$$

$$Q = \left[0, r_1 e^+\right] \oplus \left(\overline{B_{r_2}} \cap E^-\right),$$

$$\widetilde{E} = span\left[e^+\right] \oplus E^-,$$

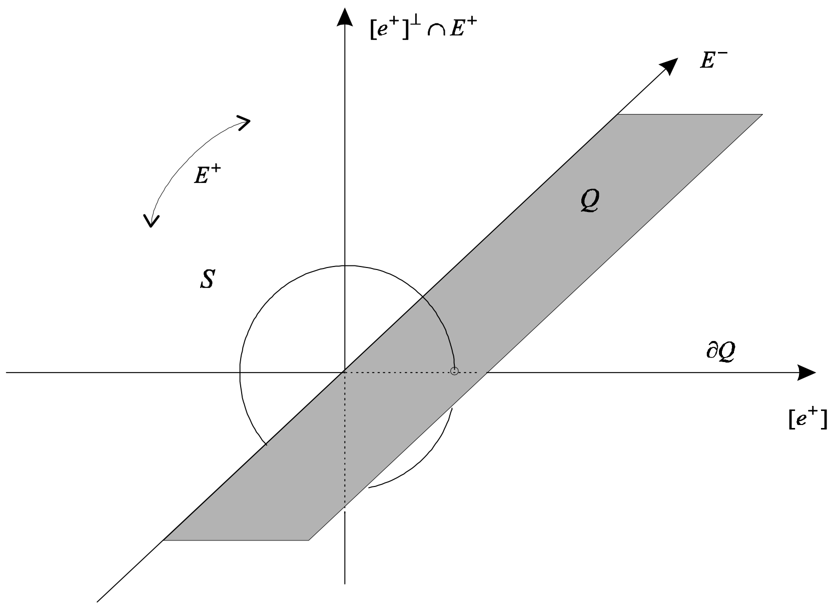
$$S = \partial B_\varrho(0) \cap E^+,$$

onde B_R denota uma bola aberta com raio R centrada na origem. Note que

(i) o conjunto Q, é o produto da bola fechada em E^- com um segmento de reta em E^+,

(ii) S uma esfera contida em E^+, e

(iii) S e Q se interseptam exatamente em um ponto interior de Q, conforme figura abaixo



Em E^+ temos

$$A(\mathbf{u}^+) = \frac{1}{2}(L\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+)_{E^s} = \frac{1}{2}(\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+)_{E^s} = \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2,$$

logo A tem um mínimo local estrito sobre E^+ em $\mathbf{u}^+ = 0$. Vejamos que o mesmo ocorre para $\mathcal{L}_1$. De fato, por (h_2), existe $R > 0$ tal que

$$\frac{|f(u)|}{|u|^p} \leq C, \ \forall |u| \geq R. \tag{2.20}$$

De (h_3) existe $0 < \delta < 1$ tal que

$$\frac{|f(u)|}{|u|} \leq 1, \ \forall |u| < \delta. \tag{2.21}$$

Se $\delta < |u| \leq R$ então, como $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ temos que

$$\frac{|f(u)|}{|u|} < \frac{1}{\delta}|f(u)| < \frac{K}{\delta}. \tag{2.22}$$

Logo de (2.20) - (2.22), temos que

$$|F(u)| \leq Cu^{p+1} + C|u|^2, \forall u \in \mathbb{R}, \tag{2.23}$$

e procedendo da mesma forma para $G(u)$, obtemos as seguintes estimativas famíliares

$$F(u) \leq Cu^2 + C|u|^{p+1} \ \text{ e } \ G(v) \leq \xi v^2 + C(\xi)|v|^{p+1},$$

$\forall u, v \in \mathbb{R}$, com $\xi > 0$ arbitrariamente pequeno.

Para estimar $\mathcal{L}$, em uma esfera de raio pequeno em E^{+}, usaremos a desigualdades (2.11), (2.19) e (2.23) e a imersão de Sobolev (2.18). Com efeito,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1(\mathbf{u}^+) &= \frac{1}{2}(L\mathbf{u}^+, \mathbf{u}^+)_{E^s} - \mathcal{H}(\mathbf{u}^+) \\
&= \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2 - \int_\Omega F(u^+) - \int_\Omega G(v^+) \\
&\geq \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2 - C\int_\Omega \left|u^+\right|^2 - C\int_\Omega \left|u^+\right|^{p+1} - \xi\int_\Omega \left|v^+\right|^2 - C\int_\Omega \left|v^+\right|^{q+1} \\
&= \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2 - C\left(\left\|u^+\right\|_{L^2}^2 + \left\|v^+\right\|_{L^2}^2\right) - C\left(\left\|u^+\right\|_{L^{p+1}}^{p+1} + \left\|v^+\right\|_{L^{q+1}}^{q+1}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2 - C\left(\frac{1}{\lambda_1^s}\left\|u^+\right\|_{\theta^s}^2 + \frac{1}{\lambda_1^{2-s}}\left\|v^+\right\|_{\theta^{2-s}}^2\right) - \\
&\quad C\left(C\left\|u^+\right\|_{\theta^s}^{p+1} + C\left\|v^+\right\|_{\theta^{2-s}}^{q+1}\right) \\
&\geq \frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2 - \max\left\{\lambda_1^{-s}, \lambda_1^{s-2}\right\}C\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2 - C\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^{p+1} - C\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^{q+1} \\
&= C\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2 - C\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^{p+1} - C\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^{q+1},
\end{aligned}$$

para todo $\mathbf{u}^+ \in E^+$. Como $p+1, q+1 > 2$, para $\mathbf{u}^+$ pequeno $\mathcal{L}_1(\mathbf{u}^+)$ é positivo, já que a primeira parcela da direita, domina as demais. Por outro lado,

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{u}^+) \geq \left(\frac{1}{2} - C\right)\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2\left[1 - \left(C\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^{p-1} + C\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^{q-1}\right)\right].$$

Note que $\varkappa(\mathbf{u}^+) = C(\xi)\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^{p-1} + C(\xi)\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^{q-1}$ é contínua e $\varkappa(0) = 0$, logo existe $\delta = \delta(\xi_0)$ tal que $\varkappa(\mathbf{u}^+) \leq \xi_0$ se $0 \leq \mathbf{u}^+ \leq \delta$. Desta forma, ficamos com

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{u}^+) \geq \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\left\|\mathbf{u}^+\right\|_{E^s}^2(1 - \xi_0),$$

se $0 \leq \mathbf{u}^+ \leq \delta$. Tomando $\rho = \delta$ e $\alpha = \left(\frac{1}{2} - \xi\right)\rho^2(1 - \xi_0)$ e (i) fica provado.

Afim de provarmos (ii), notamos que ∂Q de Q tomada no espaço $\widetilde{E}$, consiste de três partes, a saber :

$$Q \cap \{r = 0\}, \qquad Q \cap \{r = r_1\} \qquad \text{e} \qquad Q = \left[0, r_1 e^+\right] \oplus \left(\partial B_{r_2} \cap E^-\right).$$

O nosso objetivo é determinar r_1 e r_2 para que $\mathcal{L}_1(\mathbf{u})$ seja não positivo em ∂Q, ou seja , faremos a prova considerando $\omega = 0$. Como em E^-, $A(\mathbf{u}) \leq 0$ e por (h_1) o funcional $\mathcal{H}(\mathbf{u})$ é não negativo, segue que $\mathcal{L}_1(\mathbf{u}) \leq 0$ em E^-. Portanto, uma vez que $Q \cap \{r = 0\} \subset E^-$, $\mathcal{L}_1(\mathbf{u}) \leq 0$ em $Q \cap \{r = 0\}$.

Para provarmos as duas partes restantes, observamos que, para $\mathbf{u} = \mathbf{u}^- + re^+ \in \widetilde{E}$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1\left(\mathbf{u}^- + re^+\right) &= \frac{1}{2}\left(L\left(\mathbf{u}^- + re^+\right), \left(\mathbf{u}^- + re^+\right)\right)_{E^s} - \mathcal{H}(\mathbf{u}^- + re^+) \quad (2.24)\\
&= \frac{1}{2}\left(L\mathbf{u}^-, \mathbf{u}^-\right)_{E^s} + \frac{1}{2}\left(L(re^+), \mathbf{u}^-\right)_{E^s} + \frac{1}{2}\left(L\mathbf{u}^-, re^+\right)_{E^s} + \\
&\quad \frac{1}{2}\left(L(re^+), re^+\right)_{E^s} - \mathcal{H}(\mathbf{u}^- + re^+)\\
&= -\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^-\right\|_{E^s}^2 + \frac{1}{2}r^2 - \mathcal{H}(\mathbf{u}^- + re^+),
\end{aligned}$$

uma vez que E^+ e E^- são invariantes por L, $E^+ \perp E^-$ e $L(e^+, e^+) = \|e^+\|_{E^s}$. Por (h_4) temso, $F(u) \geq B\,|u|^\gamma - B_2$ e $F(v) \geq B\,|v|^\gamma - B_2$, logo

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(u, v) &= \int_\Omega F(u)dx + \int_\Omega G(v)dx\\
&\geq B\int_\Omega |u|^\gamma\, dx + B\int_\Omega |v|^\gamma\, dx - B_2\,|\Omega|\\
&\geq B_1\int_\Omega \left[|u| + |v|\right]^\gamma dx - B_2\,|\Omega|\\
&= B_1\int_\Omega |(u, v)|^\gamma\, dx - B_2\,|\Omega|,
\end{aligned}$$

onde B_1 e B_2 são constantes. De modo que

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}^- + re^+) \geq B_1\int_\Omega \left|\mathbf{u}^- + re^+\right|^\gamma dx - B_2\,|\Omega|. \quad (2.25)$$

Podemos escrever $\mathbf{u}^- = \mathbf{u}_2^- + te^-$, onde t é um número real, e $\mathbf{u}_2^- \in E^-$ é perpendicular a e^- em $E^s(\Omega)$, como também a $e^\pm$ em $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. De fato, supondo

$$u^- = \sum\nolimits_{k=1}^\infty \xi_k\phi_k e v^- = \sum\nolimits_{k=1}^\infty \eta_k\phi_k, \mathbf{u}_2^- = \left(u^-, v^-\right),$$

temos

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{u}_2^-, e^\pm\right)_{E^s} &= \left(u^-, \frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_1^{-\frac{s}{2}}\phi_1\right)_{\theta^s} + \left(v^-, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_1^{\frac{s}{2}-1}\phi_1\right)_{\theta^{2-s}}\\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_1^{-\frac{s}{2}}\sum\nolimits_{k=1}^\infty \lambda_k^s\xi_k\right) \pm \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda_1^{\frac{s}{2}-1}\sum\nolimits_{k=1}^\infty \lambda_k^{2-s}\eta_k\right) = 0,
\end{aligned}$$

o que implica $\xi_k = 0$ e $\eta_k = 0$, pois $\lambda_k > 0$.

Daí (2.25) resulta em

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{H}(\mathbf{u}^{-}+re^{+}) && (2.26)\\
\geq\; & B_1\int_{\Omega}\left|\mathbf{u}_2^{-}+te^{-}+re^{+}\right|^{\gamma}dx-B_2\left|\Omega\right|\\
\geq\; & B_3\left(\int_{\Omega}\left|\mathbf{u}_2^{-}+te^{-}+re^{+}\right|^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
=\; & B_3\left(\int_{\Omega}\left|\mathbf{u}_2^{-}\right|^{2}+\int_{\Omega}\left|te^{-}+re^{+}\right|^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
\geq\; & B_3\left(\int_{\Omega}\left|te^{-}+re^{+}\right|^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
=\; & B_3\left(\int_{\Omega}\left(te^{-}+re^{+},te^{-}+re^{+}\right)_{L_2\times L_2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
=\; & B_3\left(\int_{\Omega}t^2\left\|e^{-}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}+2tr\left(e^{-},e^{+}\right)_{L_2\times L_2}+r^2\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
=\; & B_3\left(\int_{\Omega}t^2\left\|e^{-}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}+2tr\left\|e^{-}\right\|_{L_2\times L_2}\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}\cos\chi+r^2\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}\right)^{\gamma/2}-B_{4.}
\end{aligned}
$$

Agora usando que $\mathbf{u}^{-}\in Q$, que é um conjunto compacto na topologia fraca e que a função $\|.\|$ é fracamente contínua, sucede que t é limitado, e então podemos concluir que

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{H}(\mathbf{u}^{-}+re^{+}) && (2.27)\\
\geq\; & B_3\left(\int_{\Omega}t^2\left\|e^{-}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}+2tr\left\|e^{-}\right\|_{L_2\times L_2}\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}\cos\chi+r^2\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
\geq\; & B_3\left(\int_{\Omega}Cr\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}\cos\chi+r^2\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
\geq\; & B_3\left(\int_{\Omega}-C^2-r^2\cos^2\chi\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}+r^2\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
=\; & B_3\left(\int_{\Omega}-C^2+\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}r^2(-\cos^2\chi+1)\right)^{\gamma/2}-B_4\\
=\; & B_3\left(\int_{\Omega}-C^2+r^2\sin^2\chi\left\|e^{+}\right\|_{L_2\times L_2}^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
\geq\; & B_5\left(r^2\sin^2\chi\int_{\Omega}\left|e^{+}\right|^{2}\right)^{\gamma/2}-B_4\\
=\; & B_6r^{\gamma}-B_4.
\end{aligned}
$$

De (2.24) e (2.27) obtemos

$$\mathcal{L}_1\left(\mathbf{u}^{-}+re^{+}\right)\leq\frac{1}{2}r^2-B_6r^{\gamma}+B_4-\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^{-}\right\|_{E^s}^{2}.$$

Escolheremos r_1 e r_2, tais que

$$\pi(r)=\frac{1}{2}r^2-B_6r^{\gamma}+B_4\leq 0\qquad\forall r\geq r_1, r_2^2>2\max_{r\geq 0}\pi(r).$$

Observe que esta escolha é possível pois $\gamma > 2$ e $B_6 > 0$. Desta forma $\mathcal{L}_1$ é não negativo em $Q \cap \{r = r_1\}$ e em $Q = [0, r_1 e^+] \oplus (\partial B_{r_2} \cap E^-)$, respectivamente.

Para a prova de (iii) e detalhes sobre a noção de entrelaçamento[1] nos referiremos a Rabinowitz [21]. Convém lebrar porém a noção de entrelaçamento. Dados dois conjuntos Q e S com $Q \cap S \neq \varnothing$ e $\partial Q \cap S = \varnothing$, diz-se que ∂Q e S se entrelaçam segundo uma classe de deformações Ψ se para toda deformação $h \in \Psi$ tal que $\Psi(t, \partial Q) \cap S = \varnothing$, para todo $t \in [0,1]$, então $\Psi(t, Q) \cap S \neq \varnothing$, para todo $t \in [0,1]$. ■

Lema 2.8 *$\mathcal{L}_1$ satisfaz a condição de Palais Smale.*

Demonstração: Seja $\{\mathbf{u}_n\}$ uma sequência em $E^s(\Omega)$, tal que

$$|\mathcal{L}_1(\mathbf{u}_n)| \leq M, \qquad \left|\mathcal{L}_1'(u_n, v_n)(\varkappa, \psi)\right| \leq \epsilon_n \left\|(\varkappa, \psi)\right\|_{E^s} \text{ com } \epsilon_n \to 0. \tag{2.28}$$

Queremos provar que $\{\mathbf{u}_n\}$ possui uma subsequência convergente. Para isto, mostraremos que tal sequência é limitada em $E^s(\Omega)$ pois neste caso, como

$$\mathcal{L}_1'(\mathbf{u}_n)(\mathbf{\Phi}) = (L\mathbf{u}_n, \mathbf{\Phi})_{E^s} - \mathcal{H}'(\mathbf{u}_n)(\mathbf{\Phi}),$$

converge para zero, e devido a compacidade de $\mathcal{H}'$, se $\{\mathbf{u}_n\}$ for limitada, tomando subsequência , temos que $\mathcal{H}'(\mathbf{u}_n)(\mathbf{\Phi})$ converge, e portanto $(L\mathbf{u}_n, \mathbf{\Phi})_{E^s}$ converge, para todo $\mathbf{\Phi} \in E^s(\Omega)$, e como L é invertível , ocorre sucessivamente que $\mathbf{u}_n$ converge em $E^s(\Omega)$.

Para provarmos que $\mathbf{u}_n$ é limitada procedemos como segue. De (2.28) e (h_4), para $M > 0$ e $\epsilon_n > 0$ arbitrariamente pequeno, temos

$$\begin{aligned}
M + \epsilon \left\|\mathbf{u}_n\right\|_{E^s} &\geq \mathcal{L}_1(\mathbf{u}_n) - \frac{1}{2}\left\langle \mathcal{L}_1'(\mathbf{u}_n), \mathbf{u}_n \right\rangle \\
&= A(\mathbf{u}_n) - \int_\Omega F(u_n)dx - \int_\Omega G(v_n)dx - \frac{1}{2}B(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) - \\
&\quad \frac{1}{2}\left(\int_\Omega f(u_n)u_n + \int_\Omega g(v_n)v_n\right)dx \\
&= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\left\{\int_\Omega |u_n|\,|f(u_n)|\,dx + \int_\Omega |v_n|\,|g(v_n)|\,dx\right\} - C,
\end{aligned}$$

onde C é uma constante referente aos valores de u_n e v_n entre $-\eta$ e $+\eta$. Então para novas constantes C e $\epsilon > 0$, obtemos

$$\int_\Omega |u_n|\,|f(u_n)|\,dx + \int_\Omega |v_n|\,|g(v_n)|\,dx \leq C + \epsilon \left\|\mathbf{u}_n\right\|_{E^s}. \tag{2.29}$$

[1] Esta terminologia “entrelaçamento” é uma tradução do inglês “linking” usada na literatura americana.

Escrevendo $\mathbf{u}_n^{\pm} = (u_n^{\pm}, v_n^{\pm})$, e notando que

$$\left(L\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n^{\pm}\right)_{E^s} = \left(L\left(\mathbf{u}_n^{+} + \mathbf{u}_n^{-}\right), \mathbf{u}_n^{\pm}\right)_{E^s} = \left(\mathbf{u}_n^{\pm}, \mathbf{u}_n^{\pm}\right)_{E^s} = \left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s}^2,$$

segue de (2.28), da desigualdade de Hölder e pelas imersões de Sobolev, que

$$\begin{aligned}
\left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s}^2 - \epsilon\left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s} &\leq \left|\left(L\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n^{\pm}\right)_{E^s} - \left\langle \acute{\mathcal{L}_1}(\mathbf{u}_n), (\mathbf{u}_n^{\pm})\right\rangle\right| = \left|\left\langle \acute{\mathcal{H}}(\mathbf{u}_n)(\mathbf{u}_n^{\pm})\right\rangle\right| \qquad (2.30)\\
&= \left|\int_\Omega f(u_n)u_n^{\pm}dx + \int_\Omega g(v_n)v_n^{\pm}dx\right|\\
&< \left(\int_\Omega |f(u_n)|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}} \left\|u_n^{\pm}\right\|_{L^{p+1}} + \left(\int_\Omega |g(v_n)|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}} \left\|v_n^{\pm}\right\|_{L^{q+1}}\\
&\leq C\left[\left(\int_\Omega |f(u_n)|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right] \left\|u_n^{\pm}\right\|_{\theta^s} +\\
&\quad +C\left[\left(\int_\Omega |g(v_n)|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}}\right] \left\|v_n^{\pm}\right\|_{\theta^{2-s}}\\
&\leq C\left\{\left[\left(\int_\Omega |f(u_n)|^{\frac{p+1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right] + \left[\left(\int_\Omega |g(v_n)|^{\frac{q+1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}}\right]\right\} \left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s}\\
&= C\left[\left(\int_\Omega |f(u_n)|\,|f(u_n)|^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{p}{p+1}}\right] \left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s} +\\
&\quad + \left[\left(\int_\Omega |g(v_n)|\,|g(v_n)|^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{q}{q+1}}\right] \left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, da hipótese (h_2), temos

$$|f(u_n)|^{\frac{1}{p}} \leq C|u_n| + Ce\,|g(v_n)|^{\frac{1}{p}} \leq C|v_n| + C.$$

Desta última estimativa, (2.30) resulta em

$$\left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s}^2 - \epsilon\left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s} \leq C\left[1 + \left(\int_\Omega |f(u_n)|\,|u_n|\right)^{\frac{p}{p+1}} + \left(\int_\Omega |g(v_n)|\,|v_n|\right)^{\frac{q}{q+1}}\right]\left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s}.$$

Ressaltamos que C representa constantes distintas. Dividindo ambo os membros por $\|\mathbf{u}_n^{\pm}\|_{E^s}$, obtemos

$$\left\|\mathbf{u}_n^{\pm}\right\|_{E^s} - \epsilon \leq C\left[1 + \left(\int_\Omega |f(u_n)|\,|u_n|\right)^{\frac{p}{p+1}} + \left(\int_\Omega |g(v_n)|\,|v_n|\right)^{\frac{q}{q+1}}\right].$$

Do fato de $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_n^{+} + \mathbf{u}_n^{-}$, juntamente com (2.29), concluímos que,

$$\|\mathbf{u}_n\|_{E^s} \leq C\left[1 + (C + \epsilon\|\mathbf{u}_n\|_{E^s})^{\frac{p}{p+1}} + (C + \epsilon\|\mathbf{u}_n\|_{E^s})^{\frac{q}{q+1}}\right],$$

seguindo a conclusão esperada. ∎

Proposição 2.1 *Suponha que as funções f e g satisfazem as hipóteses* $(h_1 - h_4)$ *e seja* $0 < s < 2$ *tal que (2.19) vale. Então, um ponto crítico* $\mathbf{u} = (u, v)$ *de* $\mathcal{L}_1$ *é uma solução das equações Euler-Lagrange*

$$\begin{cases} -\Delta v &= f(u) \quad em \quad \theta^{-s}(\Omega), \\ -\Delta u &= f(v) \quad em \quad \theta^{s-2}(\Omega). \end{cases}$$

Demonstração: Seja $\mathbf{u}$ um ponto crítico de $\mathcal{L}_1$. Para todo $\mathbf{\Phi} = (\varkappa, \psi) \in E^s(\Omega)$, temos $\mathcal{L}_1'(\mathbf{u}) = 0$, ou seja

$$(L\mathbf{u}, \mathbf{\Phi})_{E^s} = \mathcal{H}'(\mathbf{u})(\mathbf{\Phi}) = \int_\Omega f(u)\varkappa dx + \int_\Omega g(v)\psi dx.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{\Phi}) &= (L\mathbf{u}, \mathbf{\Phi})_{E^s} = \left(\left((-\Delta)^{1-s}v, (-\Delta)^{s-1}u\right), (\varkappa, \psi)\right)_{E^s} \\ &= \left((-\Delta)^{1-s}v, \varkappa\right)_{\theta^s} - \left((-\Delta)^{s-1}u, \psi\right)_{\theta^{2-s}}. \end{aligned}$$

Portanto, substituindo $\psi = 0$, para todo $\varkappa \in \theta^s(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega f(u)\varkappa dx = \left((-\Delta)^{1-s}v, \varkappa\right)_{\theta^s} = \left((-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{1-s}v, (-\Delta)^{s/2}\varkappa\right)_{L^2}. \tag{2.31}$$

Escrevendo $u = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \phi_k$ e $\varkappa = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_k \phi_k$, segue que

$$(-\Delta)^{s/2}(-\Delta)^{1-s}v = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{1-s/2}\xi_k\phi_k \ \text{ e } \ (-\Delta)^{s/2}\varkappa = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{s/2}\eta_k\phi_{k.}$$

Então (2.31) é igual a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k \xi_k = \langle -\Delta v, \varkappa \rangle.$$

Concluímos desta forma que, $-\Delta v = f(u)$ em $\theta^{-s}(\Omega)$. Do mesmo modo, concluímos que, $-\Delta u = g(v)$ em $\theta^{s-2}(\Omega)$. ∎

Teorema 2.4 *Suponha que as funções f e g satisfazem as hipóteses* $(h_1 - h_4)$ *e seja* $0 < s < 2$ *tal que (2.19) vale com inequações estritas, e suponha ainda, que f e g são não negativas em* $[0, \infty)$. *Então* $\mathcal{L}_1$ *tem um ponto crítico não trivial em* $E^s(\Omega)$*, com ambas componentes não negativas.*

Demonstração: Redefiniremos f e g por zero em $(-\infty, 0]$. Para obtermos o resultado almejado, utilizaremos novamente o Teorema do Passo da Montanha para Funcional Indefinido, como no teorema (2.3). Note que, com a hipótese adicional de f e g serem não negativas em $[0,\infty)$, o Lema(2.8) não sofreu modificações, porém o Lema (2.7) terá que ser adaptado, em particular à construção do conjunto Q.

Vejamos, fazendo $r_1 = r_2$ em (2.24), temos que, nas laterais de $Q = Q_s$

$$A(\mathbf{u}) = -\frac{1}{2}\left\|\mathbf{u}^-\right\|_{E^s}^2 + \frac{1}{2}r^2 \leq \frac{1}{2}r_1^2 - \frac{1}{2}r_2^2 = 0,$$

ou seja a parte quadrática de $\mathcal{L}_1(\mathbf{u})$ é não positiva, não apenas em $Q \cap \{r = 0\}$, mas também nas laterais de $Q = Q_s$. O mesmo segue para $\mathcal{L}_1(\mathbf{u})$ desde que $\mathcal{H}(\mathbf{u})$ é não negativo.

Resta-nos estabelecer a não positividade de $\mathcal{L}_1$ no lado de Q_s, o qual é o disco $D_r = \{(re^+, \mathbf{u}^-) : \|\mathbf{u}^-\|_{E^s} \leq r\}$. Como na prova do teorema (2.3), encontraremos uma estimativa inferior para $\mathcal{H}(\mathbf{u})$ em D_r.

De fato, por (h_4) temos que

$$F(u) \geq C(u_+^\gamma - 1) \ \text{ e } \ G(v) \geq C(v_+^\gamma - 1).$$

Onde o subscrito refere-se a parte positiva.

Fixado $r = 1$ segue que, $\mathbf{u} \in D_1$ é da forma

$$\mathbf{u} = e^+ + te^- + \mathbf{u}_2^-,$$

onde t real e $\mathbf{u}_2^- \in E^-$ perpendicular a e^- em E^s e em $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$. Observe que $e^- = (\phi_1, -\phi_1)$, $\phi_1 > 0$, isto é, e^- tem uma componente positiva e outra negativa. Todavia as componentes de $\mathbf{u}_2^- = (z, -z)$ mudam de sinal, já que são perpendiculares em L_2 a ϕ_1. Como λ_1 é um autovalor principal, as autofunções associadas a λ_1 tem sinal definido e é o único com esta propriedade. Isto implica que

$$\int_\Omega (u_+^\gamma + v_+^\gamma)dx > 0, \ \forall \mathbf{u} = (u, v) \in D_1.$$

Caso contrário, teríamos que ter $u_+^\gamma = 0$ e $v_+^\gamma = 0$. Mas como $\mathbf{u} \in D_1$ é da forma

$$\mathbf{u} = (\phi_1 + t\phi_1 + z, \phi_1 - t\phi_1 - z),$$

teremos $\phi_1 + t\phi_1 + z = 0$ e $\phi_1 - t\phi_1 - z = 0$, o que implicará que $\phi_1 \equiv 0$, o que é um absurdo.

Temos ainda que,

$$\begin{array}{rccc} \Upsilon & : & D_1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & & \mathbf{u} & \mapsto & \int_\Omega (u_+^\gamma + v_+^\gamma)dx, \end{array}$$

é fracamente contínua em E^s e como E^s é reflexivo segue-se, do Teorema de Kakutani (ver [4]), que D_1 é fracamente compacto, existindo desta forma, $\mathbf{u}_0 \in D_1$ tal que $\Upsilon(\mathbf{u}_0) = \inf_{\mathbf{u}\in D_1} \Upsilon(\mathbf{u})$. Seja $\delta > 0$ o $\inf \Upsilon(\mathbf{u})$, segue que

$$\int_\Omega (u_+^\gamma + v_+^\gamma)dx > \delta, \ \forall \mathbf{u} = (u, v) \in D_1.$$

Obteremos portanto, que em D_1

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{u}) &= \int_\Omega [F(u) + G(v)]\, dx \geq C \int_\Omega (u_+^\gamma + v_+^\gamma)dx - C \\ &\geq C\delta - C. \end{aligned}$$

Como

$$\int_\Omega (u_+^\gamma + v_+^\gamma)dx = r^\gamma \int_\Omega \left[\left(\frac{u_+}{r}\right)^\gamma + \left(\frac{v_+}{r}\right)^\gamma \right] dx,$$

temos que

$$\mathcal{H}(\mathbf{u}) \geq C\delta r^\gamma - C, , \ \forall \mathbf{u} \in D_r. \tag{2.32}$$

Agora substituindo (2.32) em (2.24) ressulta que

$$\mathcal{L}_1 \left(\mathbf{u}^- + re^+\right) = \frac{1}{2} r^2 - C\delta r^\gamma + C - \frac{1}{2} \left\|\mathbf{u}^-\right\|_{E^s}^2,$$

e desta forma, tomando em conta que $\gamma > 2$, $\mathcal{L}_1$ é negativo em D_r, para r grande, o que prova (ii) do Lema (2.7).

Concluímos que $\mathcal{L}_1$ tem um ponto crítico. Além disso, pelo Princípio do Máximo $v > 0$ em Ω, visto que

$$\begin{cases} -\Delta v = f(u) \geq 0 & \text{em} \quad \Omega \\ v = 0 \quad \text{na } \partial\Omega & \text{e} \quad v \neq 0. \end{cases}$$

Análogamente, concluímos que $u > 0$. ■

Capítulo 3

Regularidade

Neste capítulo veremos que as soluções fracas, são de fato soluções clássicas do problema (P_1).

Teorema 3.1 *Suponha que as funções f e g satisfazem a hipótese $(h_1 - h_4)$, e seja $0 < r < 2$ tal que (2.17) vale. Então todo ponto crítico de $\mathcal{L}_1$ tem as coordenadas u e $v \in L^{\alpha}(\Omega)$ para todo $1 \leq \alpha \leq \infty$.*

Demonstração: Assumiremos que $N \geq 3$. Reescreveremos a conclusão da proposição (2.1) como

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & = & a(x)u & \text{em} \quad \theta^{-r}(\Omega), \\ -\Delta u & = & b(x)v & \text{em} \quad \theta^{r-2}(\Omega), \end{array} \right. \tag{3.1}$$

onde $a(x) = \frac{f(u(x))}{u(x)}$ e $b(x) = \frac{g(v(x))}{v(x)}$. Isto é possível por (h_3), já que $\frac{g(t)}{t} \to 0$ quando $t \to 0$. Ademais, temos que $a(x) \in L^{\frac{p+1}{p-1}}(\Omega)$ e $b(x) \in L^{\frac{q+1}{q-1}}(\Omega)$. Verifiquemos que, de fato, isto ocorre. Decompondo Ω como a união de $\Omega_0 = \{x \in \Omega : u(x) = 0\}$, $\Omega_1 = \{x \in \Omega : 0 \leq |u| \leq \delta\}$ e $\Omega_2 = \{x \in \Omega : |u| > \delta\}$ e analizemos cada caso separadamente:

(1^o caso). Em Ω_0 temos

$|u(x)| = 0$ e daí $f(u(x)) = 0$ e $a(x) = 0$, logo $\int_{\Omega_0} |a(x)|^{\frac{p+1}{p-1}} dx = 0$.

(2^o caso). Em Ω_1, temos por (h_3) que, $|f(u)| \leq \varepsilon |u|$ se $0 \leq |u| \leq \delta$, portanto

$$\int_{\Omega_1} \left| \frac{f(u(x))}{u(x)} \right|^{\frac{p+1}{p-1}} dx \leq \int_{\Omega_1} \varepsilon^{\frac{p+1}{p-1}} dx < |\Omega| \, \varepsilon^{\frac{p+1}{p-1}} < \infty.$$

(3^o caso). Em Ω_2, temos por (h_2) que, $|f(u)| \leq C(|u|^p+1)$, e além disso, $|u| > \delta \Rightarrow \frac{1}{|u|} < \frac{1}{\delta}$ e $u \in L^{p+1}(\Omega)$ devido a imersão $\theta^r(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, desta forma

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_2} \left|\frac{f(u(x))}{u(x)}\right|^{\frac{p+1}{p-1}} dx &\leq \int_{\Omega_2} \left[C\left(\frac{|u|^p}{|u|}\right)^{\frac{p+1}{p-1}} + \left(\frac{C}{|u|}\right)^{\frac{p+1}{p-1}}\right] dx \\
&\leq C\int_{\Omega_2} \left[|u|^{p+1} + \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{p+1}{p-1}}\right] dx \\
&\leq C\left(\|u\|_{L^{p+1}}^{p+1} + 1\right) < \infty.
\end{aligned}$$

Para $b(x)$ o processo é o mesmo. Ressaltamos que, quando não houver dúvidas sobre qual domínio estamos trabalhando, o símbolo Ω será omitido.

Agora, seja $\varepsilon > 0$. Em van der Vorst [23] temos a seguinte afirmação: existem funções $q_\varepsilon \in L^{\frac{p+1}{p-1}}$ e $f_\varepsilon \in L^\infty$, tais que

$$\begin{cases} a(x)u(x) &= q_\varepsilon(x)u(x) + f_\varepsilon(x) \quad \text{para quase todo x em} \quad \Omega \\ \|q_\varepsilon\|_{L^{\frac{p+1}{p-1}}} &< \quad \varepsilon \end{cases} . \tag{3.2}$$

O próximo passo, será substituir (3.2) em (3.1), feito isso, obteremos

$$\begin{cases} -\Delta v = q_\varepsilon(x)u + f_\varepsilon(x) & \text{em} \quad \theta^{-r}(\Omega), \\ -\Delta u = b(x)v & \text{em} \quad \theta^{r-2}(\Omega). \end{cases} \tag{3.3}$$

Denotemos os operadores multiplicação $\beta(u)(x) \doteq b(x)u(x)$ e $Q^\varepsilon(u)(x) \doteq q_\varepsilon(x)u(x)$. Neste caso, invertendo o Laplaciano em (3.3), teremos

$$\begin{cases} u = (-\Delta)^{-1}\beta(v), \\ v = (-\Delta)^{-1}Q^\varepsilon(u) + (-\Delta)^{-1}f_\varepsilon, \end{cases}$$

e eliminando v ficamos com

$$u = (-\Delta)^{-1}\beta(-\Delta)^{-1}Q^\varepsilon u + (-\Delta)^{-1}\beta(-\Delta)^{-1}f_\varepsilon,$$

ou melhor ainda

$$(I - K^\varepsilon)u = h_\varepsilon \tag{3.4}$$

onde I é o operador identidade e

$$K^\varepsilon = (-\Delta)^{-1}\beta(-\Delta)^{-1}Q^\varepsilon, \qquad h_\varepsilon = (-\Delta)^{-1}\beta(-\Delta)^{-1}f_\varepsilon. \tag{3.5}$$

Observamos que, como consequência do teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg (ver [4]), e da imersão de Sobolev, o operador

$$(-\Delta)^{-1} : L^{\alpha_1} \to W^{2,\alpha_1} \cap W_0^{1,\alpha_1} \hookrightarrow L^{\alpha_2}, \tag{3.6}$$

é limitado de L^{α_1} em L^{α_2}, ou seja $\|(-\Delta)^{-1}u\|_{L^{\alpha_2}} \leq C\,\|u\|_{L^{\alpha_1}}$, com

$$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} - \frac{2}{N}, \qquad 1 < \alpha_1 < \alpha_2 < \infty. \tag{3.7}$$

Quando não houver dúvidas sobre qual domínio estamos trabalhando, o símbolo Ω será omitido.

Notemos também que, devido a inequação de Hölder, o operador multiplicação

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{C} & : & L^{\beta 1} & \longrightarrow & L^{\beta 2} \\ & & u & \mapsto & c(x)u(x) \end{array} \tag{3.8}$$

onde $c(x) \in L^s$, é limitado de L^{β_1} em $L^{\beta 2}$, com

$$\frac{1}{\beta 2} = \frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{S}, \qquad 1 \leq S, \beta_1, \beta_2 \leq \infty, \tag{3.9}$$

e

$$\|\mathcal{C}\| = \sup_{u \in L^{\beta 1}} \frac{\|\mathcal{C}(u)\|_{L^{\beta 2}}}{\|u\|_{L^{\beta 1}}} \leq \|c\|_{L^S}.$$

Para termos a igualdade, basta tomarmos a função constante $u = c^{\frac{S}{\beta_1}}$, uma vez que

$$\left(\int_\Omega |u|^{\beta_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1}} = \left(\int_\Omega |c|^S\right)^{\frac{1}{\beta_1}} = \left[\left(\int_\Omega |c|^S\right)^{\frac{1}{S}}\right]^{\frac{S-\beta_2}{\beta_2}} < \infty,$$

e

$$\begin{aligned} \left(\int_\Omega \left|cc^{\frac{S}{\beta_1}}\right|^{\beta_2}\right)^{\frac{1}{\beta 2}} &= \left(\int_\Omega \left|c^{\frac{S+\beta_1}{\beta_2}}\right|^{\beta_2}\right)^{\frac{1}{\beta 2}} = \left(\int_\Omega \left|c^{\frac{S+\beta_1}{\beta_2}}\right|^{\frac{\beta_1 S}{S+\beta_1}}\right)^{\frac{1}{\beta_2}} \\ &= \left(\int_\Omega |c|^S\right)^{\frac{1}{\beta 2}} = \left(\int_\Omega |c|^S\right)^{\frac{1}{S}} \cdot \left(\int_\Omega \left|c^{\frac{S}{\beta_1}}\right|^{\beta_1}\right)^{\frac{1}{\beta_1}}, \end{aligned}$$

e consequentemente $\|\mathcal{C}\| = \|c\|_{L^S}$.

Salientamos que S e β_1 devem ser suficientemente grandes, para que β_2 seja maior que 1, o que é necessário devido que em (3.5) cada operador multiplicação é sussedida por $(-\Delta)^{-1}$.

Analizemos o caso particular do operador

$$K^\varepsilon \;:\; L^{\alpha=\beta} \xrightarrow{Q^\varepsilon} L^{\alpha_2} \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} L^{\alpha_3} \xrightarrow{\beta} L^{\alpha_4} \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} L^{\beta}.$$

Usando (3.9), com $\beta_1 = \alpha$ e $S = \frac{p+1}{p-1}$, para o operador Q^ε, concluímos que Q^ε é limitado de L^α em L^{α_2} com $\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{p-1}{p+1}$. Devemos pedir que

$$\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha} + \frac{p-1}{p+1} < 1, \tag{3.10}$$

para aplicarmos $(-\Delta)^{-1}$, e consequentemente por (3.7), termos o operador $(-\Delta)^{-1}$ limitado de L^{α_2} em L^{α_3}, se

$$\frac{1}{\alpha_3} = \frac{1}{\alpha_2} - \frac{2}{N} = \frac{1}{\alpha} + \frac{p-1}{p+1} - \frac{2}{N}.$$

Novamente usando (3.9) para o operador β, com $\frac{1}{\beta_1} = \frac{1}{\alpha} + \frac{p-1}{p+1} - \frac{2}{N}$ e $S = \frac{q+1}{q-1}$, temos que β é limitado de $L^{\alpha 3}$ em $L^{\alpha 4}$, onde

$$\frac{1}{\alpha_4} = \frac{1}{\alpha} + \frac{p-1}{p+1} - \frac{2}{N} + \frac{q-1}{q+1}.$$

Afim de aplicarmos mais uma vez $(-\Delta)^{-1}$, pediremos que

$$\frac{1}{\alpha_4} = \frac{1}{\alpha} + \frac{p-1}{p+1} - \frac{2}{N} + \frac{q-1}{q+1} < 1,$$

e finalmente termos o operador $(\Delta)^{-1}$limitado de $L^{\alpha 4}$ em L^β, se

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha_4} - \frac{2}{N} = \frac{1}{\alpha} + \frac{p-1}{p+1} - \frac{2}{N} + \frac{q-1}{q+1} - \frac{2}{N} = \frac{1}{\alpha} + 2\left(\frac{N-2}{N} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right).$$

Logo K^ε é limitado de L^α em L^β, com

$$\frac{1}{\beta} = \frac{1}{\alpha} + 2\left(\frac{N-2}{N} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right). \tag{3.11}$$

Resta-nos vermos que realmente é possível escolher α, grande o suficiente, de modo que (3.10) e (3.11) se verifique.

Vejamos. Como p e q são (sub)críticos no caso de (2.1) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} + 2\left(\frac{N-1}{N} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1}\right) &= \frac{1}{\alpha} + 2\left(\frac{N-2}{N} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q+1} + \frac{1}{N}\right) \\ &\leq \frac{1}{\alpha} + \frac{2}{N}. \end{aligned}$$

Desta forma (3.11) é satisfeita e ver-se facilmente que (3.10) também o é. Segue que $\beta > \alpha$ se p e q são subcríticos e que $\beta = \alpha$ se $N > 2$ e p e q são críticos. No último caso, os argumentos acima são válidos para todo $p + 1 \leq \alpha < \infty$, uma vez que

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{2}{N} < \frac{1}{p+1} + \frac{2}{N} < \frac{1}{2} + \frac{2}{N} < 1.$$

Além disso,

$$
\begin{aligned}
\|K^{\varepsilon}u\|_{L^{\beta}} &= \left\|(-\Delta)^{-1}\beta(-\Delta)^{-1}Q^{\varepsilon}u\right\|_{L^{\beta}} \\
&\leq C\left\|\beta(-\Delta)^{-1}Q^{\varepsilon}u\right\|_{L^{\alpha 4}} \\
&\leq C\|\beta\|\left\|(-\Delta)^{-1}Q^{\varepsilon}u\right\|_{L^{\alpha 3}} \\
&\leq C\|b\|_{L^{\frac{q+1}{q-1}}}\|Q^{\varepsilon}u\|_{L^{\alpha_2}} \\
&\leq C\|b\|_{L^{\frac{q+1}{q-1}}}\|Q^{\varepsilon}\|\,\|u\|_{L^{\alpha}} \\
&\leq C\|b\|_{L^{\frac{q+1}{q-1}}}\|q_{\varepsilon}\|_{L^{\frac{p=1}{p-1}}}\|u\|_{L^{\alpha}} \\
&\leq C\varepsilon\|b\|_{L^{\frac{q+1}{q-1}}}\|u\|_{L^{\alpha}},
\end{aligned}
$$

devido a (3.7). Desta forma, temos uma limitação de ordem ε do operador K^{ε}, o que implicará na invertibilidade do operador $I - K^{\varepsilon} : L^{\alpha} \to L^{\alpha}$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ grande, como almejamos (ver [13]).

Seguindo a mesma linha de raciocínio, veremos que h_{ε} está em L^{α} com $1 < \alpha < \infty$. Com efeito, temos que

$$
h_{\varepsilon} \;:\; L^{\infty} \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} L^{\alpha_1} \xrightarrow{\beta} L^{\alpha_2} \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} L^{\alpha}.
$$

De (3.6) sabemos que $(-\Delta)^{-1} : L^{\infty} \longrightarrow L^{\alpha_1}$ é limitado com

$$
\frac{1}{\alpha_1} = -\frac{2}{N},
$$

e de (3.8) que $\beta : L^{\alpha_1} \longrightarrow L^{\alpha_2}$ é limitada se

$$
\frac{1}{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{q-1}{q+1},
$$

ou seja

$$
\frac{1}{\alpha_2} = \frac{-2}{N} + \frac{q-1}{q+1}. \tag{3.12}
$$

Note que $\alpha_2 > 1$, possibilitando-nos aplicar $(-\Delta)^{-1}$. Desta forma obtemos que $(-\Delta)^{-1} : L^{\alpha_2} \longrightarrow L^{\alpha}$ é limitado com

$$
\frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{\alpha_2} - \frac{2}{N},
$$

e

$$
0 < \frac{1}{\alpha} = -\frac{2}{N} - \frac{2}{N} + \frac{q-1}{q+1} < 1.
$$

Por fim, concluímos de (3.4) que $u \in L^{\alpha}$ para todo $1 \leq \alpha < \infty$. Para o argumento v, o procedimento é similar. ■

Corolário 3.1 *Pontos críticos de $\mathcal{L}_1$ são soluções clássicas do problema (P_1), e no teorema (2.4) " não negativa" pode ser substituido por " estritamente positiva ".*

Demonstração: Na proposição anterior, vimos que $u \in L^{\alpha}$, para todo $1 \leq \alpha < \infty$ o que implica $f(u) \in L^r$, para todo $1 \leq r < \infty$. Segue do teorema de Agmon-Douglis-Nirenberg que $v \in W^{2,r}(\Omega) \cap W_0^{1,r}(\Omega)$ para todo $1 \leq r < \infty$. Usando o teorema de Rellich-Kondrachov e tomando $r > N$, resulta que $v \in C(\overline{\Omega})$ logo $g(v) \in C(\overline{\Omega})$ e portanto de

$$\begin{cases} -\Delta v & = & g(v) & \text{em} & \Omega \\ \quad v & = & 0 & \text{na} & \partial\Omega, \end{cases}$$

e devido as estimativas de Schauder (ver [12]), concluimos que $u \in C^2(\Omega)$. Procedendo de forma análoga, veremos que $u \in C(\overline{\Omega})$ e $v \in C^2(\Omega)$. ■

Observação 3.1 *Combinando o Teorema (2.3) e o corolário (3.1) completamos a prova do Teorema (0.2).*

Apêndice A

Método Variacional

A expressão Cálculo das Variações, inicialmente foi usada por *Leonhard Euler* no ano de 1756, ao descrever o novo método que *J.L. Lagrange* desenvolveu no antecedente ano.

A idéia chave do cálculo da variações é a obtenção de pontos críticos de um funcional

$$\mathcal{L} : M \to \mathbf{R}$$

onde M pode ser um conjunto de números, funções, curvas, superfícies, munido se alguma topologia.

O grau da dificuldade para determinização dos pontos críticos do $\mathcal{L}$, dependerá de M e do funcional $\mathcal{L}$ já que, em alguns casos, a aplicação de método da análise clássica já é suficiente. Por exemplo, se M for um intervalo compacto da reta, munido com a topologia induzida por $\mathbf{R}$, e $\mathcal{L}$ contínua, basta usarmos o teorema de Weierstrass.

Apessar da expressão "cálculo das variações" ter sido usada apenas no século XVIII, problemas desta natureza são antiquíssimos. De fato, os Egipcios sabiam que a menor distância entre duas linhas é a medida do segmento que os une. Como também estão presentes no nosso dia a dia, basta citarmos a insensável busca da minimização do custo e a maximização dos lucros.

Por muito tempo, vários matemáticos se deteram a estudar este tipo de problema, desenvolvendo para isto, vários métodos variacionais, para se obter a solução. Para cada problema, existia um método específico. Porém uma teoria geral, que permitia-se solucionar problemas gerais, foi desenvolvida. O nome de *Lagrange* $(1736 - 1813)$ e *Euler* $(1707 - 1783)$ são fortemente ligados a este fato.

Pouco antes de 1732, Euler começou um estudo sistemático de problemas de valores extremos, desenvolvendo um método diferente dos seus predecessores, os quais tratavam de problemas particulares. Ele descobriu, para uma classe especial de funcionais, a primeira condição necessária que uma função de minimização tem que satisfazer. Nos dias de hoje isto é conhecido como a equação de Euler-Lagrange e para funcionais, isso corresponde à condição $\mathcal{L}'(u) = 0$, onde $\mathcal{L}'$ entende-se como a derivada de Frechet de $\mathcal{L}$. A presença do nome de Lagrange dár-se devido a simplificação que ele efetuou no método de Euler.

Em meados de 1850, *Gauss* e *Thompson* deram origem ao chamado "Método Direto do Cálculo das Variações", o marco da introdução das Equações Diferenciais Parciais (EDP´s), no cálculo das variações. Basicamente o método trata da determinização de zeros de uma equação do tipo Euler-Lagrange

$$\mathcal{L}'u = 0, \tag{A.1}$$

onde $\mathcal{L}' : X \to X$ é uma aplicação entre espaços de Banach, $\mathcal{L} : X \to \mathbb{R}$ um funcional diferenciável no sentido de Frechet. A equação (A.1) é equivalente a

$$\langle \mathcal{L}'(u), v \rangle = 0 \qquad \forall v \in X. \tag{A.2}$$

Um ponto crítico de $\mathcal{L}$ é uma solução de (A.2) e o valor de $\mathcal{L}$ em u é um valor crítico de $\mathcal{L}$. Para se obter os valores críticos do funcional é usado a Teoria dos Pontos Críticos, que neste caso, tem como resultado síntese, o Teorema (A.1) (ver [10]).

Teorema A.1 *Seja X um espaço de Banach reflexivo e suponha que $\mathcal{L} : X \to \mathbb{R}$ é um funcional satisfazendo as condições:*

1. *$\mathcal{L}$ é fracamente semicontínuo inferiormente;*

2. *$\mathcal{L}$ é coerciva, isto é, $\mathcal{L}(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$.*

Então $\mathcal{L}$ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que $\mathcal{L}(u_0) = \inf_X \mathcal{L}$.

Este método foi usado no século XIX por grandes matemáticos, tais como *Gaub* $(1777 - 1853)$, *Dirichlet* $(1805 - 1859)$ e *Riemann* $(1826 - 1866)$, o qual em 1851, na sua dissertação de doutorado, estudou o problema de Dirichlet. Este último problema consistia em resolver a equação "potencial"

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \text{ em } G,$$
$$u \mid_{\partial G} = f,$$

onde G é um área do plano $\mathbb{R}^2$ e ∂G a fronteira de G.

Esta equação diferencial parcial é a equação de Euler-Lagrange da integral de Dirichlet

$$D(u) = \iint_G \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy,$$

cujo integrando é não negativo e assim tem um limite inferior, o qual é maior ou igual a zero. Isto conduziu Riemann a concluir a existência de função u_0 que minimizava o integrando e como consequência, resolver o problema de Dirichlet. Posteriormente Riemann declarou que tais problemas variacionais sempre têm solução, porém não apresentou uma prova com um maior rigor matemático.

Em 1870, *Weirstrass* $(1815-1897)$ criticou a afirmação de Riemann e mostrou que, a priori, em um problema variacional, a existência da função de minimização não estava assegurada por nenhum meio, e no caso geral , poderia até nem existir. *David Hilbert* $(1862-1943)$, cinquenta anos após, baseando-se nas observações de Weirstrass, foi o principal responsável da prova da existência da função de minimização, reavivando desta maneira, o Método Direto do Cálculo das Variações. O que Riemann e Dirichlet conjeturaram, Hilbert provou.

Hoje em dia, o mesmo tipo de idéia é usado para outros problemas de valor de fronteira, para as mais gerais equações e sistemas elípticos. No simples caso do problema de Dirichlet, o ponto crítico é o mínimo do funcional associado. Entretato, os problemas que tratamos na atualidade possuem um maior variedade de pontos críticos. Como consequência alguns novos resultados na Teoria dos Pontos Críticos, tiveram de ser desenvolvidas, como por exemplo o Método Minimax, cuja idéia básica é a seguinte:

"Dado um funcional $\mathcal{L} \in C^1(E, \mathbb{R})$ tentar obter valores críticos como valores de minimax (ou maximin) de $\mathcal{L}$ sobre uma classe "adequada" $\mathcal{A}$ de subconjuntos de E :

$$c = \inf_{A \in \mathcal{A}} \sup_{u \in A} \mathcal{L}(u)\text{"}$$

Talvez um dos primeiros exemplos de uso de um esquema de minimax seja devido a *E. Fischer* em 1905, através da caracterização minimax dos valores de um matriz $n \times n$ real, simétrica M (ver [7]):

$$\lambda_k = \inf_{E_{k-1}} \sup_{e \perp E_{k-1}, |e|=1} (Me, e)$$

$$\lambda_k = \sup_{E_{k-1}} \inf_{e \perp E_{k-1}, |e|=1} (Me, e)$$

$(K = 1, 2, \ldots)$. Aqui, os autovalores são numerados tais que $\lambda_{-1} \leq \ldots \leq \lambda_{-k} \leq \ldots \leq 0 \leq \ldots \leq \lambda_k \leq \ldots \leq \lambda_1$ e $E_j \subset E = \mathbb{R}^N$ denota um ubespaço arbitrário de dimensão j.

Um análogo topológico do esquema de minimax empregado por *Fischer* foi desenvolvido por *Ljusternik* e *Schnierelman* de 1925 a 1947, constituindo-se no que é hoje conhecida como a Teoria (Clássica) de Ljusternik e Schnierelman, que se adeqüa à funcionais apresentando uma simetria Z_2 (ver [17]). Consolidando desta forma, a origem do chamado Método Minimax.

Ambrosetti e *Rabinowitz* em [1], no ano de 1973, estabeleceram diversos e importantes resultados do Método Minimax, para funcionais "sem simetria". Um dos principais resultado é o Teorema do Passo da Montanha, anunciado a seguir

Teorema A.2 *Seja E um espaço de Banach real e $\mathcal{L} \in C^1(E, \mathbb{R})$. Suponha que $\mathcal{L}$ satisfaz (PS), $\mathcal{L}(0) = 0$,*

$(\mathcal{L}_4)$ *existem constantes ρ e $\alpha > 0$ tais que $\mathcal{L}\mid_{\partial B_\rho} \geq \alpha$, e*

$(\mathcal{L}_5)$ *existe $e \in E \diagdown \partial B_\rho$ tal que $\mathcal{L}(e) \leq 0$.*

Então $\mathcal{L}$ possui um valor crítico $c \geq \alpha$, que pode ser caracterizado como

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in [0,1]} \mathcal{L}(u),$$

onde

$$\Gamma = \{g \in C([0,1], E) \mid g(0) = 0, g(1) = e\}.$$

Um segundo exemplo, é o Teorema do Ponto de Sela [22]:

Teorema A.3 *Seja E um espaço de Banach real tal que $E = V \oplus X$, onde V é de dimensão finita. Suponha $\mathcal{L} \in C^1(E, \mathbb{R})$, satisfazendo (PS) e*

$(\mathcal{L}_6)$ *existe um vizinhaça limitada, D de 0 em V e uma constante α tal que $\mathcal{L}\mid_{\partial D} \leq \alpha$, e*

$(\mathcal{L}_7)$ *existe uma constante $\beta > \alpha$ tal que $\mathcal{L}\mid_X \geq \beta$.*

Então $\mathcal{L}$ possue um valor crítico $c \geq \beta$. Além disso c pode ser caracterizado como

$$c = \inf_{S \in \Gamma} \max_{u \in S} \mathcal{L}(u),$$

onde

$$\Gamma = \left\{S = h(\overline{D}) \mid h \in C(\overline{D}, E) e\ h = id\ na\ \partial D\right\}.$$

Benci e *Rabinowitz*, em [2], no ano de 1979, apresentaram o Teorema do Passo da Montanha para Funcional Indefinido, uma espécie de generalização dos Teorema do Passo da Montanha e Teorema do Ponto de Sela, a seguir

Teorema A.4 *Seja H um espaço real de Hilbert com $H = H_1 \oplus H_2$ e $H_2 = H_1^{\perp}$. Suponha $\mathcal{L} \in C^1(H, \mathbb{R})$, satisfazendo (PS), e*

$(\mathcal{L}_1)$ $\mathcal{L}(u) = \frac{1}{2}(Lu, u) + \mathcal{H}(u)$, *onde $L : H \to H$ é limitado e auto-adjunto, e L é invariante em H_1e H_2;*

$(\mathcal{L}_2)$ $\mathcal{H}'$ *é compacto.*

$(\mathcal{L}_3)$ *existe um subespaço $\widetilde{H} \subset H$ e conjuntos $S \subset H, Q \subset \widetilde{H}$ e constantes $\alpha > \varpi$ tal que*

(i) $S \subset H_1$ *e* $\mathcal{L}\mid_S \geq \alpha$,

(ii) Q *é limitado e* $\mathcal{L} \leq \varpi$ *na fronteira* ∂Q *de* Q *em* $\widetilde{H}$,

(iii) S *e* ∂Q *estão em linking.*

Então $\mathcal{L}$ possue um valor crítico $c \geq \alpha$.

Uma aplicação deste teorema é em Sistemas Hamiltonianos, do tipo tratado neste trabalho.

O método variacional, contribuiu muito para o desenvolvimento da matemática, possibilitando assim, a solução de problemas matemáticos em físíca (relativa e quántica), Engenharia, Biologia e Ecônomia e consequentemente, desfruta de um "status" especial.

Referências Bibliográficas

[1] A. Ambrosetti and P.H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory e aplications,* J. Fenct. Anal. **14** (1973), 349-381.

[2] V. Bensi and P.H. Rabinowitz, *Critical point theorems for indefinite functionals,* Invent, Math, **52** (1979), 241-273.

[3] Ph. Blanchard and E. Bruning, *Variational Methods in Mathematical Physics,* Springer-Verlag, Berlim, (1992).

[4] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle Théorie et Applications,* Masson, (1987).

[5] Ph. Clement, D. Figueiredo, and E. Mitidieri, *Positive solutions of semilinear elliptic systems,* Comm. Partial Differential Equations **17.**Nos. 5 and 6 (1992). 923-940.

[6] D. G. Costa, *Tópicos em análise não linear e aplicações às equações diferenciais,* VIII Escola latino-Americana de Matemática-IMPA, (1986).

[7] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. I, Interscience Publishers, Inc., New YorK, (1953).

[8] D. G. de Figueiredo, *Nonlinear elliptic Systems, An. Acad. Bras.* **72** *(2000).*

[9] D. G. de Figueiredo and P L.Felmer, *On Superquadratic Elliptic Systems,* American Mathematical Society, **343**, No 1, (1994).

[10] D. G. de Figueiredo, *Lectures on The Ekeland Variational Principle with applications and detours*, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1989).

[11] D. Fujiwara, *Concrete characterization of the domains of fractional powers of some elliptic differential operators of the second order,* Proc. Japan Acad. **43,** (1967).

[12] D. Gilbarg and N.S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations de second order,* Springer-Verlag, Berlin, (1983).

[13] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications,* Wiley, New York, (1979).

[14] D. Huet, *Décomposition spectrale et opérateurs,* Presses Universitaires de France.

[15] J. Hulshof and R. van der Vorst, *Differential Systems with Strongly Indefinite Variational Structure,* J Fctl Anal **114,** No 1, (1993), 32-58.

[16] J. L. Lions and E. Magenes, *Non-homogeneos boundary value problems and applications* , Springer-Verlag (1972).

[17] L. Lusternik and L. Schnirelman, *Topological Methods in the Calculus of Variations,* Hermann, Paris (1934).

[18] L. A. Medeiros e M.M. Miranda, *Espaços de Sobolev/Introdução aos problemas elíticos não Homogêneos,* Textos de Métodos Matemáticos, IM-UFRJ, (1999).

[19] L. A. Peletier and R.C.A.M. van der Vorst, *Existence and nonexistence of positive solutions of nonlinear elliptic systems an the biharmonic equation,* 9 to apperar in Diff.& Int. Equ..

[20] A. Persson, *Compact linear mappings between interpolation spaces,* Ark. Mat. **5**, (1964), 215-219.

[21] P.H.Rabinowitz, *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations,* AMS Memoins **65**, (1986).

[22] ______, *Some theorems and applications to nonlinear partial diferential equations,* Nonlinear Analysis: A collection of papers in honor of Erich Röthe, Academic Press, New York, (1978), 161-177.

[23] R.C.A.M. van der Vorst, *Best constant for the embedding for the space $H^2 \cap H_0^1$ into* $L^{\frac{2N}{(n-4)}}$, Diff. & Int. Eq. **6**, No 2 (1993), 259-276.