

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Primeira prova de Análise Real período 04.2.
Professor João Marcos do Ó
João Pessoa 28 de setembro de 2004

Aluno: _____

INSTRUÇÕES DA PROVA:

Horário de início da prova 08:00.
O tempo de duração da prova é de seis horas.
A prova contém dez questões, valendo um ponto cada uma.
Escreva a resolução de cada questão em uma página separadamente.
Escreva as resoluções completas contendo todos os detalhes.
Tudo que você escrever será levado em conta na avaliação.

Questão 1 *Defina os seguintes conceitos:*

1. *Espaço topológico conexo por caminhos;*

2. *Espaço topológico conexo;*

3. *Espaço topológico compacto;*

4. *Espaço topológico de Hausdorff;*

5. *Espaço topológico completo;*

6. *Espaço topológico separável;*

Questão 2 Seja $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

- (a) Prove que $S^2 \setminus F$ é um subconjunto aberto de S^2 com a topologia relativa para todo subconjunto finito $F = \{p_1, \dots, p_m\} \subset S^2$.
- (b) Um subconjunto $M \subset \mathbb{R}^N$ chama-se uma superfície de dimensão m quando para todo ponto $x \in M$ existem A aberto em M (com a topologia relativa) contendo x , A_0 aberto em $\mathbb{R}^m$ e um homeomorfismo $\phi : A_0 \rightarrow A$. Prove que S^2 é uma superfície de dimensão 2.

Questão 3 (Teorema da Alfândega) *Sejam C, X subconjuntos de um espaço métrico (M, d) . Se C é conexo e tem pontos em comum com X e com $M \setminus X$, então C contém algum ponto da fronteira de X . Sugestão: considere a função auxiliar $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = d(x, X) - d(x, M \setminus X)$ e note que $d(p, X) = d(x, M \setminus X) = 0$ se, e somente se, $p \in \partial X$.*

Questão 4 *Prove os seguintes itens:*

(a) *Prove que todo espaço conexo por caminhos é conexo.*

(b) *Prove que aplicação contínua aplica conexos em conexos.*

Questão 5 *Seja $F : M_1 \rightarrow M_2$ aplicação contínua, onde M_1 e M_2 são espaços métricos e M_1 é compacto. Prove que*

(a) *$F(M_1)$ é um espaço compacto com a topologia relativa.*

(b) *F é uniformemente contínua.*

Questão 6 *Prove os seguintes itens:*

(a) *Num espaço com base enumerável, toda coleção de abertos não vazios, dois a dois disjuntos, é enumerável.*

(b) *Num espaço topológico X com base enumerável existe um subconjunto enumerável denso em X .*

Questão 7 *Prove os seguintes itens:*

(a) *Qualquer interseção de compactos é compacta;*

(b) *Todo espaço métrico compacto é limitado;*

(c) *Toda aplicação contínua bijetora cujo domínio é um espaço compacto é um homeomorfismo.*

Questão 8 *Sejam S, T espaços topológicos e $F : S \rightarrow T$.*

(a) *Prove que F é contínua se, e somente se, para todo subconjunto $B \subset T$, $\overline{F^{-1}(B)} \subset F^{-1}(\overline{B})$.*

(b) *Prove que F é contínua e fechada se para todo subconjunto U de S , $F(\overline{U}) = \overline{F(U)}$.*

Questão 9 *Prove os seguintes itens:*

(a) *Em um espaço normado E duas bolas abertas quaisquer são homeomorfas;*

(b) *Toda bola aberta de um espaço normado é homeomorfa ao espaço inteiro.
Sugestão: considere as aplicações $f(x) = x/(1+\|x\|)$ e $g(y) = y/(1-\|y\|)$.*

(c) *A projeção estereográfica.*

Questão 10 (A projeção estereográfica) *Seja $S^N = \{x \in \mathbb{R}^{N+1} : \langle x; x \rangle = 1\}$ a esfera unitária n -dimensional e $p = (0, \dots, 1) \in S^N$ o pólo norte. A projeção estereográfica $\pi : S^N \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ estabelece um homeomorfismo entre a esfera menos o pólo norte e o espaço euclidiano $\mathbb{R}^N$. Geometricamente, $\pi(x)$ é o ponto em que a semi-reta $\overrightarrow{px}$ encontra o hiperplano $x_{N+1} = 0$, que identificamos com $\mathbb{R}^N$. Para $x = (x_1, \dots, x_N, x_{N+1})$, denote por $x' = (x_1, \dots, x_N)$. Prove que $\pi(x) = x'/(1 - x_{N+1})$. Prove também que π é um homeomorfismo, para isto veja que a função $\varphi : \mathbb{R}^N \rightarrow S^N \setminus \{p\}$ definida por $\varphi(y) = x$ onde $x' = 2y/(\|y\|^2 + 1)$ e $x_{N+1} = (\|y\|^2 - 1)/(\|y\|^2 + 1)$ é a inversa de π . Procedendo de forma análoga para o pólo sul $q = (0, \dots, -1)$ prova-se que S^N é uma superfície de dimensão N .*

ESPAÇO PARA RASCUNHO.

ESPAÇO PARA RASCUNHO.