Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Um Princípio do Máximo e Propriedades Qualitativas em Equações Diferenciais Elípticas

por

Reinaldo de Marchi

Sob orientação de

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

e
co-orientação de

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

28 de Novembro de 2005

Um Princípio do Máximo e Propriedades Qualitativas em Equações Diferenciais Elípticas

por

Reinaldo de Marchi

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação de Matemática da Universidade Federal da Paraíba Como parte dos requisitos necessários para obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (Orientador)

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Universidade Federal da Paraíba
CCEN-Departamento de Matemática
Curso de Pós-Graduação de Matemática

Agradecimentos

A Deus pela oportunidade que me concedeu.

Ao meu orientador Prof. João Marcos, pelo apoio na elaboração desta dissertação e por sempre cobrar um pouco mais de mim.

Ao meu co-orientador Prof. Everaldo, por acompanhar meu desenvolvimento desde o curso de verão de 2004 até hoje. Agradeço também por sempre me incentivar e me animar em meus estudos.

Ao CNPq, pelo apoio financeiro e a UFPB, especialmente a Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, por me receber como aluno e possibilitar a obtenção deste aprendizado que tive.

Aos professores da UFPB que colaboraram diretamente para minha formação: Prof. Nelson, Prof. Assis, Prof. Pedro Hinojosa, Prof. Everaldo e Prof. João Marcos.

Aos colegas de curso que tive o prazer de conhecer e de conviver, além de trocar muitas idéias, risos e opiniões. Sucesso a todos.

Aos professores da UFMT, instituição onde cursei minha graduação.

Ao meu pai adotivo Luis Valdir Santana, por acreditar em mim e me incentivar a estudar sempre, bem como me criar com valores cristãos.

Dedicatória

A minha querida esposa Geizi, pela sua compreensão e seu amor.

Resumo

Neste trabalho, estudamos certas propriedades qualitativas de soluções de alguns problemas elípticos semi-lineares em domínios limitados, tais como unicidade, simetria, não-degenerescência, entre outras. Para isto, estudamos um princípio do máximo para operadores elípticos de segunda ordem, e provamos que sua validade é equivalente a positividade do autovalor principal associado a estes operadores, com a condição de fronteira de Dirichlet homogênea.

Abstract

In this work, we study certain qualitative properties of solutions for some semilinear elliptic problems in bounded domains, such as uniqueness, symmetry, nondegeneracy, among others. For this, study a maximum principle for elliptic operators of second order and we proved that its validity is equivalent to the positivity of the principal eigenvalue associated to those operators, with homogenous Dirichlet boundary condition.

Sumário

Notações

Notações Gerais

$B_\delta(x)$	bola aberta de centro x e raio δ
$\rightharpoonup$	convergência fraca
$\|A\|$	medida de Lebesgue de um conjunto A
div$u$	divergente de u
$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u
$\Delta u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u
$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \nu \cdot \nabla u$	derivada normal exterior
$\cdot$ ou $(,)$	denotaram produto interno
$C, C_1, C_2, C_3, \ldots$	denotam constantes positivas
$\Omega \subset \mathbb{R}^N$	aberto
$\overline{\Omega}$	fecho do conjunto Ω
$\partial\Omega$	fronteira de Ω

Espaços de Funções

$$L^p(\Omega) = \left\{u \ \text{ mensurável sobre } \ \Omega \ \text{ e } \ \int_\Omega |u|^p \, dx < \infty\right\}, \ 1 \leq p < \infty$$

$$L^\infty(\Omega) = \{u \ \text{ mens. sobre } \ \Omega \ \text{ e existe } \ C \ \text{ tal que } \ |u(x)| \leq C \ \text{ q.t.p sobre } \ \Omega\}$$

$C_c(\Omega)$ funções contínuas com suporte compacto em Ω

$C^k(\Omega)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega)$

$C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$C(\overline{\Omega})$ funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$

$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\overline{\Omega}) : \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty \right\}$ com $0 < \alpha < 1$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, \dots, g_N \in L^p(\Omega) \;\; \text{tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i \varphi\, dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \dots, n \end{array} \right\},$$

$1 \leq p \leq \infty$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ é o completamento de $C_c^1(\Omega)$, na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$

$W^{2,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \in W^{1,p}(\Omega)\}$

$|u|_0 = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|$ norma do espaço $C(\overline{\Omega})$.

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\, dx \right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$

$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$ norma do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

$|u|_{0,\alpha} = \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} + \sup_{x\in\Omega} u(x)$ norma do espaço $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$

p^* expoente crítico de Sobolev definido por

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{se} \quad 1 \leq p < N \\ \infty & \text{se} \quad p \geq N \end{cases}$$

Introdução

Neste trabalho, estudamos certas propriedades qualitativas de soluções de algumas equações semi-lineares. Para isto, estudamos um princípio de máximo refinado para operadores elípticos de segunda ordem em domínios limitados onde a fronteira não é necessariamente suave.

No Capítulo 1, consideramos um operador elíptico de segunda ordem L em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, do tipo

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u,$$

onde os coeficientes a_{ij}, b_i, c são funções reais definidas em Ω. Quando esses coeficientes e a fronteira $\partial\Omega$ são suficientemente regulares, é bem conhecido que o problema de autovalor

$$(PA) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} Lu + \lambda u & = & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right.$$

possui um autovalor principal λ_1, o qual é simples e para qualquer outro outro autovalor λ associado ao Problema (PA) temos que $Re\lambda \geq \lambda_1$ e λ_1 é o único autovalor que possui uma autofunção com sinaql definido.

Um fato muito interessante é que a condição $\lambda_1 > 0$ é equivalente a validade do princípio do máximo:

$$Lw \geq 0 \text{ em } \Omega \text{ e } \limsup_{x \to \partial\Omega} w \leq 0 \text{ implicam em } w \leq 0 \text{ em } \Omega.$$

Em nosso trabalho, investigamos o caso não-suave. Apresentamos o princípio do máximo refinado e definimos:

$$\lambda_1 = \lambda_1(L, \Omega) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \phi > 0 \text{ em } \Omega \text{ satisfazendo } (L + \lambda)\phi \leq 0\}$$

e mostramos a existência de uma autofunção positiva associada a λ_1, satisfazendo as propriedades citadas acima.

No Capítulo 2, estudamos propriedades qualitativas de soluções positivas do problema

$$(P) \quad \left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(u) & \text{em} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right.$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, com alguma tipo de simetria e com fronteira suave. Usando o princípio do máximo refinado, provamos a simetria de qualquer solução do problema linearizado associado:

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v &= f'(u)v \quad \text{em} \quad \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Com isto, deduzimos várias propriedades de v e u, em particular, se $n = 2$, f é convexa, Ω é simétrico e convexo em relação aos eixos coordenados, então não existe duas soluções de (P) tendo o mesmo máximo, e para $f(u) = u^p$, $1 < p < 2^* - 1$, existe uma única solução de (P).

Consideramos ainda o problema:

$$(Q) \quad \begin{cases} -\Delta u &= u^p + \mu u^q \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde μ é um parâmetro real, $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, com $2^* = (n+2)/(n-2)$ se $n > 2$ e $2^* = \infty$ se $n = 2$. Um resultado de Ambrosetti-Brezis-Cerami (veja [1]) garante que o problema (Q) possui pelo menos duas soluções. Nosso principal resultado afirma que para certos domínios e μ próximo de 0, o problema (Q) possui apenas estas duas soluções.

No Capítulo 3, investigamos propriedades de simetria para soluções do problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(x,u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= g(x) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ é um domínio limitado, com algum tipo de simetria, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e de classe C^1 em relação a segunda variável, g é contínua e f e g possuem alguma simetria em x.

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar resultados conhecidos e que foram usados ao longo desta dissertação, facilitando com isso, a compreensão do trabalho.

0.1 Resultados Básicos

Em várias partes deste trabalho iremos recorrer aos seguintes resultados:

Teorema 0.1 ([9], Teorema 15.1) *Sejam X, Y e Z espaços de Banach. Suponhamos que U é uma vizinhaça de x_0 em X e V é uma vizinhança de y_0 em Y, e $F : U \times V \longrightarrow Z$ é de classe C^1. Suponhamos ainda que $F(x_0, y_0) = 0$ e $D_yF(x_0, y_0) : Y \longrightarrow Z$ é um isomorfismo. Então $F(x, y)$ define uma única aplicação $G : W \longrightarrow Y$ contínua, onde W é uma vizinhança de x_0 em X tal que $F(x, G(x)) = 0$ para todo $x \in W$.*

Teorema 0.2 ([14], Teorema da Divergência) *Seja Ω um aberto de classe C^1. Se $F \in C_0^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, então*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(F(x))dx = \int_{\partial\Omega} F(\sigma) \cdot \nu(\sigma)d\sigma. \tag{1}$$

Notemos que em particular para $F = \nabla u$ temos que

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla u(x))dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma). \tag{2}$$

Como consequência deste resultado, temos as fórmulas de Green, a saber:

Corolário 0.1 ([14], Fórmulas de Green) *Sejam Ω um aberto de classe C^1 e u, v duas funções de classe $C_0^2(\mathbb{R}^N)$. Então,*

$$\int_\Omega [v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)]dx = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)v(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \nu}(\sigma)u(\sigma)\right] d\sigma, \tag{3}$$

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(\sigma)v(\sigma)d\sigma. \tag{4}$$

Muitas vezes nesta dissertação, usaremos um fato muito importante da Análise Funcional, que em espaços reflexivos toda sequência limitada possui subsequência convergente.

Teorema 0.3 ([5], Teorema III.27) *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma seqüência limitada em E; então existe uma subseqüência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca de E.*

Comentamos que os espaços de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ e $W^{2,p}(\Omega)$, com $1 < p < \infty$ são espaços reflexivos.

Teorema 0.4 ([5], Teorema de Rellich-Kondrachov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio de classe $C^{0,1}$. Então:*

(a) *Se $kp < n$, o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*]$;*

(b) *Se $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m+1$, o espaço $W^{k,p}(\Omega)$ está imerso continuamente em $C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, onde $\alpha = k - \frac{n}{p} - m$, e imerso compactamente em $C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$ para qualquer $\beta < \alpha$.*

Em particular, para $k = 2$ e $p > n, W^{2,p}(\Omega)$ está imerso compactamente em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ para todo $\beta < 1 - \frac{n}{p}$. Além disso, $W^{2,n}(\Omega)$ está imerso continuamente em $C^{0,1}(\overline{\Omega})$.

0.2 Princípio do Máximo

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e consideremos uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Como sabemos, o máximo da função u é atingido em um ponto de $\overline{\Omega}$. Suponhamos também que u satisfaça a desigualdade estrita

$$\Delta u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Então o máximo de u não pode ser atingido em um ponto interior. De fato, se existisse um ponto $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = \max_{\overline{\Omega}} u$, então

$$\nabla u(x_0) = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}(x_0) \leq 0, ..., \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x_0) \leq 0,$$

donde $\Delta u(x_0) \leq 0$, contrariando a desigualdade estrita acima. Neste caso, escrevemos

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial \Omega} u.$$

Esta seção tem por objetivo apresentar resultados do tipo acima para operadores diferenciais tendo a forma geral

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \quad a_{ij} = a_{ji}, \tag{5}$$

onde os coeficientes a_{ij} são funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$ e os coeficientes b_i, c são funcões limitadas em Ω.

Definição 0.1 *Fixemos as seguintes noções para operadores L do tipo (5)*

1. *O operador L é chamado elíptico sobre Ω se para todo $x \in \Omega$ existe $\lambda(x) > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda(x)|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n.$$

2. *O operador L é chamado estritamente elíptico sobre Ω se existe $\lambda > 0$ tal que*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad e \quad x \in \Omega.$$

3. *O operador L é chamado uniformemente elíptico sobre Ω se existem $\Lambda, \lambda > 0$ tal que*

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2, \qquad \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad e \quad x \in \Omega.$$

Observação 1 *Estas definições não são uniformes na literatura científica.*

Quando tomamos os coeficientes em L como sendo

$$a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad i = j \\ 0 & \text{se} \quad i \neq j, \end{cases} \qquad b_i = c = 0,$$

obtemos o operador Laplaciano $L = \Delta$, onde $\Lambda = \lambda = 1$, que é uniformemente elíptico em qualquer domínio.

Teorema 0.5 (Princípio do máximo fraco para $c = 0$) *Seja L um operador estritamente elíptico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$Lu \geq 0 \quad em \quad \Omega \qquad e \qquad c \equiv 0.$$

Então o máximo de u em $\overline{\Omega}$ é atingido sobre $\partial\Omega$, isto é,

$$\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Se considerarmos a função u apenas em $C^2(\Omega)$, então a conclusão deste Teorema deve ser substituída por

$$\sup_{\Omega} u = \limsup_{x \to \partial\Omega} u(x).$$

Prova. Esta demonstração pode ser encontrada em [10] ou [13]. ■

O próximo resultado, imediato deste teorema, abrange o caso mais geral em que temos $c \leq 0$ em Ω.

Corolário 0.2 (Princípio do máximo fraco para $c \leq 0$) *Seja L um operador estritamente elíptico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$Lu \geq 0 \quad em \quad \Omega \qquad e \qquad c \leq 0.$$

Então

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

No caso em que u pertence apenas a $C^2(\Omega)$, a conclusão deste corolário fica

$$\sup_{\Omega} u = \limsup_{x \to \partial\Omega} u^+(x).$$

Prova. Consideremos $V = \{x \in \Omega; \quad u(x) > 0\}$. Se $V = \emptyset$ então $\max_{\overline{\Omega}} u \leq 0 = \max_{\partial\Omega} u^+$, donde segue o resultado. Vamos supor que $V \neq \emptyset$. Daí, em V temos que $-cu \geq 0$, e assim

$$Mu := \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} \geq -cu \geq 0.$$

Aplicando o Teorema 0.5 e o fato que $u = 0$ sobre $\partial V \cap \Omega$, obtemos que o máximo é atingido sobre $\partial\Omega$. Assim,

$$\max_{\overline{V}} u = \max_{\partial V} u = \max_{\partial\Omega} u^+,$$

o que conclui o corolário. ■

Observação 2 *Um fato importante é que a condição $c \leq 0$ não pode ser relaxada. Como contra-exemplo, consideremos a função $u(x, y) = \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)$ definida sobre $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}$. Cálculos simples mostram que*

$$\begin{cases} \Delta u + 2u = 0 & em \quad \Omega \\ u > 0 & em \quad \Omega \\ u = 0 & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Logo a conclusão do Corolário 0.2 não se aplica ao operador $L = \Delta + 2$ em Ω.

Lema 0.1 ([13], Lema 3.4, Lema de Hopf) *Suponhamos que o operador L é uniformemente elíptico em Ω, $c = 0$ e $Lu \geq 0$ em Ω. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que,*

(i) *u é contínua em x_0;*

(ii) *$u(x_0) > u(x)$ para todo $x \in \Omega$;*

(iii) *$\partial\Omega$ satisfaz a condição da bola interior em x_0, isto é, existe uma bola $B \subset \Omega$ com $x_0 \in \partial B$.*

Então, a derivada normal exterior de u em x_0, caso exista, satisfaz

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0.$$

Se $c \leq 0$¸ então o resultado continua valendo desde que $u(x_0) \geq 0$. Se $u(x_0) = 0$ a mesma conclusão vale independentemente do sinal da função c.

Teorema 0.6 ([10], Teorema 6.4.4, Princípio do Máximo Forte) *Suponhamos que Ω é conexo, que $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e $Lu \leq 0$ em Ω.*

(i) *Se $c = 0$ e u atinge seu máximo em $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω.*

(ii) *Se u tem máximo global zero em Ω, então u é identicamente nula em Ω.*

Lema 0.2 ([10], Lema de Hopf Refinado) *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, e $c \in L^\infty(\Omega)$. Suponhamos além disso que,*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu & \geq & 0 & \quad em \quad \Omega \\ u & \geq & 0 & \quad em \quad \Omega, \end{cases}$$

com u não identicamente nula.

1. *Se para algum $x_0 \in \partial\Omega$, temos $u(x_0) = 0$ e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0, então*

$$\nu(x_0) \cdot \nabla u(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) < 0,$$

   onde ν denota a normal unitária exterior.

2. *Além disso,*

$$u > 0 \quad em \quad \Omega.$$

Teorema 0.7 ([13], Teorema 8.20 , Desigualdade de Harnack) *Suponha que o operador L é uniformemente elíptico em Ω. Se $u \in C^2(\Omega)$, $u \geq 0$ e $Lu = 0$ em Ω então para cada subdomínio $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos*

$$\sup_{\Omega'} u \leq C \inf_{\Omega'} u,$$

onde a constante $C > 0$ e depende apenas de Ω' e dos coeficientes do operador L.

Os próximos teoremas estabelecem resultados de princípio do máximo para funções em $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e as demonstrações podem ser encontradas no Capítulo 9 de [13]. A desigualdade de Harnack também é válida para funções em $W^{2,n}(\Omega)$, e a prova deste fato pode ser encontrada no Corolário 9.25 de [13].

Teorema 0.8 (Princípio do Máximo Fraco para Funções $u \in W^{2,p}(\Omega)$) *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Considere $u \in W^{2,p}(\Omega)$ com $p \geq n$, satisfazendo $Lu \geq 0$ em Ω. Se $c \leq 0$ em Ω, então*

$$\sup_{\Omega} u \leq \limsup_{x \to \partial\Omega} u^+(x).$$

Teorema 0.9 (Princípio do Máximo Forte para Funções $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$) *Seja L um operador elíptico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ satisfaz $Lu \geq 0$ em Ω e $c = 0$ ($c \leq 0$), então u não pode atingir seu máximo (máximo não-negativo) em Ω a menos que seja constante.*

0.3 Regularidade

Os próximos resultados foram tirados de [13] e valem para operadores elípticos L mais gerais, porém para esta dissertação é suficiente considerar o caso $L = \Delta$.

Teorema 0.10 ([13], Teorema 8.24) *Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $f \in C(\overline{\Omega})$ e suponha que $u \in W^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca de $\Delta u = f$. Então para todo subdomínio $\Omega' \subset\subset \Omega$ temos a estimativa*

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega}')} \leq C(\|u\|_{L^2(\Omega)} + \|f\|_{C(\overline{\Omega})}),$$

onde as constantes positivas C e α não dependem de u e f.

Teorema 0.11 ([13], Teorema 6.14) *Sejam Ω um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$, $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C^\alpha(\partial\Omega)$. Então o problema de Dirichlet*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta u & = & f & \text{em} \quad \Omega \\ u & = & \varphi & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{6}$$

possui uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 0.12 ([13], Teorema 4.6) *Sejam Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ e suponha que $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ é uma solução clássica de $\Delta u = f$. Então para todo $\Omega' \subset\subset \Omega$*

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}')} \leq C(\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})}),$$

onde a constante positiva C independe de u e de f.

Teorema 0.13 ([13], Lema 6.16) *Sejam Ω um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$, $f \in C^\alpha(\Omega)$ e $u \in C^2(\Omega)$ uma solução clássica de $\Delta u = f$. Então $u \in C^{2,\alpha}$.*

Teorema 0.14 ([13], Corolário 8.29) *Seja* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}^n$ *de classe* $C^{1,\alpha}$ *e* $f \in C(\overline{\Omega})$. *Se* u *é uma solução clássica de*

$$\begin{cases} \Delta u &= f & em & \Omega \\ u &= 0 & sobre & \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

então

$$\|u\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|u\|_{C(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C(\overline{\Omega})}),$$

onde a constante C *independe de* f *e* u.

Teorema 0.15 ([13], Teorema 6.6) *Sejam* Ω *um domínio limitado em* $\mathbb{R}^n$ *de classe* $C^{2,\alpha}$, $f \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ *e* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ *solução de*

$$\begin{cases} \Delta u &= f & em & \Omega \\ u &= 0 & sobre & \partial\Omega. \end{cases} \tag{8}$$

Então

$$\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C(\|u\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^{\alpha}(\overline{\Omega})}),$$

onde a constante positiva C *independe de* u *e* f.

0.4 Teoremas de Existência de Soluções

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados de existência de soluções, mais antes precisamos de algumas definições do que entendemos por solução de problemas do tipo $Lu = f$, onde L é um operador do tipo (5), com seus coeficientes conhecidos, e a função f é dada. Uma solução clássica de $Lu = f$ é uma função u duas vezes diferenciável em Ω que satifaz esta equação pontualmente. Uma solução forte de $Lu = f$ é uma solução duas vezes fracamente diferenciável que satisfaz esta equação em quase todo ponto de Ω.

Iremos agora definir domínios de classe $C^{k,\alpha}$. Muitas vezes usamos os termos domínio suave ou regular para domínios de classe $C^{k,\alpha}$, para k e α convenientes.

Definição 0.2 ([13], seção 6.2) *Um domínio limitado* Ω *em* $\mathbb{R}^n$ *é dito ser de classe* $C^{k,\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, *se para cada ponto* $x_0 \in \partial\Omega$, *existe uma bola* $B = B(x_0)$ *e uma bijeção* ψ *de* B *em* $D \subset \mathbb{R}^n$ *tal que:*

(i) $\psi(B \cap \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$;

(ii) $\psi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$;

(iii) $\psi \in C^{k\alpha}(B)$, $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$.

Teorema 0.16 ([13], Capítulo 9, Teorema de Calderón-Zigmund) *Seja* L *um operador elípitico da forma* (5) *e suponhamos que os coeficientes* $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, *e* $b, c \in L^{\infty}(\Omega)$. *Se* Ω *é um aberto limitado de classe* $C^{1,1}$, $c \leq 0$ *em* Ω *e* $f \in L^p(\Omega)$

para algum $p \in (1,\infty)$, então existe uma única função $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em} \quad \Omega \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{9}$$

e ainda, para alguma constante C independente de f e u, temos

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq C\|f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{10}$$

Além disso, se $p > n/2$ e $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ existe uma única solução $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Lu = f & \text{em} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{11}$$

Teorema 0.17 ([10], Teorema 6.5.3) *Seja Ω um domínio de classe $C^{1,1}$. Considere um operador L uniformemente elíptico, tendo coeficientes $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$. Então*

(i) *Existe um autovalor real λ_1 para o operador L, sobre as condições de Dirichlet. Além disso, se $\lambda \in \mathbb{C}$ é outro autovalor de L então $Re(\lambda) \geq \lambda_1$;*

(ii) *Existe uma autofunção correspondente ϕ_1, que é positiva em Ω;*

(iii) *O autovalor λ_1 é simples, isto é, se ψ satisfaz*

$$\begin{cases} L\psi = \lambda_1\psi & \text{em} \quad \Omega \\ \psi = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então ψ é múltipla de ψ_1.

(iv) *O autovalor λ_1 é caracterizado por*

$$\lambda_1 = -\inf_{\phi}\sup_{x}\frac{L\phi(x)}{\phi(x)},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as funções $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$, com $\phi > 0$ em Ω e $\phi = 0$ sobre $\partial\Omega$ e o supremo é tomado sobre todos os pontos $x \in \Omega$.

Em [8] podemos encontrar uma abordagem sobre o problema de autovalor com peso e no Capítulo 8 de [13] também é tratado o problema de autovalor.

Teorema 0.18 *Seja L um operador estritamente elípitico em um domínio Ω de classe $C^{1,1}$, tendo coeficientes $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega)$ e tome $p \in (1,\infty)$. Então uma, e somente uma, das duas alternativas deve ocorrer:*

(a) *Para cada* $f \in L^p(\Omega)$ *existe uma única solução forte* $u \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *de*

$$\begin{cases} Lu &= f \qquad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega; \end{cases}$$

(b) *Existe uma solução forte* $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ *não-trivial do problema homogêneo.*

$$\begin{cases} Lu &= 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega; \end{cases}$$

Prova. Em [10] este teorema é estabelecido para soluções fracas. Usando a teoria de regularidade e o Teorema de Calderón-Zigmund concluímos que isto também é válido para soluções fortes. Para o caso de soluções clássicas veja o Teorema 6.15 de [13]. ■

Teorema 0.19 ([20], Teorema 1.19) *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio com medida finita,* $p \in (1, 2^* - 1)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Então existe uma solução fraca* $u \in H_0^1(\Omega)$, *não-trivial, do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= u^p \qquad \text{em} \quad \Omega \\ u &\geq 0 \qquad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \qquad \text{sobre} \quad \partial\Omega; \end{cases} \tag{12}$$

se, e somente se $\lambda > -\lambda_1(\Delta, \Omega)$.

Observação 3 *Quando* $\partial\Omega$ *é suave, usando a teoria de regularidade (veja [10] no Capítulo* 6*) concluímos que as soluções de* (12) *são de fato clássicas. A positividade das soluções é obtida diretamente pelo princípio do máximo forte.*

Teorema 0.20 ([12]) *Sejam* $p \in (1, 2^* - 1)$ *e* $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ *solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^p \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^n \\ u &\geq 0 \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Então $u \equiv 0$.

Teorema 0.21 ([12]) *Denotemos por* $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ *e seja* $p \in (1, 2^* - 1)$ *e* $u \in C^2(\mathbb{R}^n_+) \cap C^0(\overline{\mathbb{R}}^n_+)$ *solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^p \quad \text{em} \qquad \mathbb{R}^n_+ \\ u &\geq 0 \quad \text{em} \qquad \mathbb{R}^n_+ \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \qquad \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}. \end{cases}$$

Então $u \equiv 0$.

Teorema 0.22 ([12]) *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u &=& u^p & em & \Omega, \\ u &>& 0 & em & \Omega, \\ u &=& 0 & sobre & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$ com $\partial\Omega$ de classe C^1, $1 < p < 2^* - 1$. Então $u(x) \leq C$ para todo $x \in \Omega$, onde a constante C depende somente de p e de Ω, mas não de u.

Teorema 0.23 ([11], Teorema de Simetria de Gidas-Ni-Nirenberg) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, simétrico em relação ao hiperplano $T_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ e convexo na direção do eixo x_1. Seja ainda $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ localmente lipschitz e $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u &=& f(u) & em & \Omega, \\ u &>& 0 & em & \Omega, \\ u &=& 0 & sobre & \partial\Omega, \end{cases}$$

Então,

(i) *u é simétrica em relação a x_1, isto é, $u(x_1, ..., x_n) = u(-x_1, ..., x_n)$ para todo $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega$;*

(ii) *$\frac{\partial u}{\partial x_1}(x) < 0$ para todo $x \in \{x \in \Omega; x_1 > 0\}$.*

Teorema 0.24 ([11]) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com fronteira suave, simétrico em relação ao hiperplano $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ e convexo na direção do eixo x_1. Suponha que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução de*

$$\begin{cases} -\Delta u &=& f(x,u) & em & \Omega, \\ u &>& 0 & em & \Omega, \\ u &=& 0 & sobre & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f e f_u são funções contínuas para todo $x \in \overline{\Omega}$, f é simétrica em relação a x_1 e decrescente em relação a x_1 para todo $x \in \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega : x_1 > 0\}$. Então u é simétrica em relação a x_1 e $u_{x_1} < 0$ para todo $x \in \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega : x_1 > 0\}$.

Capítulo 1

Um Princípio do Máximo Refinado para Domínios não-suaves

1.1 Introdução e Preliminares

Neste capítulo apresentaremos um princípio do máximo para operadores elípticos uniformemente elípticos de segunda ordem em domínios não-suaves. Estudamos também um problema de autovalor e provamos que a validade deste princípio do máximo é equivalente a positividade do primeiro autovalor. Os principais resultados deste capítulo são devidos a Berestycki-Nirenberg-Varadhan ([4]) e Stroock-Varadhan ([19]).

Neste capítulo, L denotará um operador elíptico em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, da forma

$$Lu = Mu + c(x)u = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{1.1}$$

e iremos considerar somente operadores uniformemente elípticos, tais que existam constantes positivas c_o, C_o satisfazendo

$$c_o|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq C_o|\xi|^2, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; x \in \Omega. \tag{1.2}$$

Além disso, assumiremos que

$$a_{ij} \in C(\Omega),\ b_i, c \in L^\infty(\Omega) \tag{1.3}$$

$$(\sum b_i^2)^{1/2}, |c| \leq b, \tag{1.4}$$

para alguma constante positiva b.

O objetivo deste capítulo é estudar o princípio do máximo e a existência do autovalor e da autofunção principais para tais operadores. Sabe-se que se a fronteira

$\partial\Omega$ e os coeficientes do operador L são suficientemente regulares, então existe um autovalor principal λ_1 e uma autofunção associada ϕ_1 tal que

$$\begin{cases} (L+\lambda_1)\phi_1 = 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \phi_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega; \end{cases}$$

λ_1 é um autovalor simples, $\phi_1 > 0$ em Ω, e somente para o autovalor λ_1 existe uma autofunção positiva associada (veja Teorema 0.17). Veremos também que a condição $\lambda_1 > 0$ é equivalente a validade do princípio do máximo enunciado a seguir.

Neste capítulo, investigamos o caso em que $\partial\Omega$ é não-suave e para tanto, usaremos um método de aproximação por soluções em subdomínios com fronteira regular e em todas as nossas estimativas, as constantes que aparecerão dependem somente das constantes c_o, C_o, b, e é claro, do domínio Ω.

Ao longo deste capítulo, consideraremos o operador L agindo em funções pertencentes ao espaço de Sobolev $W^{2,n}_{loc}(\Omega)$, tendo em vista que as soluções que trataremos em todo este capítulo são soluções fortes da equação $Lu = f$, isto é, uma função duas vezes fracamente diferenciável em Ω satisfazendo $Lu = f$ em quase todo ponto de Ω. Veremos na maior parte dos casos que tais funções pertencerão a $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ para todo p, tal que $n < p < \infty$.

O conhecido princípio do máximo fraco para funções $w \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (veja Corolário 0.2), afirma que dado um operador L com $c \leq 0$ em Ω, se $Lw \geq 0$, então

$$\max_{\overline{\Omega}} u \leq \max_{\partial\Omega} u^+.$$

Logo se tivermos $w \leq 0$ sobre $\partial\Omega$, então $w \leq 0$ em Ω. Motivados pelo exposto acima, usa-se atualmente a seguinte definição:

Definição 1.1 *Dizemos que* ***o princípio do máximo é válido para o operador*** L ***em*** Ω*, se*

$$Lw \geq 0 \quad em \quad \Omega \tag{1.5}$$

e

$$\limsup_{x \longrightarrow \partial\Omega} w(x) \leq 0 \tag{1.6}$$

implicam em $w \leq 0$ *em* Ω.

Observação 4 *A condição* (1.6) *abrange os casos onde as funções não são necessariamente contínuas até o bordo de* Ω*. Note que nesta condição está implicito o fato de* w *é limitada superiormente.*

Apresentamos a seguir, três condições suficientes para o princípio do máximo ser válido em um domínio Ω.

Proposição 1.1 *Seja* L *um operador elíptico do tipo* (1.1)*. Cada uma das três condições a seguir é suficiente para o princípio do máximo ser válido para* L *em um domínio* Ω*:*

(i) $c(x) \leq 0$ em Ω (veja Corolário 0.2).

(ii) Existe $g \in C(\Omega)$, $g > 0$ em $\overline{\Omega}$ tal que $Lg \leq 0$ em Ω.

A prova deste fato recai na condição anterior. Para ver isto, suponha w satisfazendo (1.5) e (1.6). Considere então a função $z = w/g$. Após alguns cálculos diretos obtemos:

$$(\tilde{M} + \tilde{c}(x))z \geq 0,$$

onde $\tilde{M}z = Mz + 2\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)g_{x_i}(x)u_{x_i}$ e $\tilde{c} = Lg/g \leq 0$ e desta forma estamos na suficiência da condição (i), concluindo assim que z, e imediatamente w é não-positiva em Ω.

(iii) O domínio Ω está contido em uma faixa suficientemente estreita, mais precisamente, existe um número real d positivo e um vetor unitário e tais que $|(y-x).e| < d$ para todo $x, y \in \Omega$. Então existe $d_o > 0$, dependendo somente de c_o e b tal que o princípio do máximo vale se $d < d_o$.

A prova deste fato recai no item anterior. Provaremos que existe uma função g satisfazendo (ii). Uma vez que o nosso operador L é invariante por rotações e translações, podemos supor sem perda de generalidade que $e = (1, 0, ..., 0)$ e que $\overline{\Omega} \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < x_1 < d\}$. Temos que $g := e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1} > 0$ em $\overline{\Omega}$ e g satisfaz

$$\begin{aligned} Lg &= -(a_{11}\alpha^2 + b_1\alpha)e^{\alpha x_1} + c(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1}) \\ &\leq -(c_o\alpha^2 - b\alpha) + be^{\alpha d}. \end{aligned}$$

Escolha α suficientemente grande de modo que $c_o\alpha^2 - b\alpha \geq 2b$, para obtermos

$$Lg \leq -2b + be^{\alpha d} = (e^{\alpha d} - 2)b,$$

desde que d seja suficientemente pequeno de forma que se tenha $e^{\alpha d} \leq 2$, então $Lg \leq 0$.

Um teorema de grande importância para este capítulo é o Teorema de Alexandroff-Bakelman-Pucci e por esta razão o enunciamos aqui na seguinte versão:

Teorema 1.1 (Alexandroff-Bakelman-Pucci) *Suponha que $c \leq 0$ em Ω, $f \in L^n(\Omega)$ e que w satisfaça $Lw \geq f$ em Ω e a condição* (1.6)*. Então*

$$\sup_{\Omega} w \leq B\|f\|_{L^n(\Omega)}, \tag{1.7}$$

onde a constante B depende somente de n, c_o, b e $diam(\Omega)$.

Prova. Veja Teorema 9.1 em [13]. ■

De posse deste Teorema, vamos provar que o princípio do máximo vale para domínios de medida pequena.

Proposição 1.2 *Existe $\delta > 0$, dependendo somente de $diam(\Omega), n, c_o$ e b, tal que o princípio do máximo é válido para o operador L em qualquer domínio $\Omega' \subset \Omega$, com $|\Omega'| < \delta$.*

Prova. Seja w satisfazendo

$$Lw \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega' \quad \text{e} \quad \limsup_{x \longrightarrow \partial\Omega'} w(x) \leq 0$$

com $|\Omega'| < \delta$, onde $\delta > 0$ será escolhido posteriormente. Podemos deduzir da primeira desigualdade que

$$(M - c^-)w \geq -c^+ w = -c^+ w^+ + c^+ w^- \geq -c^+ w^+ \quad \text{em} \quad \Omega'.$$

Aplicando o Teorema 1.1, obtemos

$$\sup_{\Omega'} w \leq B \|c^+ w^+\|_{L^n(\Omega')} \leq Bb\delta^{1/n} \sup_{\Omega'} w^+.$$

Fazendo $2Bb\delta^{1/n} = 1$, concluímos que $\sup_{\Omega'} w^+ = 0$, pois do contrário teríamos

$$\sup_{\Omega'} w = \sup_{\Omega'} w^+ \leq \frac{1}{2} \sup_{\Omega'} w^+,$$

o que é impossível. ■

1.2 O Princípio do Máximo Refinado

Nesta seção, apresentaremos um princípio do máximo semelhante ao da Definição 1.1 com ligeira modificação na condição (1.6). Para domínios não-suaves, uma forma de se obter soluções fortes é pelo método de aproximação por soluções em domínios com fronteira regular. Para este tipo de solução a condição (1.6) é uma hipótese muito forte, visto que em geral não podemos preescrever valores na fronteira, ou não conhecemos o comportamento das soluções em todo ponto de $\partial\Omega$. Por esta razão, apresentaremos aqui o princípio do máximo refinado, que requer uma condição mais fraca do que (1.6). Esta versão é devida a Stroock e Varadhan ([19]). Ela faz uso de uma solução $u_o > 0$ em Ω de $Mu_o = -1$, que se anula, em certo sentido sobre $\partial\Omega$. No lugar de (1.6), iremos requerer que para toda sequência $x_j \longrightarrow \partial\Omega$ tal que $u_o(x_j) \longrightarrow 0$, tenhamos

$$\limsup w(x_j) \leq 0$$

No que segue, usaremos as seguintes notações:

1 . Dada $u \in C(\Omega)$, para uma sequência $x_j \longrightarrow \partial\Omega$ usaremos a notação

$$x_j \xrightarrow{u} \partial\Omega$$

para significar que $u(x_j) \longrightarrow 0$.

2 . Escreveremos

$$u \overset{u_o}{=} 0 \text{ sobre } \partial\Omega$$

se $x_j \xrightarrow{u_o} \partial\Omega$ implicar que $u(x_j) \longrightarrow 0$.

Definição 1.2 *Dizemos que L satisfaz o* ***princípio do máximo refinado*** *em Ω se para toda função $w \in W^{2,n}_{loc}$ tal que*

$$Lw \geq 0 \quad em \quad \Omega, \quad w \quad limitada\ superiormente \tag{1.8}$$

e

$$\limsup w(x_j) \leq 0 \quad se \quad x_j \xrightarrow{u_o} \partial\Omega, \tag{1.9}$$

implicar que $w \leq 0$ em Ω.

Observação 5 *A hipótese de w ser limitada superiormente não pode ser omitida. Para exemplificar isto, suponhamos que $L = \Delta$ e $\Omega = B_1(0)\setminus\{0\} \subset \mathbb{R}^3$. A função u_o é dada por $u_o(x) = (1/6)(1-|x|^2)$. Temos que $0 \in \partial\Omega$, mas para qualquer sequência $x_j \longrightarrow 0$, temos que $u_o(x_j) \longrightarrow 1/6$. Logo, na definição do princípio do máximo refinado, nenhuma dessas sequências serve de teste e portanto $w(x) = 1/|x| - 1$ satisfaz as condições (1.8) e (1.9), exceto pela limitação superior e é positiva.*

Observação 6 *A condição (1.9) equivale a dizer que dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que*

$$se \quad x \in \Omega \quad e \quad u_o(x) < \delta \quad então \quad w(x) \leq \epsilon.$$

Supondo também $w \leq N$, então para cada $\epsilon > 0$ fixado temos

$$w(x) \leq \epsilon + \frac{N}{\delta} u_o(x), \quad \forall x \in \Omega. \tag{1.10}$$

De fato, basta observar que, para $x \in \Omega$ tem-se que

$$se \quad u_o(x) < \delta \quad então \quad w(x) \leq \epsilon,$$

e dessa forma, se $u_o(x) \geq \delta$, obtemos

$$\frac{N}{\delta} u_o(x) \geq N \geq w(x).$$

Donde, $w(x) \leq \max\{\frac{N}{\delta}u_o(x), \epsilon\} \leq \frac{N}{\delta}u_o(x) + \epsilon$.

1.3 Construção de u_o, e seu comportamento na fronteira

Vamos agora construir a função u_o, que é usada na Definição 1.2 do princípio do máximo refinado. Como já comentamos, a função u_o é a solução positiva do problema $Mu_o = -1$ em Ω, que se anula em certo sentido sobre $\partial\Omega$. A função u_o será obtida por limite de funções que são soluções de

$$\begin{cases} Mu &= -1 \quad \text{em} \quad \Omega' \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega', \end{cases}$$

onde $\Omega' \subset \Omega$ e $\partial\Omega'$ é suave. Por conveniência, iremos sempre supor que $\inf\{x_1 : x = (x_1, x_2 \dots, x_n) \in \Omega\} = 0$.

Consideremos Ω_k uma sequência de conjuntos abertos, todos tendo fronteira suave, com

$$\Omega_k \subset \overline{\Omega}_k \subset \Omega_{k+1}; \quad \cup_k \Omega_k = \Omega.$$

Destas considerações, temos que $a_{ij} \in C(\overline{\Omega}_k)$ e assim, pelo Teorema de Calderón-Zigmund, para cada k, o problema

$$\begin{cases} Mu_k &= -1 \quad \text{em} \quad \Omega_k \\ u_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_k \end{cases} \tag{1.11}$$

possui uma única solução $u_k \in W^{2,p}(\Omega_k) \cap C(\overline{\Omega}_k)$, para todo $p \in (1, \infty)$.

Como M satisfaz o princípio do máximo usual, concluímos que $u_k \geq 0$ em Ω_k. Agora pelo princípio do máximo forte, $u_k > 0$ em Ω_k. As funções u_k são crescentes em k. De fato, desde que

$$\begin{cases} M(u_k - u_{k+1}) &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_k \\ u_k - u_{k+1} &= -u_{k+1} < 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_k, \end{cases}$$

segue do princípio do máximo que $u_k \leq u_{k+1}$ em Ω_k. Além disso, as funções u_k são limitadas superiormente por uma mesma constante. Para verificar isto, consideremos $\sigma > 0$ tal que

$$c_o\sigma^2 - b\sigma - b = 1.$$

Então, em cada Ω_k

$$\begin{aligned} Me^{\sigma x_1} &= e^{\sigma x_1}(a_{11}(x)\sigma^2 + b_1(x)\sigma) \\ &\geq e^{\sigma x_1}(c_o\sigma^2 - b\sigma) \\ &\geq e^{\sigma x_1} \geq 1 = -Mu_k, \end{aligned}$$

ou seja,

$$M(e^{\sigma x_1} + u_k) \geq 0.$$

Denotando $d = \text{diam}(\Omega)$, pelo princípio do máximo fraco, segue que

$$e^{\sigma x_1} + u_k \leq \sup_{\partial\Omega_k}(e^{\sigma x_1} + u_k) = \sup_{\partial\Omega_k} e^{\sigma x_1} \leq e^{\sigma d} \quad \text{em} \quad \Omega_k,$$

obtendo assim,

$$u_k \leq e^{\sigma d} - e^{\sigma x_1} \leq e^{\sigma d} \quad \text{em} \quad \overline{\Omega}_k, \quad \forall k. \tag{1.12}$$

Consideremos agora um compacto $K \subset \Omega$. Por estimativas interiores (veja (10) em preliminares), temos

$$\|u_k\|_{W^{2,p}(K)} \leq C\|1\|_{L^p(K)} \leq C|\Omega|^{1/n}$$

Como $W^{2,p}$ é reflexivo, passando para uma subsequência, concluímos que $u_k \rightharpoonup u_o$ fracamente em $W^{2,p}(K)$, com $u_k(x) \nearrow u_o(x)$ para todo $x \in \Omega$ e tomando $p > n$ obtemos a imersão compacta $W^{2,p}(K) \subset\subset C^1(K)$, implicando que $u_k \longrightarrow u_o$ em $C^1(K)$. Estes fatos nos permitem concluir que $Mu_o = -1$ em Ω, como solução forte, bem como a limitação $0 < u_o < e^{\sigma d}$ em Ω.

Doravante passaremos a prescrever o comportamento de u_o na fronteira, mas antes precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.3 *Dizemos que um ponto $y \in \partial\Omega$* ***admite uma barreira forte****, se para alguma bola $B_r(y)$ existe em $U = \Omega \cap B_r(y)$ uma função positiva $h \in W^{2,p}_{loc}(U)$, satisfazendo $Mh \leq -1$, e que pode ser extendida continuamente ao ponto y com $h(y) = 0$.*

Proposição 1.3 *A função u_o anula-se sobre a fronteira no seguinte sentido: u_o pode ser extendida continuamente a todo o ponto $y \in \partial\Omega$ que admite uma barreira forte, colocando $u_o(y) = 0$.*

Prova. De fato, supondo que $y \in \partial\Omega$ admite uma barreira forte, seja $U = B_r(y) \cap \Omega$, $h \in W^{2,p}_{loc}(U)$ tal que

$$h > 0, \quad Mh \leq -1 \quad \text{em} \quad U, \qquad h(y) = 0.$$

Denotemos $V = \Omega_k \cap B_{r/2}(y)$, onde k é fixado de forma que $V \neq \emptyset$. Fixemos $\epsilon > 0$, dependendo somente de n, C_o, b e r, de forma que

$$\epsilon M|x-y|^2 \leq \frac{1}{2} \ \text{ em } \ U.$$

Então $\tilde{h}(x) := h(x) + \epsilon|x-y|^2$ satisfaz em U,

$$M\tilde{h} = Mh + \epsilon M|x-y|^2 \leq -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Além disso, se $|x-y| = r/2$ e $x \in \overline{\Omega}_k$

$$\tilde{h} = h + \epsilon|x-y|^2 \geq \epsilon\frac{r^2}{4} := \delta. \tag{1.13}$$

Podemos supor sem perda de generalidade que $\delta \leq 1/2$. Desta forma, obtemos por (1.12) e (1.13)

$$u_k(x) \leq e^{\sigma d} \leq \frac{e^{\sigma d}}{\delta}\tilde{h}(x) \ \text{ sobre } \ \partial V,$$

isto é,

$$\zeta(x) := \frac{e^{\sigma d}}{\delta}\tilde{h}(x) - u_k(x) \geq 0 \ \text{ sobre } \ \partial V$$

com ζ satisfazendo em V a desigualdade

$$M\zeta(x) = \frac{e^{\sigma d}}{\delta} M\tilde{h}(x) - Mu_k(x) \leq -\frac{e^{\sigma d}}{2\delta} + 1 \leq 0.$$

Pelo princípio do máximo segue que $\zeta \geq 0$ em V, ou seja,

$$u_k(x) \leq \frac{e^{\sigma d}}{\delta}\tilde{h}(x) \quad \text{em} \quad V.$$

Fixando $x \in V$ fazendo k tender ao infinito obtemos

$$u_o(x) \leq \frac{e^{\sigma d}}{\delta}\tilde{h}(x) \quad \text{em} \quad V = \Omega_k \cap B_{r/2}(y),$$

o que implica em

$$u_o(x) \leq \frac{e^{\sigma d}}{\delta}\tilde{h}(x) \ \text{ em } \ \Omega \cap B_{r/2}(y)$$

e a afirmação segue. ∎

Observação 7 *A função u_o definida acima independe da escolha dos subconjuntos Ω_k. De fato, considere a função $\tilde{u}_o$ obtida da mesma forma que u_o, pela escolha dos subconjuntos $\tilde{\Omega}_k$. Fixe k e $\tilde{\Omega}_k$. Desde que $\Omega = \cup\Omega_j$, podemos tomar j suficientemente grande de maneira que*

$$\tilde{\Omega}_k \subset \Omega_j.$$

Usando o princípio do máximo fraco, concluímos que

$$\tilde{u}_k \leq u_j \quad \text{em} \quad \tilde{\Omega}_k.$$

Desde que k é arbitrário, isto vale para todo Ω, e portanto

$$\tilde{u}_o \leq u_o \quad \text{em} \quad \Omega.$$

De forma análoga obtém-se $u_o \leq \tilde{u}_o$ em Ω, decorrendo a igualdade.

Proposição 1.4 *Dada $f \in L^\infty(\Omega)$, existe uma única solução z de $Mz = f$ satisfazendo*

$$|z(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} u_o(x) \ \text{ em } \ \Omega$$

e

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq B\|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

Além disso, se $f \leq 0$ então $z \geq 0$ em Ω

Prova. Para verificar a existência, procede-se de forma análoga à construção da função u_o. Considerando Ω_k uma sequência de conjuntos como antes, e observando que $f \in L^p(\Omega_k)$, para todo k, concluímos pelo Teorema de Calderón-Zigmund que existe uma única solução $z_k \in W^{2,p}(\Omega_k) \cap C(\overline{\Omega}_k)$, para todo $1 < p < \infty$, de

$$\begin{cases} Mz_k = f & \text{em} \quad \Omega_k \\ z_k = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega_k. \end{cases} \tag{1.14}$$

Pelas estimativas interiores do Teorema 0.16 concluímos que $z_k \rightharpoonup z$ fracamente em $W^{2,p}(K)$ e $z_k \to z$ em $C^1(K)$, para cada compacto $K \subset \Omega$. Assim, obtemos com auxílio de alguns cálculos que $Mz = f$ em Ω.

Para provar a primeira desigualdade, podemos supor que $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$. Daí, em Ω_k

$$Mz_k = f \leq 1 = -Mu_o,$$

isto é,

$$\begin{cases} M(u_o + z_k) \leq 0 & \text{em,} \quad \Omega_k \\ u_o + z_k = u_o > 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo segue que

$$z_k \geq -u_o \quad \text{em} \quad \Omega_k.$$

De forma análoga

$$Mz_k = f \geq -1 = Mu_o \quad \text{em} \quad \Omega_k,$$

e assim

$$\begin{cases} M(z_k - u_o) \geq 0 & \text{em} \quad \Omega_k \\ z_k - u_o = -u_o < 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega_k. \end{cases}$$

o que implica em $z_k \leq u_o$ em Ω_k, e portanto $|z_k| \leq u_o$ em Ω_k. Tomando o limite obtemos o resultado desejado.

Demonstremos agora a outra desigualdade. Aplicando o Teorema 1.1 em (1.14) obtemos

$$|z_k(x)| \leq B\|f\|_{L^n(\Omega)} \quad \forall k$$

Fazendo $k \longrightarrow \infty$ tem-se

$$|z(x)| \leq B\|f\|_{L^n(\Omega)} \quad \text{em} \quad \Omega,$$

e portanto

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq B\|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

A unicidade segue diretamente desta segunda desigualdade. Agora supondo que $f \leq 0$ em Ω, temos pelo princípio do máximo fraco que $z_k \geq 0$ em Ω_k, e fazendo k tender ao infinito, obtemos que $z \geq 0$ em Ω. ■

Veremos agora que a condição $x_j \xrightarrow{u_o} \partial\Omega$ depende somente de uma vizinhança de $\partial\Omega$.

Lema 1.1 *Seja U um conjunto aberto com fronteira suave, com $U \subset \overline{\Omega}_l$, onde Ω_l é um dos conjuntos usado na construção de u_o. Seja $\tilde{u}_o$ uma função construída do mesmo modo que u_o, porém tendo como domínio $\Omega \setminus \overline{U}$. Então*

$$\tilde{u}_o \leq u_o \leq C\tilde{u}_o \quad em \quad \Omega \setminus \overline{\Omega}_l$$

onde C depende somente de U, Ω_l, c_o, C_o e b.

Prova. Considere $\tilde{u}_k \nearrow \tilde{u}_o$, solução de

$$\begin{cases} M\tilde{u}_k &= -1 \quad \text{em} \quad \Omega_k \setminus \overline{U} \\ \tilde{u}_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial(\Omega_k \setminus \overline{U}) \end{cases}$$

com k suficientemente grande, de forma que $U \subset\subset \Omega_k$. Agora observe que:

$$\begin{cases} M(\tilde{u}_k - u_k) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_k \setminus \overline{U} \\ \tilde{u}_k - u_k \leq -u_k \leq 0 \quad \text{em} \quad \partial\Omega_k \setminus \overline{U}, \end{cases}$$

o que implica em $\tilde{u}_k \leq u_k$ em $\Omega_k \setminus \overline{U}$ de acordo com o princípio do máximo. Tomando o limite com k tendendo ao infinito, concluímos que $\tilde{u}_o \leq u_o$ em $\Omega \setminus \overline{U}$.

Para provar a outra desigualdade usaremos a seguinte afirmação:

Afirmação 1 *Se $w \geq 0$ e $Mw \leq -1$ em $B_r(y) \subset \Omega$, então $w(y) \geq \alpha > 0$, onde α depende somente de r, C_o e b.*

De fato, para $\eta > 0$ a função $\zeta(x) = \eta(r^2 - |x-y|^2)$ satisfaz em $B_r(y)$,

$$\begin{aligned} M\zeta &= -2\eta \sum (a_{ij} + b_i(x_i - y_i)) \\ &\geq -2\eta(nC_o + br) \\ &\geq -1 \geq Mw, \end{aligned}$$

se $2\eta(nC_o + br) \leq 1$. Logo $M(\zeta - w) \geq 0$ em $B_r(y)$, e para $|x-y| = r$, $\zeta - w = -w \leq 0$, donde podemos concluir pelo princípio do máximo que $\zeta \leq w$ em $B_r(y)$. Em particular $w(y) \geq \zeta(y) = \eta r^2$.

Voltando à prova do lema, fixemos $r > 0$ satisfazendo $r < d(\partial\Omega_l, \overline{U})$ e $r < d(\partial\Omega_l, \partial\Omega)$. Como Ω_k é crescente em k, existe k_o tal que, para todo $k \geq k_o$, Ω_k contém uma r-vizinhança de $\partial\Omega_l$. Pela afirmação, concluímos que

$$\tilde{u}_k \geq \alpha > 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_l.$$

Lembrando que $u_o \leq e^{\sigma d} = C'$, vemos que em $\partial\Omega_l$

$$\frac{C'}{\alpha}\tilde{u}_k \geq C' \geq u_o \geq u_k,$$

onde esta última desigualdade ocorre pois $u_k \nearrow u_o$. Podemos supor $C' \geq \alpha$. Assim

$$\begin{cases} M(\frac{C'}{\alpha}\tilde{u}_k - u_k) = -\frac{C'}{\alpha} + 1 \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega_k \setminus \Omega_l \\ \\ \frac{C'}{\alpha}\tilde{u}_k - u_k \geq 0 \quad \text{sobre} \quad \partial(\Omega_k \setminus \Omega_l), \end{cases}$$

e segundo o princípio do máximo $C'\tilde{u}_k \geq \alpha u_k$ em $\Omega_k \setminus \Omega_l$, para todo $k \geq k_o$, o que implica em

$$\frac{C'}{\alpha}\tilde{u}_o \geq u_o \quad \text{em} \quad \Omega \setminus \Omega_l.$$

$\blacksquare$

Lema 1.2 *M satisfaz o princípio do máximo refinado em Ω.*

Prova. Suponhamos que $Mw \geq 0$ em Ω, $w \leq N$ e $\limsup w(x_j) \leq 0$ se $x_j \overset{u_o}{\longrightarrow} \partial\Omega$. Conforme a desigualdade (1.10), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$w(x) \leq \epsilon + \frac{N}{\delta} u_o(x) \quad \forall x \in \Omega.$$

Em particular esta última desigualdade é válida se $x \in \partial\Omega_k$.

Desde que $Mu_0 = -1 = Mu_k$ em Ω_k e $u_o - u_k = u_o > 0$ em $\partial\Omega_k$, obtemos que

$$\begin{cases} M(w - \epsilon - \frac{N}{\delta}(u_o - u_k)) & = & Mw \geq 0 & \text{em} & \Omega_k \\ w - \epsilon - \frac{N}{\delta}(u_o - u_k) & = & w - \epsilon - \frac{N}{\delta} u_o \leq 0 & \text{sobre} & \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Pelo princípio do máximo usual temos que

$$w \leq \epsilon - \frac{N}{\delta}(u_o - u_k) \quad \text{em} \quad \Omega_k.$$

Fixando $x \in \Omega_k$ e fazendo k tender a infinito, desde que $u_k(x) \longrightarrow u_o(x)$, obtemos

$$w(x) \leq \epsilon \quad \text{em} \quad \Omega_k.$$

Agora fazendo ϵ tender a zero, segue que $w \leq 0$ em Ω. $\blacksquare$

Proposição 1.5 *Dada $f \in L^n(\Omega)$, existe uma única solução $z \in L^\infty(\Omega)$ do problema*

$$\begin{cases} Mz & = & f & \textit{em} & \Omega \\ z & \overset{u_o}{=} & 0 & \textit{sobre} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

e que satisfaz a estimativa

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq B\|f\|_{L^n(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Além disso se $f \leq 0$ então $z \geq 0$ em Ω.

Prova. A unicidade segue do lema anterior. Para provar a existência, seja f_i uma sequência de funções limitadas convergindo a f em $L^n(\Omega)$. Isto é possível, visto que $C_c(\Omega)$ é denso em $L^n(\Omega)$. Pela Proposição 1.4, para cada i, existe uma única solução $z_i \in W^{2,p}_{loc} \cap L^\infty(\Omega)$, para todo $p \in (1, \infty)$, de

$$\begin{cases} Mz_i & = & f_i & \text{em} & \Omega \\ z_i & \overset{u_o}{=} & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases}$$

com $\|z_i\|_{L^\infty(\Omega)} \leq B\|f_i\|_{L^n(\Omega)}$. Para cada compacto $K \subset \Omega$, fixado $p > n$, temos pela estimativa interior do Teorema 0.16, que

$$\|z_i\|_{W^{2,p}(K)} \leq C\|f_i\|_{L^n(K)} \leq \tilde{C}.$$

Assim, temos que existe uma subsequência $z_i \rightharpoonup z$ em $W^{2,p}(K)$ e $z_i \to z$ em $C^1(K)$. Estes fatos nos permitem concluir que $Mz = f$ como solução forte, bem como (1.16). Ainda pela Proposição 1.4, temos que

$$\|z_i - z_j\|_{L^\infty(\Omega)} \leq B\|f_i - f_j\|_{L^n(\Omega)},$$

o que mostra que z_i converge uniformemente para z em Ω. Dessa forma concluímos que $z \overset{u_o}{=} 0$ sobre $\partial\Omega$.

Supondo $f \leq 0$ em Ω, temos que $Mz \leq 0$ em Ω e $z \overset{u_o}{=} 0$ sobre $\partial\Omega$, e pelo princípio do máximo refinado concluímos que $z \geq 0$ em Ω. ■

1.4 O Autovalor Principal

Nesta seção passamos a estudar o problema de autovalor

$$\begin{cases} (L+\lambda)\psi = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \psi \overset{u_o}{=} 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\psi \not\equiv 0$ é dita ser uma autofunção de $-L$, com autovalor λ (ambos possivelmente complexos), com a condição adicional de $|\psi|$ ser limitado.

Quando os coeficientes de L e $\partial\Omega$ são regulares, sabe-se que existe um autovalor principal e uma autofunção (principal) ϕ_1 que são reais e possuem as seguintes propriedades:

(a) ϕ_1 é uma autofunção simples, isto é, ϕ_1 gera $\ker(L + \lambda_1)$ sobre a condição de Dirichlet homogênea na fronteira; além disso $\phi_1 > 0$ em Ω;

(b) Se ψ é uma autofunção positiva com autovalor λ, então $\lambda = \lambda_1$;

(c) Para qualquer autovalor λ, $Re\lambda \geq \lambda_1$.

Nosso objetivo é garantir a existência de um par (λ_1, ϕ_1), satisfazendo as três condições acima, para operadores L do tipo (1.1), como considerados na seção anterior, em domínios limitados. Para isso definimos:

$$\lambda_1 = \lambda_1(L,\Omega) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \phi > 0 \text{ em } \Omega \text{ satisfazendo } (L+\lambda)\phi \leq 0\} \tag{1.17}$$

e construiremos uma autofunção principal ϕ_1 correspondente.

Notemos que se $\Omega' \subset \Omega$ então $\lambda_1(\Omega') \geq \lambda(\Omega)$. De fato, escrevendo $A(\Omega) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \phi > 0 \text{ em } \Omega \text{ satisfazendo } (L+\lambda)\phi \leq 0\}$, se $\lambda \in A(\Omega)$ temos que existe $\phi \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ tal que $\phi > 0$ em Ω e $(L+\lambda)\phi \leq 0$ em Ω e assim, é imediato que $\phi > 0$

em Ω' e $(L+\lambda)\phi \leq 0$ em Ω', donde segue que $\lambda \in A(\Omega')$, ou seja, provamos que $A(\Omega) \subset A(\Omega')$ e portanto concluímos a afirmação. Na verdade, se $\Omega' \subsetneqq \Omega$ então a desigualdade em questão é estrita (veja [4], Teorema 2.4).

Quando os coeficientes de L e $\partial\Omega$ são suaves, λ_1 definido por (1.17) é realmente o autovalor principal de L. Para ver isto, vamos mostrar que (1.17) equivale a uma conhecida caracterização de min-max de λ_1, desde que seja finito. Note que se $\phi > 0$ e $(L+\lambda)\phi \leq 0$, então

$$\lambda \leq \inf_{\Omega}\left(-\frac{L\phi}{\phi}\right) = -\sup_{\Omega}\frac{L\phi}{\phi},$$

Consequentemente,

$$\lambda_1 = \sup_{\phi}\inf_{\Omega}\left(-\frac{L\phi}{\phi}\right) = \sup_{\phi}\left(-\sup_{\Omega}\frac{L\phi}{\phi}\right) \tag{1.18}$$

onde em $\sup_\phi$, o supremo é tomado sobre todas as funções positivas ϕ em $W^{2,n}_{loc}(\Omega)$. Assim, (1.18) pode ser escrito como

$$\lambda_1 = -\inf_{\phi}\sup_{\Omega}\frac{L\phi}{\phi} \tag{1.19}$$

Usando (1.19), vamos obter uma limitação superior para $\lambda_1(\Omega)$.

Lema 1.3 *Suponhamos que $B_R(0) \subset \Omega$, com $R \leq 1$. Então*

$$\lambda_1(\Omega) \leq \frac{C}{R^2}$$

onde C depende somente de n, c_o, C_o e b.

Prova. Pondo $r = R/2$, consideremos a função $\sigma = \frac{1}{4}(r^2 - |x|^2)^2$. Mostremos inicialmente que

$$\sup_{\Omega}\left(-\frac{L\sigma}{\sigma}\right) \leq \frac{C}{R^2} \tag{1.20}$$

De fato, temos

$$\sigma_{x_i} = -x_i(r^2 - |x|^2),\ \sigma_{x_i x_j} = -\delta_{x_{ij}}(r^2 - |x|^2) + 2x_i x_j$$

e assim, em $B_r(0)$

$$\begin{aligned}-\frac{L\sigma}{4\sigma} &= -\frac{1}{(r^2-|x|^2)^2}\Big[-\sum_i a_{ii}(r^2-|x|^2) - 2\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j - \\ &\qquad -\sum_i b_i x_i (r^2-|x|^2) + \frac{c}{4}(r^2-|x|^2)\Big] \\ &= \frac{1}{r^2-|x|^2}\sum_i a_{ii} - 2\sum_{i,j}\frac{a_{ij}x_i x_j}{(r^2-|x|^2)^2} + \sum_i \frac{b_i x_i}{r^2-|x|^2} - \frac{c}{4}\end{aligned}$$

$$\leq \frac{nC_o + br}{r^2 - |x|^2} - \frac{2C_o|x|^2}{(r^2-|x|^2)^2} + b. \tag{1.21}$$

Na região onde

$$|x|^2(2C_o + nC_o + br) > r^2(nC_o + br)$$

o segundo termo do lado direito de (1.21) domina o primeiro e assim $-L\sigma/4\sigma \leq b$. Na região em $B_r(0)$ onde ocorre a desigualdade oposta temos

$$r^2 - |x|^2 \geq r^2 - r^2\frac{nC_o + br}{2C_o + nC_o + br} = \frac{2C_or^2}{2C_o + nC_o + br}$$

e assim

$$-\frac{L\sigma}{4\sigma} \leq \frac{nC_o + br}{r^2 - |x|^2} + b \leq \frac{1}{2C_or^2}(nC_o + br)(2C_o + nC_o + br)$$

o que implica em (1.20).

Para provarmos o lema, é suficiente mostrarmos que para qualquer função positiva ϕ e qualquer λ, com $(L+\lambda)\phi \leq 0$, temos $\lambda < \sup(-L\sigma/\sigma)$. Consideremos tal par ϕ, λ e suponhamos $\lambda \geq \sup(-L\sigma/\sigma) = \tau$. Então $(L+\tau)\sigma \geq 0$ em B_r enquanto $(L+\tau)\phi \leq (L+\lambda)\phi \leq 0$. Pela condição suficiente **(ii)** do Proposição 1.1, o princípio do máximo é válido para $(L+\tau)$ em B_r. Mas então desde que $\sigma = 0$ sobre ∂B_r, isto implica $\sigma \leq 0$ em B_r. Isto é impossível e o lema está provado. ∎

O Teorema a seguir estabelece a existência de uma autofunção associada a λ_1.

Teorema 1.2 **(i)** *Existe uma função positiva ϕ_1 em $W^{2,p}(\Omega)$, $\forall p \in (1,\infty)$, satisfazendo*

$$(L + \lambda_1)\phi_1 = 0;$$

(ii) *Se normalizarmos ϕ_1 de forma que $\phi_1(x_0) = 1$ em um ponto $x_0 \in \Omega$ fixado, então $\phi_1 \leq k$ em Ω, onde k depende somente de x_0, Ω c_o, C_o e b.*

(iii) *$\phi_1 \leq C_1u_o$ para alguma constante positiva C_1.*

Prova. Suponhamos que $\overline{B}_r \subset \Omega$. Seja C a constante do lema 1.3 e B a constante do Teorema 1.1. Fixe $\delta > 0$ tal que

$$(b + \frac{C}{R^2})B\delta^{1/n} \leq \frac{1}{2}.$$

Seja $K \subset \Omega$ um conjunto fechado, tal que $U = \Omega \setminus K$ satisfaça $|U| < \delta$, e suponha também que K contém x_o e B_r. Considere Ω_j uma sequência crescente de subdomínios de Ω com $\partial\Omega_j$ suave e

$$K \subset \Omega_j \subset \overline{\Omega}_j \subset \Omega_{j+1} \quad \text{e} \quad \cup_j \Omega_j = \Omega.$$

Agora $a_{ij} \in C(\overline{\Omega}_j)$, e assim em Ω_j, pela teoria de existência clássica (veja 0.17), existe um autovalor principal μ_j e uma autofunção $\phi_j \in W^{2,p}(\Omega_j)$, $\forall p \in (1,\infty)$, com $\phi_j > 0$ em Ω_j, $\phi_j(x_o) = 1$ e satisfazendo

$$\begin{cases} (L+\mu_j)\phi_j &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_j \\ \phi_j &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_j \end{cases}$$

Desde que $\phi_{j+1} > 0$ sobre $\overline{\Omega}_j$ temos pelo princípio do máximo usual, que $\mu_j > \mu_{j+1} > \lambda_1$. Para ver isso, suponha que $\mu_j \le \mu_{j+1}$. Logo $(L+\mu_j)\phi_j = (\mu_j - \mu_{j+1})\phi_{j+1} \le 0$ em Ω_j. Pela condição suficiente (ii) da Proposição 1.2, o princípio do máximo vale para $L + \mu_j$ em Ω_j, donde $\phi_j = 0$ em Ω_j, absurdo. Consideremos então $\mu = \lim \mu_j \ge \lambda_1$. Pela desigualdade de Harnack aplicada em Ω_j, inferimos que

$$\phi_j \le C_1 \quad \text{sobre} \quad K \quad \forall j.$$

Em $U_j = \Omega_j \setminus K$, $\vartheta = \phi_j - C_1$ satisfaz

$$\begin{aligned} (L+\mu_j)\vartheta &= -cC_1 - \mu_j C_1 \\ (M - c^-)\vartheta &= -c^+\vartheta - \mu_j\vartheta - cC_1 - \mu_j C_1 \\ &= -c^+\phi_j - \mu_j\phi_j + c^- C_1 \\ &\ge -b\phi_j - \mu_j\phi_j, \end{aligned}$$

e

$$\limsup_{x \longrightarrow \partial U_j} \vartheta(x) \le 0.$$

Segundo o Lema 1.3, $\mu_j \le C/R^2$, e daí, pelo Teorema de 1.1,

$$\begin{aligned} \max_{\overline{U}_j} \vartheta &\le B\|(b+\mu_j)\phi_j\|_{L^n(U_j)} \le B(\frac{C}{R^2} + b)\delta^{1/n} \max_{\overline{U}_j} \phi_j \\ \max_{\overline{U}_j} \phi_j - C_1 &\le \frac{1}{2} \max_{\overline{U}_j} \phi_j \\ \max_{\overline{U}_j} \phi_j &\le 2C_1 := C_2 \end{aligned}$$

Pela estimativa do Teorema 0.16 temos

$$\|\phi_k\|_{W^{2,p}(\Omega_j)} \le C(j), \quad \forall k \ge j+1.$$

Consequentemente, existe uma subsequência de ϕ_j que converge para uma função positiva ϕ_1 em Ω, com $\phi_j \rightharpoonup \phi_1$ em $W^{2,p}_{loc}(\Omega)$ e $\phi_j \to \phi_1$ em $W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$, isto é, em todo subconjunto compacto $S \subset \Omega$. Logo ϕ_1 é uma solução de

$$(L+\mu)\phi_1 = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \phi_1(x_o) = 1,$$

com $\phi_1 \le C_2$ em Ω. Pela definição de λ_1 vemos que $\mu = \lambda_1$. Dessa forma, as afirmações **(i)** e **(ii)** estão provadas.

Para provar **(iii)** mostraremos que

$$\phi_1 \leq C_2(\lambda_1^+ + b)u_o.$$

Sabemos que $\phi_1 = \lim \phi_j,\ \phi_j \leq k$ e

$$\begin{cases} M\phi_j &= -\mu_j\phi_j - c\phi_j \quad \text{em} \quad \Omega_j, \\ \phi_j &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_j, \end{cases}$$

e notemos ainda que

$$M\phi_j \geq -1(\mu_j^+ + b)k = M((\mu_j^+ + b)ku_0) \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Pelo princípio do máximo obtemos

$$\phi_j \leq k(\mu_j^+ + b)u_o \text{ em } \Omega.$$

Fazendo j tender ao infinito, concluímos que

$$\phi_1 \leq k(\lambda_1^+ + b)u_o \quad \text{em} \quad \Omega.$$

■

Lema 1.4 *Sobre as considerações do Teorema* 1.2*, sendo* B *a constante do Teorema* 1.1*, temos*

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{B|\Omega|^{1/n}} - \sup c^+.$$

Isto mostra em particular que $\lambda_1(L) > 0$ *para qualquer operador* L *com* $c \leq 0$.

Prova. Na demonstração do Teorema 1.2, vimos que $\phi_1 = \lim \phi_j$, com

$$\begin{cases} (L + \mu_j)\phi_j &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega_j \\ \phi_j &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_j \end{cases}$$

e $\mu_j \searrow \lambda_1$. Denotemos por $\gamma = \sup c^+$. Daí

$$(M - c^-)\phi_j = -(c^+ + \mu_j)\phi_j \geq -(\gamma + \mu_j)^+\phi_j.$$

Pelo Teorema 1.1, temos

$$\max_{\Omega_j} \phi_j \leq B(\gamma + \mu_j)^+|\Omega|^{1/n} \max_{\Omega_j} \phi_j.$$

Assim,

$$1 \leq B(\gamma + \mu_j)^+|\Omega|^{1/n}.$$

Fazendo j tender ao infinito obtemos

$$1 \leq B(\gamma + \lambda_1)^+|\Omega|^{1/n},$$

o que implica que $(\gamma+\lambda_1)^+ > 0$, logo $(\gamma+\lambda_1)^+ = \gamma+\lambda_1$, resultando na desigualdade desejada. ∎

Faremos agora algumas proposições auxiliares, supondo que $\lambda_1 > 0$, que serão usadas na demonstração do Teorema 1.4. Quando tivermos $\lambda_1(\Omega) > 0$, então, para qualquer subdomínio $U \subset\subset \Omega$, o princípio do máximo é válido para L em U.

De fato, tomando ϕ_1 a autofunção principal, temos que

$$\phi_1 \in C(\overline{U}), \quad \phi_1 > 0 \quad \text{em} \quad \overline{U} \quad \text{e} \quad L\phi_1 = -\lambda_1\phi_1 \leq 0 \quad \text{em} \quad U,$$

e esta é, como já dissemos, uma condição suficiente para validade do princípio do máximo, de acordo com o item **(ii)** da Proposição 1.1. Usaremos este fato repetidamente nesta seção.

Proposição 1.6 *Assumamos que $\lambda_1(\Omega) > 0$. Então existe uma função ψ em Ω satisfazendo*

$$L\psi \leq 0 \quad e \quad 1 \leq \psi \leq C,$$

onde a constante C depende somente de c_o, C_o, b, Ω e λ_1.

Prova. Escolhamos um conjunto fechado $K \subset \Omega$ tal que $|\Omega \setminus K| \leq \delta = (2Bb)^{-n}$. Aqui B é a constante do Teorema 1.1. Pela Proposição 1.5, existe uma única solução $w \in L^\infty(\Omega)$ de

$$\begin{cases} Mw &= -2b\chi_{\Omega\setminus K}, \\ w &\overset{u_o}{=} 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde denotamos χ como sendo a função característica.

Além disso, segundo o Teorema 1.1, sabemos que $0 < w < 2Bb\delta^{1/n} = 1$ em Ω. Em $\Omega \setminus K$ temos

$$L(1+w) = c(x)(1+w) - 2b \leq 0.$$

Usando a desigualdade de Harnack, concluímos que existe $\delta > 0$ tal que $\phi_1 \geq \delta$ em K. Escolhendo A tal que $\lambda_1\delta A = 2b$ e definindo $\psi = 1 + w + A\phi_1$, obtemos

$$L\psi = L(1+w) - A\lambda_1\phi_1 \leq \begin{cases} L(1+w) \leq 0 & \text{em} \quad \Omega \setminus K \\ 2b - A\lambda_1\delta = 0 & \text{em} \quad K \end{cases}$$

isto é, $L\psi \leq 0$ em Ω e

$$1 \leq \psi = 1 + w + A\phi_1 \leq 2 + \frac{2b}{\lambda_1\delta}\sup_{\Omega}\phi_1 := C$$

∎

Com a ajuda da Proposição 1.6, apresentaremos um teorema de existência.

Proposição 1.7 *Suponhamos que $\lambda_1(\Omega) > 0$. Então existe uma constante C_1 dependendo somente de c_o, C_o, b, Ω e λ_1, tal que para cada $f \in L^\infty(\Omega)$, existe uma única solução w de*

$$\begin{cases} Lw &= f \quad em \quad \Omega, \\ w &\overset{u_o}{=} 0 \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

satisfazendo

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 \|f\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Além disso, se $f \leq 0$ *então* $w \geq 0$ *em* Ω.

Prova. Tomando a sequência de subdomínios Ω_k que foi usada na construção de u_o, considere w_k a solução em Ω_k de

$$\begin{cases} Lw_k = f & \text{em} \quad \Omega_k \\ w_k = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega_k, \end{cases} \tag{1.22}$$

que existe em virtude do Teorema 0.18 e do problema homogêneo ter somente a solução trivial, pois vale o princípio do máximo usual em Ω_k. O princípio do máximo também garante que $w_k \geq 0$ se $f \leq 0$. Novamente usando a estimativa do Teorema 0.16 concluímos como na construção de u_o que existe uma subsequência $w_k \rightharpoonup w$ fracamente em $W^{2,p}(K)$ e $w_k \to w$ em $C^1(K)$, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, donde segue que $Lw = f$ em Ω como solução forte, bem como $w \geq 0$ se $f \leq 0$. Para estabelecer as demais afirmações, podemos supor que $\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$, pois o operador L é linear. Aplicando a Proposição 1.6 ao operador $L + \lambda_1/2$, temos que existe uma função ψ em Ω satisfazendo

$$L\psi + \frac{\lambda_1}{2}\psi \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \qquad \text{e} \qquad 1 \leq \psi \leq C.$$

Consequentemente em Ω_k, com k fixado, as funções

$$w_+ := \frac{2}{\lambda_1}\psi + w_k \qquad \text{e} \qquad w_- := \frac{2}{\lambda_1}\psi - w_k$$

satisfazem

$$\begin{cases} Lw_\pm \leq 0 & \text{em} \quad \Omega_k \\ w_\pm \geq 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Logo $w_\pm \geq 0$ em Ω_k, implicando em

$$|w_k| \leq \frac{2}{\lambda_1}\psi \leq \frac{2}{\lambda_1}C.$$

Além disso em Ω_k

$$|Mw_k| = |f - c(x)w_k| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} + \frac{2}{\lambda_1}Cb = 1 + + \frac{2}{\lambda_1}Cb.$$

Lembrando que $Mu_o = -1$, segue do princípio do máximo fraco aplicado a M que

$$|w_k| \leq (1 + \frac{2}{\lambda_1}Cb)u_o \quad \text{em} \quad \Omega_k. \tag{1.23}$$

Fazendo k tender ao infinito, inferimos que

$$|w| \leq (1 + \frac{2}{\lambda_1}Cb)u_o \quad \text{em} \quad \Omega,$$

concluíndo a demonstração. ∎

Teorema 1.3 *Suponhamos que $\lambda_1(L,\Omega) > 0$. Então existe uma solução w_o em Ω de*

$$Lw_0 = -1 \quad em \quad \Omega,$$

satisfazendo

$$C^{-1}u_o \leq w_0 \leq Cu_o,$$

onde C depende somente de Ω, c_o, C_o, b e λ_1.

Prova. Seja w_o a solução construída na Proposição 1.7 para $f = -1$. Como vimos, ela foi obtida como limite de soluções w_k de (1.22) e foi provado que $|w_o| \leq C_1$ e portanto $|Mw_o| \leq 1 + bC_1$. A desigualdade à direita de (1.23) segue da Proposição 1.4. Para provar a desigualdade à esquerda, lembremos que u_o foi obtida como limite de soluções u_k de

$$\begin{cases} Mu_k &= -1 \quad \text{em} \quad \Omega_k \\ u_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Então,

$$|Lu_k| \leq 1 + bu_k \leq 1 + b \sup u_o,$$

donde

$$L(bw_k \sup u_o + w_k - u_k) \leq 0.$$

Pelo princípio do máximo fraco, obtemos em Ω_k que

$$u_k \leq (1 + b \sup u_o) w_k.$$

Agora fazendo k tender ao infinito, concluímos que

$$u_o \leq (1 + b \sup u_o) w_o$$

■

Corolário 1.1 *Seja H um conjunto aberto com fronteira suave e $\overline{H} \subset \Omega$. Suponhamos que $\lambda_1(L, \Omega \setminus \overline{H}) > 0$. Considere $\tilde{w}_o$ a função do teorema anterior para a região $\Omega \setminus \overline{H}$. Seja ainda u_o a solução de $Mu_o = -1$ construída em Ω, e $\tilde{u}_o$ a solução correspondente em $\Omega \setminus \overline{H}$. Então para qualquer sequência $x_j \to \partial\Omega$ as seguintes afirmações são equivalentes:*

$$u_o(x_j) \to 0, \qquad \tilde{u}_o(x_j) \to 0, \qquad \tilde{w}_o(x_j) \to 0.$$

A demonstração segue diretamente do Lema 1.1 e do Teorema 1.3.

Nosso próximo resultado relaciona o princípio do máximo refinado com o autovalor principal.

Teorema 1.4 *O princípio do máximo refinado é válido para L em Ω se, e somente se, $\lambda_1(L,\Omega) > 0$.*

Prova. Para verificar que a validade do princípio do máximo refinado implica em $\lambda_1 > 0$, faremos a demonstração por contrapositividade. Suponhamos que $\lambda_1 \leq 0$. Como já estudamos, associado a λ_1 existe uma autofunção positiva $\phi_1 \in W^{2,n}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} L\phi_1 &= -\lambda_1\phi_1 \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \phi_1 &\overset{u_o}{=} \quad 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

o que mostra que o princípio do máximo refinado não vale para L em Ω.

Agora vamos supor que $\lambda_1 > 0$ e verifiquemos que o princípio do máximo é válido. Consideremos v uma função satisfazendo (1.8) e (1.9). Devemos mostrar que $v \leq 0$ em Ω. Se $\sup_\Omega v \leq 0$ o resultado segue. Vamos então supor por contradição que $N = \sup_\Omega v > 0$. Como já vimos na observação sobre a condição (1.9), para cada $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$v \leq \epsilon + \frac{N}{\delta}u_o \leq \epsilon + \frac{N}{\delta}C_1 w_o \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde na última desigualdade usamos o Teorema 1.3, e w_o é a função que w_o foi obtida como limite de funções w_k satisfazendo

$$\begin{cases} Lw_k &= -1 \quad \text{em} \quad \Omega_k, \\ w_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_k. \end{cases}$$

Em Ω_k consideremos a função auxiliar $u := v - \epsilon - C_1\frac{N}{\delta}(w_o - w_k)$. Como $\partial\Omega_k \subset \Omega$, temos que $u \leq 0$, enquanto que em Ω_k

$$Lu = Lv - c(x)\epsilon \geq -c(x)\epsilon \geq -b\epsilon.$$

Aplicando o príncipio do máximo usual para L em Ω_k, e usando a desigualdade (1.23), obtemos

$$\begin{aligned} u &\leq b\epsilon w_k \\ &\leq b\epsilon(1 + \frac{2}{\lambda_1}Cb)\sup u_o. \end{aligned}$$

Assim, $u \leq \epsilon C_2$. Logo para cada $x \in \Omega_k$ temos

$$v(x) \leq \epsilon + C_1\frac{N}{\delta}(w_o(x) - w_k(x)) + \epsilon C_2.$$

Fazendo k tender ao infinito, segue que

$$v(x) \leq \epsilon(1 + C_2),$$

e fazendo ϵ tender a zero, obtemos

$$v(x) \leq 0.$$

Isto é uma contradição, pois supomos que $N = \sup_\Omega v > 0$, e desta forma a prova está concluída.

■

Teorema 1.5 *Suponhamos que* $\lambda_1 > 0$. *Então, dada* $f \in L^n(\Omega)$, *existe uma única solução* $u \in L^\infty(\Omega)$, *de*

$$\left\{\begin{array}{rcll} Lu & = & f & \text{em} \quad \Omega, \\ u & \overset{u_o}{=} & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Além disso, existe uma constante A *dependendo somente de* Ω, c_o, C_o, b *e* λ_1 *satisfazendo*

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A\|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

Prova. A unicidade segue do teorema anterior. Para provar a existência, consideremos $z \in L^\infty(\Omega)$, solução de

$$\left\{\begin{array}{rcll} Mz & = & f & \text{em} \quad \Omega \\ z & \overset{u_o}{=} & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right.$$

que é garantida pela Proposição 1.5, juntamente com a estimativa

$$\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq B\|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

Agora, desde que $cz \in L^\infty(\Omega)$, existe, segundo a Proposição 1.7, $v \in L^\infty(\Omega)$ solução de

$$\left\{\begin{array}{rcll} Lv & = & -cz & \text{em} \quad \Omega, \\ v & \overset{u_o}{=} & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right.$$

satisfazendo

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 b\|z\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_1 bB\|f\|_{L^n(\Omega)}.$$

Escrevendo $u = v + z$ temos que

$$\left\{\begin{array}{rcll} Lu & = & Lv + Lz = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u & \overset{u_o}{=} & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right.$$

com $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A\|f\|_{L^n(\Omega)}$, onde $A = B + C_1Bb$.

■

Teorema 1.6 *Suponhamos que exista uma função* $u > 0$ *em* Ω *com* $Lu \leq 0$. *Suponha também que o princípio do máximo refinado não é válido, isto é, existe uma função* v *satisfazendo as condições* (1.8) *e* (1.9), *sendo positiva em algum ponto interior. Então*

$$Lu \equiv 0, \quad e \quad u \overset{u_o}{=} 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Além disso, $v = Cu$ *para alguma constante* C.

Prova. Seja $K \subset \Omega$ o fecho de um conjunto aberto H com fronteira suave, tal que

$$Bb|\Omega \setminus K|^{1/n} \leq \frac{1}{2}.$$

Para $t > 0$ suficientemente grande, $z = v - tu < 0$ sobre K. Além disso, $Lz \geq 0$ em $\Omega \setminus K$. Vamos provar que $z \leq 0$ em todo Ω. Pelo Lema 1.4, $\lambda_1(L, \Omega \setminus K) > 0$. Seja $\tilde{w}_o$ a função do Corolário 1.1, que satisfaz

$$\limsup v(x_j) \leq 0 \quad \text{se} \quad x_j \xrightarrow{\tilde{w}_o} \partial\Omega.$$

Desde que $z < 0$ sobre K, concluímos que

$$\limsup z(x_j) \leq 0 \quad \text{se} \quad x_j \xrightarrow{\tilde{w}_o} \partial(\Omega \setminus K).$$

Mas $\lambda_1(L, \Omega \setminus K) > 0$ implica pelo Teorema 1.4 que o princípio do máximo vale para L em $\Omega \setminus K$. Consequentemente $z \leq 0$ em $\Omega \setminus K$, e assim em todo Ω.

Denotemos $\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}; \quad v - tu \leq 0 \quad \text{em} \quad \Omega\}$. Certamente $v - \tau u \leq 0$ em Ω, e desde que $v > 0$ em algum ponto interior, τ deve ser positivo. Se $v - \tau u \equiv 0$ então o teorema está provado. Vamos provar que somente esta última assertativa ocorre, e para isto suponha que $v - \tau u \not\equiv 0$. Pelo princípio do máximo forte, $v - \tau u < 0$ em Ω. Mas então, para alguma constante positiva $s < \tau$, $\xi = v - (\tau - s)u < 0$ sobre K. Desde que $L\xi \geq 0$, teremos como antes que $\xi \leq 0$ em $\Omega \setminus K$ e assim em Ω. Isto contradiz a definição de τ. ■

Corolário 1.2 *Suponhamos que exista uma função $u > 0$, com $Lu \leq 0$ em Ω. Então ou $\lambda_1 > 0$ ou $\lambda_1 = 0$ e $u = C\phi_1$ para alguma constante C, onde ϕ_1 é a autofunção principal associada a λ_1.*

Prova. Certamente $\lambda_1 \geq 0$. Se $\lambda_1 = 0$ então aplicamos o teorema anterior com $v = \phi_1$. ■

Os próximos dois corolários afirmam que a autofunção ϕ_1 é algebricamente simples.

Corolário 1.3 *Se v é limitada superiormente e satifaz*

$$(L + \lambda_1)v \geq 0 \quad \textit{em} \quad \Omega$$

e

$$\limsup v(x_j) \leq 0 \quad \textit{se} \quad x_j \xrightarrow{u_o} \partial\Omega.$$

então v é múltipla da autofunção principal ϕ_1.

Prova. Podemos supor que $\lambda_1 = 0$, pois do contrário trabalhariamos com $L' = L + \lambda_1$. Suponhamos por contradição que v não é igual a uma constante vezes ϕ_1. Aplicando o Teorema 1.6 com $u = \phi_1$, concluímos que $v \leq 0$ em Ω. Desde que $v \not\equiv 0$, segue do princípio do máximo forte que $v < 0$. Porém, aplicando novamente o Teorema 1.6 com $-v$ no lugar de u, e ϕ_1 no lugar de v, segue que ϕ_1 é igual a uma constante vezes $-v$, contrariando a hipótese . ■

Corolário 1.4 *Não existe uma função ψ, limitada superiormente, satisfazendo*

$$\begin{cases} (L+\lambda_1)\psi &= \phi_1 \quad em \quad \Omega, \\ \limsup \psi(x_j) &\leq 0 \qquad se \qquad x_j \xrightarrow{u_o} \partial\Omega. \end{cases}$$

Prova. Se uma tal função ψ existisse, pelo corolário anterior, ψ seria igual a uma constante vezes a função ϕ_1, acarretando que $(L+\lambda_1)\psi = 0$, que é um absurdo. ■

Corolário 1.5 *O princípio do máximo é válido se existe uma função positiva ϕ (não necessariamente limitada) satisfazendo*

$$\begin{cases} L\phi \lneqq 0 \quad , \quad ou \\ L\phi \equiv 0 \qquad e \quad \phi(x_j) \geq \delta > 0 \quad para\ alguma\ sequência \quad x_j \xrightarrow{u_o} \partial\Omega. \end{cases}$$

Prova. É a contrapositividade do Teorema 1.6. ■

Este último teorema acrescenta duas importantes propriedades de λ_1 e ϕ_1 e sua demonstração pode ser encontrada em [4].

Teorema 1.7 *Suponha que ψ é uma autofunção do operador L com autovalor $\lambda \neq \lambda_1$. Então: (i) $\mathrm{Re}\lambda > \lambda_1$; (ii) Se ψ é uma função real, então deve mudar de sinal em Ω.*

Capítulo 2

Propriedades Qualitativas de Soluções Positivas de Equações Elípticas Semi-lineares

2.1 Introdução

Neste capítulo, através do princípio do máximo refinado, desenvolvido no Capítulo 1, estudamos algumas propriedades qualitativas de soluções positivas de equações elípticas semi-lineares em domínios com simetria do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= f(u) \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, $n \geq 2$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1 e λ é um parâmetro real. Os resultados deste capítulo são devidos a Lucio Damascelli, Massimo Grossi e Filomena Pacella e foram publicados originalmente em [7].

Associado a este problema temos o operador linearizado em u, dado por

$$L := \Delta - \lambda + f'(u) \tag{2.2}$$

e estudá-lo nos ajuda a compreender melhor algumas propriedades das soluções do Problema (2.1).

Consideraremos na maior parte deste capítulo que Ω é simétrico em relação aos hiperplanos $T_i = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_i = 0\}$ e convexo na direção de cada eixo coordenado. Note que tais domínios não precisam ser convexos.

Na Seção 2.2 mostraremos que o princípio do máximo é válido para operadores do tipo (2.2) em domínios da forma

$$\Omega_i^- = \{x = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) \in \Omega :\ x_i < 0\}\ i \in \{1, \ldots, n\},$$

e com isso, deduziremos a simetria de qualquer solução do problema

$$\begin{cases} Lv &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ v &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

que em outras palavras significa a simetria de qualquer autofunção do operador (2.2) correspondendo ao autovalor zero.

Outras importantes consequências da validade do princípio do máximo para o operador L em Ω_i^- são algumas propriedades do conjunto nodal para qualquer solução de (2.3), que serão estabelecidas na Seção 2.3, assim como algumas propriedades do conjunto coincidente de duas possíveis soluções de (2.1) com a hipótese adicional da função f ser também convexa.

Na Seção 2.4 tratamos do caso $f(u) = u^p$, e demonstramos resultados de unicidade, e também concluímos que em alguns casos as soluções de (2.1) são não-degeneradas, como por exemplo, quando $n = 2$ e $\lambda = 0$.

Na Seção 2.5 consideramos a não-linearidade $f(u) = u^p + \mu u^q$, onde $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$. No artigo [1], os autores Ambrosetti, Brezis e Cerami obteram duas soluções clássicas para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= & u^p + \mu u^q & \text{em} & \Omega \\ u &> & 0 & \text{em} & \Omega \\ u &= & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um domínio limitado com fronteira suave e $\mu \in (0, \Lambda)$. Nosso objetivo é mostrar que em certos domínios tal problema possui somente estas duas soluções para todo $\mu \in (0, \mu^*)$, onde $\mu^* \leq \Lambda$.

2.2 Resultado de Simetria para Equação Linearizada

Nesta seção assumiremos que Ω é um domínio limitado do $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. É importante observar que a seguinte condição:

(G) Existe $g \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $g > 0$ em Ω tal que $Lg \leq 0$ em Ω, mas $g \neq 0$ em alguma parte regular de $\partial\Omega$,

implica na validade do princípio do máximo refinado para o operador L em Ω, de acordo com o Corolário 1.5 do Capítulo 1.

Considere $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= & f(u) & \text{em} & \Omega \\ u &> & 0 & \text{em} & \Omega \\ u &= & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases} \tag{2.4}$$

com $\partial\Omega$ suave, $f \in C^1(\mathbb{R})$ e $f(0) \geq 0$. Associado a este problema temos o problema linearizado.

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v &= & f'(u)v & \text{em} & \Omega \\ v &= & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.5}$$

Usando (2.2), podemos escrever o Problema (2.5) como

$$\begin{cases} Lv &= 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

e a existência de uma solução não-trivial para o Problema (2.6) significa a existência de uma autofunção correspondendo ao autovalor zero.

Nosso primeiro resultado deste capítulo estabelece a simetria para qualquer solução do problema linearizado (2.6).

Teorema 2.1 *Seja u uma solução de* (2.4) *e suponhamos que Ω é convexo na direção x_1 e simétrico em relação ao hiperplano $T_1 = \{x \in \mathbb{R}^n;\ x_1 = 0\}$. Então qualquer solução v de* (2.5) *é simétrica em relação a x_1, isto é, $v(x_1, x_2, ..., x_n) = v(-x_1, x_2, ..., x_n)$.*

Prova. Denotemos $x \in \mathbb{R}^n$ por (x_1, y), onde $x_1 \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}^{n-1}$. Sendo Ω simétrico em relação a x_1, sabemos pelo Teorema de Simetria de Gidas-Ni -Nirenbeg (Teorema 0.23), que u é simétrico em relação a x_1, bem como $u_{x_1} > 0$ em Ω_1^-. Vamos agora provar que o princípio do máximo vale para L em Ω_1^-. Como comentamos, é suficiente verificar a existência de uma função g satisfazendo a condição (G). Para isto, consideremos $g := u_{x_1}$. Já vimos que $g > 0$ em Ω_1^-, e como $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, é evidente que $g \in W^{2,n}_{loc}(\Omega_1^-) \cap C(\overline{\Omega_1^-})$. Além disso

$$Lg = \frac{\partial}{\partial x_1}(\Delta u - \lambda u + f(u)) = 0.$$

Verifiquemos agora que $g = u_{x_1} \neq 0$ sobre $\partial\Omega \cap \partial\Omega_1^-$. De fato, pelo Teorema do Valor Médio temos que $f(u(x)) - f(0) = f'(\xi(x))u(x)$, onde $\xi(x) \in (0, u(x))$ para cada $x \in \Omega$. Denotando $c(x) = \lambda - f'(\xi(x))$, temos que c é uma função limitada, e além disso, observando que assumimos $f(0) \geq 0$, temos que a função u satisfaz

$$-\Delta u + c(x)u \geq 0.$$

Pelo Lema de Hopf (Lema 0.2), temos que $\partial u/\partial\nu < 0$ sobre $\partial\Omega$, logo $u_{x_1} < 0$ em alguma parte regular de $\partial\Omega_1^-$. Portanto o princípio do máximo refinado se verifica.

Definamos a função

$$\psi(x) := v(x_1, y) - v(-x_1, y) \quad \text{com} \quad x \in \Omega_1^-.$$

Como u é simétrico em relação a x_1, temos que

$$L\psi(x) = Lv(x_1, y) - Lv(-x_1, y) = 0 \quad \text{em} \quad \Omega_1^-$$

e

$$\psi = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega_1^-,$$

donde $\psi \equiv 0$ em Ω_1^-, como decorrência do princípio do máximo, e obtemos com isso o resultado desejado. ■

Usando os mesmos argumentos, obtemos o seguinte resultado:

Corolário 2.1 *Suponhamos que Ω é convexo na direção x_i e simétrico em relação ao hiperplano $T_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$, para algum i e seja u é uma solução do Problema* (2.1)*. Então o princípio do máximo refinado vale para L em Ω_i^-.*

Observação 8 *Como consequência do Teorema* 2.1*, se Ω é uma bola no $\mathbb{R}^n$, então v é radialmente simétrica. De fato, basta observar que o operador laplaciano é invariante pela rotação dos eixos coordenados.*

2.3 Algumas propriedades do conjunto coincidente de duas soluções e um resultado de unicidade.

Nesta seção, suponhamos que Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^n$, com fronteira suave, sendo ainda convexo na direção de cada eixo coordenado e simétrico em relação aos hiperplanos $T_i = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i = 0\}$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Considere uma solução u do Problema (2.4), onde f é uma função de classe C^1 com $f(0) \geq 0$, e uma solução não-trivial v do problema linearizado correspondente (2.5). Apresentaremos agora, algumas importantes propriedades do **conjunto nodal** de v, isto é,

$$\mathcal{N} = \overline{\{x \in \Omega : v(x) = 0\}}.$$

Denotemos ainda $\tilde{\Omega} = \{x \in \Omega; v(x) \neq 0\}$.

Teorema 2.2 *As seguintes propriedades são válidas,*

(i) *Nenhuma componente conexa de $\tilde{\Omega}$ pode estar contida em qualquer Ω_i^-;*

(ii) *Se $n = 2$ então a origem não pertence a $\mathcal{N}$;*

(iii) *Se $n = 2$ então $\mathcal{N} \cap \partial\Omega = \emptyset$.*

Prova. **(i)** Suponhamos que exista uma componente conexa D de $\tilde{\Omega}$, com $D \subset \Omega_i^-$ e $v > 0$ em D. Como $v = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que $v = 0$ sobre ∂D. Além disso, desde que $Lv = 0$, temos pela definição de λ_1 vista no capítulo anterior, que $\lambda_1(L, D) = 0$. Por outro lado, vimos no Corolário 2.1 que o princípio do máximo é válido para L em Ω_i^-, o que implica que $\lambda_1(L, \Omega_i^-) > 0$. Dessa forma, obtemos $\lambda_1(L, D) \geq \lambda_1(L, \Omega_i^-) > 0$, resultando em uma contradição.

(ii) Iremos mostrar que se $v(0) = 0$ então $v \equiv 0$. Suponhamos por contradição que $v(0) = 0$ e v não é identicamente nula e denotemos $U_0 = \Omega$. De acordo com o princípio do máximo forte não podemos ter $v \leq 0$ em Ω, pois senão obteriamos $v < 0$ em Ω, o que não é possível visto que $v(0) = 0$. Assim $U_0^+ = \{x \in U_0 : v(x) > 0\}$ é aberto e não vazio. Escolha uma componente A_1 de U_0^+. Seja $S_i, i = 1, 2$, o operador que associa um ponto ao seu simétrico em relação ao eixo x_i, isto é,

$$S_1(x_1, x_2) = (x_1, -x_2) \quad \text{e} \quad S_2(x_1, x_2) = (-x_1, x_2).$$

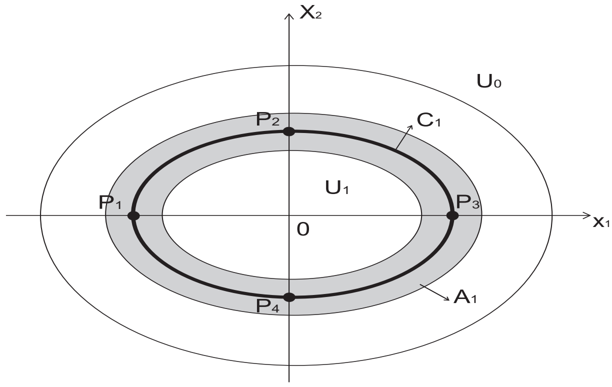

Figura 2.1:

Temos que $S_i(A_1)$ é uma componente de U_0^+, pois S_i é contínua e $v(S_i(x)) = v(x) > 0$ para todo $x \in A_1$, devido a simetria de v. Não podemos ter $A_1 \cap S_1(A_1) = \emptyset$ ou $A_1 \cap S_2(A_1) = \emptyset$, pois do contrário A_1 ou $S_1(A_1)$ estaria contida em Ω_1^-, o que é impossível por **(i)**. Assim $A_1 = S_1(A_1) = S_2(A_1)$ é simétrico em relação aos eixos coordenados, conexo e aberto, é desta forma conexo por caminhos.

Escolhemos quatro pontos simétricos P_1, P_2, P_3 e P_4 em A_1 e ligando-os com curvas simétricas simples aos pares, podemos construir uma curva poligonal simples fechada $C_1 \subset A_1$ que é simétrica em relação aos eixos coordenados. A Figura 2.1 nos dá uma idéia geométrica desta construção.

Pelo Teorema da Curva de Jordan $U_0 \setminus C_1$ tem duas componentes conexas e, devido a C_1 ser simétrica, a origem pertence a componente que não possui ∂U_o como parte da fronteira. Denotemos por U_1 a componente que contém a origem e a chamemos de interior de C_1, e por exterior de C_1 a outra componente. Sobre $\partial U_1 = C_1$ temos $v > 0$, bem como $v \not\equiv 0$ em U_1. Pelo princípio do máximo forte não é possível ter $v \geq 0$ em U_1, desde que $v(0) = 0$, e assim $U_1^- = \{x \in U_1 : v(x) < 0\}$ é aberto e não-vazio.

Tomando uma componente A_2 de U_1^-, observamos que $v = 0$ sobre ∂A_2 porque $v > 0$ sobre ∂U_1, também A_2 é uma componente de $\tilde{\Omega}$. Como antes, podemos construir uma curva simples simétrica fechada $C_2 \subset A_2$ e concluir que $U_1 \setminus C_2$ possui duas componentes, do qual a interior de C_2 chamaremos de U_2 e escolhemos uma componente A_3 de $U_2^+ = \{x \in U_2 : v(x) > 0\}$ que é também uma componente de $\tilde{\Omega}$. Temos que A_1 é disjunto de A_3, porque A_1 contém C_1 que pertence ao exterior de C_2. Prosseguindo por este caminho, obteremos uma infinidade de componentes disjuntas de $\tilde{\Omega}$. Por outro lado, segundo a Proposição 1.2 existe $\delta > 0$ tal que $|A_n| \geq \delta$ para todo n, pois do contrário o princípio do máximo seria válido para L em algum A_n, acarretando $v = 0$ em A_n (visto que $Lv = 0$ em A_n e $v = 0$ sobre ∂A_n), o que é impossível. Como $\tilde{\Omega}$ é limitado, não podemos ter uma quantidade infinita de componente disjuntas com medida positiva, gerando desta forma uma contradição.

(iii) Mostraremos agora que em uma vizinhaça de $\partial\Omega$ devemos ter $v > 0$ ou $v < 0$. Suponhamos o contrário, isto é, que em toda vizinhança de $\partial\Omega$ tenhamos pontos onde

$v > 0$ e pontos onde $v < 0$. Pondo $U_0 = \Omega$, temos que $U_0^+ = \{x \in U_0 : v(x) > 0\}$ é não-vazio e aberto. Escolhamos A_1 uma componente de U_0^+. Desde que $v = 0$ sobre ∂U_0, segue que $v = 0$ sobre ∂A_1 e como na demonstração de (ii), podemos construir uma curva simples fechada $C_1 \subset A_1$, simétrica em relação aos eixos. Chamemos de U_1 a componente de $U_0 \setminus C_1$ que contém a fronteira $\partial\Omega$. Pelo que assumimos, o conjunto $U_1^- = \{x \in U_1 : v(x) < 0\}$ é não-vazio e aberto, e assim podemos escolher uma componente A_1 de U_1^-. Então construimos uma curva simples fechada $C_2 \subset A_2$ tal que C_2 é simétrica em relação aos eixos. Logo $U_1 \setminus C_2$ possui duas componentes. Tomemos U_2 a exterior de C_2 que contém a fronteira $\partial\Omega$. Daí U_2^+ é não-vazio e aberto, e escolhemos A_3 como sendo uma componente de U_2^+. Temos que A_1 e A_3 são componentes disjuntas de $\tilde{\Omega}$, pois $C_1 \subset A_1$ e C_1 pertence ao interior de C_2. Prosseguindo desta forma obteremos uma quantidade infinita de componentes conexas $\{A_n\}$ de $\tilde{\Omega}$ com medida positiva, o que é um absurdo, como já vimos anteriormente. ∎

Observação 9 *Se Ω é uma bola em $\mathbb{R}^n$, então as propriedades **(i)-(iii)** decorrem imediatamente da simetria radial de v.*

De fato, tomando $\Omega = B_R(0)$, concluímos pelo Teorema 2.1 que v é radialmente simétrica, e assim, temos que uma componente conexa de $\tilde{\Omega}$ é uma bola centrada na origem ou um anel centrado na origem. Dessa forma, o item **(i)** é imediato. Já sabemos que $\tilde{\Omega}$ possui apenas uma quantidade finita de componentes conexas. Vamos provar **(ii)**, supondo por contradição, como no teorema, que $v(0) = 0$. Seja $r > 0$ tal que, digamos, $v \geq 0$ em $B_r(0)$. Pelo princípio do máximo forte segue que $v = 0$ em $B_r(0)$. Se v não fosse identicamente nula, então existiria $r_1 > r$ tal que, digamos, $v \geq 0$ em $B_{r_1}(0)$, com $v > 0$ em algum ponto de $B_{r_1}(0)$. Mas isso contradiz o princípio do máximo forte e portanto v é identicamente nula em Ω. Com raciocínio análogo vemos que **(iii)** se verifica.

Consideremos agora duas soluções u_1, u_2 do Problema (2.1) e denotemos por $\mathcal{M} = \overline{\{x \in \Omega : u_1(x) = u_2(x)\}}$ o conjunto coincidente, e $\hat{\Omega} = \{x \in \Omega : u_1(x) \neq u_2(x)\}$.

Teorema 2.3 *Suponhamos que f é convexa. Então temos:*

(i) *Nenhuma componente conexa D de $\hat{\Omega}$ pode ser contida em Ω_i^-, qualquer que seja $i \in \{1, ..., n\}$;*

(ii) *Se $n = 2$ então $\mathcal{M} \cap \partial\Omega = \emptyset$;*

(iii) *Se $n = 2$ e $\max_{\overline{\Omega}} u_1 = \max_{\overline{\Omega}} u_2$ então $u_1 \equiv u_2$.*

Prova. Consideremos $w(x) = u_1(x) - u_2(x), x \in \Omega$. Sendo f convexa concluímos que:

$$\text{se } u_1 \leq u_2 \text{ então } f(u_2) - f(u_1) \leq f'(u_2)(u_2 - u_1) = -f'(u_2)w$$

e se $u_1 \geq u_2$ então $f(u_1) - f(u_2) \geq f'(u_2)(u_1 - u_2) = f'(u_2)w$.

Em resumo, dado $x \in \Omega$ temos

$$f(u_2) - f(u_1) \leq -f'(u_2)w$$

e assim,

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta w - \lambda w + f'(u_2)w & \leq & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ w & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.7}$$

De forma análoga obtemos

$$\left\{ \begin{array}{rcll} \Delta w - \lambda w + f'(u_1)w & \geq & 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ w & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.8}$$

Notemos inicialmente que se $w \geq 0$ por (2.7) e pelo princípio do máximo forte $w > 0$ em Ω, donde $\Omega = \hat{\Omega}$. Podemos então supor que w muda de sinal em Ω.

Para provar **(i)**, argumentamos por contradição, supondo que existe uma componente conexa D de $\hat{\Omega}$ contida em algum Ω_i^-, $i \in \{1, ..., n\}$ e que $w > 0$ em D. Segundo o Corolário 2.1, o princípio do máximo é válido para $L_j = \Delta - \lambda + f'(u_j)$ em Ω_i^-, $j = 1, 2$, e portanto $\lambda_1(L_1, \Omega_i^-) > 0$. Porém, sendo D um subconjunto de Ω_i^-, temos que $\lambda_1(L_1, D) \geq \lambda_1(L_1, \Omega_i^-) > 0$, ou seja, o princípio do máximo vale para L_1 em D. Este último fato, juntamente com (2.8) implicam que $w \leq 0$, contrariando a hipótese. Se tivessemos assumido que $w < 0$ em D então usando o operador L_2 e (2.7) junto com o argumento acima chegaríamos na contradição $w \geq 0$ em D.

Para provar **(ii)**, observemos que de acordo com o Teorema de Simetria de Gidas-Ni-Nirenberg, u_1 e u_2 são simétricos em x_i e portanto w também o é. Suponhamos por contradição que $\mathcal{M} \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Usando (2.7) e (2.8) e com os mesmos passos usados na demonstração do item **(iii)** do Teorema 2.2, obteremos uma quantidade infinita de componentes conexas de $\hat{\Omega}$ com medida positiva, o que não é possível, conforme já comentamos.

Finalmente, para provar **(iii)**, observemos que pelo Teorema de Simetria de Gidas-Ni-Nirenberg, $\max_{\overline{\Omega}} u_j = u_j(0)$, $j = 1, 2$. Dessa forma se os máximos coincidem então a origem pertence a $\mathcal{M}$ e portanto $u_1 \equiv u_2$. Para confirmar esta afirmação, suponhamos por contradição que $0 \in \mathcal{M}$ e que $w \not\equiv 0$. Com o auxílio de (2.7) e (2.8) e seguindo os mesmos passos como em **(ii)** do Teorema 2.2, poderemos construir uma quantidade infinita de componentes conexas de $\hat{\Omega}$ com medida positiva, o que é um absurdo. ∎

Vamos agora provar uma generalização do item **(iii)** do Teorema anterior que não faz nenhuma hipótese sobre o sinal de u.

Seja Ω como antes e $n = 2$. Diremos que uma função $u \in C^1(\overline{\Omega})$ é simétrica e monótona se é simétrica em relação a x_1 e $u_{x_i} > 0$ em $\Omega_i^-, i = 1, 2$.

Teorema 2.4 *Suponhamos que $n = 2, f$ é convexa e $u_1, u_2 \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ são funções simétricas e monótonas que satisfazem a equação*

$$-\Delta u + \lambda u = f(u) \quad em \quad \Omega.$$

Se $u_1(0) = u_2(0)$ *e* $u_1 \leq u_2$ *sobre* $\partial\Omega$ *então* $u_1 \equiv u_2$.

Prova. Vamos supor por contradição que u_1 não é identicamente igual a u_2. Como na prova do Teorema 2.1, deduzimos que os operadores $L_j = \Delta - \lambda + f'(u_j), j = 1, 2$, satisfazem o princípio do máximo em $\Omega_i^-, i = 1, 2$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que

$$f(u_1(x)) - f(u_2(x)) = f'(\xi(x))(u_1(x) - u_2(x)),$$

onde $\xi(x) \in [u_1(x), u_2(x)]$ para cada $x \in \Omega$. Denotando $c(x) = -f'(\xi(x))$, segue que $w = u_1 - u_2$ satisfaz a equação linear $\Delta w - \lambda w + c(x)w = 0$, e $c \in L^\infty(\Omega)$. Dessa forma, a Proposição 1.2 e o princípio do máximo forte se aplicam a w. Assim, podemos proceder como na prova do Teorema 2.2, desde que w não é identicamente nula, para concluir que não existe uma componente conexa D de $\hat{\Omega} = \{x \in \Omega : u_1 \neq u_2\}$ tal que $u_1 = u_2$ sobre ∂D e $D \subset \Omega_i^-$ para $i = 1$ ou 2. Daí, continuando a argumentação, escolhemos uma componente A_1 de $U_0^+ = \{x \in \Omega : w(x) > 0\}$. Notemos que $w = 0$ sobre ∂A_1, pois por hipótese $w \leq 0$ sobre $\partial\Omega$, e também A_1 é uma componente de $\hat{\Omega}$. Prosseguindo como no Teorema 2.2 obteremos uma quantidade infinita de componentes conexas disjuntas A_n de $\hat{\Omega}$, todas tendo medida positiva, o que é impossível, como já comentamos. ■

Observação 10 *Se* Ω *é uma bola então qualquer solução de* (2.4) *é radial, segundo o Teorema de Gidas-Ni-Nirenberg, e o problema de unicidade se reduz a teoria de equações diferenciais ordinárias. Contudo, podemos provar o teorema anterior para uma bola usando somente princípios do máximo.*

De fato, suponhamos que $\Omega = B_R(0) \subset \mathbb{R}^n, u_1, u_2 \in C^2(\overline{\Omega})$ satisfazem a equação $-\Delta u = f(u)$ em Ω e $u_1(0) = u_2(0)$. Como no teorema anterior, temos que $w = u_1 - u_2$ é radial e satisfaz a equação linear $\Delta w + c(x)w = 0$, com $c \in L^\infty(\Omega)$. Pela Proposição 1.2, existe $\delta > 0$ tal que se $0 \leq r_1 < r_2 < R$ e $r_2 - r_1 < \delta$, então o princípio do máximo vale para $\Delta + c$ em $B_{r_2} \setminus B_{r_1}$. Afirmamos que u_1 e u_2 coincidem sobre ∂B_r para qualquer $r < \delta$. De fato, se fosse $u_1 > u_2$ sobre ∂B_r então pelo princípio do máximo $u_1 > u_2$ em B_r, o que não é possível, conforme assumimos. Também não é possível termos $u_1 < u_2$ sobre ∂B_r, pois usando novamente o princípio do máximo teríamos $u_1 < u_2$ em B_r, o que é uma contradição, pois $u_1(0) = u_2(0)$. Assim $u_1 \equiv u_2$ sobre $\overline{B_\delta}$. Fazendo o mesmo raciocínio em $B_{\frac{3\delta}{2}} \setminus B_{\frac{\delta}{2}}$ obteremos que $u_1 \equiv u_2$ em $B_{\frac{3\delta}{2}}$ e após um número finito de passos obteremos $u_1 \equiv u_2$ em B_R.

2.4 O caso de $f(u) = u^p$.

Nesta seção, apresentaremos alguns resultados de unicidade para o problema (2.9) e provamos que em certas situações tais soluções são não-degeneradas. Assumiremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ como na seção anterior e consideraremos o caso $f(u) = u^p$, $1 < p < 2^* - 1$, onde $2^* = 2n/(n-2)$ se $n > 2$ e $2^* = \infty$ se $n = 2$, então (2.4) e (2.5) tornam-se respectivamente

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u &= u^p \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.9}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta v + \lambda v &= pu^{p-1}v \quad \text{em} \quad \Omega \\ v &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.10}$$

Dizemos que uma solução u de (2.9) é não-degenerada se (2.10) admite apenas a solução trivial.

Teorema 2.5 *Suponhamos que $\lambda = 0$. Se $n = 2$ ou Ω é uma bola em $\mathbb{R}^n$, então o Problema (2.9) tem apenas uma solução.*

Prova. Sejam u, v soluções do Problema (2.9) com $\lambda = 0$ e suponhamos, sem perda de generalidade que $u(0) \leq v(0)$. Para cada $t \in (0, 1]$ a função $v_t(x) = t^{\frac{2}{p-1}} v(tx)$ satisfaz, para todo $x \in \Omega$,

$$-\Delta v_t\left(\frac{x}{t}\right) = -t^{\frac{2}{p-1}} t^2 \Delta v(x) = t^{\frac{2p}{p-1}} v^p(x) = v_t^p\left(\frac{x}{t}\right),$$

ou seja,

$$-\Delta v_t = v_t^p \quad \text{em} \quad \frac{\Omega}{t} = \{\frac{x}{t} : x \in \Omega\}.$$

Além disso, desde que u e v são funções simétricas e monótonas, segue que v_t também é uma função simétrica e monótona para cada $t \in [0, 1]$. Escolhendo $\bar{t} = (u(0)/v(0))^{\frac{p-1}{2}} \in (0, 1]$ temos que

$$u(0) = v_{\bar{t}}(0), \; u = 0 \leq v_{\bar{t}} \text{ sobre } \partial\Omega,$$

u e $v_{\bar{t}}$ são soluções da equação

$$-\Delta u = u^p \text{ em } \Omega.$$

Dessa forma, segundo o Teorema 2.4, temos que $u \equiv v_{\bar{t}}$ em $\overline{\Omega}$. Se fosse $\bar{t} < 1$, desde que $\Omega \subset \Omega/\bar{t}$ propriamente, segue que $0 = u < v_{\bar{t}}$ sobre $\partial\Omega$, o que não é possível. Logo $\bar{t} = 1$, e obtemos $u \equiv v_1 \equiv v$ em $\overline{\Omega}$. ■

Mostraremos agora que nos casos particulares em que $\lambda = 0$ e $n = 2$, ou quando Ω é uma bola do $\mathbb{R}^n$, qualquer solução de (2.9) é não-degenerada.

Teorema 2.6 *Suponhamos que* $\lambda = 0$*. Se* $n = 2$ *ou* Ω *é uma bola do* $\mathbb{R}^n$*, então qualquer solução de* (2.9) *é não-degenerada.*

Prova. Antes de provar o teorema, precisamos deduzir uma identidade integral que será muito útil. Multiplicando (2.9) por v e (2.10) por u, integrando e usando a Primeira Fórmula de Green, obtemos

$$\int_\Omega u^p v dx = 0. \tag{2.11}$$

Agora, considerando a função auxiliar $\zeta(x) = x.\nabla u(x)$, onde $x.y$ indica o produto interno usual de x por y em $\mathbb{R}^n$, vemos que

$$\begin{aligned}\Delta\zeta &= \sum_i \Delta(x_i \frac{\partial u}{\partial x_i}) = \sum_i (2\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(\Delta u)) \\ &= 2\Delta u + \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i}(-u^p) = -2u^p - pu^{p-1} \sum_i x_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= -2u^p - pu^{p-1}\zeta.\end{aligned}$$

Multiplicando esta última igualdade por $-v$, integrando usando (2.9) e (2.10) temos

$$-\int_\Omega \Delta\zeta v dx = 2\int_\Omega u^p v dx + p\int_\Omega u^p v\zeta dx = p\int_\Omega u^p \zeta dx = \int_\Omega -\Delta v\zeta dx,$$

ou seja,

$$\int_\Omega (\Delta v\zeta - \Delta\zeta v) dx = 0.$$

Pela segunda fórmula de Green obtemos

$$\int_{\partial\Omega} (\zeta\frac{\partial v}{\partial \nu} - v\frac{\partial \zeta}{\partial \nu}) dS = \int_{\partial\Omega} \zeta\frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0. \tag{2.12}$$

Desde que $u = 0$ sobre $\partial\Omega$, temos que $\nabla u = (\nabla u.\nu)\nu$, daí

$$\zeta = x.\nabla u = x.(\nabla u.\nu)\nu = (x.\nu)(\nabla u.\nu) = (x.\nu)\frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Consequentemente

$$\int_{\partial\Omega} (x.\nu)\frac{\partial u}{\partial \nu}\frac{\partial v}{\partial \nu} dS = 0. \tag{2.13}$$

Por outro lado, sendo $n = 2$, vimos que para soluções não-triviais do Problema (2.10), o Teorema 2.2 garante que o conjunto nodal de v não intercepta $\partial\Omega$. Assim, próximo à $\partial\Omega$, a função v tem sempre o mesmo sinal, digamos $v > 0$. Segundo o Lema de Hopf temos que $\partial v/\partial\nu < 0$ sobre $\partial\Omega$ a menos que $v \equiv 0$, e $\partial u/\partial\nu < 0$ sobre $\partial\Omega$. Pelas hipóteses que fizemos para Ω temos $x.\nu \geq 0$ e $x.\nu \not\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$, contrariando (2.13), a não ser que v seja identicamente nula. Quando Ω é uma bola em $\mathbb{R}^n$, basta observar que o Teorema 2.4 se aplica, conforme observamos após a demonstração. Dessa forma, o mesmo argumento usado para $n = 2$ é válido também neste caso. ■

O próximo resultado dá um resultado de unicidade para p próximo de 1.

Teorema 2.7 *Existe $p_o \in (1, 2^* - 1)$ tal que o Problema (2.9) tem somente uma solução para qualquer $p \in (1, p_o)$ e $\lambda > -\lambda_1(\Delta, \Omega)$.*

Prova. Observemos primeiramente que se u_1 e u_2 são duas soluções distintas de (2.9) então a função $w = u_1 - u_2$ deve mudar de sinal, pois do contrário a identidade

$$0 = \int_\Omega [u_1(-\Delta u_2 + \lambda u_2) - u_2(-\Delta u_1 + \lambda u_1)]dx = \int_\Omega u_1 u_2 (u_2^{p-1} - u_1^{p-1})dx,$$

oriunda de (2.9) e da Primeira Fórmula de Green implicaria em $u_1 \equiv u_2$.

Tomemos u_k uma solução de (2.9) com $p = p_k$, onde $p_k \searrow 1$ quando k tende ao infinito. Como já comentamos, pelo Teorema de Gidas-Ni-Nirenberg

$$M_k = \max_{\overline{\Omega}} = u_k(0).$$

Afirmamos que

$$M_k^{p_k - 1} \longrightarrow \lambda_1 + \lambda \quad \text{com} \quad k \longrightarrow \infty. \tag{2.14}$$

Mostremos inicialmente que $M_k^{p_k-1}$ é limitado. Suponhamos por contradição que $M_k^{p_k-1} \to \infty$ e definamos em $\Omega_k = M_k^{\frac{p_k-1}{2}}\Omega$ a função

$$\tilde{u}_k(x) = \frac{1}{M_k} u_k\Big(\frac{x}{M_k^{\frac{p_k-1}{2}}}\Big),$$

que satisfaz $\|\tilde{u}_k\|_{L^\infty} = 1$ para todo inteiro k. Notemos que Ω_k tende à $\mathbb{R}^n$ quando k tende ao infinito e para cada $y \in \Omega_k$, temos que $y \in M_k^{\frac{p_k-1}{2}} x$, onde $x \in \Omega$. Além disso,

$$\begin{aligned} -\Delta \tilde{u}_k(y) &= \frac{1}{M_k}\Big(-\frac{1}{M_k^{p_k-1}}\Delta u_k(x)\Big) \\ &= \frac{1}{M_k^{p_k}}\Big(u_k^{p_k}(x) - \lambda u_k(x)\Big) \\ &= \tilde{u}_k^{p_k}(y) - \frac{\lambda}{M_k^{p_k-1}}\tilde{u}_k(y), \end{aligned}$$

isto é,

$$-\Delta \tilde{u}_k = \tilde{u}_k^{p_k} - \frac{\lambda}{M_k^{p_k-1}}\tilde{u}_k \quad \text{em} \quad \Omega_k.$$

Afirmamos que para k tendendo ao infinito, $\tilde{u}_k$ converge uniformemente, em cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, para uma função $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R}^n)$ que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} &= \tilde{u} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \\ \quad \tilde{u} &> 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2.15}$$

De fato, fixemos uma bola $B = B_r(0)$ de raio r e centrada na origem, e tomemos k suficientemente grande de modo que se tenha $\overline{B} \subset \Omega_k$. Pelo Teorema 0.10 e o Teorema 0.12 temos

$$\|\tilde{u}_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B})} \leq C,$$

para alguma constante positiva que não depende de k. Por outro lado $C^{2,\alpha}(\overline{B})$ esta imerso compactamente em $C^2(\overline{B})$. Dessa forma, uma subsequência de $\tilde{u}_k$ converge para uma função $\tilde{u}_r$ em $C^2(\overline{B})$. Aumentando-se o raio r progressivamente, encontramos para cada r uma solução de $-\Delta u = u$. Fazendo r tender ao infinito, obtemos pelo argumento da diagonal de Cantor uma subsequência de $\tilde{u}_k$ que converge sobre compactos para uma função $\tilde{u}$ de classe C^2 e que satisfaz (2.15).

Sejam λ_R o primeiro autovalor e ϕ_R a autofunção positiva associada ao problema

$$\begin{cases} -\Delta \phi_R &= \lambda_R \phi_R \quad \text{em} \quad B_R(0), \\ \quad \phi_R &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B_R(0). \end{cases} \tag{2.16}$$

Usando a Primeira Fórmula de Green, o fato de que $\partial \phi_R / \partial \nu < 0$ sobre $\partial B_R(0)$ e tomando R suficientemente grande obtemos

$$0 > \int_{\partial B_R(0)} \tilde{u} \frac{\partial \phi_R}{\partial \nu} dS = (1 - \lambda_R) \int_{B_R(0)} \tilde{u} \phi_R dx > 0,$$

o que é um absurdo. Isto nos permite concluir que $M_k^{p_k - 1}$ é limitado. Assim, passando para uma subsequência, $M_k^{p_k-1} \to \mu$. Consideremos agora a função $\bar{u}_k := u_k / M_k$, que é solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u}_k + \lambda \bar{u}_k &= M_k^{p_k - 1} \bar{u}^{p_k} \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad \bar{u}_k &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad \bar{u}_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Pelas estimativas elípticas dos Teoremas 0.14 e 0.15, $\|\bar{u}_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C$ para todo k, logo, existe uma subsequência $\bar{u}_k$ que converge para $\bar{u}$ em $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Além disso, $\bar{u} \geq 0$ e $\bar{u}(0) = \lim \bar{u}_k(0) = 1$. Desta forma, passando o limite em (2.17) e usando o princípio do máximo forte, temos que $\bar{u}$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} + \lambda \bar{u} &= \mu \bar{u} \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad \bar{u} &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad \bar{u} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.18}$$

e portanto, $\mu = \lambda_1 + \lambda$ e $\bar{u} = \phi_1$ é a autofunção associada ao autovalor principal de Δ em Ω, concluíndo que (2.14) vale.

Agora, vamos supor que o teorema é falso, isto é, vamos supor que u_k e v_k são duas soluções distintas de (2.9) com $p = p_k$ e $p_k \searrow 1$. De (2.14), desde que $\bar{u}_k$ converge a ϕ_1 uniformemente, obtemos que $\bar{u}_k^{p_k-1} \to 1$ e daí

$$u_k^{p_k-1} = u_k^{p_k-1} M_k^{p_k-1} \to \lambda_1 + \lambda$$

uniformemente em qualquer conjunto compacto em Ω. É claro que o mesmo ocorre com a sequência $\bar{v}_k^{p_k-1}$, onde $\bar{v}_k = v_k/\|v_k\|_{L^\infty(\Omega)}$. As funções

$$w_k = \frac{u_k - v_k}{\|u_k - v_k\|_{L^\infty(\Omega)}}$$

satisfazem

$$\begin{cases} -\Delta w_k + \lambda w_k &= g_k w_k \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \qquad\qquad w_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.19}$$

onde $g_k = (u_k^{p_k} - v_k^{p_k})/(u_k - v_k)$. Pelo Teorema do Valor Médio, temos que $g_k = p_k \beta_k^{p_k-1}$, onde $u_k \leq \beta_k \leq v_k$ (ou $v_k \leq \beta_k \leq u_k$), donde segue que $g_k \to \lambda_1 + \lambda$ uniformemente sobre compactos. Desde que w_k é uniformemente limitado com $\|w_k\|_{L^\infty(\Omega)} = 1$, de (2.19) e estimativas elípiticas comentadas acima, temos que $w_k \longrightarrow \phi_1$ uniformemente. Isto é um absurdo, pois ϕ_1 não muda de sinal, enquanto que w_k muda de sinal, como foi concluído no início. ∎

Da não-degenerescência das soluções de (2.9) segue a unicidade da solução.

Teorema 2.8 *Suponhamos que para qualquer $p \in (1, 2^* - 1)$, a solução de (2.9) é não-degenerada. Então, para todo p, a solução do Problema (2.9) é única.*

Prova. Vamos considerar o caso $n \geq 3$. Para $n = 2$ o argumento é o mesmo. Do Teorema 2.7 sabemos que existe $p_o > 1$ tal que o Problema (2.9) tem uma única solução para $p \in (1, p_o)$. Seja $(1, \bar{p})$ o intervalo maximal com esta propriedade de unicidade. Para provar o teorema, vamos concluir que $\bar{p} = (n+2)/(n-2)$. Supondo por contradição que $\bar{p} < (n+2)/(n-2)$, afirmamos inicialmente que vale a unicidade para o Problema (2.9) quando $p = \bar{p}$. De fato, tomando a aplicação $F : X \times (1, 2^* - 1) \longrightarrow C(\overline{\Omega})$, onde $X = \{u \in C^2(\overline{\Omega}) : u_{|\partial\Omega} = 0\}$ e $F(p, u) = \Delta u - \lambda u + u^p$, temos por hipótese que $F_u(p, u) = \Delta - \lambda + pu^{p-1}$ é injetivo e $F(u, p) = 0$ para todo par (u, p) tal que $u \in X$ é solução de (2.9). Seja $(u_{\bar{p}}, \bar{p})$ um par satisfazendo $F(u_{\bar{p}}, \bar{p})$. Pelo Teorema da Aplicação Implícita existe uma única aplicação $G : (\bar{p} - \epsilon, \bar{p} + \epsilon) \longrightarrow X$ contínua, tal que $F(G(p), p) = 0$ para todo $p \in (\bar{p} - \epsilon, \bar{p} + \epsilon)$. Nestas condições, vemos que não é possível existir outro par $(\tilde{u}_{\bar{p}}, \bar{p})$ tal que $F(\tilde{u}_{\bar{p}}, \bar{p}) = 0$, pois em $(1, \bar{p})$ vale a unicidade para o Problema 2.9.

Sendo $\bar{p} < (n+2)/(n-2)$, podemos encontrar uma sequência $p_k \searrow \bar{p}$ tal que existem duas soluções distintas u_k, v_k de (2.9) com $p = p_k$. Pelo Teorema 0.22 temos que u_k, v_k são uniformemente limitadas por uma constante, e dessa forma, por estimativas elípticas (veja Teoremas 0.14 e 0.15) temos que u_k e v_k ambas convergem em $C^2(\overline{\Omega})$ para a única solução $\bar{u}$ de (2.9) para $p = \bar{p}$. Comentamos que no Teorema 0.22, devido a Gidas-Spruck, a constante depende de p, porém, na demonstração deste teorema, feita por contradição e usando argumento de blow-up, podemos ver que se p é substituído por uma sequência $p_k \to q \in (1, 2^* - 1)$, o teorema ainda é válido. Definamos

$$w_k = u_k - v_k \quad \text{e} \quad \bar{w}_k = \frac{w_k}{\|w_k\|_{H_o'(\Omega)}}$$

Temos que $\bar{w}_k$ satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta \bar{w}_k + \lambda \bar{w}_k &= \alpha_k \bar{w}_k \quad \text{em} \quad \Omega \\ \bar{w}_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.20}$$

onde

$$\alpha_k(x) = \int_0^1 pk(tu_k(x) + (1-t)v_k(x))^{p_k - 1} dt.$$

Além disso $\bar{w}_k \longrightarrow \bar{w}$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e $\bar{w}_k \longrightarrow \bar{w}$ em $L^2(\Omega)$, devido a imersão compacta $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$. Note ainda que $\alpha_k(x) \longrightarrow \bar{p}\bar{u}^{\bar{p}-1}(x)$ uniformemente, pois u_k e v_k converge uniformemente para $\bar{u}$, e também $\int_\Omega \alpha_k \bar{w}_k dx \longrightarrow \int_\Omega \bar{p}\bar{u}^{\bar{p}-1}\bar{w}^2$, tendo em vista que

$$\Big| \int_\Omega \alpha_k \bar{w}_k dx - \int_\Omega \bar{p}\bar{u}^{\bar{p}-1}\bar{w}^2 dx \Big| \leq \int_\Omega \alpha_k |\bar{w}_k^2 - \bar{w}^2| dx + \int_\Omega |\alpha_k - \bar{p}\bar{u}^{\bar{p}-1}| \bar{w}^2 dx,$$

e com isso, obtemos

$$1 = \int_\Omega |\nabla \bar{w}_k|^2 dx = \int_\Omega \alpha_k \bar{w}_k^2 dx = \bar{p} \int_\Omega \bar{u}^{\bar{p}-1} \bar{w}^2 dx + o(1),$$

o implica que $\bar{w} \not\equiv 0$. Passando o limite em (2.20) obtemos

$$\begin{cases} -\Delta \bar{w} + \lambda \bar{w} &= \bar{p}\bar{u}^{\bar{p}-1}\bar{w} \quad \text{em} \quad \Omega \\ \bar{w} &\not\equiv 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ \bar{w} &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \end{cases} \tag{2.21}$$

o que é uma contradição, desde que assumimos que $\bar{u}$ é uma solução não-degenerada.

■

Corolário 2.2 *Se $n = 2$ e $\lambda = 0$ então o Problema* (2.9) *tem uma única solução.*

Prova. De fato, segundo o Teorema 2.6, qualquer solução de (2.9) com $n = 2$ e $\lambda = 0$ é não-degenerada, e assim, pelo Teorema 2.7 temos a unicidade. ■

Corolário 2.3 *Se $n = 2$ então existe um intervalo (λ', λ'') com $-\lambda_1 < \lambda' < 0 < \lambda''$ tal que tem somente uma solução para qualquer $\lambda \in (\lambda', \lambda'')$.*

Prova. Consideremos a aplicação $F(u, \lambda) := \Delta u - \lambda u + u^p$ onde $u \in \ X = \{v \in C^2(\overline{\Omega}) : v_{|\partial\Omega} = 0\}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotemos por u_0 a única solução de (2.9) para $\lambda = 0$, ou seja $F(u_0, 0) = 0$. Sendo u_0 não-degenerada, ou equivalentemente, $F_u(u_0, 0)$ é um isomorfismo sobre $C(\overline{\Omega})$, temos pelo Teorema da Aplicação Implícita que existe $\delta > 0$ e uma única aplicação $G : (-\delta, \delta) \longrightarrow X$ contínua, tal que $F(G(\lambda), \lambda) = 0$ para todo $\lambda \in (-\delta, \delta)$. Para cada $\lambda \in (-\delta, \delta)$ denote $G(\lambda) = u_\lambda$, e o corolário segue.

■

2.5 O caso $f(u) = u^p + \mu u^q$

Seja Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ e considere o problema

$$\begin{cases} -\Delta u &= u^p + \mu u^q \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &> 0 \quad \text{em} \quad \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.22}$$

onde μ é um parâmetro real, $0 < q < 1 < p < 2^* - 1$, com $2^* = (n+2)/(n-2)$ se $n > 2$ e $2^* = \infty$ se $n = 2$.

O Problema (2.22) foi extensivamente estudado por A. Ambrosetti, H. Brezis e G. Cerami em [1] e, entre outros resultados, obtiveram o seguinte Teorema:

Teorema 2.9 (Ambrosetti-Brezis-Cerami) *Para todo p, q nas condições acima, existe $\Lambda > 0$ tal que para qualquer $\mu \in (0, \Lambda)$, o Problema (2.22) possui duas soluções $u_{1,\mu}, u_{2.\mu}$. Além disso $u_{1,\mu}$ é solução minimal, isto é, se v é outra solução de (2.22) então $u_{1,\mu} \leq v$. Temos ainda que $u_{1,\mu} < u_{2,\mu}$ e $u_{1,\mu}$ é crescente em relação ao parâmetro μ.*

A pergunta natural que surge quando nos deparamos com este teorema, é se existem outras soluções além destas duas. Como uma resposta parcial a esta questão, nesta seção provaremos que para certos domínios e alguns valores de μ, o problema acima possui exatamente duas soluções.

Lema 2.1 *Existe uma constante $C = C(p, n, \mu)$ tal que, para qualquer solução u_μ de (2.22) temos*

$$\|u_\mu\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C.$$

Prova. Primeiramente observemos para qualquer solução do Problema (2.22) vale a estimativa

$$\|u\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq C\|u\|_{C(\overline{\Omega})},$$

onde C depende somente de p, n e μ, e sua demonstração pode ser encontrada em [13], na demonstração do Teorema 6.6. Desta forma, é suficiente provar que $\|u_\mu\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C$. Fixados μ e p, vamos argumentar por contradição supondo que existe uma sequência de soluções u_k e uma sequência de pontos x_k em Ω tal que

$$M_k = \|u_k\|_{C(\overline{\Omega})} = u_k(x_k) \longrightarrow \infty \quad \text{com} \quad n \longrightarrow \infty.$$

Vamos considerar a função

$$v_k(x) = \frac{1}{M_k} u_k\Big(x_k + \frac{x}{M_k^{\frac{p-1}{2}}}\Big)$$

que está definida no conjunto $\Omega_k = M_k^{\frac{p-1}{2}}(\Omega - x_k)$. Por cálculos diretos temos que v_k satisfaz

$$-\Delta v_k = v_k^p + \frac{\mu}{M_k^{p-q}} v_k^q \quad \text{em} \quad \Omega_k. \tag{2.23}$$

Denotemos por D o limite dos domínios Ω_k. Desde que $0 < v_k \leq 1$ e v_k resolve (2.23), pelas estimativas elípticas dos Teoremas 0.10 e 0.12, passando para uma subsequência, v_k converge uniformemente para uma função v sobre cada subconjunto compacto de D.

Conforme podemos encontrar no artigo [12], temos que $D = \mathbb{R}^n$ ou, após rotações e translações, $D = \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$. Além disso, desde que

$$|\frac{\mu}{M_k^{p-q}}| \longrightarrow 0 \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty,$$

concluímos que v satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & = & v^p & \text{em} \quad D \\ v & \geq & 0 & \text{em} \quad D \\ v & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial D \text{ (se } D = \mathbb{R}^n_+), \end{array} \right. \tag{2.24}$$

porém a única solução de (2.24) é $v \equiv 0$, de acordo com o Teorema de Gidas-Spruck, o que nos dá uma contradição, pois $v(0) = \lim_{k\to\infty} v_k(0) = 1$. ■

Observação 11 *Podemos concluir facilmente da demonstração deste lema que a constante C comporta-se bem quando variamos p ou μ (respeitando suas devidas restrições), no sentido de ser limitada.*

No que segue faremos alguns resultados auxiliares que serão úteis para a conclusão do nosso resultado principal.

Lema 2.2 *Seja Ω um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ suave. Suponha que $f(t)$ é uma função contínua tal que $t^{-1}f(t)$ é decrescente para $t > 0$. Sejam $w, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ satisfazendo*

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta v & \leq & f(v) & \textit{em} \quad \Omega \\ v & > & 0 & \textit{em} \quad \Omega \\ v & = & 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{2.25}$$

e

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w & \geq & f(w) & \textit{em} \quad \Omega \\ w & > & 0 & \textit{em} \quad \Omega \\ w & = & 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega. \end{array} \right. \tag{2.26}$$

Então $w \geq v$. Em particular, se u é uma solução de

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(u) & \textit{em} \quad \Omega \\ u & > & 0 & \textit{em} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \textit{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right.$$

então ela é única.

Prova. De (2.25) e (2.26) inferimos que

$$\begin{aligned} -v\Delta w + w\Delta v &\geq f(w)v - f(v)w \\ &= wv\big(\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\big) \end{aligned} \tag{2.27}$$

Seja $\theta(t)$ uma função real, suave e não-decrescente satisfazendo $\theta(t) \equiv 1$ para $t \geq 1$ e $\theta(t) \equiv 0$ para $t \leq 0$. Para cada $\epsilon > 0$ definamos

$$\theta_\epsilon(t) = \theta(\frac{t}{\epsilon}).$$

Com isso, temos que $\theta_\epsilon(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Multiplicando (2.27) por $\theta_\epsilon(v-w)$ e integrando sobre Ω obtemos

$$\int_\Omega \big[-v\Delta w + w\Delta v\big]\theta_\epsilon(v-w)dx \geq \int_\Omega vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big]\theta_\epsilon(v-w)dx \tag{2.28}$$

Denotemos por $I = \displaystyle\int_\Omega \big[-v\Delta w + w\Delta v\big]\theta_\epsilon(v-w)dx$. Usando a Primeira Fórmula de Green, temos

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega \nabla w.\nabla(v\theta_\epsilon(v-w))dx - \int_\Omega \nabla v.\nabla(w\theta_\epsilon(v-w))dx \\ &= \int_\Omega \nabla w.\big[\theta_\epsilon(v-w)\nabla v + v\theta'_\epsilon(v-w)(\nabla v - \nabla w)\big]dx \\ &- \int_\Omega \nabla v.\big[\theta_\epsilon(v-w)\nabla w + w\theta'_\epsilon(w-w)(\nabla v - \nabla w)\big]dx \end{aligned}$$

Agora, efetuando alguns cálculos temos

$$\begin{aligned} I &= \int_\Omega v\theta'_\epsilon(v-w)\nabla w.(\nabla v - \nabla w)dx - \int_\Omega u\theta'_\epsilon(v-w)\nabla v.(\nabla v - \nabla w)dx \\ &= \int_\Omega v\theta'_\epsilon(v-w)(\nabla w - \nabla v).(\nabla v - \nabla w)dx \\ &- \int_\Omega (w-v)\theta'_\epsilon(v-w)\nabla v.(\nabla v - \nabla w)dx \\ &= -\int_\Omega v\theta'_\epsilon(v-w).|\nabla v - \nabla w|^2 dx - \int_\Omega (w-v)\theta'_\epsilon(v-w)\nabla v.(\nabla v - \nabla w)dx \end{aligned}$$

Sendo θ não-decrescente, segue que $\theta'(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente

$$\begin{aligned} I &\leq \int_\Omega (v-w)\theta'_\epsilon(v-w)\nabla v.(\nabla v - \nabla w)dx \\ &= \int_\Omega \nabla v.\nabla(\gamma_\epsilon(v-w))dx \\ &= -\int_\Omega \gamma_\epsilon(v-w)\Delta v dx, \end{aligned}$$

onde $\gamma_\epsilon(t) = \int_0^t s\theta'_\epsilon(s)ds$. Como $\theta'_\epsilon(t) = 0$ quando $t \leq 0$ e $t \geq \epsilon$ temos que $0 \leq \gamma_\epsilon(t) \leq \epsilon$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e por (2.25), temos que $-\Delta v$ é limitado superiormente, portanto, obtemos que

$$\int_\Omega [-v\Delta w + w\Delta v]\theta_\epsilon(v-w)dx \leq C\epsilon,$$

para alguma constante positiva C.
Usando a expressão (2.28), concluímos que

$$\int_\Omega vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big]\theta_\epsilon(v-w)dx \leq \epsilon.$$

Considerando $E = \{x \in \Omega : v(x) > w(x)\}$ e fazendo $\epsilon \longrightarrow 0$, obtemos

$$\int_E vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big]dx \leq 0.$$

Por outro lado, $f(v)/v < f(w)/w$ sobre E. Assim

$$\int_E vw\Big[\frac{f(w)}{w} - \frac{f(v)}{v}\Big] = 0.$$

Esta última igualdade implica que $|E| = 0$. Portanto $v \leq w$ em Ω. A segunda afirmação é um fato imediato da primeira. ■

Proposição 2.1 *Existe uma única solução clássica z do problema*

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta z &=& z^q & em \quad \Omega \\ z &>& 0 & em \quad \Omega \\ z &=& 0 & sobre \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{2.29}$$

onde $0 < q < 1$. Além disso, tal solução é não-degenerada, isto é, o problema linearizado

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\Delta v &=& qz^{q-1}v & em \quad \Omega \\ v &=& 0 & sobre \quad \partial\Omega \end{array}\right. \tag{2.30}$$

admite somente a solução trivial.

Prova. A unicidade segue do Lema 2.2. É bem conhecido que tal solução z é a função que minimiza o funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{q+1}\int_\Omega |u|^{q+1}dx,$$

isto é, $I(z) \leq I(u)$ para toda $u \in H_0^1$, (veja [2]). Como uma consequência, sabendo que I é de classe C^2, temos que

$$I''(z)\phi^2 = \int_\Omega (|\nabla\phi|^2 - qz^{q-1}\phi^2)dx \geq 0 \qquad \forall \phi \in H_0^1. \tag{2.31}$$

Denotando por $L = \Delta + qz^{q-1}$, o operador linearizado associado ao Problema (2.29), concluímos pela definição de λ_1 e por (2.31) que $\lambda_1(L, \Omega) \geq 0$. Para mostrar que a solução z é não-degenerada é suficiente mostrar que $\lambda_1(L, \Omega) > 0$, ou seja, que o princípio do máximo é válido para L em Ω. Suponhamos por contradição que $\lambda_1(L, \Omega) = 0$. Então existe $\phi \in H_0^1(\Omega)$, $\phi > 0$ em Ω, tal que

$$\begin{cases} L\phi = \Delta\phi + qz^{q-1}\phi = 0 & \text{em} \quad \Omega \\ \phi = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

e assim

$$\int_\Omega \nabla\phi.\nabla z dx = q \int_\Omega z^q \phi dx.$$

Por outro lado, usando (2.29), temos

$$\int_\Omega \nabla\phi.\nabla dxz = \int_\Omega z^q \phi dx.$$

Fazendo a diferença destas duas últimas igualdades segue que

$$0 < (1 - q) \int_\Omega z^q \phi dx = 0,$$

o que é um absurdo. ∎

Proposição 2.2 *Seja u_μ uma solução de* (2.22)*, para $\mu \in (0, \Lambda)$ e considere*

$$\beta := \lambda_1(\Delta + qz^{q-1}, \Omega) = \inf_{\substack{v \in H_0^1(\Omega) \\ \|v\|_{H_0^1} = 1}} \Big(\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - q \int_\Omega |z|^{q-1} v^2 dx\Big) > 0,$$

onde z é a única solução de (2.29)*. Se*

$$\|u_\mu\|_{L^\infty(\Omega)} < \Big(\frac{\beta}{p}\Big)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{2.32}$$

então u_μ é a solução mínimal de (2.22)*.*

Prova. Seja $A > 0$ tal que $pA^{p-1} < \beta$. Vamos mostrar que para todo $\mu \in (0, \Lambda)$, o Problema (2.22) tem no máximo uma solução u satisfazendo

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A.$$

Suponhamos por contradição que (2.22), com μ e p fixados, possui uma segunda solução w tal que

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq A.$$

Sendo u_μ a solução minimal de (2.22), podemos escrever $w = u_\mu + v$, onde $v \geq 0$. Tomando $\zeta(x) = \mu^{\frac{1}{1-q}} z(x)$ obtemos

$$-\Delta\zeta = -\mu^{\frac{1}{1-q}} \Delta z = \mu^{\frac{1}{1-q}} z^q = \mu\zeta^q.$$

Além disso, temos também
$$-\Delta u_\mu \geq \mu u_\mu^q,$$
e dessa forma, usando o Lema 2.2 com $f(t) = \mu t^q$, $v = \zeta$, e $w = u_\mu$, segue que
$$u_\mu \geq \mu^{\frac{1}{1-q}} z \tag{2.33}$$
Desde que $w = u_\mu + v$ é uma solução de (2.22) temos
$$-\Delta(u_\mu + v) = \mu(u_\mu + v)^q + (u_\mu + v)^p.$$
Pela concavidade da função $t \mapsto t^q$,
$$\mu(u_\mu + v)^q \leq \mu u_\mu^q + \mu q u_\mu^{q-1} v,$$
e assim
$$-\Delta v \leq \mu q u_\mu^{q-1} v + (u_\mu + v)^p - u_\mu^p. \tag{2.34}$$
Podemos deduzir facilmente de (2.33) que
$$u_\mu^{q-1} \geq \mu^{-1} z^{q-1} \tag{2.35}$$
De (2.34) e (2.35) concluímos que
$$-\Delta v \leq q z^{q-1} v + (u_\mu + v)^p - u_\mu^p.$$
Por outro lado usando a convexidade de $t \mapsto t^p$, e a desigualdade $w = u_\mu + v \leq A$, temos
$$(u_\mu + v)^p - u_\mu^p \leq p A^{p-1} v,$$
e assim
$$-\Delta v - q z^{q-1} v \leq p A^{p-1} v.$$
Multiplicando esta desigualdade por v, integrando em sobre Ω obtemos
$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - q \int_\Omega |z|^{q-1} v^2 dx \leq p A^{p-1} \int_\Omega v^2 dx.$$
Sendo $\beta > 0$, é imediato que
$$\int_\Omega |\nabla v|^2 dx - q \int_\Omega |z|^{q-1} v^2 dx \geq \beta \int_\Omega v^2 dx,$$
e portanto concluímos que
$$\beta \int_\Omega v^2 dx \leq p A^{p-1} \int_\Omega v^2 dx.$$
Desde que $pA^{p-1} < \beta$ segue que $v = 0$. ■

Para tratar do próximo resultado, vamos considerar o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u &=& u^p & \text{em} & \Omega \\ u &>& 0 & \text{em} & \Omega \\ u &=& 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.36}$$

com $1 < p < 2^* - 1$. Provaremos a seguir que, para domínios onde o Problema (2.36) possui uma única solução e esta solução é não-degenerada, o Problema (2.22) possui exatamente duas soluções, para μ próximo de zero.

Teorema 2.10 *Suponhamos que Ω é um domínio regular do $\mathbb{R}^n$, onde o Problema* (2.36) *admite somente uma solução que é também não-degenerada. Então existe $\mu^* \in (0, \Lambda)$ tal que o Problema* (2.22) *tem exatamente duas soluções para qualquer $\mu \in (0, \mu^*)$.*

Prova. Para qualquer $\mu \in (0, \Lambda)$ denotemos por $u_{1,\mu}$ a solução minimal de (2.22) e por $u_{2,\mu}$ a segunda solução, cuja existência é garantida pelo Teorema (2.9). Argumentando por contradição, vamos supor que existam sequências $\mu_k \searrow 0$ e $u_k \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ tal que

$$\begin{cases} -\Delta u_k &=& u_k^p + \mu_k u_k^q & \text{em} & \Omega \\ u_k &>& 0 & \text{em} & \Omega \\ u_k &=& 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.37}$$

com u_k distinta de u_{1,μ_k} e u_{2,μ_k}. Do Lema 2.1 e Observação 11 deduzimos que existe uma constante $C > 0$, que não depende de μ, tal que

$$\|u_k\|_{H_0^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega |\nabla u_k|^2 dx \right)^{1/2} \leq C, \tag{2.38}$$

o que mostra que a sequência u_k é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Sendo $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, passando para uma subsequência, temos que u_k converge fracamente em $H_0^1(\Omega)$ para uma função $\phi \geq 0$ que é solução fraca do problema

$$\begin{cases} -\Delta \phi &=& \phi^p & \text{em} & \Omega \\ \phi &\geq& 0 & \text{em} & \Omega \\ \phi &=& 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.39}$$

Por regularidade concluímos que $\phi \in C^2(\Omega)$ e pelo princípio do máximo forte e as hipóteses sobre Ω temos duas possibilidades, a saber:

(i) $\phi \equiv 0$ em Ω;

(ii) $\phi = \bar{u} > 0$, onde $\bar{u}$ é a única solução não-degenerada de (2.36).

No primeiro caso temos que $u_k = u_{1,\mu_k}$, para k suficientemente grande. De fato, pelo Lema (2.1) e o comentário posterior temos que $u_k \to 0$ uniformemente em Ω e assim, para k suficientemente grande, u_k satisfaz (2.32), o que nos permite concluir com ajuda da Proposição (2.2) que u_k coincide com u_{1,μ_k}, contrariando a hipótese.

Vamos agora considerar o caso **(ii)**. Inicialmente afirmamos que u_{2,μ_k} converge fracamente para $\bar{u}$ em $H_0^1(\Omega)$. De fato, se isto fosse falso, usando novamente o Lema (2.1) e argumentando como para u_k, temos que $u_{2,\mu_k} \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, daí, como anteriormente, $u_{1,\mu_k} = u_{2,\mu_k}$, o que é um absurdo. Definamos

$$w_k = u_k - u_{2,\mu_k} \tag{2.40}$$

e recordemos que estamos assumindo que w_k não é identicamente nula. Usando o Teorema Fundamental do Cálculo vemos que w_k satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta w_k &= \xi_k w_k \quad \text{em} \quad \Omega \\ \quad w_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.41}$$

com

$$\xi_k(x) = \int_0^1 [p(tu_k(x) + (1-t)u_{2,\mu_k}(x))^{p-1} + \mu_k q(tu_k(x) + (1-t)u_{2,\mu_k}(x))^{q-1}]dt.$$

Definindo $\bar{w}_k = w_k/\|w_k\|_{H_0^1(\Omega)}$, temos que

$$\begin{cases} -\Delta \bar{w}_k &= \xi_k \bar{w}_k \quad \text{em} \quad \Omega, \\ \quad \bar{w}_k &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.42}$$

Sendo $\|\bar{w}_k\|_{H_0^1(\Omega)} = 1$ e $H_0^1(\Omega)$ reflexivo, passando para uma subsequência, temos que $\bar{w}_k \rightharpoonup \bar{w}$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, como $H_0^1(\Omega)$ esta imerso compactamente em $L^2(\Omega)$, $\bar{w}_k \to \bar{w}$ em $L^2(\Omega)$. Precisamos provar que $\bar{w}$ não é identicamente nula, mas antes observemos que

$$\int_\Omega \Big(\int_0^1 q[tu_k(x) + (1-t)u_{2,\mu_k}(x)]^{q-1}dt\Big)\bar{w}_k^2(x)dx \le C \qquad \forall\ k \in \mathbb{N}. \tag{2.43}$$

De fato, do Lema 2.1 e sabendo que $C^2(\overline{\Omega})$ esta imerso compactamente em $C^1(\overline{\Omega})$, passando para uma subsequência, temos que

$$u_k, u_{2,\mu_k} \longrightarrow \bar{u} \qquad \text{em} \qquad C^1(\overline{\Omega}). \tag{2.44}$$

Deste fato decorre que

$$\int_0^1 p(tu_k + (1-t)u_{2,\mu_k})dt \longrightarrow p\bar{u}^{p-1}$$

uniformemente. Além disso, pelo Lema de Hopf temos que $\partial\bar{u}/\partial\nu < 0$ sobre $\partial\Omega$. Pela continuidade de $\bar{u}$ em $\overline{\Omega}$ e compacidade de $\partial\Omega$ temos que $\partial\bar{u}/\partial\nu < 0$ em uma vizinhança de $\partial\Omega$. De (2.44) vemos que

$$\frac{\partial u_k}{\partial\nu}, \frac{\partial u_{2,\mu_k}}{\partial\nu} < \frac{1}{2}\frac{\partial\bar{u}}{\partial\nu}, \tag{2.45}$$

para k suficientemente grande e em uma vizinhança de $\partial\Omega$. Logo, é imediato que

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(tu_k + (1-t)u_{2,\mu_k}) < \frac{1}{2}\frac{\partial \bar{u}}{\partial\nu}, \tag{2.46}$$

para todo $t \in [0,1]$. Definamos a função auxiliar

$$h(s) = tu_k(sx_0 + (1-s)x) + (1-t)u_{2,\mu_k}(sx_0 + (1-s)x) - \frac{1}{2}\bar{u}(sx_0 + (1-s)x),$$

com $s \in [0,1]$ e x em uma vizinhança de $\partial\Omega$. Por (2.46) temos que $h'(s) < 0$ para todo $s \in [0,1]$, ou seja, h é decrescente, daí

$$h(0) > h(1).$$

Consequentemente

$$tu_k + (1-t)u_{2,\mu_k} > \frac{1}{2}\bar{u}, \tag{2.47}$$

para k suficientemente grande e em uma vizinhança de $\partial\Omega$. É claro que esta desigualdade (2.47) vale para todo compacto em Ω, logo é válida em todo Ω para k suficientemente grande.

Afirmamos que $\bar{u}(x) \geq Cd(x, \partial\Omega)$ para todo $x \in \Omega$, onde $d(x, \partial\Omega)$ é a distância entre x e $\partial\Omega$ e a constante C não depende de x. De fato, pelo Lema de Hopf temos que $\partial\bar{u}/\partial\eta > 0$ sobre $\partial\Omega$, onde η denota a normal unitária interior. Por continuidade e compacidade temos que $\partial\bar{u}/\partial\eta \geq C > 0$ em uma vizinhança $\Omega_\epsilon \subset \Omega$ tal que $\partial\Omega \subset \partial\Omega_\epsilon$. Tome $x \in \Omega_\epsilon$ e seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $d(x, \partial\Omega) = |x - x_0|$. Dessa forma, obtemos

$$\bar{u}(x) = \frac{\partial\bar{u}}{\partial\eta}(x)d(x, \partial\Omega) \geq Cd(x, \partial\Omega).$$

Como $\bar{u} \geq C_1 > 0$ em $\Omega \setminus \Omega_\epsilon$, concluímos a afirmação. Agora, usando este fato que acabamos de provar, a desigualdade (2.47) e as desigualdades de Hardy e Cauchy, temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega\int_0^1 q[tu_k + (1-t)u_{2,\mu_k}]^{q-1}\bar{w}_k^2 dtdx &= \int_\Omega\int_0^1 q\frac{[tu_k + (1-t)u_{2,\mu_k}]^q}{tu_k + (1-t)u_{2,\mu_k}}\bar{w}_k^2(x)dtdx \\
&\leq 2q\|u_k + u_{2,\mu_k}\|^q_{L^\infty(\Omega)}\int_\Omega \frac{\bar{w}_k^2}{\bar{u}}dx \\
&\leq C\Big(\int_\Omega \bar{w}_k^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \frac{\bar{w}_k^2}{\bar{u}^2}dx\Big)^{1/2} \\
&\leq C\Big(\int_\Omega \bar{w}_k^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega \frac{\bar{w}_k^2}{d^2(x,\partial\Omega)}dx\Big)^{1/2} \\
&\leq C\Big(\int_\Omega \bar{w}_k^2 dx\Big)^{1/2}\Big(\int_\Omega |\nabla\bar{w}_k|^2 dx\Big)^{1/2} \leq C
\end{aligned}$$

e portanto (2.43) segue. Estes cálculos nos permitem concluir a convergência uniforme

$$\xi_k \longrightarrow p\bar{u}^{p-1}.$$

Consequentemente,

$$1 = \int_\Omega |\nabla \bar{w}_k|^2 dx = \int_\Omega \xi_k \bar{w}_k^2 dx = p\int_\Omega \bar{u}^{p-1}\bar{w}^2 + o(1) \quad \text{quando} \quad k \longrightarrow \infty,$$

donde segue que $\bar{w}$ não é identicamente nula. Agora, usando (2.42), deduzimos que para toda função $\phi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla \bar{w}_k . \nabla \phi = \int_\Omega \xi_k \bar{w}_k \phi dx$$

e passando o limite, obtemos

$$\int_\Omega \nabla \bar{w} . \nabla \phi = \int_\Omega p\bar{u}^{p-1}\bar{w}\phi dx,$$

ou seja, $\bar{w}$ satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{rclcc} -\Delta \bar{w} & = & p\bar{u}^{p-1}\bar{w} & \text{em} & \Omega \\ \bar{w} & \not\equiv & 0 & \text{em} & \Omega \\ \bar{w} & = & 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{array} \right.$$

como uma solução fraca. Por regularidade concluímos que $\bar{w}$ é de fato solução clássica. Mas isso contradiz o fato de $\bar{u}$ ser não-degenerada. Portanto o teorema é verdadeiro. ■

Corolário 2.4 *Se Ω é uma bola em $\mathbb{R}^n$ ou Ω é um domínio limitado suave em $\mathbb{R}^2$, convexo nas direções dos eixos x_1 e x_2, e simétrico em relação aos hiperplanos $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 = 0\}$ e $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}$, então existe $\mu* \in (0, \Lambda)$ tal que o Problema* (2.22) *possui exatamente duas soluções para todo $\mu \in (0, \mu*)$.*

Prova. Segue do Teorema 2.5, e o Teorema 2.10. ■

Capítulo 3

Simetria para Soluções de Equações Elípticas Semi-lineares com não-linearidades Convexas

3.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos propriedades de simetria para soluções clássicas de problemas elípticos do tipo

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u = g(x) & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é um domínio simétrico limitado em $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, e $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e de classe C^1 em relação a segunda variável, g é contínua e f e g possuem alguma simetria em x. Os resultados deste capítulo são devidos a Pacella e foram publicados originalmente em [16].

A ferramenta clássica para se estudar esta questão é o método dos planos móveis, usada inicialmente por Alexandrov e Serrin. Esse método aplica-se muito bem quando $g \equiv 0$, $u > 0$ em Ω e f possui alguma monotonicidade em relação a x. De fato, sobre estas hipóteses (veja Teorema 0.24), o método dos planos móveis foi usado com sucesso por Gidas, Ni e Nirenberg para provar, no famoso artigo [11], a simetria de soluções de (3.1) quando o domínio Ω é simétrico em relação a um hiperplano T_0 e convexo na direção do vetor ν_0, ortogonal a T_0.

Contudo, quando o domínio não é convexo na direção ν_0 ou alguma das outras hipóteses não se verificam, em particular, se f não tem a mesma monotonicidade em x, o método dos planos móveis não pode ser aplicado para obter a simetria das soluções. De fato, se alguma dessas condições falham, existem exemplos de não-linearidades que nos dão soluções não-simétricas de (3.1), tal como é o caso em que Ω é um anel e f é uma não-linearidade quase crítica (veja [6]) ou quando Ω é uma bola e $f(x,u) = |x|^\alpha u^p$, $\alpha > 0$, $p > 1$ (veja [18]).

Apesar disto, em algumas situações ou para uma certa classe de soluções, é natural esperar que tais soluções herdem alguma de todas as simetrias do domínio, mesmo se Ω não é convexo em qualquer direção, u mude de sinal e f não tenha monotonicidade em relação a x.

Usaremos uma nova idéia para estudar a simetria de soluções de (3.1) que se aplica eficientemente quando $f(x, s)$ é convexa na variável s. A idéia é olhar para o sinal do primeiro autovalor do operador linearizado, em subdomínios de Ω descritos a seguir, buscando condições em que é possível aplicar a Proposição 3.1.

Neste capítulo assumiremos que a envoltória convexa de Ω contém a origem e que Ω é simétrico em relação ao hiperplano $T_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. Além disso, denotamos por Ω^- e Ω^+ os subconjuntos de Ω que estão do lado esquerdo e direito de T_0, respectivamente, isto é,

$$\Omega^- = \{x \in \Omega : x_1 < 0\} \qquad \text{e} \qquad \Omega^+ = \{x \in \Omega : x_1 > 0\}.$$

Dada uma solução u de (3.1), associamos o operador linearizado em u, isto é $L = \Delta + f_u(x, u)$. O índice de Morse da solução u é definido como o número de autovalores negativos do operador linearizado L, sobre a condição de Dirichlet na fronteira. Como no Capítulo 2, vamos dizer que uma solução u é não-degenerada se zero não é um autovalor para L.

Nossos resultados de simetria estão baseados na seguinte proposição:

Proposição 3.1 *Se $f(x, s)$ e $g(x)$ são funções simétricas em relação a x_1, f é estritamente convexa em s, $\lambda_1(L, \Omega^-)$ e $\lambda_1(L, \Omega^+)$ são ambos não-negativos, então u é simétrica em relação a x_1, isto é, $u(x_1, x_2, ..., x_n) = u(-x_1, x_2, ..., x_n)$. O mesmo resultado é válido se f é somente convexa, mas $\lambda_1(L, \Omega^-)$ e $\lambda_1(L, \Omega^+)$ são ambos positivos.*

Prova. Denotemos por v^- e v^+ as funções reflexões de u nos subdomínios Ω^- e Ω^+, mais precisamente:

$$v^-(x) = u(-x_1, x_2, ..., x_n), \quad x \in \Omega^-,$$

$$v^+(x) = u(-x_1, x_2, ..., x_n), \quad x \in \Omega^+.$$

Primeiramente vamos assumir que f é estritamente convexa. Neste caso, temos:

$$f(x, v^-(x)) - f(x, u(x)) \geq f_u(x, u(x))(v^-(x) - u(x)) \quad \text{em} \quad \Omega^-,$$

$$f(x, v^+(x)) - f(x, u(x)) \geq f_u(x, u(x))(v^+(x) - u(x)) \quad \text{em} \quad \Omega^+,$$

e as desigualdades acima são estritas sempre que $v^-(x) \neq u(x)$ ou $v^+(x) \neq u(x)$. Assim, por (3.1), usando a simetria de f e g na variável x_1 e considerando as funções $w^- = v^- - u$ e $w^+ = v^+ - u$, temos

$$-\Delta w^- - f_u(x, u)w^- \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega^-, \tag{3.2}$$

$$-\Delta w^+ - f_u(x, u)w^+ \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega^+, \tag{3.3}$$

com a desigualdade estrita sempre que $w^-(x) \neq 0$ ou $w^+ \neq 0$, e

$$w^- = 0 \text{ (resp. } w^+ = 0) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega^- (\text{resp. } \partial\Omega^+). \tag{3.4}$$

Afirmamos que se w^- e w^+ são ambos não-negativos nos respectivos domínios Ω^- e Ω^+, então $w^- \equiv w^+ \equiv 0$, e assim obtemos que u é simétrica em relação a x_1. De fato, dado $x = (x_1, ..., x_n) \in \Omega^-$, temos que $x^- = (-x_1, ..., x_n) \in \Omega^+$, daí

$$0 \leq w^-(x) = u(x^-) - u(x) = -w^+(x^-) \leq 0,$$

mostrando dessa forma que $w^-(x) = w^+(x^-) = 0$ para todo $x \in \Omega^-$. Analogamente $w^+(x) = w^-(x^-) = 0$ para todo $x \in \Omega^+$, comprovando a afirmação acima.

Vamos provar que esta é a única possibilidade que ocorre. Suponhamos por contradição que uma entre as duas funções, digamos w^+ é negativa em algum ponto em Ω^+. Então, considerando uma componente conexa D de Ω^+, onde $w^+ < 0$, multiplicando (3.3) por w^+, integrando sobre D e usando (3.4) e a convexidade estrita de f, obtemos

$$\int_D |\nabla w^+|^2 dx - \int_D f_u(x, u)(w^+)^2 dx < 0, \tag{3.5}$$

donde segue, pela definição de λ_1, que $\lambda_1(L, D) < 0$. Por outro lado, temos que $\lambda_1(L, \Omega^+) \leq \lambda_1(L, D) < 0$, contrariando nossa hipótese. Portanto u é simétrica.

Agora suponhamos que f é somente convexa, mas $\lambda_1(L, \Omega^-) > 0$ e $\lambda_1(L, \Omega^+) > 0$. Dessa forma, o princípio do máximo refinado vale em Ω^- e Ω^+. Pelas equações (3.2)-(3.4), obtemos imediatamente pelo princípio do máximo que $w^- \geq 0$ e $w^+ \geq 0$ o que implica na simetria de u como vimos acima. ∎

Em particular, se f é linear em u, obtemos:

Corolário 3.1 *Seja A um operador linear do tipo $A = \Delta + c(x)$, com $c \in C(\overline{\Omega})$, Ω como no teorema anterior e c simétrica na variável x_1. Então se $\lambda_1(A, \Omega^-) \geq 0$, toda autofunção de A em Ω sobre a condição de Dirichlet homogênea na fronteira, correspondendo a um autovalor negativo μ de A é simétrica em relação a x_1. A mesma conclusão é válida se assumirmos $\lambda_1(A, \Omega^-) > 0$ e $\mu \leq 0$.*

Prova. Se considerarmos uma autofunção φ relativa ao autovalor μ, temos que ela resolve a equação

$$-\Delta\varphi = f(x, \varphi) = c(x)\varphi + \mu\varphi$$

e o operador linearizado em φ é

$$L = \Delta\varphi + c(x) + \mu\varphi.$$

Em ambas as hipóteses, temos que $\lambda_1(L, \Omega^-) > 0$ e, desde que $c(x)$ é simétrico em relação a x_1, também temos que $\lambda_1(L, \Omega^+) > 0$. Portanto, pela Proposição 3.1, obtemos a simetria de φ. ∎

No que segue, apresentaremos um exemplo em que f é somente convexa, mas não estritamente convexa e $\lambda_1(L,\Omega^-)$, $\lambda_1(L,\Omega^+)$ são ambos iguais a zero, e uma solução u de (3.1) que não é simétrica.

Exemplo: Seja Ω como na Proposição 3.1 e denotemos por μ_1^- o primeiro autovalor do operador laplaciano em Ω^- com a condição de Dirichlet homogênea na fronteira e φ_1 a autofunção associada. Consideremos a função

$$\tilde{\varphi}_1 = \begin{cases} \varphi(x) & \text{se} \quad x \in \Omega^-, \\ -\varphi(-x_1, x_2, \ldots, x_n) & \text{se} \quad x \in \Omega^+, \end{cases}$$

que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta\tilde{\varphi}_1 &= \mu_1^-\tilde{\varphi}_1 & \text{em} & \Omega \\ \tilde{\varphi}_1 &= 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \end{cases}$$

Com uma simples verificação, vemos que o primeiro autovalor do operador linearizado em $\tilde{\varphi}_1$ é zero em Ω^-, ou Ω^+, todavia $\tilde{\varphi}_1$ não é simétrico em relação a x_1. $\diamond$

Agora vamos descrever algumas situações em que é fácil provar a não-negatividade dos autovalores $\lambda_1(L,\Omega^-)$ e $\lambda_1(L,\Omega^+)$, para obter a simetria da solução. O primeiro caso que queremos tratar é quando a solução u de (3.1) é semi-estável, isto é, $\lambda_1(L,\Omega) \geq 0$. Neste caso, usando a monotonicidade do primeiro autovalor, temos que $\lambda_1(L,\Omega^-) > 0$ e $\lambda_1(L,\Omega^+) > 0$. Dessa forma, se f é convexa, temos que u é simétrica, em particular, se Ω é um anel ou uma bola, então u é radialmente simétrica.

Outra aplicação da Proposição 3.1 é obtida considerando domínios Ω que são também convexos na direção x_1 e supondo $g \equiv 0$, u positiva em Ω e f crescente na variável x_1 em Ω^-. Sobre estas hipóteses e mantendo as mesmas notações da Proposição 3.1, temos:

Proposição 3.2 *Se $f(x,s)$ é convexa em relação a segunda variável e u é uma solução positiva de* (3.1)*, então $\lambda_1(L,\Omega^-)$ e $\lambda_1(L,\Omega^+)$ são ambos não-negativos. Em particular se f é estritamente convexa em relação a segunda variável, então u é simétrica em relação a x_1.*

Prova. Vamos provar que $\lambda_1(L,\Omega^-)$ é não-negativo. Argumentando por contradição, vamos assumir que $\lambda_1(L,\Omega^-) < 0$. Então pela continuidade dos autovalores em relação aos domínios temos que para algum $\mu < 0$, no conjunto $\Omega_\mu^- = \{x \in \Omega : x_1 < \mu\} \subset \Omega^-$ o primeiro autovalor $\lambda_1(L,\Omega_\mu^-)$ deve ser zero, pois sabemos que para domínios com medida suficientemente pequena, o primeiro primeiro autovalor é positivo.

Desde que Ω é convexo na direção x_1, podemos considerar a função

$$w_\mu^-(x) = u(2\mu - x_1, x_2, ..., x_n) - u(x) \qquad \text{em} \qquad \Omega_\mu^-,$$

que satisfaz

$$w_\mu^- = 0 \qquad \text{sobre} \qquad \partial\Omega_\mu^- \setminus \partial\Omega, \qquad w_\mu^- > 0 \qquad \text{sobre} \qquad \partial\Omega_\mu^- \cap \partial\Omega \tag{3.6}$$

porque $\mu < 0$, $u > 0$ em Ω e $u = 0$ sobre $\partial\Omega$.
Pela convexidade de f em relação a u e a monotonicidade de f em x_1, obtemos, (como em (3.2))

$$-\Delta w_\mu^- - f_u(x,u)w_\mu^- \geq 0 \qquad \text{em} \qquad \Omega_\mu^-. \tag{3.7}$$

Afirmamos que w_μ^- deve ser negativa em alguma parte de Ω_μ^-. De fato, se $w_\mu^- \geq 0$ em Ω_μ^-, pelo princípio do máximo forte e (3.6), deduzimos que $w_\mu^- > 0$ em Ω_μ^- e isto, juntamente com (3.6) e (3.7) (veja a condição (G) do Capítulo 2) implicam que o príncipio do máximo vale para L em Ω_μ^-, ou equivalentemente, $\lambda_1(L, \Omega_\mu^-) > 0$, o que nos dá uma contradição.

Consideremos agora uma componente conexa D em Ω_μ^- onde $w_\mu^- < 0$, multiplicando (3.7) por w_μ^- e integrando, obtemos

$$\int_D |\nabla w_\mu^-|^2 dx - \int_D f_u(x,u)(w_\mu^-)^2 dx \leq 0 \tag{3.8}$$

o que implica em $\lambda_1(L, D) \leq 0$. Desde que, por (3.6), D é um subconjunto próprio de Ω_μ^-, concluímos que $\lambda_1(L, \Omega_\mu^-) < \lambda_1(L, D) \leq 0$, contradizendo a nulidade de $\lambda_1(L, \Omega_\mu^-)$. Portanto não podemos ter $\lambda_1(L, \Omega^-) < 0$. De forma inteiramente análoga podemos provar que $\lambda_1(L, \Omega^+)$ é também não-negativo. ■

Observação 12 *No artigo clássico de Gidas, Ni e Nirenberg (veja [11]), usando o método dos planos móveis, foi provado que $\partial u/\partial x_1 > 0$ em Ω^-. Além disso, se $\partial\Omega$ é suave e $f(0) \geq 0$, pelo Lema de Hopf temos que $\partial u/\partial x_1$ é também positiva sobre $\partial\Omega^- \cap \partial\Omega$. Então, se f não depende de x, isto é, se $f(x,u) = f(u)$, desde que a função $\partial u/\partial x_1$ é uma solução da equação linearizada, ou seja,*

$$L(\frac{\partial u}{\partial x_1}) = 0 \qquad em \qquad \Omega^-,$$

segue que $\lambda_1(L, \Omega^-) > 0$ e o mesmo é válido para $\lambda_1(L, \Omega^+)$. Por esta razão, a Proposição 3.1 *pode ser vista como uma generalização deste resultado quando $\partial\Omega$ não é suave ou $f(0)$ é não positiva. É interessante notar que na Proposição* 3.2, *não-negatividade do primeiro autovalor em Ω^- ou Ω^+ foi deduzida sem o conhecimento a priori de que a solução era estritamente monótona na direção x_1.*

3.2 Simetria axial de soluções de índice um.

Nesta seção iremos considerar o problema semi-linear

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(|x|, u) \quad \text{em} \quad A \\ u &= 0 \quad \text{sobre} \quad \partial A, \end{cases} \tag{3.9}$$

onde A é uma anel ou uma bola centrada na origem O do $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, e f tem a mesma regularidade como em (3.1).

Seja u uma solução de (3.9) que pode ser positiva ou mudar de sinal e seja P um ponto de máximo contido no interior de A, devido a condição da fronteira.

Denotemos por r_p o eixo $\overrightarrow{OP}$ que passa através da origem e do ponto P, por T qualquer hiperplano de dimensão $n-1$, passando pela origem e por ν_T o vetor normal a T, tendo a direção do semi-espaço que contém P, neste caso T não passa através do eixo r_p.

Nosso principal resultado é o seguinte.

Teorema 3.1 *Seja $f(|x|, s)$ estritamente convexo em s e u uma solução de* (3.9) *de índice um. Então,*

(i) *u é axialmente simétrica em relação ao eixo r_p, isto é, denotando $R_p(x) \in \Omega$ o ponto refletido de $x \in \Omega$ através do eixo r_p, temos que $u(R_p(x)) = u(x)$,*

(ii) *Se A é uma bola e P é a origem então u é radialmente simétrico,*

(iii) *Se u não é radialmente simétrica então ela nunca é simétrica em relação a qualquer hiperplano T que não passa através de r_p,*

(iv) *Se u não é radialmente simétrica então todos os pontos críticos de u pertencem ao eixo de simetria r_p, em particular, todos os pontos de máximo estão sobre o semi-eixo para o qual P pertence e*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_T}(x) > 0 \quad \forall x \in T \cap A \tag{3.10}$$

para todo hiperplano T que não passa através de r_p.

Prova. **(i)** Vamos denotar por T_p qualquer hiperplano passando através de r_p. Obviamente, T_p divide A em duas regiões abertas disjuntas A_p^- e A_p^+, isto é, $A_p^- \cup A_p^+ \cup (T_p \cap A) = A$. Para mostrar a simetria de u em relação a T_p, vamos usar a Proposição 3.1. Para isto, precisamos provar que $\lambda_1(L, A_p^-)$ e $\lambda_1(L, A_p^+)$, os primeiros autovalores do operador linearizado em u no subdomínios A_p^- e A_p^+, respectivamente, com a condição de Dirichlet homogenêa na fronteira, são ambos não-negativos.

Argumentando por contradição, podemos assumir que um desses dois números, digamos $\lambda_1(L, A_p^-)$, é negativo. Consideremos o funcional

$$J(u) = \int_A [|\nabla u|^2 - f_u(|x|, u)u^2]dx$$

e denotemos por φ_1, φ_1^+ e φ_1^- as autofunções positivas associadas respectivamente a $\lambda_1(L, A)$, $\lambda_1(L, A_p^+)$ e $\lambda_1(L, A_p^-)$, todas unitárias em L^2. Sabendo que a função u tem índice de Morse igual a um, concluímos que $\lambda_2(L, A) \geq 0$. Dessa forma, pela caracterização variacional de λ_2, obtemos que $J(u) \geq 0$ para toda função u tal que $(u, \varphi_1) = 0$, onde

$$(u, \varphi_1) = \int_A \nabla u . \nabla \varphi_1.$$

Em particular, tomando

$$u_0 = (\varphi_1^-, \varphi_1)\varphi_1^+ - (\varphi_1^+, \varphi_1)\varphi^-,$$

temos que $(u_0, \varphi_1) = 0$. Por cálculos diretos, obtemos:

$$J(u_0) = (\varphi_1^-, \varphi_1)^2 \lambda_1(L, A_p^+) + (\varphi_1^+, \varphi_1)^2 \lambda_1(L, A_p^-) \geq 0.$$

Esta última desigualdade implica que $\lambda_1(L, A_p^+) > 0$.

Logo em A_p^+, o princípio do máximo é válido para o operador $L = \Delta + f_u(|x|, u)$. Então, considerando em A_p^+ a função $w_p^+ = v_p^+ - u$, onde v_p^+ é a reflexão de u em relação a T_p e usando a convexidade de f, temos, como em (3.3),

$$-\Delta w_p^+ - f_u(|x|, u) w_p^+ \geq 0 \quad \text{em} \quad A_p^+. \tag{3.11}$$

Desde que $w_p^+ \equiv 0$ sobre ∂A_p^+, e de (3.11) obtemos, pelo princípio do máximo, que $w_p^+ \geq 0$ em A_p^-. Assim, pelo princípio do máximo forte, ou w_p^+ é identicamente nula ou $w_p^+ > 0$ em A_p^+. Se ocorresse o primeiro caso teríamos que a função u seria simétrica em relação a T_p e assim, os autovalores $\lambda_1(L, A_p^-)$ e $\lambda_1(L, A_p^+)$. Mas isto não é possível, desde que estes autovalores possuem sinais diferentes. Portanto a única possibilidade é $w_p^+ > 0$ em A_p^+. Então, pelo Lema de Hopf obtemos que $\partial w_p^+/\partial \nu < 0$ sobre $T_p \cap A$, onde ν é a normal exterior a ∂A_p^+ e consequentemente,

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial w_p^+}{\partial \nu} > 0 \quad T_p \cap A,$$

o que é impossível, pois o ponto máximo P pertence a $T_p \cap A$. Esta contradição mostra que $\lambda_1(L, A_p^+) \geq 0$ e com argumento análogo, o mesmo é válido para $\lambda_1(L, A_p^+)$.

(ii) Segue imediatamente de **(i)**, desde que a origem pertence a todo hiperplano simétrico.

(iii) Argumentando ainda por contradição vamos supor que u é simétrica em relação a um certo hiperplano T_1 que não passa através de r_p. Desde que u não é radialmente simétrica, por **(ii)** P não é a origem e assim $P \notin T_1$, digamos, $P \in A_1^-$. Então, por simetria, existe $P' \in A_1^+$ tal que $u(P') = u(P) = \max_{\overline{A}} u$.

Agora, vamos considerar um hiperplano $\tilde{T}$ "próximo"a T_1, mais precisamente, denotando por ν_1 a normal unitária a T_1 que aponta na direção do semi-espaço que contém P, consideramos sobre a esfera unitária uma vizinhança $I(\nu_1)$ de ν_1. Dessa forma, para cada $\tilde{\nu} \in I(v_1)$ associamos o hiperplano $\tilde{T}$ ortogonal a $\tilde{\nu}$ e que passa pela origem. Diremos que $\tilde{T}$ está próximo de T_1 quando $\tilde{\nu}$ esta próximo de ν_1.

Se $I(\nu_1)$ é suficientemente pequeno, ainda teremos P e P' em diferentes conjuntos, em relação a $\tilde{T} : P \in \tilde{A}^-$ e $P' \in \tilde{A}^+$, para todo $\tilde{\nu} \in I(\nu_1)$.

Afirmamos que u é simétrico em relação a $\tilde{T}$. Para provar isto, usando ainda a Proposição 3.1 devemos mostrar que $\lambda_1(L, \tilde{A}^-)$ e $\lambda_1(L, \tilde{A}^+)$ são ambos não-negativos.

Se $\lambda_1(L, \tilde{A}^-) < 0$, então, desde que a solução tem índice um, deduzimos como em **(i)** que $\lambda_1(L, \tilde{A}^+) > 0$. Então, argumentando exatamente como na prova de **(i)**, temos que a função $\tilde{w}^+ = \tilde{v}^+ - u$, onde $\tilde{v}^+$ é a função refletida de u em $\tilde{A}^+$, é positiva em $\tilde{A}^+$, em particular $u(P') < \tilde{v}^+(P')$, o que não é possível desde que $u(P')$ é o máximo de u. Esta contradição prova que $\lambda_1(L, \tilde{A}^-) \geq 0$ e o mesmo vale para $\lambda_1(L, \tilde{A}^+)$. Por esta razão, u é simétrica em relação ao hiperplano $\tilde{T}$ ortogonal a $\tilde{\nu}$, para toda direção $\tilde{\nu}$ em uma vizinhança apropriada de ν_1.

Agora podemos assumir, sem perda de generalidade, que todos os possíveis hiperplanos de simetria de A (isto é, todos os hiperplanos passando pela origem) correspondem aos vetores unitários pertencentes a um hemisfério em $\mathbb{R}^n$ (isto é, a metade da esfera unitária), tendo como fronteira os vetores ν_p, onde ν_p é ortogonal ao hiperplano T_p, que passa através do eixo r_p. Se removermos deste hemisfério todos os vetores ν_p, teremos um conjunto aberto conexo M de direções em $\mathbb{R}^n$.

De fato, acabamos de provar que o conjunto S das direções ν que são ortogonais aos hiperplanos de simetria para a solução u é um conjunto aberto em M. Dada uma direção $\nu \in M$, denotemos por T_ν o hiperplano ortogonal a ν e que passa pela origem, por A_ν^- e A_ν^+ os subdomínios de A determinados por T_ν e finalmente para cada $x \in A_\nu^+$, $x_\nu \in A_\nu^-$ é o ponto simétrico em relação a T_ν. Feita estas considerações, podemos escrever $S = \{\nu \in M : u(x_\nu) = u(x),\ \forall x \in A_\nu^+\}$, donde vemos que S também é um subconjunto fechado de M. Portanto, temos que $S = M$ e assim, u é simétrica em relação a qualquer hiperplano passando pela origem, ou seja, u é uma função radial, contrariando nossa hipótese.

(iv) Suponhamos que u não é radialmente simétrica e consideremos qualquer hiperplano T que não passa através de r_p. Como antes, denotemos por A^- e A^+ os subconjuntos de A separados por T e vamos supor que P pertence a A^-. Então por **(iii)**, u não é simétrica em relação a T e assim, pela Proposição 3.1, um entre $\lambda_1(L, A^-)$ e $\lambda_1(L, A^+)$ deve ser negativo. Desde que $P \in A^-$ podemos verificar, argumentando como em **(i)** ou **(iii)**, que $\lambda_1(L, A^-) < 0$ e $\lambda_1(L, A^+) > 0$. Logo, em A^+ o princípio do máximo é válido para o operador L. Disto e do fato que a função $w^+ = v^+ - u$ (mesma notação de antes) satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta w^+ & = & f_u(|x|, u)w^+ & \text{em} \quad A^+ \\ w^+ & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial A^+, \end{array} \right. \tag{3.12}$$

implicam que $w^+ \geq 0$ em A^+. Na verdade $w^+ > 0$ pelo princípio do máximo forte. Isto significa que $u < v^+$ em A^+ e assim u não tem qualquer ponto de máximo em A^+. Fazendo T variar e, em particular, tomando T como o hiperplano ortogonal a r_p, deduzimos que todos os pontos de máximo pertencem ao segmento que liga a origem com P. Além disso, aplicando como antes o Lema de Hopf para a função w^+ em A^+ obtemos (3.10), implicando que todos os pontos críticos de u pertencem ao eixo de simetria r_p. ■

Finalmente, consideremos um domínio geral $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, contendo a origem e simétrico em relação ao hiperplano $T_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$. Em Ω, consiferamos o problema

$$\left\{ \begin{array}{rcll} -\Delta u & = & f(x, u) & \text{em} \quad \Omega \\ u & = & 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array} \right. \tag{3.13}$$

onde f tem a mesma regularidade considerada na introdução e f é simétrica em relação a x_1.

Encerramos este capítulo com o seguinte resultado:

Teorema 3.2 *Seja f estritamente convexa na segunda variável e u uma solução de* (3.13) *com índice um. Se um ponto de máximo P de u pertence ao hiperplano de simetria T_0, então u é simétrica em relação a x_1.*

Prova. É a mesma usada no item **(i)** do Teorema 3.1. ∎

Referências Bibliográficas

[1] Ambrosetti A., Brezis H.; Cerami G., *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in Some Elliptic Problems*, Journal of Functional Analysis, **122** (1994), 519-543.

[2] Ambrosetti, A.; Badiale, M., *The dual variational principle and elliptic problems with discontinuous nonlinearities* J. Math. Anal. Appl. **140** (1989), 363-373.

[3] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[4] Berestycki, H.; Nirenberg, L.; Varadhan, S. R. S. *The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math., **Vol. 47** (1994), 47-92.

[5] Brézis, H., *Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications*, Masson, Paris, (1987).

[6] Brézis, H.; Nirenberg, L. *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36**, (1983), 437-477

[7] Damascelli, L.; Grossi, M.; Pacella, F., *Qualitative properties of positive solutions of semilinear elliptic equations in symmetric domains via the maximum principle*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **16** (1999), 631-652.

[8] de Figueiredo, D. G., *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Differential equations São Paulo, (1981), 34-87, Lecture Notes in Math., **957**, Springer, Berlin-New York, (1982).

[9] Deimling, K. *Nonlinear Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, (1985).

[10] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, **19**, (1998).

[11] Gidas, B.; Ni, W. M.; Nirenberg, L., *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), 209-243.

[12] Gidas, B.; Spruck, J. *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), 883-901.

[13] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, (2001).

[14] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, (1993).

[15] Kreyszig, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*, Wiley, New York, (1989).

[16] Pacella, F., *Symmetry results for solutions of semilinear elliptic equations with convex nonlinearities* J. Funct. Anal. **192** (2002), 271-282.

[17] Protter, M. H.; Weinberger, H. F., *Maximum Principle in differential equations*, Prentice-Hall, Englewood Ciffs, New Jersey, (1967).

[18] Smets, D.; Willem, M.; Su, J., *Non-radial ground states for the Hénon equation*, Commun. Contemp. Math., **4** (2002), 467-480.

[19] Stroock, D.; Varadhan, S. R. S., *On degenerate elliptic-parabolic operators of second order and their associated diffusions*, Comm. Pure Appl. Math. **25** (1972), 651-713.

[20] Willem, M., *Minimax theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, **24**. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, (1996).