

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
Segunda lista de Exercícios - Introdução à Análise Funcional período 04.1.
Data de entrega: 29 de abril de 2004
Aluno: _____

Exercício 1 *Seja X um espaço vetorial. Um subconjunto P de X é chamado um cone ou cone positivo se*

1. *para todo $x, y \in P$ temos $x + y \in P$ e*
2. *para todo $x \in P$ e todo número real positivo temos $tx \in P$.*

Dados vetores $x, y \in X$, dizemos que $x \geq y$ se $x - y \in P$. Dizemos que um funcional linear f em X é positivo, se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in P$.

- (a) *Prove que $P = \{f : X \rightarrow [0, +\infty)\}$ é um cone em X .*
- (b) *Prove que $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x > \sqrt{y^2 + z^2}\}$ é um cone em $\mathbb{R}^3$.*
- (c) *Prove que $P = \{f \in C([0, 1], \mathbb{R}) : f \text{ é côncava e } f(0) = f(1) = 0\}$ é um cone de $C([0, 1], \mathbb{R})$.*

Exercício 2 (Teorema de Hahn-Banach em Cones) *Seja P um cone no espaço vetorial real X , e seja Y um subespaço de X tal que para cada $x \in X$ existe um $y \in Y$ tal que $y \geq x$, isto é, $y - x \in P$. Suponha que $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional linear positivo, isto é, $f(y) \geq 0$ para todo $y \in Y$. Então existe um funcional linear $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que*

- (a) *Para todo $y \in Y$ temos que $f(y) = F(y)$ e*
- (b) *F é positivo em X , isto é, para todo $x \in X$ temos que $F(x) \geq 0$.*

Sua tarefa é provar este resultado seguindo o esquema abaixo.

1. *Aplique as hipóteses para x e $-x$ e prove que dado $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que $y - x \in P$, e existe $y_0 \in Y$ tal que $y_0 - (-x) = y_0 + x \in P$.*
2. *Considere $\mathcal{S}$ a família de todos os pares (Z, h) , onde Z é um subespaço de X que contém Y , e onde $h : Z \rightarrow \mathbb{R}$ é funcional linear positivo que é um prolongamento de f . Prove que a família $\mathcal{S}$ é não vazia.*
3. *Introduza em $\mathcal{S}$ a ordem: $(Z_1, h_1) \leq (Z_2, h_2)$ se Z_1 é um subespaço de Z_2 e h_2 é um prolongamento de h_1 . Prove que esta relação é uma ordem parcial.*

4. Prove que toda sub-família totalmente ordenada $\{(Z_\alpha, h_\alpha)\}$ de $\mathcal{S}$ possui uma cota superior (Z_o, h_o) . Para isto tome $Z_o := \cup_\alpha Z_\alpha$ e $h_o : Z_o \rightarrow \mathbb{R}$ definida como segue: seja $x \in Z_o$ então $x \in Z_\alpha$ para algum α e defina $h_o(x) := h_\alpha(x)$. Prove que Z_o é um subespaço vetorial de X , h_o está bem definida e é positiva. Daí, usando o Lema de Zorn, conclua que a família $\mathcal{S}$ tem um elemento maximal.
5. Finalmente prove que $Z_o = X$. Para isto suponha por absurdo que existe $z_o \in X \setminus Z_o$ e cheque a uma contradição com o fato de (Z_o, h_o) ser maximal. Considere Z' o subespaço de X gerado por Z_o e z_o , isto é, $Z' := \{z + tz_o : z \in Z_o \text{ e } t \in \mathbb{R}\}$. Então Z' é um subespaço próprio de X . Seja $Z_1 := \{z \in Z_o : z - z_o \in P\}$ e seja $Z_2 := \{z' \in Z_o : z' + z_o \in P\}$. Prove que Z_1 e Z_2 são não vazios. Prove que se $z \in Z_1$ e $z' \in Z_2$, então $h_o(z') \geq -h_o(z)$. Em particular o conjunto de números reais $B := \{h_o(z') : z' \in Z_2\}$ limitado inferiormente. Tome $b := \inf B$. Prove de modo similar que o conjunto $A := \{-h_o(z) : z \in Z_1\}$ é limitado superiormente e tome $a := \sup A$. Prove que $a \leq b$. Note que $h_o(z) \geq -a$ para todo $z \in Z_1$. Escolha $c \in [a, b]$ e defina $h' : Z' \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$h'(z + tz_o) := h(z) + tc.$$

Prove que h' é funcional linear que prolonga h e portanto prolonga f . Finalmente prove que h' é positivo.

Exercício 3 Seja S um conjunto não vazio, $X := \{f : S \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é limitada}\}$ e P o cone das funções não negativas em X . Prove que todo subespaço Y de X que contém as funções constantes satisfaz as hipóteses do Teorema de Hahn-Banach em Cones.

Exercício 4 Usando o Teorema de Hahn-Banach em Cones prove o Teorema de Hahn-Banach. Sugestão: Seja $X' := X \oplus \mathbb{R}$, $P := \{(x, t) \in X' \text{ tal que } p(x) \leq t\}$ $Y' := Y \oplus \mathbb{R}$ e defina $f' : Y' \rightarrow \mathbb{R}$ por $f'(y, t) := t - f(y)$. Agora aplique o Teorema de Hahn-Banach em Cones.

Exercício 5 Usando o Teorema de Hahn-Banach prove o Teorema de Hahn-Banach em Cones. Sugestão: Defina a função subaditiva p em X dada por $p(x) := \inf\{f(y) : y \in Y \text{ e } y - x \in P\}$.

Exercício 6 Seja E um espaço normado de dimensão infinita. Prove que existe pelo menos um funcional linear descontínuo definido em E .

Exercício 7 Prove que $l_\infty = l'_1$, mas $l'_\infty \neq l_1$. (Sugestão: Use o Teorema de Hahn-Banach)

Exercício 8 Seja E espaço vetorial normado e $x_0 \in E$. Se $\varphi(x_0) = 0$ para todo $\varphi \in E'$, então $x_0 = 0$.

Exercício 9 Sejam E normado e $S \subset E$ subespaço vetorial fechado. Seja $x_0 \in E$. Suponha que $\varphi \in E'$ e $\varphi|_S \equiv 0$ implica que $\varphi(x_0) = 0$. Mostre que $x_0 \in S$.

Exercício 10 *Sejam E normado e S subespaço vetorial de E . São equivalentes*

1. S é denso em E .
2. Se $\varphi \in E'$ e $S \subset \ker \varphi$ implica que $\varphi \equiv 0$.

Exercício 11 *Seja $(\mathbb{R}^3, |\cdot|_1)$. Tome $S = \{(x, y, z); x + 2y + z = 0\}$. Defina $\varphi \in S'$ por $\varphi((x, y, z)) = x$. Ache extensões diferentes de φ ao espaço $\mathbb{R}^3$ com a mesma norma que φ .*

Exercício 12 *Suponhamos que $E \neq \{0\}$. Prove que se $\mathcal{L}(E, F)$ é Banach então F é Banach. Sugestão: use o Teorema de Hahn-Banach.*

Exercício 13 *Um subespaço vetorial M de um espaço normado E não é denso em E se, e somente se, existe $f \in E$ com $f \neq 0$ e $f|_M \equiv 0$.*

Exercício 14 *Consideremos o espaço dos polinômios em x , com coeficientes reais, isto é, $\mathcal{P}(x) := \{\sum_{i=0}^m a_i x^i : a_i \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}\}$. Seja $U_+ := \{\sum_{i=0}^m a_i x^i : a_m > 0\}$ and $U_- := \{\sum_{i=0}^m a_i x^i : a_m < 0\}$. Prove os conjuntos U_+ e U_- são convexos mas não podem ser separados por um hiperplano em $\mathcal{P}(x)$.*