UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

TARCIANA MARIA SANTOS DA SILVA

Ondas estacionárias para algumas classes de equações de Schrödinger

RECIFE

2013

TARCIANA MARIA SANTOS DA SILVA

Ondas estacionárias para algumas classes de equações de Schrödinger [1]

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em matemática.

Orientador: Prof. Dr. **JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó**

RECIFE

2013

[1]Este trabalho contou com o apoio financeiro da CAPES/CNPQ.

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

S586o Silva, Tarciana Maria Santos da
Ondas estacionárias para algumas classes de equações de Schrödinger / Tarciana Maria Santos da Silva. – Recife: O Autor, 2013.
125 f.

Orientador: João Marcos Bezerra do Ó.
Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2013.
Inclui referências e apêndice.

1. Matemática. 2. Análise não linear. 3. Equações diferenciais parciais. 4. Equações elípticas. I. do Ó, João Marcos Bezerra (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) UFPE- MEI 2015-47

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ____

João Marcos Bezerra do Ó, *UFPB*

Orientador

____

Manasses Xavier de Souza,*UFPB*

____

Emerson Alves Mendonça de Abreu, *UFMG*

____

Uberlandio Batista Severo,*UFPB*

____

Everaldo Souto de Medeiros, *UFPB*

ONDAS ESTACIONÁRIAS PARA ALGUMAS CLASSES DE EQUAÇÕES DE SCHRÖDINGER

Por

Tarciana Maria Santos da Silva

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Dezembro – 2013

AGRADECIMENTOS

À minha família, em particular a meus pais Robson e Roseani, a meus irmãos Luciana, Mariana e Bruno, e a minha tia Rozineide, pelo incentivo e apoio, aos quais sempre serei grata.

Ao meu orientador, João Marcos Bezerra do Ó, pela orientação, confiança, paciência, exigências em alguns momentos, e pelo apoio dado.

A Manassés, que gentilmente disponibilizou seu tempo para acompanhar o desenvolvimento deste trabalho solucionando dúvidas e contribuindo com várias sugestões fundamentais. Agradeço também pela amizade, paciência, confiança e apoio.

Aos professores Everaldo, Uberlândio e Emerson por terem feito parte da banca examinadora.

A Clessius, que me faz sorrir em muitos momentos difíceis, além de sempre se mostrar disposto a me ajudar em tudo que preciso.

Aos amigos e colegas, da UFPE e da UFPB, que contribuíram direta e indiretamente na conclusão deste trabalho, em especial a Nicole, Juanice, Oldineia, Viviane, Abiel, Esteban, Ricardo, Elisandra, Bruno, Cláudia, Karla, Fábio, Thamires, Cris, Laudelino, DK, Ricardo, Gigi, André Ventura, Daniel, Gabriel, Luciana, Joilson, Érika, Renata, Adecarlos, Zaqueu, Bárbara e Marcelo, os quais fizeram esses anos mais divertidos, e que com certeza muitos desses serão meus amigos pra toda a vida.

Aos colegas da UFRPE que ajudaram na redução de minha carga horária por alguns semestres.

À secretária da pós-graduação da UFPE, Tânia, por sua imensa gentileza.

RESUMO

Usando métodos variacionais estudamos existência e multiplicidade de soluções para algumas classes de equações de Schrödinger com potenciais que podem mudar de sinal e não linearidades que têm crescimento subcrítico Sobolev e crescimento crítico no sentido de Trudinger-Moser.

Palavras-chave: Métodos variacionais. Equações de Shrödinger. Crescimento crítico. Domínios não limitados. Condição de Palais-Smale.

ABSTRACT

Using variational methods we study the existence and multiplicity of solutions for some classes of Schrödinger equations with potential that may change sign and nonlinearities which have subcritical Sobolev growth and have critical growth in the sense of Trudinger-Moser.

Keywords: Variational methods. Schrödinger equations. Critical growth. Unbounded domains. Palais-Smale condition.

LISTA DE SÍMBOLOS

- C, C_1, C_2, ... denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);

- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto mensurável, então $|\Omega|$ denota sua medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$;

- B_R denota a bola aberta centrada na origem e de raio $R > 0$;

- $B(x_0, r)$ é a bola de raio r centrada em (x_0);

- $B(x_k, r)$ é a bola de raio r centrada numa sequência $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ tal que $|x_k| \to \infty$;

- X^* é o dual topológico do espaço de Banach X munido com a norma $\| \cdot \|_*$;

- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dual entre X^* e X;

- Denotemos a convergência fraca em X por $'' \rightharpoonup$ '' e convergência forte por $'' \to$ '';

- $\mathrm{supp}(f)$ representa o suporte da função f;

- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_n} \right)$ é o gradiente da função u;

- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o Laplaciano de u;

- $\mathrm{div} f = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ é o divergente de f, em que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$;

- $\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$ denota o $p-$ Laplaciano de u;

- Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $1 \leq p < \infty$, o conjunto

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \,\text{mensurável} \, : \int_{\Omega} |u|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

  denota o espaço de Lebesgue com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p};$$

- $L^{\infty}(\Omega)$ representa o espaço das funções que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_{\infty} = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \,\text{quase sempre em}\, \Omega\};$$

- $C^k(\Omega)$ denota o conjunto das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, em que $k \in \mathbb{N}$;

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;

- Para $1 \leq p < \infty$ e para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$,

  $$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_i \in L^p(\Omega); \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x = - \int_\Omega g_i \varphi \, \mathrm{d}x, \, i \in \{1, \ldots, n\} \right\}$$

  munido com a norma

  $$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \, \mathrm{d}x \right)^{1/p};$$

- Para $1 \leq p < \infty$, $p^* = \dfrac{np}{n-p}$ é o expoente crítico de Sobolev, quando $p \to n$ tem-se $p^* \to \infty$;

- Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto conexo e $1 \leq p < \infty$, o conjunto

  $$L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ U : \Omega \to \mathbb{R}^m \text{ mensurável } : \int_\Omega |U|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

  denota o espaço de Lebesgue com norma dada por

  $$\|U\|_p = \sum_{i=1}^m \|u_i\|_p,$$

  onde $U = (u_1, \ldots, u_m)$ e cada $u_i \in L^p(\Omega)$;

- O espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)$, $1 \leq p < \infty$ é definido por

  $$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) = \left\{ U \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m), \text{ cujas derivadas fracas } \frac{\partial U}{\partial x_i} \text{ existem e } \frac{\partial U}{\partial x_i} \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^m) \right\},$$

  para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$. Munido com a norma

  $$\|U\|_{1,p} = \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{1,p}.$$

SUMÁRIO

Introdução

Neste trabalho, estudaremos a existência e a multiplicidade de soluções fracas para algumas classes de equações elípticas quase lineares. Problemas deste tipo são bastante conhecidos e estudados na literatura. Consideremos a seguinte equação elíptica quase linear:

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

onde $\Delta_p u := \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, $p \in (1,\infty)$ e $n \geq 1$, e as funções $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são mensuráveis.

Equações desse tipo são importantes em muitos campos das ciências. Elas aparecem com frequência nos campos eletromagnéticos, na astronomia e na dinâmica dos fluidos, porque elas podem ser usadas para descrever com precisão o comportamento dos potenciais elétricos, gravitacionais e de fluidos. Ver [1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 14, 15, 25, 33, 37, 40, 48, 49, 53]. Um exemplo padrão, no caso em que $p = 2$, é fornecido pela equação a seguir

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = W(x)|u|^{q-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

que surge quando se procuram soluções que estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias para as equações de Schrödinger não lineares da forma

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi - W(x)|\psi|^{q-2}\psi, \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

isto é, soluções do tipo

$$\psi(x,t) = \exp\left(\frac{it\mathcal{E}}{\hbar}\right) u(x), \quad \mathcal{E} \in \mathbb{R},$$

em que $i = \sqrt{-1}$, $\hbar$ é a constante de Planck, m é um número real positivo, $V(\cdot)$ é um potencial de valor real e $q > 2$. Essas soluções têm uma importante interpretação física, uma vez que correspondem a estados quânticos estáveis com energia $\mathcal{E}$.

A equação (1) tem sido extensivamente estudada sob várias hipóteses sobre o potencial $V(x)$ e para comportamentos diferentes da não linearidade $f(x,u)$. Alguns desses estudos são motivados pelo trabalho pioneiro de Rabinowitz [48] quando $p = 2$, $n \geq 3$ e a não linearidade $f(x,u)$ comporta-se no infinito como $|u|^{q-1}$ para algum $q \in [2, 2^*)$, isto é, quando $f(x,u)$ tem o crescimento subcrítico do tipo Sobolev. Para superar o problema da "perda de compacidade", típico em problemas elípticos em domínio ilimitados, Rabinowitz, em [48], considerou $V(x)$ um potencial coercivo e limitado inferiormente por uma constante positiva, isto é, $V(x) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$ e $V(x) \geq V_0 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Essa condição de coercividade foi melhorada por Bartsch e Wang, em [8], ao se assumir que, para todo $L > 0$, a medida de Lebesgue do conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n\,;\, V(x) \leq L\}$ é finita. Bartsch e Wang usaram as mesmas hipóteses sobre a não linearidade $f(x,u)$ que em [48].

Ainda conseguindo preservar a compacidade do funcional, Sirakov, em [49], considerou uma hipótese mais geral sobre o potencial $V(x)$,

$$\lim_{R\to\infty} \nu_t(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty \quad \text{para algum} \quad t \in [2, 2^*),$$

em que

$$\nu_t(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \inf_{u \in H_0^1(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R)\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R} \left(|\nabla u|^2 + V(x)|u|^2\right)\, \mathrm{d}x}{\left(\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R} |u|^t \,\mathrm{d}x\right)^{2/t}}.$$

Além disso, Sirakov [49] abordou a situação em que a não linearidade pode ser ilimitada na variável x, situação que não foi abordada em [8, 48].

Existem muitos resultados para equações do tipo (1) quando o domínio é limitado (veja, por exemplo, [13] e suas referências). No entanto, para quando o domínio é ilimitado e $1 < p < n$, não se encontram muitos artigos. Para o nosso conhecimento, um dos primeiros resultados de existência de soluções para essas equações foi abordado por Lyberopoulos em [37] na seguinte situação particular:

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = Q_1(x)|u|^{t-2}u - Q_2(x)|u|^{s-2}u \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n,$$

em que $1 < p < n$, V, Q_1 e Q_2 são funções não negativas e tais que Q_1 e Q_2 são dominadas por V quando $|x| \to +\infty$. Além disso, $t, s \in (1, p^*)$.

No Capítulo 1, estendemos os resultados de Sirakov [49], no caso em que $1 < p < n$, provando a existência e a multiplicidade de soluções para equação (1) da seguinte forma

$$-\Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n,$$

com $V(x) = a(x) - b(x)$, em que a e b são funções mensuráveis não negativas. Além disso, analisamos a situação em que a não linearidade $f(x, u)$ pode ser ilimitada na variável x e possui o crescimento subcrítico do tipo Sobolev.

Neste caso, as imersões de Sobolev asseguram que $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ para qualquer $t \in (1, p^*]$, em que $p^* = np/(n-p)$ é chamado o expoente crítico de Sobolev. Com isso, o crescimento máximo de f é determinado pelo expoente crítico de Sobolev.

Um outro caso no qual a equação (1) também tem sido bastante estudada é quando $p = n$.

$$-\Delta_n u + V(x)|u|^{n-2}u = f(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2}$$

Nessa situação, $p^* \to \infty$ quando $p \to n$ e as imersões de Sobolev não são válidas $(W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \not\hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n))$. Assim, o crescimento máximo é motivado por uma desigualdade do tipo Trundiger-Moser que garante a imersão de $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ em um espaço de Orlicz gerado pela função $f(x, u) \sim e^{\alpha_n |u|^{n/(n-1)}}$ quando $|u| \to \infty$, com $\alpha_n := n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$ e ω_{n-1} sendo a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$ (cf. [2, 24, 19, 27, 39, 41, 50]).

Em busca desse crescimento máximo para a não linearidade f, Moser [39] mostrou a seguinte desigualdade para domínios limitados em $\mathbb{R}^n$,

$$\sup_{u \in W_0^{1,n}(\Omega), \|\nabla u\|_n \le 1} \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega e^{\alpha_n |u|^{n/(n-1)}} \, dx < \infty,$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\alpha_n = n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$ e ω_{n-1} é a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Essa conhecida desigualdade tem sido generalizada de muitas maneiras. Por exemplo, do Ó [27], estendeu o resultado para todo o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ para $n \ge 2$, o que nos permite encontrar soluções fracas não triviais do tipo passo da montanha para as equações (1) com pertubação, por exemplo

$$-\Delta_n u + V(x)|u|^{n-2}u = f(x, u) + \varepsilon h(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Um pouco antes, Cao [14], estudou o problema 2 quando $n = 2$ e o potencial $V(x) = 1$. Ele mostrou, usando o princípio de concentração e compacidade de Lions, que o funcional associado ao problema satisfaz a condição de Palais-Smale.

Do Ó, Medeiros e Severo, [30], estudaram a existência e a multiplicidade de soluções para o problema 2 considerando $n \ge 2$, $f(x, u)$ com crescimento exponencial e o potencial $V(x)$ contínuo, positivo e satisfazendo uma das seguintes condições:

(a) $V(x) \to +\infty$ quando $|x| \to +\infty$;

(b) $[V(x)]^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$;

(c) Para todo $L > 0$ o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n; V(x) \leq L\}$ tem medida de Lebesgue finita.

Esse resultado foi estendido por Lam e Lu em [34] quando a não linearidade tem uma singularidade,

$$\frac{f(x,u)}{|x|^\beta} \quad \text{onde} \quad \beta \in [0,n).$$

Com isso, no Capítulo 2, consideramos, sobre o potencial $V(x)$, a mesma hipótese considerada por Sirakov em [49], a qual permite que $V(x)$ se anule ou mude de sinal. Consideremos também que a não linearidade $f(x,u)$ pode ser ilimitada na variável x e que, na variável u, o crescimento é crítico no sentido da desigualdade de Trudinger-Moser, mais precisamente, que $f(x,u)$ se comporta como $e^{\alpha_0|u|^{n/(n-1)}}$ quando $|u| \to +\infty$ para algum $\alpha_0 > 0$. Usamos métodos variacionais do tipo minimax, para obter a existência e a multiplicidade das soluções da equação (1) para o caso em que $p = n$. Este é o primeiro resultado na literatura considerando o caso crítico exponencial no qual a não linearidade $f(x,u)$ pode ser ilimitada na variável x. O caso subcrítico envolvendo um peso singular foi estudado por de Souza [22] quando $n = 2$.

Ressaltamos que somente alguns resultados consideram o potencial $V(x)$ mudando de sinal, ver [17, 48, 49]. No entanto, nos artigos citados os autores consideram $V(x)$ uma função contínua e limitada inferiormente. Nos Capítulos 1 e 2, nos concentramos para tratar o caso em que $V(x)$ pode mudar de sinal e pode ser ilimitada inferiormente. Em particular, não precisamos de limitação uniforme sobre o potencial que pode desenvolver singularidades próximo de zero.

Nos Capítulos 3 e 4 estudamos as equações do tipo (1) em forma de sistemas, isto é,

$$-\Delta_p u_i + V_i(x)|u_i|^{p-2}u_i = f_i(x,U), \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad i \in \{1,\ldots,m\}, \tag{3}$$

em que $p \in (1,\infty)$, $n \geq 1$, $U = (u_1,\ldots,u_m) \in \mathbb{R}^m$, as funções $V_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são mensuráveis tais que $f_i(x,U)$ são as derivadas parciais com relação a U na i-ésima coordenada, para alguma função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $\nabla F = (f_1,\ldots,f_m)$.

O interesse em estudar sistemas decorre do grande número de aplicações, que além das conhecidas para o caso escalar, envolvem outros fenômenos, como os modelos de competição em dinâmica populacional. Os sistemas se comportam em um certo sentido como no caso escalar, porém, apresentando dificuldades adicionais provenientes da ação das variáveis u_1, u_2, ..., u_m nas não linearidades $f_1(x, U)$, ..., e $f_m(x, U)$. Ver [17, 43, 44, 45, 46].

Levando em consideração o comportamento dos potenciais $V_i(x)$ e das não linearidades $f_i(x, U)$ do mesmo modo como foram considerados no Capítulo 1, obtemos, no Capítulo 3, alguns resultados relacionados à existência e à multiplicidade de soluções para o sistema (3) para o caso em que $1 < p < n$. Isso complementa os resultados obtidos por Rabelo em [44, 45, 46]. Por fim, no Capítulo 4, complementamos os resultados obtidos por Rabelo em [43], estudamos também a existência e multiplicidade de soluções para o mesmo sistema (3), no caso em que $p = n$ e $m = 2$, considerando sobre os potenciais $V_i(x)$ e sobre as não linearidades $f_i(x, U)$ hipóteses semelhantes às que foram consideradas no Capítulo 2.

Capítulo 1

Sobre uma classe de equações de Schrödinger quase lineares em $\mathbb{R}^n$

1.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar a existência de soluções não triviais para uma classe de problemas elípticos não lineares, envolvendo o operador p-Laplaciano $-\Delta_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, com $1 < p < n$ e $n \geq 2$,

$$-\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = b(x)|u|^{p-2}u + f(x,u), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1}$$

As principais características dessa classe de problemas são permitir que os potenciais $a(x)$ se anule e $b(x)$ seja ilimitado sob certas condições explicadas a seguir, e que a não linearidade $f(x,u)$ não seja necessariamente limitada em x. Esse problema foi motivado pelo trabalho de Sirakov [49] que mostrou, para o caso semilinear, a existência de uma solução não trivial quando o potencial mudar de sinal e a não linearidade puder ser ilimitada na variável x.

Com o objetivo de facilitar futuras referências, descreveremos a seguir as hipóteses que usaremos ao longo deste capítulo:

(H_1) A função $a : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ é mensurável e

$$\lambda_1 := \inf_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^p + a(x)|u|^p)\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p\,\mathrm{d}x} > 0,$$

em que E é um subespaço de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ dado da seguinte forma:

$$E = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\}. \tag{1.2}$$

Definimos para qualquer subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^n$ e para $s \in [p, p^*)$, $\nu_s(\Omega)$ por

$$\nu_s(\Omega) = \begin{cases} \inf\limits_{u \in W_0^{1,p}(\Omega)\setminus\{0\}} \dfrac{\int_\Omega (|\nabla u|^p + a(x)|u|^p)\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^s \,\mathrm{d}x\right)^{p/s}} & \text{se} \quad \Omega \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se} \quad \Omega = \emptyset. \end{cases}$$

Inspirado pelo trabalho de Sirakov [49], consideramos a seguinte condição de compacidade:

(H_2) Existe $s \in [p, p^*)$ tal que $\lim\limits_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$, em que B_R é a bola em $\mathbb{R}^n$ de raio R centrada na origem.

(H_3) Existem uma função $A \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, com $A(x) \geq 1$, e constantes $\beta > 1$, $C_0 > 0$, $R_0 > 0$ tais que

$$A(x) \leq C_0 \left(1 + (a(x))^{1/\beta}\right) \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0.$$

(H_4) A função $b : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ é mensurável e $\|b\|_\sigma < S_{t_0}^p$ para algum $\sigma > 1$ onde $t_0 := \sigma p/(\sigma - 1) < p^\# + 1$ e

$$p^\# := (p^* - 1) - \frac{p^2}{\beta(n-p)}.$$

e S_{t_0} é a melhor constante para a imersão de Sobolev $E \hookrightarrow L^{t_0}(\mathbb{R}^n)$ (ver Proposição 1.6), isto é,

$$S_{t_0} := \inf_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^p + a(x)|u|^p)\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{t_0}\,\mathrm{d}x\right)^{1/t_0}}.$$

(H_5) A função f é contínua e $A-$ superlinear na origem, isto é,

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x,s)}{A(x)|s|^{p-1}} = 0 \quad \text{uniformemente em} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

A função f não é necessariamente limitada em x, porém tem seu crescimento subcrítico controlado por $A(x)$, mais precisamente,

(H_6) Existe $q \in [p-1, p^\#)$ tal que

$$|f(x,s)| \leq C_0 A(x)\left(1 + |s|^q\right) \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

(H_7) Existe $\mu > p$ tal que

$$0 < \mu F(x,t) = \mu \int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s \leq t f(x,t) \quad \text{para todo} \quad (x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Agora, enunciaremos os principais resultados deste capítulo.

Teorema 1.1. *Suponhamos que as condições* (H_1) - (H_7) *são satisfeitas. Então o problema* (1.1) *tem uma solução não trivial. Além disso, se* $f(x,u)$ *for ímpar em* u, *então* (1.1) *tem infinitas soluções.*

Teorema 1.2. *Suponhamos que as condições* (H_1), (H_3) - (H_7) *são satisfeitas. Além disso, assumindo que*

$$\lim_{k\to\infty} \nu_s(B(x_k,r)) = \infty \quad \textit{para algum} \quad s \in (2,p^*), \tag{1.3}$$

em que $B(x_k,r)$ *é a bola de raio* r *centrada numa sequência* $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ *tal que* $|x_k| \to \infty$. *Então o problema* (1.1) *tem uma solução não trivial. Se, além disso,* $f(x,u)$ *é ímpar em* u, *então o problema* (1.1) *tem infinitas soluções.*

Observação 1.3. *A existência de soluções para o problema* (1.1) *tem sido discutida sob várias condições sobre o potencial* $a(x)$ *e sobre a não linearidade* $f(x,s)$ *(veja os trabalhos de [8, 48, 53]). Vale a pena ressaltar que, nesses trabalhos, diferentes hipóteses são assumidas em* $a(x)$, *a fim de superar o problema da "perda de compacidade", típico para problemas elípticos em domínios ilimitados. Mais precisamente, em muitos artigos, é normalmente assumido que o potencial é uma função contínua e uniformemente positiva, isto é, que* $a(x) \geq a_0 > 0$ *para qualquer* $x \in \mathbb{R}^n$ *e satisfaz um das seguintes condições:*

(a) $[a(x)]^{-1} \in L^1(\mathbb{R}^n)$;

(b) $a(x) \to +\infty$ *quando* $|x| \to +\infty$;

(c) *para cada* $L > 0$ *a medida de Lebesgue* $|\{x \in \mathbb{R}^n : a(x) \leq L\}| < \infty$.

Cada uma dessas condições garante que o espaço E *esteja imerso compactamente no espaço de Lebesgue* $L^s(\mathbb{R}^n)$ *para todo* $p \leq s < p^*$. *Além disso,* $f(x,s)$ *é limitado com relação à variável* x.

Observação 1.4. *Uma condição suficiente para a hipótese (H_2) é que*

$$\lim_{R\to\infty} |\Omega_L \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R)| = 0 \quad \textit{para todo} \quad L > 0,$$

onde $\Omega_L = \{x \in \mathbb{R}^n : a(x) < L\}$ (veja Lema 1.23). Assim, o potencial que satisfaz $(a) - (c)$ também satisfaz a condição (H_2). Consequentemente, a condição (H_2) melhora as condições $(a) - (c)$. Além disso, a condição (H_1) permite ao potencial se anular numa região limitada de $\mathbb{R}^n$ e (H_3) e (H_7) permitem que a não linearidade seja ilimitada em x.

Exemplo 1.5. *Um exemplo de uma função $V(x)$ que satisfaz as hipóteses $(H_1) - (H_4)$ é dado por*

$$a(x) - b(x) = \begin{cases} |x|^2 - \dfrac{\delta}{|x|^{\frac{n}{2\sigma}}}, & \textit{for} \quad |x| < 1, \\ |x|^2 \quad , & \textit{for} \quad |x| \geq 1, \end{cases}$$

em que $\delta > 0$ é suficientemente pequeno e $\sigma > 1$. Para $f(x, s)$ consideramos o seguinte

$$f(x, s) = |x||s|^{q-1}s,$$

em que $q \in (p - 1, p^{\#})$ e $p^{\#} = (p^* - 1) - \dfrac{p^2}{2(n - p)}$.

1.2 Resultados Preliminares

Segue da condição (H_1) que o espaço E munido com a norma

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + a(x)|u|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$$

é um espaço vetorial normado. Com isso, esta seção será dedicada a mostrar algumas propriedades que envolvem esse espaço e os resultados de compacidade fundamentais para encontrar as soluções do problema (1.1). Começaremos por um resultado, o qual utilizaremos bastante, sobre a imersão contínua de E em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Proposição 1.6. *Se a condição (H_1) for válida, então E estará imerso continuamente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Demonstração. Por (H_1),

$$0 < \lambda_1 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^p + a(x)|u|^p) \, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \mathrm{d}x},$$

assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \mathrm{d}x \leq \frac{1}{\lambda_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^p + a(x)|u|^p\right) \mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

Isso implica em

$$\|u\|_{1,p}^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + |u|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \frac{1}{\lambda_1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^p + a(x)|u|^p\right) \mathrm{d}x.$$

Portanto,

$$\|u\|_{1,p}^p \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right) \|u\|^p.$$

Isso conclui a Proposição.

□

Proposição 1.7. *Se a condição (H_1) for válida, então E munido com a norma $\|\cdot\|$ será um espaço de Banach.*

Demonstração. Seja (u_k) uma sequência de Cauchy em E. Pela continuidade da imersão de E em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, segue-se que (u_k) é uma sequência de Cauchy em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, que, por sua vez, é um espaço de Banach. Assim, (u_k) converge para algum $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, logo, (u_k) converge para $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$, e existe uma subsequência (u_{k_j}) que converge quase sempre para u em $\mathbb{R}^n$.

Vejamos que a sequência $((a(x))^{1/p}(u_{k_i}))$ é uma sequência de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$. Notemos que,

$$\left\|(a(x))^{1/p}(u_{k_i} - u_{k_j})\right\|_p^p \leq \left\|u_{k_i} - u_{k_j}\right\|^p. \tag{1.5}$$

Como (u_{k_i}) é uma sequência de Cauchy em E, então, por (1.5), a sequência $((a(x))^{1/p}(u_{k_i}))$ é também de Cauchy em $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Sendo assim, podemos extrair uma subsequência tal que, para cada $r \geq 1$, com $r \in \mathbb{N}$,

$$\left\|(a(x))^{1/p}(u_{r+1} - u_r)\right\|_p \leq \frac{1}{2^r}.$$

Consideremos a sequência dada por

$$g_k(x) = \sum_{r=1}^{k} \left|(a(x))^{1/p}(u_{r+1}(x) - u_r(x))\right|.$$

Usamos a desigualdade de Minkowski para obter a seguinte estimativa,

$$\|g_k\|_p \leq \sum_{r=1}^{k} \left\|(a(x))^{1/p}(u_{r+1} - u_r)\right\|_p \leq \frac{1}{2^r} \leq 1. \tag{1.6}$$

Seja $g(x) = \lim\limits_{k\to\infty} g_k(x)$. Isso implica que $|g(x)|^p = \lim\limits_{k\to\infty} |g_k(x)|^p$. Concluímos, pelo Teorema da convergência monótona e por (1.6), que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)|^p \,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |g_k(x)|^p \,\mathrm{d}x \leq 1,$$

ou seja, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Além disso, para cada $l \in \mathbb{N}$,

$$\left|(a(x))^{1/p}(u_{r+l}(x) - u_r(x))\right| \leq g_{r+l-1}(x) - g_{r-1}(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n.$$

Tomando o limite quando $l \to \infty$, obtemos

$$\left|(a(x))^{1/p}(u(x) - u_r(x))\right| \leq g(x) - g_{r-1}(x) \leq g(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n.$$

Dessa forma,

$$\left|(a(x))^{1/p}u(x)\right| \leq g(x) + \left|(a)^{1/p}(x)u_r(x)\right| \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n,$$

e, consequentemente, $((a(x))^{1/p}u) \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Isso implica que $u \in E$.

A convergência $u_k \to u$ em E segue-se da convergência

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k(x) - \nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x \to 0$$

e do seguinte fato:

$$\left\|(a(x))^{1/p}(u_k - u)\right\|_p = \int_{\mathbb{R}^n} a(x)\, |u_k(x) - u(x)|^p \,\mathrm{d}x \to 0.$$

□

Mostraremos agora, que E é um espaço reflexivo.

Proposição 1.8. *O espaço E é reflexivo para $1 < p < \infty$.*

Demonstração. Consideremos o seguinte operador linear

$$T : E \to W = (L^p(\mathbb{R}^n))^n \times L^p(\mathbb{R}^n)$$

definido por $T(u) = (\nabla u, (a(x))^{1/p}u)$. Além disso, W está munido com a norma $\|(U,v)\|_W = \left(\sum_{i=1}^{n} \|u_i\|_p^p + \|v\|_p^p\right)^{1/p}$, em que $U = (u_1, \ldots, u_n) \in (L^p(\mathbb{R}^n))^n$

Vejamos que T é uma isometria de E em W.

Dado $u \in E$,

$$\begin{aligned} \|Tu\|_W &= \|(\nabla u, (a(x))^{1/p}u)\|_W = \left(\sum_{i=1}^{n} \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_p^p + \|(a(x))^{1/p}u\|_p^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\|\nabla u\|_p^p + \|(a(x))^{1/p}u\|_p^p\right)^{1/p} = \|u\|. \end{aligned}$$

Agora, vejamos que $T(E)$ é um subespaço fechado de W. De fato, seja $w_k \in \overline{T(E)}$ tal que $w_k \to w$ em $T(E)$. Como T é uma isometria, logo $w_k = T(u_k)$ com $u_k \in E$. Assim, $T(w_k) \to T(u) = w$.

Visto que $T(E)$ é um subespaço fechado de W, e como W é um espaço reflexivo, segue-se que $T(E)$ é reflexivo e, consequentemente, E também o é. $\square$

Definimos o espaço

$$L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n) = \left\{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad \text{mensurável}; \quad \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \,\mathrm{d}x < \infty\right\},$$

munido com a norma $\|u\|_{L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \,\mathrm{d}x\right)^{1/t}$.

Proposição 1.9. *Se as condições (H_1) - (H_3) forem válidas, então a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ será contínua para $p-1 \leq t \leq p^{\#}$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| > R_0\}$ e $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R_0\}$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathcal{A}} A(x)|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{B}} A(x)|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x$$

Usando a condição (H_3), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x &\leq c_0 \int_{\mathcal{A}} [1 + (a(x))^{1/\beta}]|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x + \|A\|_\infty \int_{\mathcal{B}} |u|^{t+1} \,\mathrm{d}x \\ &= c_0 \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x + c_0 \int_{\mathcal{A}} |u|^{t+1} \,\mathrm{d}x + \|A\|_\infty \int_{\mathcal{B}} |u|^{t+1} \,\mathrm{d}x \\ &\leq c_0 \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x + (c_0 + \|A\|_\infty) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{t+1} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x \leq c_0 \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x + (c_0 + \|A\|_\infty)\|u\|_{t+1}^{t+1}. \tag{1.7}$$

Agora, precisamos mostrar que existe $C > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{t+1} \,\mathrm{d}x \leq C\|u\|^{t+1}$. Para isso, analisaremos os termos de (1.7) separadamente.

Para estimar o termo $\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^{t+1}\,\mathrm{d}x$, usamos a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^{t+1}\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{A}} (a(x)|u|^p)^{1/\beta}\,|u|^{t+1-p/\beta}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{A}} a(x)|u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/\beta}\left(\int_{\mathcal{A}} \left(|u|^{t+1-p/\beta}\right)^{\beta/(\beta-1)}\,\mathrm{d}x\right)^{(\beta-1)/\beta}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^{t+1}\,\mathrm{d}x \leq \|u\|^{p/\beta}\|u\|^{((t+1)\beta-p)/\beta}_{((t+1)\beta-p)/(\beta-1)}. \tag{1.8}$$

Substituindo (1.8) em (1.7),

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{t+1}\,\mathrm{d}x \leq c_0\|u\|^{p/\beta}\|u\|^{((t+1)\beta-p)/\beta}_{((t+1)\beta-p)/(\beta-1)} + (c_0+\|A\|_\infty)\|u\|^{t+1}_{t+1}. \tag{1.9}$$

Como $p-1 \leq t \leq p^{\#}$, deduzimos que $p \leq ((t+1)\beta-p)/(\beta-1) \leq p^*$. De fato, pela definição de $p^{\#}$,

$$t \leq (p^*-1) - \frac{p^2}{\beta(n-p)},$$

logo,

$$t \leq (p^*-1) + \frac{-p^2+np-np}{\beta(n-p)} = (p^*-1) + \frac{np-p^2}{\beta(n-p)} - \frac{np}{\beta(n-p)},$$

assim,

$$t \leq p^* - 1 + \frac{p}{\beta} - \frac{p^*}{\beta} = p^*\left(1-\frac{1}{\beta}\right) - 1 + \frac{p}{\beta},$$

portanto,

$$t+1-\frac{p}{\beta} \leq p^*\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right),$$

por conseguinte,

$$\left(t+1-\frac{p}{\beta}\right)\frac{\beta}{\beta-1} \leq p^*,$$

com isso, concluímos que

$$\frac{(t+1)\beta-p}{\beta-1} \leq p^*.$$

Por outro lado, como $p-1 \leq t$, segue-se que $p \leq t+1$ e assim,

$$p = p\cdot\frac{\beta-1}{\beta-1} = \frac{p\beta-p}{\beta-1} \leq \frac{(t+1)\beta-p}{\beta-1}. \tag{1.10}$$

Provando que $p \leq ((t+1)\beta-p)/(\beta-1) \leq p^*$.

Agora, usando as imersões contínuas $E \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{((t+1)\beta-p)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \leq t+1 \leq p^{\#}+1$, concluímos que existe $C>0$ tal que

$$\|u\|^{((t+1)\beta-p)/\beta}_{((t+1)\beta-p)/(\beta-1)} \leq C\|u\|^{((t+1)\beta-p)/\beta}. \tag{1.11}$$

Substituindo (1.11) em (1.8), resulta

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^{t+1}\,\mathrm{d}x \le C\|u\|^{t+1}. \tag{1.12}$$

Já para estimar o termo $\|u\|_{t+1}^{t+1}$, usamos novamente as imersões contínuas $E \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{t+1}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t+1 \in [p, p^*]$ e concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{t+1}^{t+1} \le C\|u\|^{t+1}. \tag{1.13}$$

Agora, substituindo (1.13) e (1.12) em (1.7),

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{t+1}\,\mathrm{d}x \le C\|u\|^{t+1}. \tag{1.14}$$

Isso conclui a Proposição. □

O próximo Lema garante que a condição (H_2) seja válida para todo $s \in [p, p^*)$.

Lema 1.10. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $p \le s < t < p^*$. Então*

$$\nu_t(\Omega) \ge C(p,t,n,\lambda_1)\,(\nu_s(\Omega))^{\alpha_1}, \tag{1.15}$$

onde α_1 é um número fixo em $(0,1)$. Se $p < t < s < p^*$, então

$$\nu_t(\Omega) \ge C(p,t,n,\lambda_1)\,(\nu_s(\Omega))^{\alpha_2}, \tag{1.16}$$

onde α_2 é um número fixo em $(0,1)$. Consequentemente, $\lim_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$ implica que $\lim_{R\to\infty} \nu_t(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$ nos casos em que $p \le s \le t$ e $p < t \le s$.

Demonstração. Ambas as desigualdades, (1.15) e (1.16), são consequências da Proposição 1.6, e da desigualdade de Gagliardo-Niremberg (Teorema A.5). De fato, primeiro, usaremos a desigualdade de Hölder:

$$\|u\|_t \le \|u\|_s^{\theta}\|u\|_{p^*}^{1-\theta}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1).$$

Agora, usando a desigualdade de Gagliardo-Niremberg para $p \le s < t < p^*$,

$$\|u\|_t \le C(p,t,n)\|u\|_s^{\theta}\|\nabla u\|_p^{1-\theta}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1),$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u\|_t^p &\le \left[C(p,t,n)\|u\|_s^{\theta}\|\nabla u\|_p^{1-\theta}\right]^p \\ &\le C(p,t,n)\|u\|_s^{\theta p}\|\nabla u\|_p^{(1-\theta)p}. \end{aligned}$$

Usando que $\|\nabla u\|_p \leq \|u\|_{1,p}$, e pela Proposição 1.6 $\|u\|_{1,p} \leq C\|u\|$, concluímos que

$$\|u\|_t^p \leq C(p,t,n)\|u\|_s^{\theta p}\|u\|^{(1-\theta)p}.$$

Essa desigualdade será usada da seguinte forma:

$$\frac{1}{\|u\|_t^p} \geq \frac{1}{C(p,t,n)\|u\|_s^{\theta p}\|u\|^{(1-\theta)p}}, \quad \text{com} \quad u \neq 0. \tag{1.17}$$

Usando a definição de $\nu_t(\Omega)$ e (1.17),

$$\begin{aligned}
\nu_t(\Omega) &= \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + a(x)|u|^p}{\|u\|_t^p} \\
&\geq \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^p}{C(p,t,n)\|u\|_s^{\theta p}\|u\|^{(1-\theta)p}} \\
&\geq \frac{1}{C(p,t,n)} \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^p}{\|u\|_s^{\theta p}\|u\|^{(1-\theta)p}} \\
&= \frac{1}{C(p,t,n)} \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^{\theta p}}{\|u\|_s^{\theta p}} \\
&= \frac{1}{C(p,t,n)} \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \left[\frac{\|u\|^p}{\|u\|_s^p}\right]^\theta \\
&= \frac{1}{C(p,t,n)} \left(\nu_s(\Omega)\right)^\theta.
\end{aligned}$$

Isso conclui a desigualdade (1.15).

A desigualdade (1.16) conclui-se usando novamente a desigualdade de Hölder:

$$\|u\|_t \leq \|u\|_p^\theta \|u\|_s^{1-\theta}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1).$$

Como E está imerso continuamente em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^n)$, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_t^p \leq C\|u\|^{\theta p}\|u\|_s^{(1-\theta)p}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1).$$

Portanto,

$$\frac{1}{\|u\|_t^p} \geq \frac{1}{C\|u\|^{\theta p}\|u\|_s^{(1-\theta)p}}. \tag{1.18}$$

Pela definição de $\nu_t(\Omega)$ e por (1.18),

$$\begin{aligned}
\nu_t(\Omega) &= \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p + a(x)|u|^p}{\|u\|_t^p} \\
&\geq \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^p}{C\|u\|^{\theta p}\|u\|_s^{(1-\theta)p}} \\
&= \frac{1}{C} \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^{(1-\theta)p}}{\|u\|_s^{(1-\theta)p}} \\
&= \frac{1}{C} \inf_{u\in W_0^{1,p}(\Omega)\backslash\{0\}} \left[\frac{\|u\|^p}{\|u\|_s^p}\right]^{1-\theta} \\
&= \frac{1}{C} \left(\nu_s(\Omega)\right)^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a desigualdade (1.16).

Por fim, (1.15) e (1.16) implicam que $\nu_t(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}_R) \geq C(\nu_s(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}_R))^\theta$ para $p \leq s \leq t$ e $p < t \leq s$. E, como $\lim_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}_R) = \infty$, para toda bola $B_R \subset \mathbb{R}^n$ de raio R centrada na origem, segue-se que $\lim_{R\to\infty} \nu_t(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$ nos casos em que $p \leq s \leq t$ e $p < t \leq s$. □

Proposição 1.11. *Se as condições* (H_1) - (H_3) *forem válidas, então* E *estará imerso compactamente em* $L^{t+1}(\mathbb{R}^n)$, *para* $p-1 \leq t \leq p^\#$, *e em* $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$, *para* $p-1 \leq t < p^\#$.

Demonstração. Primeiro, mostraremos que E está imerso compactamente em $L^{t+1}(\mathbb{R}^n)$. Suponhamos que (u_k) é uma sequência limitada em E. Como E é um espaço reflexivo, podemos assumir, sem perda de generalidade, que (u_k) converge fracamente para 0 em E. Pela continuidade da imersão $E \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema A.4), a imersão $W^{1,p}(B_R) \hookrightarrow L^{t+1}(B_R)$ é compacta para $p-1 \leq t \leq p^\#$, em que B_R é a bola em $\mathbb{R}^n$ de raio R centrada na origem.

Consideremos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ definida por

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{em } B_R; \\ 1 & \text{em } \mathbb{R}^n\backslash B_{R+1}. \end{cases}$$

e $|\nabla\varphi(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned}
\|u_k\|_{t+1} &= \|(1-\varphi)u_k + \varphi u_k\|_{t+1} \\
&\leq \|(1-\varphi)u_k\|_{t+1} + \|\varphi u_k\|_{t+1}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|u_k\|_{t+1} \leq \|(1-\varphi)u_k\|_{L^{t+1}(B_{R+1})} + \|\varphi u_k\|_{L^{t+1}(\mathbb{R}^n\backslash B_R)}. \tag{1.19}$$

Notemos que, o Teorema da Convergência Dominada e o Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema A.4) garantem que o primeiro termo de (1.19) convirja para 0 quando $p \leq t+1 < p^{\#}+1$. Vejamos, que o segundo termo de (1.19) também converge para 0.
De fato, notemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\varphi u_k)|^p + a(x)|\varphi u_k|^p \,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla\varphi)u_k|^p + |\varphi(\nabla u_k)|^p + a(x)|\varphi u_k|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^p + a(x)|u_k|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \|u_k\|_{1,p}^p + \|u_k\|^p.\end{aligned}$$

Usando a imersão contínua $E \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, segue-se que existe $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\varphi u_k)|^p + a(x)|\varphi u_k|^p \,\mathrm{d}x &\leq C\|u_k\|^p + \|u_k\|^p \\ &= C\|u_k\|^p.\end{aligned}$$

Como (u_k) é uma sequência limitada em E, então a sequência (φu_k) também o é. Desse fato, juntamente com a definição de $\nu_{t+1}(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$ e a condição (H_2), concluímos que

$$\|\varphi u_k\|_{L^{t+1}(\mathbb{R}^n\backslash B_R)} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n\backslash B_R} |\nabla(\varphi u_k)|^p + a(x)|\varphi u_k|^p \,\mathrm{d}x}{\nu_{t+1}(\mathbb{R}^n\backslash B_R)} \to 0.$$

Isso nos diz, que o segundo termo de (1.19) converge para 0. Portanto, $u_k \to 0$ em $L^{t+1}(\mathbb{R}^n)$. Ou seja, a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}(\mathbb{R}^n)$ é compacta para $p \leq t < p^{\#}+1$.

Agora, mostraremos que E está imerso compactamente em $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$. Por (1.9),

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_k|^{t+1} \,\mathrm{d}x \quad \leq \quad c_0\|u_k\|^{p/\beta}\|u_k\|^{(\beta(t+1)-p)/\beta}_{(\beta(t+1)-p)/(\beta-1)} + (c_0 + \|A\|_\infty)\|u_k\|^{t+1}_{t+1}.$$

Na primeira parte da demonstração, provamos que a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}(\mathbb{R}^n)$ é compacta para todo $p \leq t+1 < p^{\#}+1$. Assim, (u_k) converge para zero em ambos os espaços $L^{t+1}(\mathbb{R}^n)$ e $L^{(\beta(t+1)-p)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$. Concluímos que (u_k) converge para zero em $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ é compacta para todo $p-1 \leq t < p^{\#}$. $\square$

1.3 Formulação Variacional

Estamos interessados em encontrar soluções fracas para o problema (1.1), isto é, encontrar funções $u \in E$ que para todo $v \in E$ satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + a(x)|u|^{p-2}uv) \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{p-2}uv \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)v \,\mathrm{d}x = 0.$$

Associamos ao problema (1.1) o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) := \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,u)\,\mathrm{d}x. \tag{1.20}$$

Mostraremos nos próximos dois lemas que I está bem definido.

Lema 1.12. *Se a condição (H_4) for válida, então $\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^p \,\mathrm{d}x < \infty$. Além disso,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^p \leq S_{t_0}^{-p}\|b\|_\sigma \|u\|^p.$$

Demonstração. Usando a desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^p \leq \|b\|_\sigma \|u\|_{p\sigma'}^p,$$

em que $1/\sigma + 1/\sigma' = 1$ tal que $p\sigma' < p^{\#} + 1$, consequentemente pela Proposição 1.9 e pela condição (H_4) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^p \,\mathrm{d}x \leq \|b\|_\sigma S_{t_0}^{-p}\|u\|^p.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^p \,\mathrm{d}x < \infty.$$

□

Lema 1.13. *Se as condições $(H_4) - (H_7)$ forem satisfeitas, então $\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,u)| \,\mathrm{d}x < \infty$. Além disso,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,u)| \,\mathrm{d}x \leq \epsilon\|u\|^p \,\mathrm{d}x + C\|u\|^{q+1}. \tag{1.21}$$

Demonstração. Afirmamos que, por (H_5) e (H_6), dados $\epsilon > 0$ e $q \in [p-1, p^{\#}]$, existe $C > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq \epsilon A(x)|s|^p + CA(x)|s|^{q+1} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.22}$$

De fato, pela condição (H_5), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq \epsilon A(x)|s|^{p-1} \quad \text{sempre que} \quad |s| < \delta \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.23}$$

Por outro lado, a condição (H_6) garante que existe $q \in [p-1, p^{\#}]$ tal que

$$|f(x,s)| \leq C_0 A(x)\left(1 + |s|^q\right) \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R},$$

logo,

$$|f(x,s)| \leq CA(x)|s|^q \left(\frac{1}{|s|^q} + 1\right) \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Assim, para todo $|s| \geq \delta$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$|f(x,s)| \leq CA(x) \left(\frac{1}{|\delta|^q} + 1\right) |s|^q,$$

ou seja, para todo $|s| \geq \delta$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x,s)| \leq CA(x)|s|^q. \tag{1.24}$$

Por (1.23) e (1.24),

$$|f(x,s)| \quad \leq \quad \epsilon A(x)|s|^{p-1} + CA(x)|s|^q \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}. \tag{1.25}$$

Como, $F(x,s) = \displaystyle\int_0^s f(x,t)\,\mathrm{d}t$, então

$$|F(x,s)| \quad \leq \quad \epsilon A(x)|s|^p + CA(x)|s|^{q+1} \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}.$$

Isso conclui a Afirmação.

Logo, para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,s)|\,\mathrm{d}x \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|s|^p\,\mathrm{d}x + C\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|s|^{q+1}\,\mathrm{d}x.$$

Por (1.14),

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,u)|\,\mathrm{d}x \leq \epsilon\|u\|^p + C\|u\|^{q+1}.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,u)|\,\mathrm{d}x < \infty, \quad \text{para todo} \quad u \in E.$$

Concluindo, assim, o Lema. □

Pelos Lemas 1.12 e 1.13, e sabendo que $\|\cdot\|$ é uma norma em E, concluímos que o funcional I está bem definido.

Além disso, usando argumentos padrão é possível mostrar que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ e que

$$I'(u)v = \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + a(x)|u|^{p-2}uv)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{p-2}uv\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u)v\,\mathrm{d}x.$$

Consequentemente, os pontos críticos do funcional I são soluções fracas do problema (1.1).

A geometria do Teorema do passo da montanha para o funcional I será estabelecida pelos próximos dois lemas.

Lema 1.14. *Se as condições (H_1) e $(H_3)-(H_6)$ forem satisfeitas, então existirão $\delta, \rho > 0$ tais que*

$$I(u) \geq \delta \quad \textit{se} \quad \|u\| = \rho.$$

Demonstração. De maneira análoga ao Lema 1.13, por (H_5) e (H_6), dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ de forma que $p - 1 < q + \delta < p^{\#}$, existe $C > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq \epsilon A(x)|s|^p + CA(x)|s|^{q+1+\delta} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Como

$$I(u) = \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,u)\,\mathrm{d}x,$$

então

$$I(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - \epsilon\|u\|^p - C\|u\|^{q+1+\delta}.$$

Pelo Lema 1.12,

$$\begin{aligned} I(u) &\geq \frac{1}{p}\|u\|^p - \frac{1}{p}\|b\|_\sigma \|u\|^p_{\sigma' p} - \epsilon\|u\|^p - C\|u\|^{q+1+\delta} \\ &= \|u\|^p \left(\frac{1}{p} - \frac{S_{t_0}^{-p}}{p}\|b\|_\sigma - \epsilon - C\|u\|^{q+1+\delta-p}\right), \end{aligned}$$

Assim, existe $\rho > 0$ tal que $I(u) > 0$ sempre que $\|u\| = \rho$. De fato, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e, como $(1 - S_{t_0}^{-p}\|b\|_\sigma) > 0$, podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{S_{t_0}^{-p}}{p}\|b\|_\sigma - \epsilon\right) - C\rho^{q+1+\delta-p} > 0.$$

Portanto, para ϵ suficientemente pequeno, existe $\rho > 0$ tal que $I(u) > 0$ se $\|u\| = \rho$. $\square$

Lema 1.15. *Se (H_1) e $(H_3) - (H_7)$ forem satisfeitas, então, existirá $e \in E$ com $\|e\| > \rho$ tal que*

$$I(e) < \inf_{\|u\|=\rho} I(u).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ com suporte compacto, $K = \operatorname{supp}(\varphi)$ e $\varphi \geq 0$. Por (H_7) existem $c, d > 0$ tais que

$$F(x,s) \geq c|s|^\mu - d$$

para todo $(x,s) \in K \times [0,\infty)$. De fato, a condição (H_7) nos diz que existe $\mu > p$ tal que

$$0 < \mu F(x,z) \leq zf(x,z) \quad \text{uniformente em} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad z \in (0,\infty).$$

Isso implica que

$$\mu F(x,z) \leq z\frac{\partial F(x,z)}{\partial z} \quad \text{para todo} \quad (x,z) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty),$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} \leq \frac{1}{\mu}\frac{\partial F(x,z)}{F(x,z)} \quad \text{para todo} \quad (x,z) \in \mathbb{R}^n \times (0,\infty),$$

fixado $s_0 > 0$ próximo de 0 e tal que $s > s_0$.

$$\int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}z}{z} \leq \frac{1}{\mu}\int_{F(x,s_0)}^{F(x,s)} \frac{\partial F(x,z)}{F(x,z)} \quad \text{para todo} \quad s > s_0 \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

logo,

$$\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\mu} \leq \ln\left(\frac{F(x,s)}{F(x,s_0)}\right) \quad \text{para todo} \quad s > s_0 \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Dessa forma,

$$F(x,s) \geq \frac{F(x,s_0)}{s_0^{\mu}}s^{\mu} \quad \text{para todo} \quad s > s_0 \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Assim, ficamos com o seguinte fato

$$F(x,s) \geq \left(\min_{x\in K} \frac{F(x,s_0)}{s_0^{\mu}}\right) s^{\mu} \quad \text{para todo} \quad s > s_0 \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

e, portanto, $F(x,s) \geq cs^{\mu}$ para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^n \times [s_0,\infty)$.

Além disso, como F é contínua, então $F(x,z) \geq -A$ para todo $z \in [0,s_0]$. Podemos tomar $d \geq A + cs_0^{\mu}$, logo,

$$F(x,s) \geq cs^{\mu} - d \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in K \times [0,\infty).$$

O que prova a afirmação.

Assim,

$$\begin{aligned}
I(t\varphi) =& \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|\varphi|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,t\varphi)\,\mathrm{d}x \\
\leq& \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{t^p}{p}\int_{K} b(x)|\varphi|^p \,\mathrm{d}x - \int_{K} F(x,t\varphi)\,\mathrm{d}x \\
\leq& \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{t^p}{p}C_1 - ct^{\mu}\int_{K} |\varphi|^{\mu} \,\mathrm{d}x + d\int_{K} \mathrm{d}x \\
=& \left(\frac{1}{p}\|\varphi\|^p - C_1\right)t^p - ct^{\mu}\int_{K} |\varphi|^{\mu} \,\mathrm{d}x + d|K|
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Isso implica que $I(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Considerando $e = t\varphi$ no qual t é suficientemente grande, a prova está terminada. $\square$

1.4 Condição de Palais-Smale

Definição 1.16. Seja E um espaço de Banach real. Dizemos que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale se toda sequência (u_k) em E tal que $|I(u_k)| \leq C$ e $|I'(u_k)| \to 0$ em E^*, possui uma subsequência que converge fortemente em E.

Os próximos resultados mostram que I satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 1.17. *Suponhamos que as condições (H_1) e $(H_3) - (H_7)$ são válidas. Dada uma sequência (u_k) em E tal que*

$$|I(u_k)| \leq C \quad e \quad I'(u_k) \to 0 \quad em \quad E^*, \tag{1.26}$$

então a sequência (u_k) é limitada em E.

Demonstração. Consideremos uma sequência (u_k) em E satisfazendo (1.26).

Notemos que

$$I(u_k) - \frac{1}{\mu} I'(u_k)u_k = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_k\|^p + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^p \, \mathrm{d}x + J_{1,k}, \tag{1.27}$$

onde

$$J_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x,u_k)u_k - \mu F(x,u_k)}{\mu} \, \mathrm{d}x.$$

A condição (H_7) nos diz que existe $\mu > p$ tal que $0 < \mu F(x,s) \leq s f(x,s)$ para todo $s \neq 0$. Assim, $f(x,u_k)u_k - \mu F(x,u_k) \geq 0$. Portanto,

$$J_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x,u_k)u_k - \mu F(x,u_k)}{\mu} \, \mathrm{d}x \geq 0.$$

Consequentemente, em (1.27),

$$I(u_k) - \frac{1}{\mu} I'(u_k)u_k \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_k\|^p + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^p \, \mathrm{d}x.$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua $L^{p\sigma}(\mathbb{R}^n) \to E$, visto que $\sigma p < p^{\#}(\sigma - 1)$, concluímos

$$\begin{aligned} I(u_k) - \frac{1}{\mu} I'(u_k)u_k &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) \|u_k\|^p - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) S_{t_0}^{-1} \|b\|_\sigma \|u_k\|^p \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) \left[1 - S_{t_0}^{-1} \|b\|_\sigma\right] \|u_k\|^p. \end{aligned}$$

A condição (H_4) nos diz que $1 - S_{t_0}^{-1}\|b\|_\sigma > 0$. Assim,

$$I(u_k) - \frac{1}{\mu} I'(u_k)u_k \geq C\|u_k\|^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned} C\|u_k\|^p &\leq I(u_k) - \frac{1}{\mu}I'(u_k)u_k \\ &\leq \left| I(u_k) - \frac{1}{\mu}I'(u_k)u_k \right| \\ &\leq |I(u_k)| + \frac{1}{\mu}|I'(u_k)u_k| \\ &\leq |I(u_k)| + \frac{1}{\mu}\|I'(u_k)\|_{E^*}\|u_k\|. \end{aligned}$$

Como (u_k) satisfaz (1.26), então $|I(u_k)| \leq C_1$ e $\|I'(u_k)\|_{E^*} \leq C_2$. Desta maneira,

$$C\|u_k\|^p \leq C_1 + C_2\|u_k\|.$$

Por consequência, a sequência (u_k) é limitada em E. □

Agora, vamos mostrar que a sequência (u_k) dada no Lema 1.17 satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 1.18. *Seja uma sequência $(u_k) \subset E$ satisfazendo as hipóteses do Lema 1.17. Então o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Como E é um espaço reflexivo e, pelo Lema 1.17, a sequência (u_k) é limitada em E, então podemos extrair uma subsequência (u_{k_i}) de (u_k) tal que $u_{k_i} \rightharpoonup u$ em E. Vamos mostrar que, a menos de subsequência, (u_{k_i}) converge fortemente em E.

Afirmação 1: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_{k_i} - \nabla u)\,\mathrm{d}x \to 0$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}u(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x \to 0$.

De fato, são lineares e contínuos os funcionais definidos por $\widetilde{f}(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi\,\mathrm{d}x$ e $\widehat{f}(\varphi) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}u\varphi\,\mathrm{d}x$, em que $\varphi \in E$. Como $u_{k_i} \rightharpoonup u$ em E, então $\widetilde{f}(u_{k_i}) \to \widetilde{f}(u)$ e $\widehat{f}(u_{k_i}) \to \widehat{f}(u)$. Ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_{k_i} - \nabla u)\,\mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}u(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Afirmação 2: $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |b(x)|u_{k_i}|^{p-2}u_{k_i}(u_{k_i} - u)|\,\mathrm{d}x \to 0.$

De fato, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |b(x)|u_{k_i}|^{p-2}u_{k_i}(u_{k_i}-u)|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |b(x)|^{(p-1)/p}|u_{k_i}|^{p-1}|b(x)|^{1/p}|u_{k_i}-u|\,\mathrm{d}x\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(x)||u_{k_i}|^p\,\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(x)||u_{k_i}-u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\ &\le \|b\|_\sigma^{(p-1)/p}\|u_{k_i}\|_{p\sigma'}^{(p-1)/p}\|b\|_\sigma^{1/p}\|u_{k_i}-u\|_{p\sigma'}^{1/p}\\ &= \|b\|_\sigma\|u_{k_i}\|_{p\sigma'}^{(p-1)/p}\|u_{k_i}-u\|_{p\sigma'}^{1/p}.\end{aligned}$$

A condição (H_4) e a imersão contínua $E \hookrightarrow L^{p\sigma'}(\mathbb{R}^n)$ garantem que $\|u_{k_i}\|_{p\sigma'}$ seja limitada. Além disso, o Lema 1.17, junto com a Proposição 1.11, asseguram que $\|u_{k_i}-u\|_{p\sigma'} \to 0$. Isso conclui a Afirmação 2.

Afirmação 3: $\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,u_{k_i})(u_{k_i}-u)\,\mathrm{d}x\right| \to 0.$
De fato, as condições (H_5) e (H_6) implicam que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x,u_{k_i})(u_{k_i}-u)\right| \le \epsilon\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_{k_i}|^{p-1}|u_{k_i}-u|\,\mathrm{d}x + C\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_{k_i}|^q|u_{k_i}-u|\,\mathrm{d}x. \tag{1.28}$$

Vamos estimar as integrais de (1.28) separadamente.

Primeiro, usamos a desigualdade de Hölder:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_{k_i}|^{p-1}|u_{k_i}-u|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} (A(x))^{(p-1)/p}|u_{k_i}|^{p-1}(A(x))^{1/p}|u_{k_i}-u|\,\mathrm{d}x\\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_{k_i}|^p\,\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_{k_i}-u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\\ &= \|u_{k_i}\|_{L^p_{A(x)}}^{p-1}\|u_{k_i}-u\|_{L^p_{A(x)}}.\end{aligned}$$

Pela Proposição 1.9, existe $C > 0$ tal que $\|u_{k_i}\|_{L^p_{A(x)}}^{p-1} \le C\|u_{k_i}\|^{p-1}$ e, pelo Lema 1.17, $\|u_{k_i}\|^{p-1} \le C_1$, assim, $\|u_{k_i}\|_{L^p_{A(x)}}^{p-1} \le C_2$. Já a Proposição 1.11 garante que $\|u_{k_i}-u\|_{L^p_{A(x)}} \to 0$, uma vez que, $u_{k_i} \rightharpoonup u$ em E. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_{k_i}|^{p-1}|u_{k_i}-u|\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{1.29}$$

De modo análogo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_{k_i}|^q|u_{k_i}-u|\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{1.30}$$

Substituindo (1.29) e (1.30) em (1.28), concluímos a Afirmação 3.

Finalizadas essas afirmações, vamos mostrar que $u_{k_i} \to u$ em E.

Por hipótese, $I'(u_{k_i}) \to 0$, isto é, $\|I'(u_{k_i})\|_* \to 0$. Como

$$\|I'(u_{k_i})\|_* = \sup_{\varphi\in E\setminus\{0\}} \frac{|I'(u_{k_i})\varphi|}{\|\varphi\|},$$

logo $|I'(u_{k_i})\varphi| \leq \epsilon\|\varphi\|$ para todo $\varphi \in E \setminus \{0\}$ e todo $\epsilon > 0$. Em particular, $|I'(u_{k_i})(u_{k_i} - u)| < \epsilon\|u_{k_i} - u\|$. Usando que (u_{k_i}) é uma sequência limitada em E e tomando ϵ suficientemente pequeno, segue-se que $I'(u_{k_i})(u_{k_i} - u) \to 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} I'(u_{k_i})(u_{k_i} - u) &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i}|^{p-2}\nabla u_{k_i}\nabla(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i}|^{p-2}u_{k_i}(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_{k_i}|^{p-2}u_{k_i}(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u_{k_i})(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Com as Afirmações 2 e 3, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i}|^{p-2}\nabla u_{k_i}\nabla(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i}|^{p-2}u_{k_i}(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{1.31}$$

Agora, vamos usar o Lema A.2. Para isso, analisamos dois casos, quando $p \geq 2$ e quando $1 < p < 2$.

Quando $p \geq 2$,

$$\begin{aligned} \|u_{k_i} - u\|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i} - u|^p\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{c_p}\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}|^{p-2}\nabla u_{k_i} - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)(\nabla u_{k_i} - \nabla u)\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{1}{c_p}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}|^{p-2}u_{k_i} - |u|^{p-2}u)(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{c_p}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i}|^{p-2}\nabla u_{k_i}(\nabla u_{k_i} - \nabla u) + a(x)|u_{k_i}|^{p-2}u_{k_i}(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x \\ &- \frac{1}{c_p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^{p-2}\nabla u(\nabla u_{k_i} - \nabla u)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{p-2}u(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Por (1.31) e pela Afirmação 1, concluímos que

$$u_{k_i} \to u \quad \text{em} \quad E.$$

Quando $1 < p < 2$, da mesma forma,

$$\|u_{k_i} - u\|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i} - u|^p\,\mathrm{d}x.$$

Examinaremos os termos separadamente:

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p}{(|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^{(2-p)p/2}}(|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^{(2-p)p/2}\,\mathrm{d}x. \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{|\nabla u_{k_i} - \nabla u|^2}{(|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^{2-p}}\right)^{p/2} [(|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p]^{(2-p)/2}\,\mathrm{d}x. \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u_{k_i} - \nabla u|^2}{(|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^{2-p}}\right)^{p/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p\right)^{(2-p)/2}. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz (2/p)- ésima:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u_{k_i} - \nabla u|^2}{(|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^{2-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p\right)^{(2-p)/p}.$$

Isso implica que,

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u_{k_i} - \nabla u|^2}{(|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^{2-p}} \,\mathrm{d}x.$$

Pelo Lema A.2,

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq \frac{1}{c_p} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}|^{p-2} \nabla u_{k_i} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u)(\nabla u_{k_i} - \nabla u). \tag{1.32}$$

De forma análoga, pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i} - u|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x) \frac{|u_{k_i} - u|^p}{(|u_{k_i}| + |u|)^{(2-p)p/2}} (|u_{k_i}| + |u|)^{(2-p)p/2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (a(x))^{p/2} \left(\frac{|u_{k_i} - u|^2}{(|u_{k_i}| + |u|)^{2-p}}\right)^{p/2} [a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p]^{(2-p)/2} \,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x) \frac{|u_{k_i} - u|^2}{(|u_{k_i}| + |u|)^{2-p}}\right)^{p/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p\right)^{(2-p)/2}. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz (2/p)- ésima:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i} - u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} a(x) \frac{|u_{k_i} - u|^2}{(|u_{k_i}| + |u|)^{2-p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p\right)^{(2-p)/p},$$

o que, por sua vez, implica que

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i} - u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} a(x) \frac{|u_{k_i} - u|^2}{(|u_{k_i}| + |u|)^{2-p}} \,\mathrm{d}x.$$

Usando novamente o Lema A.2,

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i} - u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq \frac{1}{c_p} \int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}|^{p-2} u_{k_i} - |u|^{p-2} u)(u_{k_i} - u). \tag{1.33}$$

Somando (1.32) e (1.33)

$$J_{0,k} = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} + \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i} - u|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}}.$$

Concluímos que,

$$J_{0,k} \leq J_{2,k} + J_{3,k}, \tag{1.34}$$

onde,

$$J_{2,k} = \frac{1}{c_p} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}|^{p-2} \nabla u_{k_i} - |\nabla u|^{p-2} \nabla u)(\nabla u_{k_i} - \nabla u) \,\mathrm{d}x$$

e

$$J_{3,k} = \frac{1}{c_p}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}|^{p-2}u_{k_i} - |u|^{p-2}u)(u_{k_i} - u)\,\mathrm{d}x.$$

Pela Afirmação 1 e por (1.31) resulta-se que $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, quando $k \to \infty$.

Agora, notemos que os termos $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p\,\mathrm{d}x$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p\,\mathrm{d}x$ são limitados, pois a sequência (u_k) é limitada em E. Como $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, quando $k \to \infty$, então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i} - \nabla u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{2/p} \to 0 \quad \text{e} \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i} - u|^p\,\mathrm{d}x\right)^{2/p} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Para concluir que $u_k \to u$ em E, analisaremos os dois casos possíveis.

Caso 1: Suponhamos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p\,\mathrm{d}x \to 0$ e $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p\,\mathrm{d}x \to 0$.

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p\,\mathrm{d}x$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^p\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p\,\mathrm{d}x,$$

concluímos que $u = 0$. Substituindo $u = 0$ em (1.34),

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i}|^p\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}|)^p\,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} + \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i}|^p\,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}|)^p\,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq J_{2,k} + J_{3,k},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_i}|^p\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_i}|^p\,\mathrm{d}x \leq J_{2,k} + J_{3,k}.$$

Como $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, segue-se que $u_k \to 0$ em E.

Caso 2: Suponhamos que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p\,\mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p\,\mathrm{d}x$ não convergem para 0.

Sendo

$$\min\left\{\frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p\,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}}, \frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p\,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}}\right\} 2^{2/p}\|u_{k_i} - u\|^2 \leq J_{0,k}.$$

E, como $I(u_k) \to c > 0$, a menos de subsequência, existe um $\delta > 0$ tal que os termos $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_{k_i}| + |\nabla u|)^p\,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}$, $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_{k_i}| + |u|)^p\,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p} > \delta$. Isto, junto com o fato de $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, quando $k \to \infty$, concluímos que

$$u_k \to u \quad \text{em} \quad E.$$

Portanto, $u_{k_i} \to u$ em E e o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale.

$\square$

1.5 Resultados Principais

Para demonstrar os teoremas principais, precisaremos de um resultado devido a Ambrosetti-Rabinowitz, o famoso Teorema do passo da montanha (Teorema A.12). Para o resultado de multiplicidade usaremos a versão do Teorema do passo da montanha generalizado (Teorema A.13).

1.5.1 Demonstração do Teorema 1.1

Pelo Lema 1.18, o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Além disso, o Lema 1.14 garante a existência de constantes $\rho, \gamma > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} > \gamma$ e, pelo Lema 1.15, existe $e \in E \setminus \partial B_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$. Assim, usando o Teorema A.12, concluímos que I possui um valor crítico $c > \gamma$, o qual é dado por

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{u \in g([0,1])} I(u),$$

onde $\Gamma = \{g \in C^1([0,1], E) : g(0) = 0; g(1) = e\}$. Isso nos diz que o problema (1.1) tem uma solução no nível minimax.

Por fim, notemos que, se $f(x,u)$ for ímpar em u, então o funcional I é par. Tomando $V = \{0\}$ e usando o Lema 1.15, concluímos, pelo Teorema A.13, que I possui uma sequência ilimitada de valores críticos. Portanto, (1.1) tem infinitas soluções.

1.5.2 Demonstração do Teorema 1.2

A fim de demonstrar o Teorema 1.2, é suficiente mostrarmos que a hipótese (H_2) é equivalente a (1.3). Esse será o objetivo dos próximos resultados.

Lema 1.19. *Se a condição (H_2) for válida, então $\lim_{k\to\infty} \nu_s(B(x_k, r)) = \infty$.*

Demonstração. Para quaisquer $\Omega_1 \subset \Omega_2$, temos $\nu_s(\Omega_2) \leq \nu_s(\Omega_1)$. Como $B(x_k, r) \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{R_k}}$, onde $R_k = |x_k|/2 - r$, segue-se que $\nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{R_k}}) \leq \nu_s(B(x_k, r))$. Tomando, em ambos os lados, o limite quando $k \to \infty$, concluímos que $\lim_{k\to\infty} \nu_s(B(x_k, r)) = \infty$. □

Observação 1.20. *Notemos que, pelo Lema 1.10, $\lim_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \setminus B_R) = \infty$ para $p \leq s < p^*$.*

Proposição 1.21. *Se $\nu_s(B(x_k, r)) = \infty$ para algum $s \in (2, p^*)$, então $\lim_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \setminus B_R) = \infty$ para $p \leq s < p^*$.*

Demonstração. De fato, suponha que $\lim_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_R) < \infty$ e (1.3) valem. Então podemos encontrar sequências $(u_k) \subset E$ e $R_k \to \infty$, tais que $u_k \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ com $\operatorname{supp} u_k \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_{R_k}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^p + a(x)|u_k|^p \, \mathrm{d}x \leq C. \tag{1.35}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^s \, \mathrm{d}x = 1. \tag{1.36}$$

A imersão contínua de E em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ junto com (1.35) nos diz que a sequência (u_k) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e, como $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é reflexivo, podemos extrair uma subsequência (u_{k_i}) de (u_k) tal que $u_{k_i} \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Por (1.36), a sequência (u_{k_i}) não converge para zero em $L^s(\mathbb{R}^n)$. Assim, pelo Lema de concentração de Lions, existem uma subsequência (u_{k_j}) de (u_{k_i}), uma sequência $(x_k) \subset \mathbb{R}^n$ e $r_0 > 0$ tais que

$$\int_{B(x_k, r_0)} |u_{k_j}|^s \, \mathrm{d}x \geq c_0 > 0, \quad \text{onde} \quad s \in (2, p^*).$$

Como $\operatorname{supp} u_{k_j} \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{B_{R_k}}$, então $|x_k| \to +\infty$, pois $R_k \to +\infty$.

Definimos

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B(x_k, r_0); \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus B(x_k, r_0). \end{cases}$$

tal que $\varphi_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \varphi_k \leq 1$ e $|\nabla \varphi_k(x)| \leq c/r_0$.

Consideremos $v_k = \varphi_k u_{k_j} \in W_0^{1,p}(B(x_k, 2r_0))$. Logo, $(v_k) \subset E$ e $\int_{B(x_k,2r_0)} |v_k|^s \, \mathrm{d}x \geq c_0$. Além disso, usando o Lema A.1

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_k|^p \, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_k u_{k_j} + \varphi_k \nabla u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \varphi_k|^p |u_{k_j}|^p + |\varphi_k|^p |\nabla u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{c}{r_0}\right)^p |u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_k|^p \, \mathrm{d}x \leq c_1 \|u_{k_j}\|_p^p + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x. \tag{1.37}$$

Por (1.37),

$$\begin{aligned} \|v_k\|^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_k|^p + a(x)|v_k|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq c_1 \|u_{k_j}\|_p^p + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|\varphi_k u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq c_1 \|u_{k_j}\|_p^p + 2^{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_{k_j}|^p \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Assim,

$$\|v_k\|^p \leq c_1\|u_{k_j}\|_p^p + c_2\|u_{k_j}\|^p.$$

Por (H_1),

$$\|v_k\|^p \leq \frac{c_1}{\lambda_1}\|u_{k_j}\|^p + c_2\|u_{k_j}\|^p \leq c_3\|u_{k_j}\|^p.$$

A desigualdade (1.35), nos diz que $\|u_{k_j}\|^p \leq C$. Logo, $\|v_k\|^p \leq C_1$ para algum C_1. Por fim,

$$\begin{aligned}\nu_s(B(x_k, 2r_0)) &\leq \frac{\int_{B(x_k,2r_0)} |\nabla v_k|^p + a(x)|v_k|^p \, \mathrm{d}x}{\int_{B(x_k,2r_0)} |v_k|^s \, \mathrm{d}x} \\ &\leq \frac{\int_{B(x_k,2r_0)} |\nabla v_k|^p + a(x)|v_k|^p \, \mathrm{d}x}{c_0} \\ &\leq \frac{1}{c_0}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_k|^p + a(x)|v_k|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{C_1}{c_0}.\end{aligned}$$

Isso nos leva a uma contradição. Portanto, $\lim\limits_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R}) = \infty$ para $2 < s < p^{\#}$. $\square$

Essa Proposição nos diz que a condição (H_2) vale quando (1.3) é satisfeita, ou seja, essas hipóteses são equivalentes. Assim, recaímos nas hipóteses do Teorema 1.1 e concluímos que o problema (1.1) tem uma solução e, se $f(x,u)$ for ímpar em u, então (1.1) possui uma infinitas soluções, demonstrando assim o Teorema 1.2.

1.6 Algumas observações sobre a condição (H_2).

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar alguns fatos importantes sobre a condição (H_2). Mostraremos que $\lim\limits_{R\to\infty} |\Omega_L \cap (\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_R)| = 0$ é uma condição suficiente para que (H_2) seja válida. Isso faz com que essa condição englobe as condições $(a) - (c)$ da Observação1.3, bastante utilizada por outros autores. Para isso, precisaremos do seguinte lema técnico.

Lema 1.22. *Seja ω_k um conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} |\omega_k| = 0,$$

em que $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue. Então para qualquer $c > 0$ e qualquer $s \in [p, p^*)$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\|\nabla u\|_p^p \leq c} \int_{\omega_k} |u|^s \, \mathrm{d}x\right) = 0.$$

Demonstração. Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\omega_k}|u|^s\,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_{\omega_k}|u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{s/p^*}\left(\int_{\omega_k}|1|^{p^*/(p^*-s)}\,\mathrm{d}x\right)^{p^*-s)/p^*}\\ &= \|u\|^s_{L^{p^*}(\omega_k)}|\omega_k|^{(p^*-s)/p^*}\\ &\leq \|u\|^s_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)}|\omega_k|^{(p^*-s)/p^*}.\end{aligned}$$

Agora, usando a desigualdade de Gagliardo-Niremberg-Sobolev,

$$\int_{\omega_k}|u|^s\,\mathrm{d}x \leq C\|\nabla u\|^s_{L^p(\mathbb{R}^n)}|\omega_k|^{(p^*-s)/p^*}$$

Isso implica que

$$\sup_{\|\nabla u\|_p^p\leq c}\int_{\omega_k}|u|^s\,\mathrm{d}x \leq c|\omega_k|^{(p^*-s)/p^*}.$$

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{\|\nabla u\|_p^p\leq c}\int_{\omega_k}|u|^s\,\mathrm{d}x \leq C\lim_{k\to\infty}|\omega_k|^{(p^*-s)/p^*}=0.$$

O que conclui o Lema. □

Lema 1.23. *Seja $M>0$ tal que*

$$\lim_{R\to\infty}|\Omega_M\cap(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R})|=0, \tag{1.38}$$

em que $\Omega_M=\{x\in\mathbb{R}^n; a(x)<M\}$ e $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue, então a condição (H_2) é válida para todo $s\in[p,p^*)$.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $\lim\limits_{R\to\infty}\nu_p(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R})<\infty$. Isto é, existem duas sequências $(u_k)\subset E$ e $R_k\to\infty$ tais que $(u_k)\subset W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}})$, $\operatorname{supp}u_k\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}}}|\nabla u_k|^p+a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x\leq c \quad \text{com} \quad \int_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}}}|u_k|^p\,\mathrm{d}x=1. \tag{1.39}$$

Para todo $M>0$ consideremos o conjunto $\Omega_{M,R_k}=\Omega_M\cap(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}})$. Por hipótese, $\lim\limits_{R_k\to\infty}|\Omega_{M,R_k}|=0$. Para um M fixado, segue-se que

$$\int_{(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}})\setminus\Omega_{M,R_k}}a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_{M,R_k}}a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x\leq c.$$

Como $a(x)\geq M$ em $(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}})\setminus\Omega_{M,R_k}$,

$$M\int_{(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}})\setminus\Omega_{M,R_k}}|u_k|^p\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_{M,R_k}}a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x\leq c.$$

Assim,

$$M\int_{(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}})\setminus\Omega_{M,R_k}}|u_k|^p\,\mathrm{d}x+M\int_{\Omega_{M,R_k}}|u_k|^p\,\mathrm{d}x-M\int_{\Omega_{M,R_k}}|u_k|^p\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_{M,R_k}}a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x\le c,$$

o que implica,

$$M\int_{(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_{R_k}})}|u_k|^p\,\mathrm{d}x-M\int_{\Omega_{M,R_k}}|u_k|^p\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_{M,R_k}}a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x\le c.$$

Por (1.39) e pelo Lema 1.22,

$$M\le c,$$

contradizendo o fato de M ser arbitrário. Assim, $\lim\limits_{R\to\infty}\nu_p(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R})=\infty$.

A Proposição 1.21 nos diz que

$$\nu_s(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R})\ge(\nu_t(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R}))^{\alpha_1}\quad\text{para todo}\quad p\le t<s<p^*. \tag{1.40}$$

Tomando $t=p$ em (1.40),

$$\nu_s(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R})\ge(\nu_p(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R}))^{\alpha_1}.$$

Como $\lim\limits_{R\to\infty}\nu_p(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R})=\infty$, então $\lim\limits_{R\to\infty}\nu_s(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R})=\infty$ para todo $s\in[p,p^*)$. $\square$

Outro fato importante sobre a condição (H_2), e que foi mostrado por Sirakov em [49] para o caso semilinear e estendida para o caso quase linear, é que ela é uma condição necessária e suficiente para a imersão $E\hookrightarrow L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ ser compacta. A suficiência foi provada no Lema 1.11 e a necessidade é garantida pelo próximo resultado.

Lema 1.24. *A condição (H_2) é necessária para a imersão $E\hookrightarrow L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ ser compacta.*

Demonstração. Suponha que a condição (H_2) não é válida, então existe uma sequência $R_k\to\infty$ tal que

$$\nu_s(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_{R_k})\le C.$$

Isso implica a existência de funções $u_k\in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tais que

$$\operatorname{supp}u_k\subset\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_{R_k}, \tag{1.41}$$

$$\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_k|^p+a(x)|u_k|^p\,\mathrm{d}x\le C+1 \tag{1.42}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n}|u_k|^{t+1}\,\mathrm{d}x=1. \tag{1.43}$$

Como E é um espaço reflexivo e a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ é compacta, então, por (1.42), a sequência (u_k) possui uma subsequência convergente em $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$, isto é, $u_k \to u$ em $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$. Por outro lado, pela Proposição 1.6, a sequência (u_k) é limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Como $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço reflexivo, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Isso implica que $u_k \to u$ em quase toda parte $\mathbb{R}^n$. Por (1.41), $\sup u_k \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_{R_k}$, segue-se que $u_k\big|_{\overline{B}_{R_k}} \equiv 0$. Fixado r_0, então $u_k(x)\big|_{\overline{B}_{R_k}} \to u(x)\big|_{\overline{B}_{R_k}}$ para todo $k > k_0$ e todo $r_k > r_0$. Assim, $u \equiv 0$. Isso contradiz (1.43). Portanto, $u_k \to 0$ em $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $u_k \to 0$ em $L^{t+1}(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Capítulo 2

Sobre uma classe de equações de Schrödinger quase lineares com crescimento exponencial em $\mathbb{R}^n$

2.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar a existência e a multiplicidade de soluções para o problema

$$-\Delta_n u + a(x)|u|^{n-2}u = b(x)|u|^{n-2}u + g(x)f(u) + \varepsilon h \ \text{ em } \ \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

em que $n \geq 2$, $\Delta_n u \equiv \operatorname{div}(|\nabla u|^{n-2}\nabla u)$ é o $n-$Laplaciano, ε é um parâmetro positivo, a, b, $g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções satisfazendo as condições descritas mais adiantes e h pertence ao dual de um espaço de funções apropriado.

Aplicaremos os métodos de minimax, mais precisamente, o Teorema do passo da montanha junto com o princípio variacional de Ekeland, para obter a existência e a multiplicidade de soluções fracas do problema (2.1) no mesmo ambiente variacional estudado no Capítulo 1, no caso em que $p = n$, ou seja, $E \subset W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$E = \left\{ u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n) : \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^n \,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca do problema (2.1) se, para todo $v \in E$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^{n-2}\nabla u \nabla v + a(x)|u|^{n-2}uv) \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{n-2}uv \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u)v \,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, v\rangle = 0,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par de dualidade entre E e seu dual E'.

Sobre o potencial $a(x)$, consideramos as condições:

(a_1) $a : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ é uma função mensurável e $a \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$;

(a_2) $\lambda_1 := \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^n + a(x)|u|^n) \, \mathrm{d}x \, : \, u \in E \quad \text{e} \quad \|u\|_n = 1 \right\} > 0$;

Fazendo $p = n$, nas Proposições 1.6 e 1.7, segue-se que a imersão de E em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e que E é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^n + a(x)|u|^n) \, \mathrm{d}x \right)^{1/n}.$$

Além disso, pela Proposição 1.8, E é um espaço reflexivo.

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $t \geq n$, definimos

$$\nu_t(\Omega) = \inf_{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^n + a(x)|u|^n) \, \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^t \, \mathrm{d}x \right)^{n/t}},$$

e $\nu_t(\emptyset) = \infty$. Para obter o resultado de compacidade, vamos considerar as seguintes hipóteses:

(a_3) $\lim\limits_{R \to \infty} \nu_n(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$.

(a_4) Existe uma função $A(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$, com $A(x) \geq 1$, e constantes $\beta > 1$, c_0, $R_0 > 0$ tais que

$$A(x) \leq c_0 \left[1 + (a(x))^{1/\beta} \right],$$

para todo $|x| \geq R_0$.

Provaremos no Lema 2.7 que as condições $(a_3) - (a_4)$ implicam que a imersão de E em $L^t(\mathbb{R}^n)$ é compacta para todo $t \geq n$.

No que diz respeito à função $g(x)$, assumimos que a mesma é estritamente positiva e pode ser ilimitada em x, desde que seu crescimento seja controlado pelo potencial $a(x)$. Mais precisamente,

(g_1) $g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ é contínua e existe $\lambda_0, \Lambda_0 > 0$ tal que

$$\lambda_0 \leq g(x) \leq \Lambda_0 A(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Afim de simplificar os argumentos, vamos assumir $f(s) = 0$ para todo $s \in (-\infty, 0]$. Além disso, suponhamos que $f(s)$ satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $\displaystyle\lim_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s^{n-1}} = 0$;

(f_2) f tem *crescimento exponencial crítico* em $+\infty$, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to+\infty} f(s)e^{-\alpha s^{n/(n-1)}} = \begin{cases} 0, & \forall\, \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \forall\, \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

(f_3) Existe um número $\mu > n$ tal que

$$0 < \mu F(s) \leq sf(s),$$

para todo $s \geq 0$ e $F(s) = \displaystyle\int_0^s f(t)\mathrm{d}t$.

(f_4) Existem constantes $S_0, M_0 > 0$ tais que para todo $s \geq S_0$

$$0 < F(s) \leq M_0 f(s).$$

Em relação à função $b(x)$, assumimos que

(b_1) $b : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ é uma função mensurável tal que $\|b\|_\sigma < S_{t_0}^n$, em que $\sigma > 1$, $t_0 := \sigma n/(\sigma - 1)$ e S_{t_0} é a melhor constante para a imersão de Sobolev $E \hookrightarrow L^{t_0}(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$S_{t_0} := \inf_{u\in E\setminus\{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^n + a(x)|u|^n)\, \mathrm{d}x\right)^{1/n}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{t_0}\, \mathrm{d}x\right)^{1/t_0}}.$$

Agora, vamos enunciar nossos principais resultados.

Teorema 2.1. *Suponhamos que* $(a_1) - (a_4)$, (g_1), $(f_1) - (f_3)$ *e* (b_1) *são satisfeitas, então existe* $\varepsilon_1 > 0$ *tal que, se* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, *então o problema (2.1) tem uma solução fraca com energia negativa.*

Teorema 2.2. *Suponhamos que* $(a_1) - (a_4)$, (g_1), $(f_1) - (f_4)$ *e* (b_1) *são satisfeitas, e, além disso, assumimos que*

(f_5) *existem constantes* $p > n$ *e* C_p *tais que*

$$f(s) \geq C_p s^{p-1}, \quad \text{para todo} \quad s \geq 0\,,$$

em que

$$C_p > \left[\frac{S_p^p}{\lambda_0} \left(\frac{\beta n}{\beta - 1} \right)^{p-n} \left(\frac{p-n}{p} \right)^{(p-n)/n} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_n} \right)^{(n-1)(p-n)/n} \right]$$

e S_p é a melhor constante para a imersão de Sobolev $E \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$. Então existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, o problema (2.1) tem uma segunda solução fraca.

Teorema 2.3. *Suponhamos que $(a_1) - (a_4)$, (g_1), $(f_1) - (f_5)$, (b_1) são satisfeitas e $h \equiv 0$, então o problema (2.1) tem uma solução fraca não trivial.*

2.2 Alguns resultados preliminares

Nesta seção, provaremos alguns resultados técnicos que serão utilizados nas demonstrações dos resultados principais. Para isso, precisaremos do seguinte resultado mostrado por do Ó [27].

Lema 2.4. *Se $\alpha > 0$ e $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(u)\, \mathrm{d}x < \infty, \tag{2.2}$$

onde

$$\Phi_\alpha(s) := e^{\alpha|s|^{n/(n-1)}} - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{\alpha^j |s|^{jn/(n-1)}}{j!}.$$

Além disso, se $0 < \alpha < \alpha_n$, $\|\nabla u\|_n \leq 1$ e $\|u\|_n \leq M$, então existe uma constante positiva $C = C(\alpha, M)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(u)\, \mathrm{d}x \leq C(\alpha, M), \tag{2.3}$$

onde $\alpha_n := n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$ e ω_{n-1} é a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$.

Proposição 2.5. *Se as condições (a_1), (a_2) e (a_4) forem válidas, então a imersão $E \hookrightarrow L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ será contínua para $t \geq n$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| > R_0\}$ e $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R_0\}$.
Usando a condição (a_4), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{A}} A(x)|u|^t \,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{B}} A(x)|u|^t \,\mathrm{d}x \\
&\leq c_0 \int_{\mathcal{A}} [1 + (a(x))^{1/\beta}]|u|^t \,\mathrm{d}x + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} |u|^t \,\mathrm{d}x \\
&= c_0 \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \,\mathrm{d}x + c_0 \int_{\mathcal{A}} |u|^t \,\mathrm{d}x + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} |u|^t \,\mathrm{d}x \\
&\leq c_0 \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \,\mathrm{d}x + (c_0 + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})}) \int_{\mathbb{R}^n} |u|^t \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \,\mathrm{d}x \quad \leq \quad c_0 \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \,\mathrm{d}x + (c_0 + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})})\|u\|_t^t. \tag{2.4}$$

Vamos analisar os termos de (2.4) separadamente.

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{A}} (a(x)|u|^n)^{1/\beta} \, |u|^{t-n/\beta} \,\mathrm{d}x \\ &\leq \left(\int_{\mathcal{A}} a(x)|u|^n \,\mathrm{d}x \right)^{1/\beta} \left(\int_{\mathcal{A}} \left(|u|^{t-n/\beta}\right)^{\beta/(\beta-1)} \,\mathrm{d}x \right)^{(\beta-1)/\beta}. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \|u\|^{n/\beta} \|u\|_{(t\beta-n)/(\beta-1)}^{(t\beta-n)/\beta}. \tag{2.5}$$

Juntando (2.4) e (2.5), temos a seguinte desigualdade,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \,\mathrm{d}x \quad \leq \quad c_1 \|u\|^{n/\beta} \|u\|_{(t\beta-n)/(\beta-1)}^{(t\beta-n)/\beta} + c_2 \|u\|_t^t. \tag{2.6}$$

Pelo fato de $t \geq n$, de forma análoga a (1.10), deduzimos que $(t - n/\beta)(\beta/(\beta-1)) > n$. Usando novamente as imersões contínuas $E \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{(t\beta-n)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t > n$, concluímos que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{(t\beta-n)/(\beta-1)}^{(t\beta-n)/\beta} \leq C \|u\|^{(t\beta-n)/\beta}. \tag{2.7}$$

Substituindo (2.7) em (2.5), resulta

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \,\mathrm{d}x \leq C \|u\|^t. \tag{2.8}$$

Por fim, as imersões contínuas $E \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$, para todo $t \geq n$, garantem que existe $C > 0$ tal que

$$\|u\|_t^t \leq C \|u\|^t. \tag{2.9}$$

Agora, substituindo (2.9) e (2.8) em (2.4), concluímos que

$$\|u\|_{L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|u\|.$$

Isso completa a demonstração da Proposição 2.5. $\square$

O próximo Lema garante que a condição (a_3) é válida para todo $t \geq n$.

Lema 2.6. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $t \geq n$, então*

$$\nu_t(\Omega) \geq C\left(\nu_n(\Omega)\right)^{\theta_1}, \tag{2.10}$$

onde θ_1 é um número fixo em $(0,1)$.

Demonstração. Pelo Teorema A.6,

$$\|u\|_t \leq C\|u\|_n^{1-\theta}\|\nabla u\|_n^{\theta}, \quad \text{com} \quad \frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{n} \quad \text{e} \quad \theta \in (0,1),$$

Logo,

$$\|u\|_t^n \leq C\|u\|_n^{(1-\theta)n}\|\nabla u\|_n^{\theta n}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1),$$

Sabemos que $\|\nabla u\|_n \leq \|u\|_{1,n}$ e, pela imersão contínua $E \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, concluímos que

$$\|u\|_t^n \leq C\|u\|_n^{(1-\theta)n}\|u\|^{\theta n}.$$

Essa desigualdade será usada da seguinte forma:

$$\frac{1}{\|u\|_t^n} \geq \frac{1}{C\|u\|_n^{(1-\theta)n}\|u\|^{\theta n}}, \quad \text{com} \quad u \neq 0. \tag{2.11}$$

Usando a definição de $\nu_t(\Omega)$ e (2.11),

$$\begin{aligned}
\nu_t(\Omega) &= \inf_{u \in W_0^{1,n}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n + a(x)|u|^n}{\|u\|_t^n} \\
&\geq \inf_{u \in W_0^{1,n}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^n}{C\|u\|_n^{(1-\theta)n}\|u\|^{\theta n}} \\
&\geq \frac{1}{C} \inf_{u \in W_0^{1,n}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^n}{\|u\|_n^{(1-\theta)n}\|u\|^{\theta n}} \\
&= \frac{1}{C} \inf_{u \in W_0^{1,n}(\Omega)\backslash\{0\}} \frac{\|u\|^{(1-\theta)n}}{\|u\|_n^{(1-\theta)n}} \\
&= \frac{1}{C} \inf_{u \in W_0^{1,n}(\Omega)\backslash\{0\}} \left[\frac{\|u\|^n}{\|u\|_n^n}\right]^{(1-\theta)} \\
&= \frac{1}{C}\left(\nu_n(\Omega)\right)^{(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a desigualdade (2.10). □

Proposição 2.7. *Se as condições $(a_1) - (a_4)$ forem válidas, então E estará imerso compactamente em $L^t(\mathbb{R}^n)$ e em $L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$.*

Demonstração. Suponhamos que (u_k) é uma sequência limitada em E. Como E é um espaço reflexivo, então, a menos de subsequência, a sequência (u_k) converge fracamente para $u \in E$. Primeiro, vejamos que $u_k \to u$ em $L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$.

Consideremos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ definida por

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{em } B_R; \\ 1 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_{R+1}. \end{cases}$$

e $|\nabla\varphi(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Assim,

$$\begin{aligned} \|u_k - u\|_t &= \|(1-\varphi)(u_k - u) + \varphi(u_k - u)\|_t \\ &\leq \|(1-\varphi)(u_k - u)\|_t + \|\varphi(u_k - u)\|_t \end{aligned}$$

Usando a definição de φ,

$$\|u_k - u\|_t \leq \|(1-\varphi)(u_k - u)\|_{L^t(B_{R+1})} + \|\varphi(u_k - u)\|_{L^t(\mathbb{R}^n \backslash B_R)}. \tag{2.12}$$

Como a imersão de E em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e a imersão de $W^{1,n}(B_{R+1})$ em $L^t(B_{R+1})$ é compacta para todo $t \geq n$, então, a menos de subsequência, $u_k \to u$ em $L^t(B_{R+1})$. Assim,

$$\|(1-\varphi)(u_k - u)\|_{L^t(B_{R+1})} \to 0.$$

Vejamos, que o segundo termo de (2.12) também converge para 0.

De fato, usando a imersão contínua $E \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, segue-se que existe um $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|\varphi(u_k - u)\|^n &= \int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla\varphi)(u_k - u)|^n + |\varphi(\nabla(u_k - u))|^n + a(x)|\varphi(u_k - u)|^n \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(u_k - u)|^n \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(u_k - u)|^n + a(x)|(u_k - u)|^n \,\mathrm{d}x \\ &\leq \|(u_k - u)\|_{1,n}^n + \|(u_k - u)\|^n \\ &\leq C\|(u_k - u)\|^n + \|(u_k - u)\|^n \\ &= C\|(u_k - u)\|^n. \end{aligned}$$

Como $u_k \rightharpoonup u$ em E, então $\|u_k - u\|^n$ é limitado. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\varphi(u_k - u))|^n + a(x)|\varphi(u_k - u)|^n \,\mathrm{d}x \quad \text{é limitado.}$$

Usando este fato, a definição de $\nu_t(\mathbb{R}^n \backslash B_R)$ e (a_3)

$$\|\varphi(u_k - u)\|_{L^t(\mathbb{R}^n \backslash B_R)} \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^n \backslash B_R} |\nabla(\varphi(u_k - u))|^n + a(x)|\varphi(u_k - u)|^n \,\mathrm{d}x}{\nu_t(\mathbb{R}^n \backslash B_R)} \longrightarrow 0.$$

Isso nos diz, que o segundo termo de (2.12) converge para 0. Portanto, $u_k \to u$ em $L^t(\mathbb{R}^n)$. Mostrando, assim, que a imersão $E \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ é compacta.

Agora, mostraremos que $u_k \to u$ em $L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$.

De fato, por (2.6), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_k - u|^t \,\mathrm{d}x \leq c_1 \|u_k - u\|^{n/\beta} \|u_k - u\|^{(t\beta - n)/\beta}_{(t\beta-n)/(\beta-1)} + c_2 \|u_k - u\|^t_t$$

Pela primeira parte da prova, vimos que a imersão $E \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ é compacta para todo $t \geq n$. Assim, a menos de subsequência, a sequência (u_k) converge para u em ambos os espaços $L^t(\mathbb{R}^n)$ e $L^{(t\beta-n)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$. Portanto, a menos de subsequência, a sequência (u_k) converge para u em $L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente, a imersão $E \hookrightarrow L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ é compacta para todo $t \geq n$. □

Proposição 2.8. *Suponhamos que as condições* $(a_1) - (a_2)$, (a_4), (g_1), $(f_1) - (f_2)$ *e* (b_1) *são satisfeitas, então para todo* $u \in E$ *e* $t \geq n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Além disso, se $\alpha \left(\beta/(\beta-1)\right)^{n/(n-1)} \|u\|^{n/(n-1)} < \alpha_n$, *então, para todo* $t \geq n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x \leq C\|u\|^t.$$

Demonstração. De forma análoga ao que foi feito na demonstração da Proposição 2.5, consideremos $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| > R_0\}$ e $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R_0\}$.

Usando a condição (a_4), obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \Phi_\alpha(u) &= \int_{\mathcal{A}} A(x)|u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x + \int_{\mathcal{B}} A(x)|u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x \\ &\leq c_0 \int_{\mathcal{A}} [1 + (a(x))^{1/\beta}]|u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} |u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x \\ &= c_0 \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \Phi_\alpha(u) + c_0 \int_{\mathcal{A}} |u|^t \Phi_\alpha(u) + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} |u|^t \Phi_\alpha(u). \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x \leq c_0 \int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x + C \int_{\mathbb{R}^n} |u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x. \quad (2.13)$$

Vamos estimar as integrais de (2.13) separadamente:

Sejam $s, s' > 1$ tais que $1/s + 1/s' = 1$ e $1 < s' < \beta/(\beta-1)$, então pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^t \Phi_\alpha(u) \,\mathrm{d}x \leq \|u\|^t_{ts} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_\alpha(u))^{s'} \,\mathrm{d}x \right)^{1/s'}.$$

Pelo Lema A.11,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \leq \|u\|_{ts}^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(us')\,\mathrm{d}x\right)^{1/s'}.$$

Como $t \geq n$, então $ts \geq n$. Portanto, pelas imersões contínuas $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{ts}(\mathbb{R}^n)$ e $E \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \leq C\|u\|^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(us')\,\mathrm{d}x\right)^{1/s'}. \tag{2.14}$$

Por (2.2),

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{2.15}$$

Além disso, para todo $u \in E$ tal que $\alpha(\beta/(\beta-1))^{n/(n-1)}\|u\|^{n/(n-1)} < \alpha_n$, o Lema 2.4 garante que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_\alpha(us')\,\mathrm{d}x\right)^{1/s'} \leq C.$$

Concluímos, por (2.14), que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \leq C\|u\|^t. \tag{2.16}$$

Para a outra integral de (2.13), novamente pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathcal{A}} ((a(x))^{1/\beta}|u|^t)^\tau\,\mathrm{d}x\right)^{1/\tau} \left(\int_{\mathcal{A}} (\Phi_\alpha(u))^{\tau'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/\tau'},$$

em que $\tau' \in (1,\beta)$ com τ próximo de β de forma que $\tau/(\beta-\tau) > 1$. Podemos escrever a última desigualdade por

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \;\; \leq \;\; \left(\int_{\mathcal{A}} (a(x)|u|^n)^{\tau/\beta}|u|^{t\tau - n\tau/\beta})\,\mathrm{d}x\right)^{1/\tau} \left(\int_{\mathcal{A}} (\Phi_\alpha(u))^{\tau'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/\tau'}.$$

Mais uma vez pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \Phi_\alpha(u) \;\; \leq \;\; \left(\int_{\mathcal{A}} (a(x)|u|^n)\right)^{1/\beta} \left(\int_{\mathcal{A}} |u|^{(t\beta-n)\tau/(\beta-\tau)}\right)^{(\beta-\tau)/\beta\tau} \left(\int_{\mathcal{A}} (\Phi_\alpha(u))^{\tau'}\right)^{1/\tau'}.$$

Agora, pelo Lema A.11,

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \Phi_\alpha(u) \;\; \leq \;\; \|u\|^{n/\beta}\|u\|_{(t\beta-n)\tau/(\beta-\tau)}^{(t\beta-n)/\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_\alpha(\tau' u))\right)^{1/\tau'}. \tag{2.17}$$

Como $\tau/(\beta-\tau) > 1$, deduzimos que $(t\beta-n)\tau/(\beta-\tau) \geq n$, e, portanto, valem as imersões contínuas $E \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{(t\beta-n)\tau/(\beta-\tau)}(\mathbb{R}^n)$. Consequentemente,

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta}|u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \;\; \leq \;\; C\|u\|^{n/\beta}\|u\|^{t-n/\beta} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_\alpha(\tau' u))\,\mathrm{d}x\right)^{1/\tau'},$$

ou seja,

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta} |u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \;\leq\; C\|u\|^t \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_\alpha(\tau' u))\,\mathrm{d}x \right)^{1/\tau'}. \tag{2.18}$$

Por (2.2),

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta} |u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{2.19}$$

Por outro lado, o Lema 2.4 garante que a integral $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (\Phi_\alpha(\tau' u))\,\mathrm{d}x$ de (2.18) é uniformemente limitada, uma vez que $\alpha|\tau'|^{n/(n-1)}\|u\|^{n/(n-1)} < \alpha_n$. Assim, concluímos que

$$\int_{\mathcal{A}} (a(x))^{1/\beta} |u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \;\leq\; C\|u\|^t. \tag{2.20}$$

Substituindo (2.15) e (2.19) em (2.13) concluímos a primeira parte da Proposição, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Agora, substituindo (2.16) e (2.20) em (2.13) segue-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^t \Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x \leq C\|u\|^t.$$

Isso conclui a demonstração da Proposição 2.8. □

2.3 Formulação variacional

O funcional $I : E \to \mathbb{R}$ relacionado ao problema (2.1) dado por

$$I(u) = \frac{1}{n}\|u\|^n - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, u\rangle. \tag{2.21}$$

está bem definido pelos próximos dois lemas que demonstraremos a seguir.

Lema 2.9. *Se a condição* (b_1) *for válida, então* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x < \infty$. *Além disso,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x \leq S_{t_0}\|b\|_\sigma \|u\|^n.$$

Demonstração. Usando a desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b(x)|^\sigma\,\mathrm{d}x\right)^{1/\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{n\sigma'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/\sigma'},$$

em que $1/\sigma + 1/\sigma' = 1$ é tal que $\sigma \geq 1$. Portanto, $n\sigma' \geq n$. Assim, podemos usar a imersão $E \hookrightarrow L^{n\sigma'}(\mathbb{R}^n)$ e a condição (b_1), e concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n \, \mathrm{d}x \leq S_{t_0}\|b\|_\sigma \|u\|^n.$$

□

Lema 2.10. *Se as condições $(f_1) - (f_3)$, (b_1) e (g_1) forem satisfeitas, então para todo $u \in E$ tem-se $\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u)\, \mathrm{d}x < \infty$. Além disso, para todo $q \geq 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u)\, \mathrm{d}x \leq \epsilon\Lambda_0 \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^n \, \mathrm{d}x + C\Lambda_0 \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{q+1}\Phi_\alpha(u)\, \mathrm{d}x. \tag{2.22}$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar uma desigualdade a qual é consequência das condições (f_1) e (f_2).

Afirmação: Por (f_1) e (f_2), dado $\epsilon > 0$ e $q \geq n$ para cada $\alpha > \alpha_0$ existe $C > 0$ tal que

$$|f(s)| \leq \epsilon|s|^{n-1} + C|s|^q\Phi_\alpha(s) \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.23}$$

De fato, pela condição (f_1), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$|f(s)| < \epsilon|s|^{n-1} \quad \text{sempre que} \quad 0 < s < \delta. \tag{2.24}$$

A condição (f_2) garante que, para cada $\alpha > \alpha_0$,

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{f(s)}{\Phi_\alpha(s)} = 0,$$

ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe $\gamma > 0$ tal que

$$|f(s)| < \epsilon\Phi_\alpha(s) \quad \text{sempre que} \quad s > \gamma. \tag{2.25}$$

No caso em que $s \in [\delta, \gamma]$, temos que $\Phi_\alpha(\delta) \leq \Phi_\alpha(s)$, para todo $s \in [\delta, \gamma]$, pois Φ_α é uma função crescente. Assim, $1 \leq (\Phi_\alpha(\delta))^{-1}\Phi_\alpha(s)$, para todo $s \in [\delta, \gamma]$. Por outro lado, $f(s)$ é limitada para todo $s \in [\delta, \gamma]$. Assim,

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq C_0 \quad \text{para todo} \quad s \in [\delta, \gamma] \\ &\leq C_0(\Phi_\alpha(\delta))^{-1}\Phi_\alpha(s) \quad \text{para todo} \quad s \in [\delta, \gamma] \\ &\leq C\Phi_\alpha(s) \quad \text{para todo} \quad s \in [\delta, \gamma]. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Por (2.24), (2.25) e (2.26),

$$\begin{aligned} |f(s)| &\leq \epsilon|s|^{n-1} + \epsilon\Phi_\alpha(s) + C\Phi_\alpha(s) \\ &= \epsilon|s|^{n-1} + (\epsilon + C)\Phi_\alpha(s) \\ &\leq \epsilon|s|^{n-1} + C|s|^q\Phi_\alpha(s). \end{aligned}$$

Isso conclui a Afirmação.

Assim, a desigualdade

$$|f(s)| \leq \epsilon|s|^{n-1} + C|s|^q\Phi_\alpha(s) \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

juntamente com (g_1) e o fato da função $\Phi_\alpha(s)$ ser crescente, implicam que

$$\begin{aligned} |g(x)F(u)| &\leq \int_0^u |g(x)f(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\leq \int_0^u \left[\epsilon\Lambda_0 A(x)|s|^{n-1} + C\Lambda_0 A(x)|s|^q\Phi_\alpha(s)\right]\,\mathrm{d}s \\ &\leq \epsilon\Lambda_0 A(x)|u|^n + C\Lambda_0 A(x)\Phi_\alpha(u)\int_o^u |s|^q\,\mathrm{d}s \\ &\leq \epsilon\Lambda_0 A(x)|u|^n + C\Lambda_0 A(x)\Phi_\alpha(u)|u|^{q+1}\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Integrando, ambos os lados, chegamos à desigualdade (2.22), ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)F(u)|\,\mathrm{d}x \leq \epsilon\Lambda_0 \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^n\,\mathrm{d}x + C\Lambda_0 \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{q+1}\Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x.$$

Dessa estimativa, junto com as Proposições 2.5 e 2.8, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(x)F(u)|\,\mathrm{d}x < \infty,$$

ou seja, $g(x)F(u) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Isso é suficiente para concluir o Lema 2.10. □

Os Lemas 2.9 e 2.10 garantem que o funcional I está bem definido.

Além disso, usando argumentos padrão, é possível mostrar que os funcionais $I_1, I_2 : E \to \mathbb{R}$ definidos por

$$I_1(u) = \|u\|^n \quad \text{e} \quad I_2(u) = \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x$$

são de classe $C^1(E, \mathbb{R})$ e

$$\langle I_1'(u), v\rangle = n\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^{n-2}\nabla u\nabla v + a(x)|u|^{n-2}uv)\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \langle I_2'(u), v\rangle = n\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{n-2}uv\,\mathrm{d}x,$$

para todo $v \in E$. Assim,

$$\begin{aligned}\langle I'(u), v\rangle = &\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u|^{n-2}\nabla u \nabla v + a(x)|u|^{n-2}uv)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{n-2}uv\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u)v\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, v\rangle\end{aligned} \tag{2.27}$$

para todo $v \in E$. Por conseguinte, um ponto crítico de I é uma solução fraca de (2.1).

A condição geométrica do Teorema do passo da montanha para o funcional I é estabelecida pelos próximos dois lemas.

Lema 2.11. *Suponhamos que as condições $(a_1) - (a_2)$, (a_4), (g_1), $(f_1) - (f_2)$ e (b_1) sejam satisfeitas, então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para cada $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, existe $\rho_\varepsilon > 0$ tal que*

$$I(u) > 0 \quad \textit{sempre que} \quad \|u\| = \rho_\varepsilon.$$

Além disso, ρ_ε pode ser escolhido de tal modo que $\rho_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Como

$$I(u) = \frac{1}{n}\|u\|^n - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, u\rangle,$$

pela desigualdade (2.22) e pela Proposição 2.5,

$$\begin{aligned}I(u) &\geq \frac{1}{n}\|u\|^n - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x - \epsilon C_1\|u\|^n - C_2\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{q+1}\Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, u\rangle \\ &= \left(\frac{1}{n} - \epsilon C_1\right)\|u\|^n - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x - C_2\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{q+1}\Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, u\rangle.\end{aligned}$$

Pelo Lema 2.9,

$$\begin{aligned}I(u) &\geq \left(\frac{1}{n} - \epsilon C_1\right)\|u\|^n - \frac{S_{t_0}^{-1}}{n}\|b\|_\sigma\|u\|^n - C_2\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{q+1}\Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\|h\|_*\|u\| \\ &= \left(\frac{1}{n} - \epsilon C_1 - \frac{S_{t_0}^{-1}}{n}\|b\|_\sigma\right)\|u\|^n - C_2\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u|^{q+1}\Phi_\alpha(u)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\|h\|_*\|u\|.\end{aligned}$$

Seja $\rho > 0$ tal que $\alpha\rho^{n/(n-1)} < \alpha_n$ e $\|u\| < \rho$. Então, pela Proposição 2.8, obtemos

$$\begin{aligned}I(u) &\geq \left(\frac{1}{n} - \epsilon C_1 - \frac{S_{t_0}^{-1}}{n}\|b\|_\sigma\right)\|u\|^n - C\|u\|^{q+1} - \varepsilon\|h\|_*\|u\| \\ &= \left\{\left(\frac{1}{n} - \epsilon C_1 - \frac{S_{t_0}^{-1}}{n}\|b\|_\sigma\right)\|u\|^{n-1} - C\|u\|^q - \varepsilon\|h\|_*\right\}\|u\|.\end{aligned}$$

Assim, existe $\rho_\varepsilon > 0$ tal que $I(u) > 0$ sempre que $\|u\| = \rho_\varepsilon$. De fato, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e $q > n$, podemos escolher $\rho_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{n} - \epsilon C_1 - \frac{S_{t_0}^{-1}}{n}\|b\|_\sigma\right)\rho_\varepsilon^{n-1} - C\rho_\varepsilon^q > 0.$$

Portanto, para ε suficientemente pequeno, existe $\rho_\varepsilon > 0$ tal que $I(u) > 0$ se $\|u\| = \rho_\varepsilon$. $\square$

Lema 2.12. *Suponhamos que as condições $(a_1)-(a_2)$, (g_1) e (f_1), (f_3) e (b_1) sejam satisfeitas, então existe $e \in E$ com $\|e\| > \rho_\varepsilon$ tal que*

$$I(e) < \inf_{\|u\|=\rho_\varepsilon} I(u).$$

Demonstração. Seja $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ com suporte compacto e $u \geq 0$. A hipótese (f_3) implica que existem constantes positivas c e d tais que

$$F(s) \geq c|s|^\mu - d, \tag{2.28}$$

para todo $s \geq 0$.

De fato, pela condição (f_3), existe $\mu > n$ tal que, para todo $s > 0$, vale

$$0 < \mu F(s) \leq sf(s).$$

Assim,

$$\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\mathrm{d}F(t)}{F(t)}, \quad \text{para todo} \quad t \in A_1.$$

onde $A_1 = \{s \in \mathbb{R}; s > s_0\}$ com $s_0 > 0$. Integrando,

$$\int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{\mu} \cdot \int_{F(s_0)}^{F(s)} \frac{\mathrm{d}F(t)}{F(t)},$$

consequentemente,

$$\left(\frac{s}{s_0}\right)^\mu \leq \frac{F(s)}{F(s_0)} \quad \text{para todo} \quad s \in A_1.$$

Isso implica que,

$$\frac{F(s_0)}{s_0^\mu} \leq \frac{F(s)}{s^\mu} \quad \text{para todo} \quad s \in A_1.$$

Assim, para $c = F(s_0)/s_0^\mu$, segue-se que

$$F(s) \geq cs^\mu \quad \text{para todo} \quad s \in A_1.$$

Logo,

$$F(s) \geq cs^\mu - d \quad \text{para todo} \quad s \in A_1. \tag{2.29}$$

Por outro lado, como $B_1 = \mathbb{R}\backslash A_1$ é compacto e F é contínua, então existe $k > 0$ tal que $F(s) \geq -k$, para todo $s \in B_1$. Temos que a desigualdade $cs^\mu \leq cs_0^\mu$ também é válida para todo $s \in B_1$. Assim, podemos escolher $d > 0$ suficientemente grande de forma que

$$cs_0^\mu - d \leq -k.$$

Logo,

$$F(s) \geq c|s|^{\mu} - d \quad \text{para todo} \quad s \in B_1. \tag{2.30}$$

A desigualdade (2.28) segue-se de (2.29) e (2.30).

Assim, denotando $K = supp(u)$ e usando (g_1) e (b_1), temos que

$$\begin{aligned} I(tu) \leq& \frac{t^n}{n}\|u\|^n - ct^{\mu}\int_K g(x)u^{\mu}\,\mathrm{d}x + d\int_K g(x)\,\mathrm{d}x - t\varepsilon\langle h, u\rangle \\ \leq& \frac{t^n}{n}\|u\|^n - C_1 t^{\mu}\int_K u^{\mu}\,\mathrm{d}x + C_2|K| - t\langle h, u\rangle, \end{aligned}$$

para todo $t > 0$. Isso implica que $I(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Considerando $e = tu$ com t suficientemente grande, concluímos a demonstração. □

A fim de encontrar uma bola apropriada para usar argumento de minimização precisamos do seguinte resultado.

Lema 2.13. *Se as condições $(a_1) - (a_2)$, (g_1), (f_1) e (b_1) forem satisfeitas, então existirão $\eta > 0$ e $v \in E$ com $\|v\| = 1$ tais que $I(tv) < 0$ para todo $0 < t < \eta$. Em particular,*

$$-\infty < c_0 = \inf_{\|u\| \leq \eta} I(u) < 0. \tag{2.31}$$

Demonstração. Seja $v \in E$ a única solução do problema

$$-\Delta_n v + a(x)|v|^{n-2}v = h \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n.$$

Assim, quando $h \neq 0$, temos

$$\langle h, v\rangle = \|v\|^n > 0.$$

Para $t > 0$,

$$\frac{d}{dt}I(tv) = t^{n-1}\|v\|^n - t^{n-1}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v|^n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(tv)v\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, v\rangle.$$

Uma vez que $f(0) = 0$, por continuidade, segue-se que existe $\eta > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}I(tv) < 0, \text{ para todo } 0 < t < \eta.$$

Usando que $I(0) = 0$, temos que $I(tv) < 0$, para todo $0 < t < \eta$. □

2.4 Nível minimax

A fim de obter uma informação mais precisa sobre o nível minimax obtido pelo Teorema do passo da montanha, provaremos os seguintes lemas.

Lema 2.14. *Para qualquer $p > n$, temos que S_p é atingida por uma função não negativa $u_p \in E \setminus \{0\}$.*

Demonstração. Dado qualquer $p > n$, escolhemos uma sequência de funções $(u_k) \subset E$ tal que $u_k \geq 0$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^p \, \mathrm{d}x = 1 \quad \text{e} \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_k|^n + a(x)|u_k|^n) \, \mathrm{d}x \right)^{1/n} \to S_p.$$

Logo (u_k) é limitada em E. Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$\begin{aligned}
&u_k \rightharpoonup u_p \quad \text{fracamente em} \quad E, \\
&u_k \to u_p \quad \text{fortemente em} \quad L^s(\mathbb{R}^n) \quad \text{para todo} \quad s \in [n, +\infty), \\
&u_k(x) \to u_p(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^n.
\end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_k|^p \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} |u_p|^p \, \mathrm{d}x = 1$$

e

$$\|u_p\| \leq \liminf_{k \to +\infty} \|u_k\| = S_p.$$

Por outro lado, como

$$S_p = \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u\|}{\|u\|_p} \quad \text{para} \quad p > n,$$

segue-se que $S_p \leq \|u_p\|$.

Portanto, $S_p = \|u_p\|$. □

Lema 2.15. *Seja $\Psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ uma função definida por*

$$\Psi(t) = \frac{t^n}{n} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_p|^n + a(x)|u_p|^n) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} g(x) F(t u_p) \, \mathrm{d}x.$$

Suponhamos que (g_1) e (f_5) são válidas. Então

$$\max_{t \geq 0} \Psi(t) < \frac{1}{n} \left(\frac{\beta - 1}{n\beta} \right)^n \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0} \right)^{n-1}.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.14,

$$S_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_p|^n + a(x)|u_p|^n)\, \mathrm{d}x \right)^{1/n} \quad \text{com} \quad \|u_p\|_p = 1. \tag{2.32}$$

Por (f_5),

$$F(tu_p) = \int_0^{tu_p} f(s)\, \mathrm{d}s \geq \int_0^{tu_p} c_p s^{p-1}\, \mathrm{d}s = t^p \frac{c_p}{p} |u_p|^p.$$

Juntamente com (g_1), concluímos que

$$g(x)F(tu_p) \geq t^p \frac{\lambda_0 c_p}{p} |u_p|^p.$$

Assim,

$$\Psi(t) \leq \frac{t^n}{n} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_p|^n + a(x)|u_p|^n)\ \mathrm{d}x - t^p \frac{\lambda_0 C_p}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |u_p|^p\, \mathrm{d}x.$$

Por (2.32),

$$\Psi(t) \leq \frac{t^n}{n} S_p^n - t^p \frac{\lambda_0 C_p}{p} \leq \max_{t \geq 0} \left[\frac{t^n}{n} S_p^n - t^p \frac{\lambda_0 C_p}{p} \right].$$

Observemos que a função

$$h(t) = \frac{t^n}{n} S_p^n - t^p \frac{\lambda_0 C_p}{p}$$

atinge seu valor máximo em $t = \left(\frac{S_p^n}{\lambda_0 c_p} \right)^{1/(p-n)}$. Assim,

$$\max_{t \geq 0} \left[\frac{t^n}{n} S_p^n - t^p \frac{\lambda_0 C_p}{p} \right] = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{S_p^p}{C_p \lambda_0} \right)^{n/(p-n)}.$$

Por outro lado, usando (f_5), deduzimos que

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \right) \left(\frac{S_p^p}{C_p \lambda_0} \right)^{n/(p-n)} < \frac{1}{n} \left(\frac{\beta - 1}{n\beta} \right)^n \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0} \right)^{n-1}.$$

Logo,

$$\max_{t \geq 0} \Psi(t) < \frac{1}{n} \left(\frac{\beta - 1}{n\beta} \right)^n \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0} \right)^{n-1}.$$

□

Observação 2.16. *Segue-se imediatamente que, se ε for suficientemente pequeno, então*

$$\max_{t \geq 0} \{I(tu_p)\} < \frac{1}{n} \left(\frac{\beta - 1}{n\beta} \right)^n \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0} \right)^{n-1}.$$

2.5 Sobre as sequências de Palais-Smale

Para provar que as sequências de Palais-Smale convergem para uma solução fraca do problema (2.1) precisamos estabelecer o seguinte:

Lema 2.17. *Se as condições* (a_1), (a_2), (b_1) *e* (f_3) *forem satisfeitas e* $(u_k) \subset E$ *for um sequência tal que* $I(u_k) \to c$ *e* $I'(u_k) \to 0$, *então*

$$\|u_k\| \leq C, \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|f(u_k)u_k|\, \mathrm{d}x \leq C \quad e \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_k)\, \mathrm{d}x \leq C.$$

Demonstração. Seja $(u_k) \subset E$ uma sequência tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$, isto é, para algum $\varphi \in E$,

$$\frac{1}{n}\|u_k\|^n - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^n\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_k)\, \mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, u_k\rangle = c + \delta_k \tag{2.33}$$

e

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} [|\nabla u_k|^{n-2}\nabla u_k \nabla\varphi + a(x)|u_k|^{n-2}u_k\varphi - b(x)|u_k|^{n-2}u_k\varphi - g(x)f(u_k)\varphi]\, \mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, u_k\rangle\right| \leq \varepsilon_k\|\varphi\|, \tag{2.34}$$

onde $\delta_k \to 0$ e $\varepsilon_k \to 0$ quando $k \to \infty$.

Observemos que, dado $\mu > n$ como em (f_3), segue-se

$$\begin{aligned}\mu I(u_k) - I'(u_k)u_k = &\left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\|u_k\|^n - \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^n\, \mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left[\mu F(u_k) - f(u_k)u_k\right]\, \mathrm{d}x - (\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle.\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\begin{aligned}\mu I(u_k) - I'(u_k)u_k + (\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle = &\left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\|u_k\|^n - \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^n\, \mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\left[\mu F(u_k) - f(u_k)u_k\right]\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Por (f_3), $\mu F(s) - f(s)s \leq 0$ para todo $s \geq 0$. Assim,

$$\mu I(u_k) - I'(u_k)u_k + (\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle \geq \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\|u_k\|^n - \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^n\, \mathrm{d}x.$$

Pelo Lema 2.9,

$$\begin{aligned}\mu I(u_k) - I'(u_k)u_k + (\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle &\geq \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)\|u_k\|^n - \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)S_{t_0}^{-n}\|b\|_\sigma\|u_k\|^n. \\ &\geq \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)(1 - S_{t_0}^{-n}\|b\|_\sigma)\|u_k\|^n.\end{aligned}$$

Assim,

$$\mu I(u_k) - I'(u_k)u_k + (\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle \geq \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)(1 - S_{t_0}^{-n}\|b\|_\sigma)\|u_k\|^n. \tag{2.35}$$

Notemos que $\mu/n - 1 > 0$ e por (b_1), $1 - S_{t_0}^{-n}\|b\|_\sigma > 0$. Além disso,

$$\begin{aligned}\mu I(u_k) - I'(u_k)u_k + (\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle \leq& |\mu I(u_k) - I'(u_k)u_k + (\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle| \\ \leq& \mu|I(u_k)| + |I'(u_k)u_k| + |(\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle|.\end{aligned}$$

Tomando $\varphi = u_k$ em (2.34), segue-se que $|I'(u_k)u_k| \leq \varepsilon_k\|u_k\|$ e, por (2.33), $|I(u_k)| = c+\delta_k$. Assim,

$$\mu I(u_k) - I'(u_k)u_k + (\mu - 1)\varepsilon\langle h, u_k\rangle \leq \mu(c + \delta_k) + \varepsilon_k\|u_k\| + (\mu - 1)\varepsilon\|h\|_*\|u_k\|.$$

Substituindo em (2.35), concluímos que

$$\mu(c + \delta_k) + \varepsilon_k\|u_k\| + (\mu - 1)\varepsilon\|h\|_*\|u_k\| \geq \left(\frac{\mu}{n} - 1\right)(1 - S_{t_0}^{-n}\|b\|_\sigma)\|u_k\|^n.$$

Consequentemente, $\|u_k\| \leq C$ e, por (2.33) e (2.34), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x \leq C \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)|f(u_k)u_k|\,\mathrm{d}x \leq C.$$

□

Para mostrar que o limite fraco de uma sequência de Palais-Smale em E é uma solução fraca do problema (2.1), argumentamos como em [22, Lema 2.4]. Para isso, necessitaremos do seguinte

Lema 2.18. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então, para qualquer sequência (u_k) em $L^1(\Omega)$ tal que $u_k \to u$ em $L^1(\Omega)$,*

$$g(x)f(u_k) \in L^1(\Omega) \quad e \quad \int_\Omega g(x)|f(u_k)u_k|\,\mathrm{d}x \leq C_1,$$

temos, a menos de subsequência, que

$$g(x)f(u_k) \to g(x)f(u) \quad em \quad L^1(\Omega).$$

Corolário 2.19. *Se as condições (a_1), (a_2), (b_1) e (f_3) forem satisfeitas e $(u_k) \subset E$ é um sequência tal que $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$, então (u_k) possuirá uma subsequência, que também será denotada por (u_k), que converge fracamente para uma solução fraca $u \in E$ do problema (2.1). Além disso, se $h \neq 0$, segue-se que $u \neq 0$.*

Demonstração. Pelo Lema 2.17, a sequência (u_k) é limitada em E. Como E é um espaço reflexivo, então, a menos de subsequência, $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em E, assim, a Proposição 2.7 garante que, $u_k \to u$ em $L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$ e $u_k(x) \to u(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Argumentando como em [26, Lema 4], concluímos que

$$|\nabla u_k|^{n-2}\nabla u_k \rightharpoonup |\nabla u|^{n-2}\nabla u \text{ fracamente em } \left(L^{n/(n-1)}(B_R)\right)^n, \text{ para todo } R > 0. \tag{2.36}$$

Além disso, como $a(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_k|^{n-2}u_k\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u|^{n-2}u\varphi \,\mathrm{d}x \tag{2.37}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^{n-2}u_k\varphi \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^{n-2}u\varphi \,\mathrm{d}x. \tag{2.38}$$

De fato, usando (a_1), (b_1) e desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|u_k|^{n-2}u_k - |u|^{n-2}u)\varphi \,\mathrm{d}x \leq \|a\|_{L^\infty(\mathrm{supp}\varphi)}\|\varphi\|_\infty \int_{\mathrm{supp}\,\varphi} ||u_k|^{n-2}u_k - |u|^{n-2}u| \,\mathrm{d}x$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)(|u_k|^{n-2}u_k - |u|^{n-2}u)\varphi \,\mathrm{d}x \leq \|b\|_\sigma\|\varphi\|_\infty \left(\int_{\mathrm{supp}\,\varphi} ||u_k|^{n-2}u_k - |u|^{n-2}u|^{\sigma'} \,\mathrm{d}x\right)^{1/\sigma'}.$$

Como $u_k \rightharpoonup u$ em E, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema A.4), $u_k \to u$ em $L^t(\mathrm{supp}\,\varphi)$ para todo $t \geq 1$. Pelo Teorema A.7, existe uma função $h \in L^t(\mathrm{supp}\,\varphi)$ tal que $|u_k| \leq h$ em $\mathrm{supp}\,\varphi$. Assim, $|u_k|^{n-1} \leq (h(x))^{n-1}$ em $L^1(\mathrm{supp}\,\varphi)$. Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathrm{supp}\,\varphi} ||u_k|^{n-2}u_k - |u|^{n-2}u| \,\mathrm{d}x \to 0.$$

Isso conclui (2.37) e (2.38).

Agora, passando o limite em (2.34) e usando (2.36), (2.37), (2.38) e o Lema 2.18,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^{n-2}\nabla u\nabla\varphi + a(x)|u|^{n-2}u\varphi - b(x)|u|^{n-2}\varphi - g(x)f(u)\varphi\right) \,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, \varphi\rangle = 0$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso em E então u é uma solução fraca para o problema (2.1). Além disso, se $h \neq 0$, então $u \neq 0$. □

Lema 2.20. *Se as condições (a_1), (a_2), (b_1) e (f_3) forem satisfeitas e (u_k) é uma sequência de Palais-Smale para o funcional I em qualquer nível, com*

$$\liminf_{k\to\infty} \|u_k\| < \frac{\beta - 1}{\beta n}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{(n-1)/n}, \tag{2.39}$$

então (u_k) *possui uma subsequência que converge fortemente para uma solução* u *do problema* (2.1).

Demonstração. Extraindo uma subsequência de (u_k) se necessário, podemos supor que

$$\liminf_{k\to\infty}\|u_k\| = \lim_{k\to\infty}\|u_k\|.$$

Pelo Lema 2.17 e pelo Corolário 2.19, segue-se que $u_k \rightharpoonup u$ em E, em que u é uma solução do problema (2.1). Escrevendo $u_k = u + w_k$, resulta que $w_k \rightharpoonup 0$ em E. Assim, $w_k \to 0$ em $L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$ e $w_k \to 0$ em $L^t_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \geq 1$. Argumentando como em [26, Lema 4], deduzimos que $\nabla u_k(x) \to \nabla u(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Portanto, pelo Lema de Brezis-Lieb (ver Teorema A.9), obtemos

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k\|^n = \|u\|^n + \lim_{k\to\infty}\|w_k\|^n. \tag{2.40}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u)u\,\mathrm{d}x \quad \text{quando } k\to\infty. \tag{2.41}$$

De fato, como $u \in E$, dado $\tau > 0$, existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|\varphi - u\| < \tau$. Assim,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u\,\mathrm{d}x \right.&-\left.\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u)u\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)(u-\varphi)\,\mathrm{d}x\right|\\ &+\ \|\varphi\|_\infty\int_{supp\varphi} g(x)|f(u_k)-f(u)|\,\mathrm{d}x\\ &+\ \left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u)(u-\varphi)\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

Por (2.27),

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)(u-\varphi)\,\mathrm{d}x\right| &\leq |I'(u_k)(u-\varphi)| + \left|\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_k|^{n-2}\nabla u_k\nabla(u-\varphi)\,\mathrm{d}x\right|\\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_k|^{n-2}u_k\nabla(u-\varphi)\,\mathrm{d}x\right|\\ &+ \left|\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^{n-2}u_k\nabla(u-\varphi)\,\mathrm{d}x\right| + |\varepsilon\langle h, u-\varphi\rangle|.\end{aligned}$$

Como $\|I'(u_k)\|_* = \sup_{v\in E\setminus\{0\}}\dfrac{|I'(u_k)v|}{\|v\|} \to 0$, então $|I'(u_k)v| \leq \tau_k\|v\|$ com $\tau_k \to 0$. Portanto, $|I'(u_k)(u-\varphi)| \leq \tau_k\|u-\varphi\|$ com $\tau_k \to 0$. Além disso, usando a desigualdade de Hölder e as imersões contínuas $E \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$ segue-se que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)(u-\varphi)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \tau_k\|u-\varphi\| + \|\nabla u_k\|^{n-1}\|u-\varphi\| \\
&+ \left(\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_k|^n\,\mathrm{d}x\right)^{(n-1)/n}\|u-\varphi\| \\
&+ C\|b\|_\sigma\|u_k\|^{n-1}\|u-\varphi\| + \varepsilon\|h\|_*\|u-\varphi\| \\
&\leq C\|u-\varphi\| < C\tau,
\end{aligned}$$

onde C independe de k e τ. Similarmente, usando que $I'(u)(u-\varphi)=0$,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u)(u-\varphi)\,\mathrm{d}x\right| < C\tau.$$

Pelo Lema 2.18, $g(x)f(u_k) \to g(x)f(u)$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e, pela desigualdade anterior, concluímos

$$\lim_{k\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u)u\,\mathrm{d}x\right| < 2C\tau$$

e isso mostra a convergência (2.41) pois τ é arbitrário.

Agora, por (2.27),

$$\lim_{k\to\infty} I'(u_k)u_k = \lim_{k\to\infty}\|u_k\|^n - \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_k|^n\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u_k\,\mathrm{d}x - \varepsilon\lim_{k\to\infty}\langle h, u_k\rangle.$$

Por (2.40),

$$\lim_{k\to\infty} I'(u_k)u_k = \|u\|^n + \lim_{k\to\infty}\|w_k\|^n - \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u|^n\,\mathrm{d}x - \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)(u+w_k)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, u\rangle.$$

Por (2.41),

$$\lim_{k\to\infty} I'(u_k)u_k = I'(u)u + \lim_{k\to\infty}\|w_k\|^n - \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)w_k\,\mathrm{d}x.$$

Como (u_k) é uma sequência de Palais Smale, segue-se que

$$\lim_{k\to\infty}\|w_k\|^n = \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)w_k\,\mathrm{d}x.$$

Agora, mostraremos que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)w_k\,\mathrm{d}x = 0.$$

De (2.23) com $q=n$, dado $\epsilon>0$, existe $C_\epsilon>0$ tal que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)w_k\,\mathrm{d}x\right| \leq \epsilon\,\Lambda_0\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_k|^{n-1}|w_k|\,\mathrm{d}x + C_\epsilon\,\Lambda_0\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_k|^n\Phi_{\alpha_0+\epsilon}(u_k)\,|w_k|\,\mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Hölder e pela Proposição 2.5,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_k|^{n-1}|w_k|\,\mathrm{d}x \leq \|u_k\|^{n-1}_{L^n_{A(x)}(\mathbb{R}^n)}\|w_k\|_{L^n_{A(x)}(\mathbb{R}^n)} \leq C\|u_k\|^{n-1}\|w_k\|_{L^n_{A(x)}(\mathbb{R}^n)}.$$

e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_k|^n \Phi_{\alpha_0+\epsilon}(u_k)\,|w_k|\,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_k|^{\frac{n^2}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)[\Phi_{\alpha_0+\epsilon}(u_k)]^n|w_k|^n\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leq C\|u_k\|^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\Phi_{\alpha_0+\epsilon}(nu_k)\,|w_k|^n\right)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, por (2.39) segue-se que

$$(\alpha_0+\varepsilon)\left(\frac{n(\beta-\varepsilon)}{\beta-\varepsilon-1}\right)^{n/(n-1)} \|u_k\|^{n/(n-1)} < \alpha_n,$$

como na Proposição 2.8, concluímos, para todo s suficientemente grande, que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\Phi_{\alpha_0+\varepsilon}(nu_k)\,|w_k|^n\,\mathrm{d}x \leq C_1\|w_k\|_{ns}^n + C_2\|w_k\|^{n/\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|w_k|^{(\beta n-n)(\beta-\varepsilon)/\varepsilon}\right)^{\varepsilon/\beta(\beta-\varepsilon)}.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, $(\beta n-n)(\beta-\varepsilon)/\varepsilon > n$. Portanto, pela imersão compacta $E \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ para $t \geq n$ e pela desigualdade anterior,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)w_k\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Consequentemente, $\|w_k\| \to 0$ e segue-se o resultado. □

2.6 Demonstrações dos Teoremas 2.1 e 2.2

A prova da existência da primeira solução do problema (2.1) segue-se por um argumento de minimização e pelo princípio variacional de Ekeland.

Proposição 2.21. *Suponhamos que as condições $(a_1)-(a_4)$, (g_1), $(f_1)-(f_3)$ e (b_1) sejam válidas. Se existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para cada ε em que $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, então o problema* (2.1) *tem uma solução do tipo mínimo local u_0 com $I(u_0) = c_0 < 0$, onde c_0 foi definida em (2.31).*

Demonstração. Seja ρ_ε como no Lema 2.11. Podemos escolher $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\rho_\varepsilon < \frac{\beta-1}{\beta n}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{(n-1)/n}.$$

Como $\overline{B}_{\rho_\varepsilon}$ é um espaço métrico completo (com a métrica induzida pela norma de E), convexo, e o funcional I é de classe C^1 e limitado sobre $\overline{B}_{\rho_\varepsilon}$, pelo princípio variacional de Ekeland, existe uma sequência (u_k) em $\overline{B}_{\rho_\varepsilon}$ tal que

$$I(u_k) \to c_0 = \inf_{\|u\|\leq\rho_\varepsilon} I(u) \;\text{ e }\; \|I'(u_k)\|_* \to 0.$$

Observando que

$$\|u_k\| \leq \rho_\varepsilon < \frac{\beta - 1}{\beta n}\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{(n-1)/n},$$

pelo Lema 2.20 segue-se que existe uma subsequência de (u_k) que converge fortemente para uma solução u_0 de (2.1). Portanto, $I(u_0) = c_0 < 0$. □

A prova da existência da segunda solução de (2.1) é uma consequência do Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale.

Proposição 2.22. *Suponhamos que as condições* $(a_1) - (a_4)$, (g_1), $(f_1) - (f_5)$ *e* (b_1) *sejam satisfeitas. Se* $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, *então o problema* (2.1) *terá uma solução do tipo passo da montanha* u_M.

Demonstração. Pelos Lemas 2.11 e 2.12, I satisfaz as hipóteses do Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale. Assim, usando o Teorema A.14, existe uma sequência (u_k) em E satisfazendo

$$I(v_k) \to c_M > 0 \quad \text{e} \quad \|I'(v_k)\|_* \to 0,$$

onde c_M é o nível do passo da montanha, isto é,

$$c_M = \inf_{\gamma \in \Lambda} \max_{t \in [0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Lambda = \{\gamma : [0,1] \to E;\ \gamma \text{ é contínua}, \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$. Agora, pelo Corolário 2.19, a sequência (v_k) converge fracamente para a solução u_M de (2.1). □

Como $v_k \rightharpoonup u_M$ em E e $u_k \to u_0$ em E, não podemos concluir que u_M e u_0 são distintas imediatamente. Esse será o objetivo dos próximos resultados. Para fazer isso, precisamos de um refinamento da Desigualdade de Trudinger-Moser, provada em [29].

Lema 2.23. *Seja* (u_k) *uma sequência em* $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ *tal que* $\|u_k\|_{1,n} = 1$ *e* $u_k \rightharpoonup u \not\equiv 0$ *em* $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. *Se*

$$0 < p < p_n(u) = \frac{\alpha_n}{\left(1 - \|u\|_{1,n}^n\right)^{1/(n-1)}}$$

então,

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^n} \Phi_p(u_k)\, \mathrm{d}x < \infty. \tag{2.42}$$

Além disso, $p_n(u)$ *é ótimo no sentido em que o supremo* (2.42) *é infinito para* $p \geq p_n(u)$.

Semelhantemente a N. Lam e G. Lu [34], temos a seguir:

Lema 2.24. *Suponhamos que as condições $(a_1)-(a_4)$ e $(f_1)-(f_4)$ sejam satisfeitas. Seja $(u_k) \subset E$ uma sequência tal que $u_k \rightharpoonup u_0$ em E, $I(u_k) \to c$ e $I'(u_k) \to 0$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_0)\,\mathrm{d}x.$$

Demonstração. Pelo Lema 2.18, temos que, para todo $R > 0$

$$\int_{B_R} g(x)f(u_k)\,\mathrm{d}x \to \int_{B_R} g(x)f(u_0)\,\mathrm{d}x.$$

Assim, existe $p(x) \in L^1(B_R)$ tal que

$$g(x)f(u_k(x)) \leq p(x) \text{ quase sempre em } B_R.$$

Seja $B = \{x \in B_R : u_k(x) \in [0, S_0] \text{ para todo } k \in \mathbb{N}\}$. Então, usando (f_4), concluímos que

$$g(x)F(u_k(x)) \leq \|g\|_{L^\infty(B_R)} \sup_B F(u_k(x)) + M_0 g(x)f(u_k(x))$$

quase sempre em B_R. Pelo Teorema da convergência dominada generalizado de Lebesgue, obtemos

$$\int_{B_R} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x \to \int_{B_R} g(x)F(u_0)\,\mathrm{d}x.$$

Vamos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_k) \to \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_0)\,\mathrm{d}x.$$

É suficiente provar que, dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x < \delta \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} g(x)F(u_0)\,\mathrm{d}x < \delta.$$

Para isso, lembremos alguns fatos sobre a não linearidade: existem $C_1, C_2 > 0$ tais que, para $(x, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$:

$$\begin{gathered} g(x)F(s) \leq C_1 A(x)|s|^n + C_2 g(x)f(s), \\ g(x)F(s) \leq C_1 A(x)|s|^n + C_2 A(x)|s|\Phi_\alpha(s), \\ \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u_k\,\mathrm{d}x \leq C \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x \leq C. \end{gathered} \tag{2.43}$$

Agora, para cada $K > 0$ e sendo $|s| \leq K$:

$$\begin{aligned} g(x)F(s) &\leq C_1 A(x)|s|^n + C_2 A(x)|s|\Phi_\alpha(s) \\ &= C_1 A(x)|s|^n + C_2 A(x) \sum_{j=n-1}^{+\infty} \frac{\alpha^j |s|^{\frac{nj}{n-1}+1}}{j!} \\ &\leq C A(x)|s|^n \left(1 + \sum_{j=n-1}^{+\infty} \frac{\alpha^j |K|^{\frac{nj}{n-1}+1-n}}{j!}\right) \\ &\leq C(\alpha, K) A(x)|s|^n. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R\,:\,|u_k|\le K\}} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x &\le C(\alpha,K)\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R\,:\,|u_k|\le K\}} A(x)|u_k|^n\,\mathrm{d}x\\ &\le 2^{n-1}C(\alpha,K)\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R\,:\,|u_k|\le K\}} A(x)|u_k-u_0|^n\,\mathrm{d}x\\ &+ 2^{n-1}C(\alpha,K)\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R\,:\,|u_k|\le K\}} A(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Usando a imersão compacta $E\hookrightarrow L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$, $t\ge n$ e observando que $u_k\rightharpoonup u_0$ fracamente em E, podemos escolher R tal que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R\,:\,|u_k|\le K\}} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x<\delta/3.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R\,:\,|u_k|>K\}} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x &\le C_1\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} A(x)|u_k|^n + C_2\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R\,:\,|u_k|>K\}} g(x)f(u_k)\\ &\le \frac{C_1}{K}\int_{\mathbb{R}^n\setminus B_R} A(x)|u_k|^{n+1}+\frac{C_2}{K}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u_k\\ &\le \frac{C_1}{K}\|u_k\|^{n+1}+\frac{C_2}{K}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u_k\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Como $\|u_k\|$ é limitado e, por (2.43), podemos escolher K tal que

$$\int_{\{x\in\mathbb{R}^n\setminus B_R\,:\,|u_k|>K\}} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x\le\frac{C}{K}<2\delta/3.$$

Combinando todas as estimativas acima, chegamos em

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_k)\,\mathrm{d}x\to\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_0)\,\mathrm{d}x.$$

□

Proposição 2.25. *Existe $\varepsilon_2>0$ tal que, para cada ε com $0<\varepsilon<\varepsilon_2$, as soluções para o problema (2.1) obtidas nas Proposições 2.21 e 2.22 são distintas.*

Demonstração. Pelas Proposições 2.21 e 2.22, existem sequências limitadas (u_k) e (v_k) em E tais que

$$u_k\to u_0\quad\text{em}\quad E,\quad I(u_k)\to c_0<0,\quad I'(u_k)\to 0 \tag{2.44}$$

e

$$v_k\rightharpoonup u_M\quad\text{em}\quad E,\quad I(v_k)\to c_M>0,\quad I'(v_k)\to 0, \tag{2.45}$$

onde u_0 e u_M são as soluções do problema 2.1. Suponhamos, por contradição, que $u_0=u_M$.

Considere

$$w_k = \frac{v_k}{\|v_k\|_{1,n}} \quad \text{e} \quad w_0 = \frac{u_0}{\lim_{k\to\infty} \|v_k\|_{1,n}}. \tag{2.46}$$

Assim, obtemos que $\|w_k\|_{1,n} = 1$ e que $w_k \rightharpoonup w_0$ em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. De fato, para todo $\widetilde{f}$ no dual de $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \widetilde{f}(w_k) &= \lim_{k\to\infty} \widetilde{f}\left(\frac{v_k}{\|v_k\|_{1,n}}\right) = \lim_{k\to\infty} \left[\frac{\widetilde{f}(v_k)}{\|v_k\|_{1,n}}\right] \\
&= \frac{\widetilde{f}(u_0)}{\lim\limits_{k\to\infty} \|v_k\|_{1,n}} = \widetilde{f}\left(\frac{u_0}{\lim\limits_{k\to\infty} \|v_k\|_{1,n}}\right) \\
&= \widetilde{f}(w_0),
\end{aligned}$$

ou seja, $w_k \rightharpoonup w_0$ em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$.

Como $v_k \rightharpoonup u_0$ em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, então pela semicontinuidade da norma, a menos de subsequência, segue-se que $\lim\limits_{k\to\infty} \|v_k\|_{1,n} \geq \|u_0\|_{1,n} > 0$. Assim, $\|w_0\|_{1,n} \leq 1$. Portanto, temos duas possibilidades:

(i) $\|w_0\|_{1,n} = 1$

ou

(ii) $\|w_0\|_{1,n} < 1$.

Suponhamos que (i) valha, então, por (2.46), $\lim\limits_{k\to\infty} \|v_k\|_{1,n} = \|u_0\|_{1,n}$ e, consequentemente, $v_k \to u_0$ em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$. Assim, existe $\ell \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ tal que $|v_k(x)| \leq \ell(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ (ver Teorema A.8). Por (2.23),

$$|g(x)f(v_k)v_k| \leq C_1 A(x)|\ell|^n + C_2 A(x)|\ell|^{q+1}\Phi_\alpha(\ell)$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$, na qual é integrável pelo Lema 2.10. Então, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(v_k)v_k \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_0)u_0 \mathrm{d}x. \tag{2.47}$$

Similarmente, como $u_k \to u_0$ em E,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u_k \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_0)u_0 \mathrm{d}x. \tag{2.48}$$

Usando (2.44) e (2.45), segue-se que

$$\langle I'(u_k), u_k\rangle = \|u_k\|^n - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(u_k)u_k\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, u_k\rangle \to 0 \tag{2.49}$$

e

$$\langle I'(v_k), v_k\rangle = \|v_k\|^n - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(v_k)v_k\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h, v_k\rangle \to 0, \tag{2.50}$$

Fazendo a diferença entre (2.49) e (2.50), e, por (2.44), (2.47) e (2.48). Concluímos que

$$\lim_{k\to\infty}\|v_k\|^n = \lim_{k\to\infty}\|u_k\|^n = \|u_0\|^n.$$

Portanto, $v_k \to u_0$ em E. Consequentemente $I(v_k) \to I(u_0) = c_0$. Porém, isso contradiz (2.44) e (2.45), pois, pela unicidade do limite, teríamos que $c_M = c_0$.

Consequentemente, (ii) é válido. Logo, desde que $\rho_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, segue-se que $c_0 \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Assim, pela Observação 2.16, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$,

$$\max_{t\geq 0} I(tu_p) < c_0 + \frac{1}{n}\left(\frac{\beta-1}{n\beta}\right)^n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{n-1}. \tag{2.51}$$

Portanto,

$$\alpha_0\left(\frac{n\beta}{\beta-1}\right)^{n/(n-1)} < \frac{\alpha_n}{[n(c_M - I(u_0))]^{1/(n-1)}}$$

e

$$\alpha_0\left(\frac{n\beta}{\beta-1}\right)^{n/(n-1)}\|v_k\|_{1,n}^{n/(n-1)} \leq \frac{\alpha_n}{[n(c_M - I(u_0))]^{1/(n-1)}} - \delta \tag{2.52}$$

para algum $\delta > 0$ e para k suficientemente grande. De fato, por (2.51),

$$\alpha_0\left(\frac{n\beta}{\beta-1}\right)^{n/(n-1)} < \frac{\alpha_n}{[n(c_M - I(u_0))]^{1/(n-1)}}.$$

Assim, podemos escolher $q > 1$ suficientemente perto de 1 tal que

$$q\alpha_0\left(\frac{n\beta}{\beta-1}\right)^{n/(n-1)} < \frac{\alpha_n}{[n(c_M - I(u_0))]^{1/(n-1)}}.$$

Multiplicando $\|v_k\|_{1,n}^{n/(n-1)}$ em ambos os membros, podemos escolher $\delta > 0$, de forma que

$$q\alpha_0\left(\frac{n\beta}{\beta-1}\right)^{n/(n-1)}\|v_k\|_{1,n}^{n/(n-1)} \leq \frac{\alpha_n}{[n(c_M - I(u_0))]^{1/(n-1)}}\|v_k\|_{1,n}^{n/(n-1)} - \delta. \tag{2.53}$$

Observemos que por (2.45), temos que $I(v_k) \to c_M > 0$, ou seja,

$$\begin{aligned}
c_M &= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{n}\|v_k\|^n + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(v_k)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\langle h, v_k\rangle\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla v_k|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|v_k|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x\right]\\
&- \lim_{k\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(v_k)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\langle h, v_k\rangle\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|v_k|^n\,\mathrm{d}x\right]\\
&= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{n}\|v_k\|_{1,n}^n + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x\right]\\
&- \lim_{k\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(v_k)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\langle h, v_k\rangle\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|v_k|^n\,\mathrm{d}x\right].
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
c_M &= \lim_{k\to\infty}\left[\frac{1}{n}\|v_k\|_{1,n}^n + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x\right]\\
&- \lim_{k\to\infty}\left[\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(v_k)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\langle h, v_k\rangle\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|v_k|^n\,\mathrm{d}x\right].
\end{aligned} \tag{2.54}$$

Como $v_k \rightharpoonup u_0$ em E, pelo Lema 2.24, a menos de uma subsequência, temos que $g(x)F(v_k) \to g(x)F(u_0)$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. E mais: pela imersão compacta $E \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$, $v_k \to u_0$ em $L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$. Assim, por (2.54), a menos de uma subsequência, concluímos que

$$\begin{aligned}
c_M &= \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{1,n}^n + \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x\\
&- \int_{\mathbb{R}^n}\left[g(x)F(u_0) + \varepsilon\langle h, u_0\rangle + \frac{1}{n}|u_0|^n\right]\,\mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{2.55}$$

o que implica,

$$\frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{1,n}^n = c_M - \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x + G_0(x),$$

em que,

$$G_0(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\left[g(x)F(u_0) + \varepsilon\langle h, u_0\rangle + \frac{1}{n}|u_0|^n\right]\,\mathrm{d}x.$$

Logo,

$$\frac{1}{n}\|v_k\|_{1,n}^n = c_M - \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x + G_0(x) + o_k(1). \tag{2.56}$$

Assim, substituindo (2.56) em (2.53), para k suficientemente grande, segue-se

$$q\alpha_0\left(\frac{n\beta}{\beta-1}\right)^{n/(n-1)}\|v_k\|_{1,n}^{n/(n-1)} \leq \alpha_n\frac{L/n + o_k(1)}{[n(c_M - I(u_0))]^{1/(n-1)}} - \delta, \tag{2.57}$$

em que,

$$L = c_M - \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x + G_0(x).$$

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} L\left(1-\|w_0\|_{1,n}^n\right) &= c_M - c_M\|w_0\|_{1,n}^n - \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n + \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n + G_0(x) \\ &- \left[-\frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n + \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n + G_0(x)\right]\|w_0\|_{1,n}^n. \end{aligned} \tag{2.58}$$

Por (2.55), concluímos que (2.58) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned} L\left(1-\|w_0\|_{1,n}^n\right) = c_M - c_M\|w_0\|_{1,n}^n - \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x \\ + G_0(x) - \left[\frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{1,n}^n - c_M\right]\|w_0\|_{1,n}^n. \end{aligned} \tag{2.59}$$

Provaremos que

(a) $G_0(x) = -I(u_0) + \frac{1}{n}\|u_0\|_{1,n}^n + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x;$

(b) $\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n dx \le \lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x;$

(c) $\lim_{k\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n.$

Com efeito,

(a) por (2.55), observamos que

$$\begin{aligned} G_0(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_0) + \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\langle h,u_0\rangle\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|u_0|^n\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_0|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n \\ &+ \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_0|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x \\ &= -\left[\frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_0|^n + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n - \int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(u_0) - \varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}\langle h,u_0\rangle\right] \\ &+ \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|u_0|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_0|^n\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x \\ &= -I(u_0) + \frac{1}{n}\|u_0\|_{1,n}^n + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n\,\mathrm{d}x; \end{aligned}$$

(b) como (v_k) é uma sequência em E limitada, pelo Lema de Fatou, a menos de subsequência, segue-se o resultado;

(c) usando a desigualdade de Hölder e o Teorema da convergência dominada,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n}|b(x)|v_k|^n - b(x)|u_0|^n|\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n}|b(x)||\,|v_k|^n - |u_0|^n|\,\mathrm{d}x \\ &\le \left(\int_{\mathbb{R}^n}|b(x)|^\sigma\,\mathrm{d}x\right)^{1/\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}^n}||v_k|^n - |u_0|^n|^{\sigma'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/\sigma'}. \end{aligned}$$

Como a imersão $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^n)$ é compacta para todo $s \geq n$, temos que, a menos de subsequência, $\lim\limits_{k\to\infty} v_k = u_0$ em $L^s(\mathbb{R}^n)$ para todo $s \geq n$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} ||v_k|^n - |u_0|^n|^{\sigma'}\, \mathrm{d}x \to 0.$$

Isso conclui o item (c).

Voltando para (2.59), usando (a), (b) e (c), e a definição de w_0 obtemos

$$\begin{aligned} L\left(1 - \|w_0\|_{1,n}^n\right) &\leq c_M - c_M\|w_0\|_{1,n}^n - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n + \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n - I(u_0) + \frac{1}{n}\|u_0\|_{1,n}^n \\ &+ \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^n\, \mathrm{d}x - \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|u_0|^n\, \mathrm{d}x - \left(\frac{1}{n}\lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{1,n}^n - c_M\right)\|w_0\|_{1,n}^n. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$L\left(1 - \|w_0\|_{1,n}^n\right) \leq c_M - c_M\|w_0\|_{1,n}^n - I(u_0) + \frac{1}{n}\|u_0\|_{1,n}^n - \frac{1}{n}\|w_0\|_{1,n}^n \lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{1,n}^n - c_M\|w_0\|_{1,n}^n.$$

Daí, pela definição de w_0,

$$\begin{aligned} L\left(1 - \|w_0\|_{1,n}^n\right) &\leq c_M - I(u_0) + \frac{1}{n}\|w_0\|_{1,n}^n \lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{1,n}^n - \frac{1}{n}\|w_0\|_{1,n}^n \lim_{k\to\infty}\|v_k\|_{1,n}^n \\ &= c_M - I(u_0) \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\frac{L}{(c_M - I(u_0))} \leq \frac{1}{1 - \|w_0\|_{1,n}^n},$$

Logo, para k suficientemente grande, (2.57) implica (2.52).

Então tomando $p = (q+\epsilon)\alpha_0\|v_k\|_{1,n}^n$, segue-se de (2.52) e do Lema 2.4 que

$$(\alpha_0 + \epsilon)\left(\frac{n(\beta-\epsilon)}{\beta - \epsilon - 1}\right)^{n/(n-1)} \|v_n\|_{1,n}^{n/(n-1)} \leq \frac{\alpha_n}{(1 - \|w_0\|_{1,n}^n)^{1/(n-1)}} - \delta$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Phi_{\alpha_n,p}(v_k)\, \mathrm{d}x \leq C,$$

para $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequenos. Logo, por (2.23), obtemos

$$\begin{aligned} \left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(v_k)(v_k - u_0)dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |g(x)f(v_k)||v_k - u_0|\, \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[\epsilon\Lambda_0 A(x)|v_k|^{n-1} + C\Lambda_0 A(x)|v_k|^q\Phi_\alpha(v_k)\right]|v_k - u_0|\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(v_k)(v_k - u_0)\right| \leq \epsilon\Lambda_0 \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|v_k|^{n-1}|v_k - u_0| + C\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|v_k|^q\Phi_{\alpha_n}|v_k - u_0|. \quad (2.60)$$

Analisemos as integrais de (2.60) separadamente. Pela desigualdade de Hölder e pelo Lema 2.5,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|v_k|^{n-1}|v_k-u_0|\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} A(x)^{(n-1)/n}|v_k|^{n-1}A(x)^{1/n}|v_k-u_0|\,\mathrm{d}x\\
&\leq \|v_k\|^{n-1}_{L^n_{A(x)}(\mathbb{R}^n)}\|v_k-u_0\|_{L^n_{A(x)}(\mathbb{R}^n)}\\
&\leq C\|v_k\|^{n-1}\|v_k-u_0\|_{L^n_{A(x)}(\mathbb{R}^n)}.
\end{aligned}$$

Portanto, a imersão compacta $E \hookrightarrow L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$, garante que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|v_k|^{n-1}|v_k-u_0|\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Agora, usando as desigualdades de Hölder e o Lema A.11,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|v_k|^q\Phi_{\alpha_0+\epsilon}(v_k)\,|v_k-u_0| &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|v_k|^{\frac{qn}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)[\Phi_{\alpha_0+\epsilon}(v_k)]^n|v_k-u_0|^n\right)^{\frac{1}{n}}\\
&\leq C\|v_k\|^q\left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\Phi_{\alpha_0+\epsilon}(nv_k)\,|v_k-u_0|^n\right)^{\frac{1}{n}}.
\end{aligned}$$

Como

$$(\alpha_0+\epsilon)\left(\frac{n(\beta-\epsilon)}{\beta-\epsilon-1}\right)^{n/(n-1)}\|v_n\|^{n/(n-1)}_{1,n} \leq \frac{\alpha_n}{(1-\|w_0\|^n_{1,n})^{1/(n-1)}} - \delta$$

para algum $\delta > 0$ e $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, argumentando como no Lema 2.8 e usando o Lema 2.23, obtemos, para s suficientemente grande, que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\Phi_{\alpha_0+\epsilon}(nv_k)\,|v_k-u_0|^n\,\mathrm{d}x &\leq C_1\|v_k-u_0\|^n_{ns}\\
&+ C_2\|v_k-u_0\|^{\frac{n}{\beta}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v_k-u_0|^{(\beta n-n)(\beta-\epsilon)/\epsilon}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{\epsilon}{\beta(\beta-\epsilon)}}.
\end{aligned}$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, deduzimos que $(\beta n-n)(\beta-\epsilon)/\epsilon > n$. Assim, pela imersão compacta $E \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$ e pelas desigualdades anteriores,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(v_k)(v_k-u_0)\,\mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} b(x)|v_k|^{n-2}v_k(v_k-u_0)\,\mathrm{d}x \to 0.$$

A partir dessas convergências, e, como $\langle I'(v_k),(v_k-u_0)\rangle \to 0$, podemos concluir que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_k|^{n-2}\nabla v_k(\nabla v_k-\nabla u_0)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k|^{n-2}v_k(v_k-u_0)\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Além disso, como $v_k \rightharpoonup u_0$ em E, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_0|^{n-2}\nabla u_0(\nabla v_k-\nabla u_0)\,\mathrm{d}x \to 0 \;\text{ e }\; \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|u_0|^{n-2}u_0(v_k-u_0)\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Usando a desigualdade do Lema A.2, concluímos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v_k - \nabla u_0|^n \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} a(x)|v_k - u_0|^n \,\mathrm{d}x \\ &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla v_k|^{n-2}\nabla v_k - |\nabla u_0|^{n-2}\nabla u_0)(\nabla v_k - \nabla u_0) \,\mathrm{d}x \\ &+ C_2 \int_{\mathbb{R}^n} a(x)(|v_k|^{n-2}v_k - |u_0|^{n-2}u_0)(v_k - u_0) \,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

o que implica $v_k \to u_0$ em E. Assim, $I(v_k) \to I(u_0) = c_0$, contradizendo (2.44)–(2.45). Portanto, $u_0 \neq u_M$.

□

2.7 Demonstração do Teorema 2.3

Pelos Lemas 2.11 e 2.12, I satisfaz as hipóteses do Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale. Assim, usando o Teorema A.14, existe uma sequência (v_k) em E satisfazendo

$$I(v_k) \to c_M > 0 \ \text{ e } \ \|I'(v_k)\|_* \to 0,$$

em que c_M é o nível do passo da montanha, isto é,

$$c_M = \inf_{\gamma\in\Lambda} \max_{t\in[0,1]} I(\gamma(t)),$$

onde $\Lambda = \{\gamma : [0,1] \to E;\ \gamma \text{ é contínua}, \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = e\}$. Agora, pelo Corolário 2.19, a sequência (v_k) converge fracamente para uma solução u_M de (2.1).

Vamos mostrar que a solução u_M não é a trivial. Assumimos, por contradição, que $u_M \equiv 0$. Pelo Lema 2.24,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)F(v_k)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Isso, juntamente com (2.33), implica que

$$\|v_k\|^n \to nc_M \quad \text{quando} \quad k \to +\infty. \tag{2.61}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, $\|v_k\|^n \leq nc_M + \varepsilon$, para k suficientemente grande. Usando a Observação 2.16,

$$c_M < \frac{1}{n}\left(\frac{\beta-1}{\beta n}\right)^n \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{n-1},$$

e escolhendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, concluímos que

$$(\alpha_0 + \varepsilon)\left(\frac{\beta-\varepsilon}{\beta-\varepsilon-1}\right)^{n/(n-1)} \|v_k\|^{n/(n-1)} < \alpha_n.$$

Consequentemente, argumentando como na Proposição 2.8, para s suficientemente grande,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)\Phi_{\alpha_0+\varepsilon}(v_k)\,|v_k|^n\,\mathrm{d}x \leq C_1\|v_k\|_{ns}^n + C_2\|v_k\|^{n/\beta}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|v_k|^{(\beta n-n)(\beta-\varepsilon)/\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right)^{\varepsilon/\beta(\beta-\varepsilon)}.$$

Como

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(v_k)v_k\,\mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon\,\Lambda_0\int_{\mathbb{R}^n}A(x)|v_k|^n\,\mathrm{d}x + C_\varepsilon\,\Lambda_0\int_{\mathbb{R}^n}A(x)|v_k|^q\Phi_{\alpha_0+\varepsilon}(v_k)\,\mathrm{d}x,$$

pela imersão compacta $E \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$ e pelas desigualdades anteriores,

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(v_k)v_k\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Portanto, por (2.34) com $\varphi = v_k$, concluímos que $\|v_k\| \to 0$ quando $k \to +\infty$, isso contradiz (2.61), pois $c_M > 0$. Portanto, u_M é uma solução não trivial do problema (2.1).

2.8 Algumas observações sobre a condição (a_3).

Nesta seção, nosso objetivo é mostrar alguns fatos importantes sobre a condição (a_3). Mostraremos que $\lim\limits_{R\to\infty}|\Omega_L \cap (\mathbb{R}^n\backslash\overline{B}_R)| = 0$ é uma condição suficiente para que (a_3) seja válida.

Lema 2.26. *Seja ω_k um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty}|\omega_k| = 0,$$

em que $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue. Então para qualquer $c > 0$ e qualquer $s \in [n,\infty)$,

$$\lim_{k\to\infty}\left(\sup_{\|u\|_{1,n}\leq c}\int_{\omega_k}|u|^s\,\mathrm{d}x\right) = 0.$$

Demonstração. Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\omega_k}|u|^s\,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_{\omega_k}|u|^\gamma\,\mathrm{d}x\right)^{s/\gamma}\left(\int_{\omega_k}|1|^{\gamma/(\gamma-s)}\,\mathrm{d}x\right)^{(\gamma-s)/\gamma}\\ &= \|u\|_{L^\gamma(\omega_k)}^s|\omega_k|^{(\gamma-s)/\gamma}\\ &\leq \|u\|_\gamma^s|\omega_k|^{(\gamma-s)/\gamma}.\end{aligned}$$

Agora, usando o Lema A.6,

$$\int_{\omega_k}|u|^s\,\mathrm{d}x \leq C\|u\|_n^{(1-\theta)s}\|\nabla u\|_n^{\theta s}|\omega_k|^{(\gamma-s)/\gamma} \quad \text{com} \quad \frac{1}{\gamma} = \frac{1-\theta}{n}.$$

Logo,

$$\int_{\omega_k} |u|^s \, \mathrm{d}x \quad \leq \quad C\|u\|_n^{ns/\gamma} \|\nabla u\|_n^{(\gamma-n)s/\gamma} |\omega_k|^{(\gamma-s)/\gamma}.$$

Isso implica que

$$\sup_{\|u\|_{1,n} \leq c} \int_{\omega_k} |u|^s \, \mathrm{d}x \leq C|\omega_k|^{(\gamma-s)/\gamma}.$$

Portanto,

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\|u|_n \leq c} \int_{\omega_k} |u|^s \, \mathrm{d}x \leq C \lim_{k\to\infty} |\omega_k|^{(\gamma-s)/\gamma} = 0.$$

Isto conclui o Lema. □

Lema 2.27. *Seja $M > 0$ tal que*

$$\lim_{R\to\infty} |\Omega_M \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B_R})| = 0, \tag{2.62}$$

onde o conjunto $\Omega_M = \{x \in \mathbb{R}^n; a(x) < M\}$ é limitado e $|\cdot|$ é a medida de Lebesgue. Então, a condição (a_3) é válida para todo $s \in [n, \infty)$.

Demonstração. Suponhamos, por contradição, que $\lim\limits_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = L < \infty$. Isto é, existe uma sequência $R_k \to \infty$ tal que para todo $k \in \mathbb{N}$, existe $R_{k_0} > 0$ em que

$$\left|\nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) - L\right| < \frac{1}{k} \quad \text{para todo} \quad R_k > R_{k_0}.$$

Como,

$$\nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \inf_{u \in W_0^{1,n}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R)\setminus\{0\}} \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R} (|\nabla u|^n + a(x)|u|^n) \, \mathrm{d}x \quad \text{em que} \quad \|u\|^n_{L^n(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R)} = 1,$$

então existe uma sequência minimizante $(u_k) \subset W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{R_k})$, em que o ínfimo é atingido. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{R_k}} (|\nabla u_k|^n + a(x)|u_k|^n) \, \mathrm{d}x \leq c \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{R_k}} |u_k|^n \, \mathrm{d}x = 1. \tag{2.63}$$

Para todo $M > 0$ consideremos o conjunto $\Omega_{M,R_k} = \Omega_M \cap (\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{R_k})$. Por hipótese, $\lim\limits_{R_k\to\infty} |\Omega_{M,R_k}| = 0$. Para um M fixado, segue-se que

$$\int_{(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{R_k})\setminus\Omega_{M,R_k}} a(x)|u_k|^n \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_{M,R_k}} a(x)|u_k|^n \, \mathrm{d}x \leq c.$$

Como $a(x) \geq M$ em $(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{R_k})\setminus\Omega_{M,R_k}$,

$$M \int_{(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_{R_k})\setminus\Omega_{M,R_k}} |u_k|^n \, \mathrm{d}x + \int_{\Omega_{M,R_k}} a(x)|u_k|^n \, \mathrm{d}x \leq c.$$

Assim,

$$M\int_{(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_{R_k})\setminus\Omega_{M,R_k}}|u_k|^n\,\mathrm{d}x+M\int_{\Omega_{M,R_k}}|u_k|^n\,\mathrm{d}x-M\int_{\Omega_{M,R_k}}|u_k|^n\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_{M,R_k}}a(x)|u_k|^n\,\mathrm{d}x\leq c.$$

O que implica,

$$M\int_{(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_{R_k})}|u_k|^n\,\mathrm{d}x-M\int_{\Omega_{M,R_k}}|u_k|^n\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_{M,R_k}}a(x)|u_k|^n\,\mathrm{d}x\leq c.$$

Por (2.63) e pelo Lema 2.26,

$$M\leq c,$$

contradizendo o fato de M ser arbitrário. Assim, $\lim\limits_{R\to\infty}\nu_n(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_R)=\infty$. A Proposição 2.6 nos diz que

$$\nu_t(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_R)\geq(\nu_n(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B_R}))^{\theta_1}\quad\text{para todo}\quad t\in[n,\infty).$$

Logo, como $\lim\limits_{R\to\infty}\nu_n(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_R)=\infty$, segue-se que $\lim\limits_{R\to\infty}\nu_t(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_R)=\infty$ para todo $t\in[n,\infty)$. $\square$

Capítulo 3

Sobre um sistema de equações de Schrödinger quase lineares em $\mathbb{R}^n$

3.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar a existência de soluções não triviais para uma classe de sistemas elípticos não lineares, envolvendo o operador p-Laplaciano, com $1 < p < n$ e $n \geq 2$,

$$-\Delta_p u_i + a_i(x)|u_i|^{p-2}u_i = b_i(x)|u_i|^{p-2}u_i + f_i(x, U),\ x \in \mathbb{R}^n \text{ e } i \in \{1, \dots, m\}. \tag{3.1}$$

As funções $a_i, b_i : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ são mensuráveis e as funções $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são contínuas com $f_i(x, 0, \dots, 0) = 0$. Consideraremos a situação variacional em que $(f_1, \dots, f_m) = \nabla F$ para alguma função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Denotamos por ∇F o gradiente de F nas variáveis $U = (u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^m$. Além disso, sobre $\mathbb{R}^m$ usaremos a norma euclideana, isto é,

$$|U| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |u_i|^2}.$$

Consideremos o subespaço $E = E_1 \times \cdots \times E_m$ de $W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, com

$$E_i = \left\{ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\} \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \dots, m\}.$$

Os espaços E_i são como os espaços estudados no Capítulo 1, denotaremos a norma de cada espaço E_i por $\| \cdot \|_{E_i}$. Como consequência das Proposições 1.7 e 1.8, o espaço E

munido com a norma
$$\|U\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_{E_i}^p\right)^{1/p}$$
é um espaço de Banach reflexivo.

Dizemos que $U = (u_1, \ldots, u_m) \in E$ é uma solução fraca do problema (3.1), se para todo $V = (v_1, \ldots, v_m) \in E$,
$$\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i \nabla v_i + a_i(x)|u_i|^{p-2}u_i v_i)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^{p-2}u_i v_i\,\mathrm{d}x$$
$$- \int_{\mathbb{R}^n} f(x, u_i)v_i\,\mathrm{d}x - \varepsilon\langle h_i, v_i\rangle = 0 \quad \text{para todo} \quad i \in \{1, \ldots, m\}.$$

Para futuras referências consideraremos as seguintes condições:

(K_1) As funções $a_i : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ são mensuráveis e
$$\lambda_1 := \inf_{U \in E\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^p}{\|U\|_p^p} > 0.$$

Definimos, para qualquer subconjunto aberto Ω de $\mathbb{R}^n$ e para $s \in [p, p^*)$, $\nu_s(\Omega)$ por
$$\nu_s(\Omega) = \begin{cases} \inf\limits_{U \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \dfrac{\sum_{i=1}^m \int_\Omega (|\nabla u_i|^p + a_i(x)|u_i|^p)\,\mathrm{d}x}{\|U\|_{L^s(\Omega)}^p} & \text{se} \quad \Omega \neq \emptyset, \\ \infty & \text{se} \quad \Omega = \emptyset. \end{cases}$$

Inspirados pelo trabalho de Sirakov [49], consideramos a seguinte condição de compacidade:

(K_2) Existe $s \in [p, p^*)$ tal que $\lim\limits_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$, em que B_R é a bola em $\mathbb{R}^n$ de raio R centrada na origem.

(K_3) Existem uma função $A \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, com $A(x) \geq 1$, e constantes $\beta > 1$, $C_0 > 0$, $R_0 > 0$ tais que
$$A(x) \leq C_0 \left(1 + \left(\min_{1\leq i\leq m} \{a_i(x)\}\right)^{1/\beta}\right) \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0.$$

(K_4) As funções $b_i : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ são mensuráveis e $\displaystyle\sum_{i=1}^m \|b_i\|_\sigma < S_{t_0}^p$ para algum $\sigma > 1$ onde $t_0 := \sigma p/(\sigma - 1) < p^\# + 1$ e
$$p^\# := (p^* - 1) - \frac{p^2}{\beta(n-p)}$$
e S_{t_0} é a melhor constante para a imersão de Sobolev $E \hookrightarrow L^{t_0}(\mathbb{R}^n)$, isto é,
$$S_{t_0} := \inf_{U \in E\setminus\{0\}} \frac{\|U\|}{\|U\|_{t_0}}.$$

(K_5) A função F é de classe C_1 e

$$\lim_{|U|\to 0}\frac{|\nabla F(x,U)|}{A(x)|U|^{p-1}}=0 \quad \text{uniformemente em} \quad x\in\mathbb{R}^n.$$

A funções f_i não são necessariamente limitadas em x, porém têm seus crescimentos subcríticos controlados por $A(x)$, mais precisamente,

(K_6) existe $q\in[p-1,p^{\#})$ tal que

$$|\nabla F(x,U)|\le C_0A(x)\,(1+|U|^q) \quad \text{para todo} \quad (x,U)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m.$$

(K_7) existe $\mu>p$ tal que

$$0<\mu|F(x,U)|\le U\cdot\nabla F(x,U) \quad \text{para todo} \quad (x,U)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\setminus\{0\}.$$

Agora, enunciaremos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 3.1. *Suponhamos que as condições* (K_1) - (K_7) *sejam satisfeitas, então o problema* (3.1) *tem uma solução não trivial. Além disso, se* $F(x,U)$ *for par em* U*, então* (3.1) *tem infinitas soluções.*

Observação 3.2. *O argumento utilizado para provar que a condição* (H_2) *e* (1.3) *são equivalentes não funciona para o caso de sistemas. Por isso, não foi possível estender o Teorema 1.2 neste capítulo.*

3.2 Resultados Preliminares

Esta seção será dedicada a mostrar algumas propriedades que envolvem o espaço E e os resultados de compacidade fundamentais para se encontrar as soluções do problema (3.1). Começaremos por um resultado, o qual utilizaremos bastante, sobre a imersão contínua de E em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

Proposição 3.3. *Se a condição* (K_1) *for válida, então* E *estará imerso continuamente em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$.

Demonstração. Por (K_1),

$$0<\lambda_1\le\frac{\|U\|^p}{\|U\|_p^p}.$$

Assim,

$$\|U\|_p^p \leq \frac{1}{\lambda_1}\|U\|^p. \tag{3.2}$$

Isso implica que

$$\|U\|_{1,p}^p = \|\nabla U\|_p^p + \|U\|_p^p \leq \|\nabla U\|_p^p + \frac{1}{\lambda_1}\|U\|^p.$$

Portanto,

$$\|U\|_{1,p}^p \leq \left(\frac{1}{\lambda_1} + 1\right)\|U\|^p.$$

O que conclui a Proposição. □

Definimos o espaço

$$L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = \left\{U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \quad \text{mensurável}; \quad \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^t \, \mathrm{d}x < \infty\right\},$$

munido com a norma $\|U\|_{L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^t \, \mathrm{d}x\right)^{1/t}$.

Proposição 3.4. *Se as condições (K_1) - (K_3) forem válidas, então a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ será contínua para $p - 1 \leq t \leq p^\#$.*

Demonstração. Sejam $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| > R_0\}$ e $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq R_0\}$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^{t+1} \, \mathrm{d}x = \int_{\mathcal{A}} A(x)|U|^{t+1} \, \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{B}} A(x)|U|^{t+1} \, \mathrm{d}x$$

Usando a condição (K_3), obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^{t+1} \, \mathrm{d}x &\leq c_0 \int_{\mathcal{A}} \left[1 + \left(\min_{1\leq i\leq m} a_i(x)\right)^{1/\beta}\right] |U|^{t+1} \, \mathrm{d}x + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} |U|^{t+1} \, \mathrm{d}x \\
&= c_0 \int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1\leq i\leq m} a_i(x)\right)^{1/\beta} |U|^{t+1} + c_0 \int_{\mathcal{A}} |U|^{t+1} \, \mathrm{d}x + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})} \int_{\mathcal{B}} |U|^{t+1} \, \mathrm{d}x \\
&\leq c_0 \int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1\leq i\leq m} a_i(x)\right)^{1/\beta} |U|^{t+1} \, \mathrm{d}x + (c_0 + \|A\|_{L^\infty(\mathcal{B})}) \int_{\mathbb{R}^n} |U|^{t+1} \, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^{t+1} \, \mathrm{d}x \leq c_0 \int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1\leq i\leq m} a_i(x)\right)^{1/\beta} |U|^{t+1} \, \mathrm{d}x + C_1\|U\|_{t+1}^{t+1}. \tag{3.3}$$

Agora, precisamos mostrar que existe $C > 0$ tal que $\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^{t+1} \, \mathrm{d}x \leq C\|U\|^{t+1}$. Para isso, analisaremos os termos de (3.3) separadamente.

Para estimar o termo $\int_{\mathcal{A}} \left(\min\limits_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} |U|^{t+1}\, \mathrm{d}x$, usamos que as normas em $\mathbb{R}^m$ são equivalentes. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} |U|^{t+1}\, \mathrm{d}x &\le C \int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} \left(\sum_{i=1}^m |u_i| \right)^{t+1} \mathrm{d}x \\
&\le C \int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} \sum_{i=1}^m |u_i|^{t+1}\, \mathrm{d}x \\
&\le C \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{A}} (a_i(x))^{1/\beta} |u_i|^{t+1}\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} |U|^{t+1}\, \mathrm{d}x &= C \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{A}} \left(a_i(x) |u_i|^p \right)^{1/\beta} |u_i|^{t+1-p/\beta}\, \mathrm{d}x \\
&\le C \sum_{i=1}^m \left(\int_{\mathcal{A}} a_i(x) |u_i|^p\, \mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{\beta}} \left(\int_{\mathcal{A}} \left(|u_i|^{t+1-\frac{p}{\beta}} \right)^{\frac{\beta}{\beta-1}} \mathrm{d}x \right)^{\frac{\beta-1}{\beta}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} |U|^{t+1}\, \mathrm{d}x \le C \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{E_i}^{p/\beta} \|u_i\|_{((t+1)\beta-p)/(\beta-1)}^{((t+1)\beta-p)/\beta}. \tag{3.4}$$

Como $p-1 \le t \le p^{\#}$, deduzimos que $p \le ((t+1)\beta - p)/(\beta-1) \le p^*$. Usando as imersões contínuas $E_i \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para todo $1 \le i \le m$, e $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{((t+1)\beta-p)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p-1 \le t \le p^{\#}$, concluímos que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\|u_i\|_{((t+1)\beta-p)/(\beta-1)}^{((t+1)\beta-p)/\beta} \le C_2 \|u_i\|_{E_i}^{((t+1)\beta-p)/\beta}. \tag{3.5}$$

Substituindo (3.5) em (3.4), resulta

$$\int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} |U|^{t+1}\, \mathrm{d}x \le C \sum_{i=1}^m \|u_i\|_{E_i}^{t+1}.$$

Usando novamente que as normas em $\mathbb{R}^m$ são equivalentes, existem constantes C_3 e C_4 tais que

$$\int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} |U|^{t+1}\, \mathrm{d}x \le C_3 \left(\sum_{i=1}^m \|u_i\|_{E_i} \right)^{t+1} \le C_4 \left(\sum_{i=1}^m \|u_i\|_{E_i}^p \right)^{(t+1)/p}.$$

Assim,

$$\int_{\mathcal{A}} \left(\min_{1 \le i \le m} a_i(x) \right)^{1/\beta} |U|^{t+1}\, \mathrm{d}x \le C \|U\|^{t+1}.$$

Substituindo em (3.3), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^{t+1}\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad C\|U\|^{t+1} + C_1\|U\|_{t+1}^{t+1}. \tag{3.6}$$

Já para estimar o termo $\|U\|_{t+1}^{t+1}$, usamos as imersões contínuas $E \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{t+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para todo $t+1 \in [p, p^*]$, ou seja, existe $C > 0$ tal que

$$\|U\|_{t+1}^{t+1} \leq C\|U\|^{t+1}. \tag{3.7}$$

Agora, substituindo (3.7) em (3.6), segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^{t+1}\,\mathrm{d}x \leq C\|U\|^{t+1}. \tag{3.8}$$

Isso conclui a Proposição. □

O próximo Lema garante que a condição (K_2) seja válida para todo $s \in [p, p^*)$.

Lema 3.5. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$. Se $p \leq s < t < p^*$, então*

$$\nu_t(\Omega) \geq C(p,t,n,\lambda_1)\,(\nu_s(\Omega))^{\alpha_1}\,, \tag{3.9}$$

onde α_1 é um número fixo em $(0,1)$. Se $p < t < s < p^*$, então

$$\nu_t(\Omega) \geq C(p,t,n,\lambda_1)\,(\nu_s(\Omega))^{\alpha_2}\,, \tag{3.10}$$

em que α_2 é um número fixo em $(0,1)$. Consequentemente, $\lim\limits_{R\to\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$ implica que $\lim\limits_{R\to\infty} \nu_t(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$ nos casos em que $p \leq s \leq t$ e $p < t \leq s$.

Demonstração. Faremos como foi feito na Proposição 1.10. Primeiro, usamos a desigualdade de Hölder. Isto é, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$, vale

$$\|u_i\|_t \leq \|u_i\|_s^{\theta}\|u_i\|_{p^*}^{1-\theta}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1).$$

Agora, usando a desigualdade de Gagliardo-Niremberg (Teorema A.5) para $p \leq s < t < p^*$ e para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$, segue-se que

$$\|u_i\|_t \leq C(p,t,n)\|u_i\|_s^{\theta}\|\nabla u_i\|_p^{1-\theta}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1),$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|u_i\|_t^p &\leq \left[C(p,t,n)\|u_i\|_s^{\theta}\|\nabla u_i\|_p^{1-\theta}\right]^p \\ &\leq C(p,t,n)\|u_i\|_s^{\theta p}\|\nabla u_i\|_p^{(1-\theta)p}. \end{aligned}$$

Usando, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$, que $\|\nabla u_i\|_p \leq \|u_i\|_{1,p}$, e pela Proposição 1.6 $\|u_i\|_{1,p} \leq C\|u_i\|_{E_i}$, concluímos que

$$\|u_i\|_t^p \leq C(p,t,n)\|u_i\|_s^{\theta p}\|u_i\|_{E_i}^{(1-\theta)p} \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, m\}. \tag{3.11}$$

Notemos que,

$$\|u_i\|_s^{\theta p} \leq \|U\|_s^{\theta p} \quad \text{e} \quad \|u_i\|_{E_i}^{(1-\theta)p} \leq \|U\|^{(1-\theta)p} \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, m\}.$$

Logo,

$$\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_s^{\theta p} \leq m\|U\|_s^{\theta p} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_{E_i}^{(1-\theta)p} \leq m\|U\|^{(1-\theta)p}. \tag{3.12}$$

Além disso, sendo as normas em $\mathbb{R}^n$ equivalentes, existem C_1 e C_2 tais que,

$$\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_t^p \geq C_1 \left(\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_t\right)^p \geq C_2 \left(\sum_{i=1}^{m} \|u_i\|_t^t\right)^{p/t} = C_2\|U\|_t^p. \tag{3.13}$$

Substituindo (3.12) e (3.13) em (3.11),

$$\|U\|_t^p \leq C(p,t,n)\|U\|_s^{\theta p}\|U\|^{(1-\theta)p}.$$

Quando U for não nulo, usaremos essa desigualdade da seguinte forma:

$$\frac{1}{\|U\|_t^p} \geq \frac{1}{C(p,t,n)\|U\|_s^{\theta p}\|U\|^{(1-\theta)p}}. \tag{3.14}$$

Pela definição de $\nu_t(\Omega)$ e (3.14),

$$\begin{aligned}
\nu_t(\Omega) &= \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^p}{\|U\|_t^p} \\
&\geq \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^p}{C(p,t,n)\|U\|_s^{\theta p}\|U\|^{(1-\theta)p}} \\
&\geq \frac{1}{C(p,t,n)} \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^p}{\|U\|_s^{\theta p}\|U\|^{(1-\theta)p}} \\
&= \frac{1}{C(p,t,n)} \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^{\theta p}}{\|U\|_s^{\theta p}} \\
&= \frac{1}{C(p,t,n)} \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \left[\frac{\|U\|^p}{\|U\|_s^p}\right]^\theta \\
&= \frac{1}{C(p,t,n)} \left(\nu_s(\Omega)\right)^\theta.
\end{aligned}$$

Isso conclui a desigualdade (3.9).

A desigualdade (3.10) decorre usando novamente a desigualdade de Hölder, isto é, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$,

$$\|u_i\|_t \leq \|u_i\|_p^{\theta} \|u_i\|_s^{1-\theta}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1).$$

Pela Proposição 1.6, e como $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ está imerso continuamente em $L^p(\mathbb{R}^n)$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u_i\|_t^p \leq C\|u_i\|^{\theta p} \|u_i\|_s^{(1-\theta)p}, \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, m\}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1).$$

De forma análoga à (3.12) e (3.13), dado o vetor U não nulo,

$$\frac{1}{\|U\|_t^p} \geq \frac{1}{C\|U\|^{\theta p} \|U\|_s^{(1-\theta)p}}. \tag{3.15}$$

Pela definição de $\nu_t(\Omega)$ e por (3.15),

$$\begin{aligned}
\nu_t(\Omega) &= \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \backslash \{0\}} \frac{\|U\|^p}{\|U\|_t^p} \\
&\geq \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \backslash \{0\}} \frac{\|U\|^p}{C\|U\|^{\theta p} \|U\|_s^{(1-\theta)p}} \\
&= \frac{1}{C} \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \backslash \{0\}} \frac{\|U\|^{(1-\theta)p}}{\|U\|_s^{(1-\theta)p}} \\
&= \frac{1}{C} \inf_{U \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^m) \backslash \{0\}} \left[\frac{\|U\|^p}{\|U\|_s^p}\right]^{1-\theta} \\
&= \frac{1}{C} \left(\nu_s(\Omega)\right)^{1-\theta}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a desigualdade (3.10).

Por fim, (3.9) e (3.10) implicam que $\nu_t(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_R) \geq C(\nu_s(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_R))^{\theta}$ para $p \leq s \leq t$ e $p < t \leq s$. E, como $\lim_{R \to \infty} \nu_s(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_R) = \infty$, para toda bola $B_R \subset \mathbb{R}^n$ de raio R centrada na origem, segue-se que $\lim_{R \to \infty} \nu_t(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$ nos casos em que $p \leq s \leq t$ e $p < t \leq s$. □

Proposição 3.6. *Se as condições (K_1) - (K_3) forem válidas, então E estará imerso compactamente em $L^{t+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e em $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para $p - 1 \leq t < p^{\#}$.*

Demonstração. Primeiro, mostraremos que E está imerso compactamente em $L^{t+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Consideremos que (U_k) seja uma sequência limitada em E. Como E é um espaço reflexivo, podemos assumir sem perda de generalidade, que (U_k) converge fracamente para 0 em E.

Consideremos $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ definida por

$$\varphi = \begin{cases} 0 & \text{em } B_R; \\ 1 & \text{em } \mathbb{R}^n \backslash B_{R+1}; \end{cases}$$

tal que $|\nabla\varphi(x)| \leq 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por conseguinte,

$$\begin{aligned} \|U_k\|_{t+1} &= \|(1-\varphi)U_k + \varphi U_k\|_{t+1} \\ &\leq \|(1-\varphi)U_k\|_{t+1} + \|\varphi U_k\|_{t+1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|U_k\|_{t+1} \leq \|(1-\varphi)U_k\|_{L^{t+1}(B_{R+1},\mathbb{R}^m)} + \|\varphi U_k\|_{L^{t+1}(\mathbb{R}^n\backslash B_R,\mathbb{R}^m)}. \tag{3.16}$$

Como a imersão de E em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é contínua, e pelo Teorema de Rellich-Kondrachov (Teorema A.4), a imersão $W^{1,p}(B_R, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{t+1}(B_R, \mathbb{R}^m)$ é compacta para $p-1 \leq t \leq p^\#$. Assim, $U_k \to U$ em $L^{t+1}(B_R, \mathbb{R}^m)$. Portanto,

$$\|(1-\varphi)U_k\|_{L^{t+1}(B_{R+1},\mathbb{R}^m)} \to 0.$$

Agora, vejamos, que o segundo termo de (3.16) também converge para 0. De fato, notemos que

$$\|\varphi U_k\|^p = \sum_{i=1}^m \|\varphi u_i^{(k)}\|_{E_i}^p. \tag{3.17}$$

De maneira análoga à Proposição 1.11, para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$,

$$\begin{aligned} \|\varphi u_i^k\|_{E_i}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(\varphi u_i^{(k)})|^p + a(x)|\varphi u_i^{(k)}|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |(\nabla\varphi)u_i^{(k)}|^p + |\varphi(\nabla u_i^{(k)})|^p + a(x)|\varphi u_i^{(k)}|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |u_i^{(k)}|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k)}|^p + a(x)|u_i^{(k)}|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \|u_i^{(k)}\|_{1,p}^p + \|u_i^{(k)}\|_{E_i}^p. \end{aligned}$$

Pela Proposição 1.6, existe $C > 0$ tal que

$$\|\varphi u_i^{(k)}\|_{E_i}^p \leq C\|u_i^{(k)}\|_{E_i}^p.$$

Assim, podemos escrever (3.17) da seguinte forma:

$$\|\varphi U_k\|^p \leq C \sum_{i=1}^m \|u_i^{(k)}\|_{E_i}^p.$$

Consequentemente,

$$\|\varphi U_k\|^p \leq C\|U_k\|^p.$$

Como (U_k) é uma sequência limitada em E, então a sequência (φU_k) também o é. Desse fato, juntamente com a definição de $\nu_{t+1}(\mathbb{R}^n\backslash B_R)$ e a condição (K_2), concluímos que

$$\|\varphi U_k\|_{L^{t+1}(\mathbb{R}^n\backslash B_R,\mathbb{R}^m)} \leq \frac{\|\varphi U_k\|^p}{\nu_{t+1}(\mathbb{R}^n\backslash B_R)} \to 0.$$

Isso nos diz, que o segundo termo de (3.16) converge para 0. Portanto, $U_k \to 0$ em $L^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Ou seja, a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ é compacta para $p-1 \leq t < p^{\#}$.

Agora, mostraremos que E está imerso compactamente em $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Por (3.3) e (3.4),

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U_k|^{t+1}\,\mathrm{d}x \quad\leq\quad C\sum_{i=1}^m \|u_i^k\|_{E_i}^{p/\beta}\|u_i^k\|^{(\beta(t+1)-p)/\beta}_{(\beta(t+1)-p)/(\beta-1)} + (c_0+\|A\|_\infty)\|U_k\|^{t+1}_{t+1}$$

Na primeira parte da demonstração, provamos que a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ é compacta para todo $p-1 \leq t+1 < p^{\#}$. Assim, (U_k) converge para zero nos espaços $L^{t+1}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ e $L^{(\beta(t+1)-p)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Por conseguinte, cada coordenada $u_i^{(k)}$ de U_k forma uma sequência que converge para zero em $L^{(\beta(t+1)-p)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$. Além disso, cada sequência (u_i^k) é limitada em E_i, pois (U_k) é limitada em E. Com isso, concluímos que (U_k) converge para zero em $L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Portanto, a imersão $E \hookrightarrow L^{t+1}_{A(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ é compacta para todo $p-1 \leq t < p^{\#}$. □

3.3 Formulação Variacional

Estamos interessados em encontrar soluções fracas para o sistema (3.1), isto é, encontrar funções $U \in E$ que, para todo $V \in E$, satisfazem

$$\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i\nabla v_i + a_i(x)|u_i|^{p-2}u_iv_i) - \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^{p-2}u_iv_i\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} f(x,u_i)v_i\,\mathrm{d}x = 0.$$

Associamos ao problema (3.1) o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(U) := \frac{1}{p}\|U\|^p - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^p\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,U)\,\mathrm{d}x. \tag{3.18}$$

Visto que $\|\cdot\|$ é uma norma em E, e o Lema 1.12 garante que

$$\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^p\,\mathrm{d}x < \infty.$$

O próximo Lema completa a justificativa do funcional I estar bem definido.

Lema 3.7. *Se as condições $(K_4)-(K_7)$ forem satisfeitas, então* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x < \infty$. *Além disso, para todo $\epsilon > 0$, existe $C > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x \leq \epsilon \|U\|^p\,\mathrm{d}x + C_\epsilon \|U\|^{q+1}. \tag{3.19}$$

Demonstração. Afirmamos que, por (K_5) e (K_6), dados $\epsilon > 0$ e $q \in [p-1, p^{\#}]$, existe $C_\epsilon > 0$ tal que

$$|F(x,U)| \leq \epsilon A(x)|U|^p + CA(x)|U|^{q+1} \quad \text{para todo} \quad U \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.20}$$

De fato, pela condição (K_5), dado $\epsilon > 0$, existe $\delta(_\epsilon) > 0$ tal que

$$|\nabla F(x,U)| \leq \epsilon A(x)|U|^{p-1} \quad \text{sempre que} \quad |U| < \delta \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.21}$$

Por outro lado, a condição (K_6) garante que existe $q \in [p-1, p^{\#}]$ tal que

$$|\nabla F(x,U)| \leq C_0 A(x)\left(1 + |U|^q\right) \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Logo,

$$|\nabla F(x,U)| \leq C_0 A(x)|U|^q \left(\frac{1}{|U|^q} + 1\right) \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Assim, para todo $|U| \geq \delta$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$, vale

$$|\nabla F(x,U)| \leq C_0 A(x)|U|^q \left(\frac{1}{\delta^q} + 1\right),$$

ou seja, para todo $|U| \geq \delta$ e todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\nabla F(x,U)| \leq CA(x)|U|^q. \tag{3.22}$$

Por (3.21) e (3.22),

$$|\nabla F(x,U)| \leq \epsilon A(x)|U|^{p-1} + C_\epsilon A(x)|U|^q \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m. \tag{3.23}$$

Como

$$|F(x,U)| \leq \frac{1}{\mu}|U||\nabla F(x,U)| \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,$$

então,

$$|F(x,U)| \;\; \leq \;\; \epsilon A(x)|U|^p + C_\epsilon A(x)|U|^{q+1} \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m.$$

Isso conclui a Afirmação.

Logo, para todo $(x, U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^p\,\mathrm{d}x + C\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^{q+1}\,\mathrm{d}x.$$

Por (3.8),

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x \leq \epsilon\|U\|^p + C\|U\|^{q+1}.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,u)|\,\mathrm{d}x < \infty, \quad \text{para todo} \quad u \in E.$$

Isso conclui o Lema.

□

Por argumentos padrão, é possível mostrar que I é de classe C^1 sobre E com

$$\begin{aligned}\langle I'(U), V\rangle = &\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i\nabla v_i + a_i(x)|u_i|^{p-2}u_iv_i)\,\mathrm{d}x\\ &-\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^{p-2}u_iv_i\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n}\nabla F(x,U)\cdot V\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

para todo $V \in E$. Portanto, os pontos críticos do funcional I são soluções fracas do problema (3.1).

A geometria do Teorema do passo da montanha para o funcional I será estabelecida pelos próximos dois lemas.

Lema 3.8. *Se as condições (K_1) e $(K_3) - (K_6)$ forem satisfeitas, então existirão $\delta, \rho > 0$ tais que*

$$I(U) \geq \delta \quad \textit{se} \quad \|U\| = \rho.$$

Demonstração. De maneira análoga ao Lema 3.7, por (K_5) e (K_6), dados $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ de forma que $p - 1 < q + \delta < p^{\#}$, existe $C > 0$ tal que

$$|F(x,U)| \leq \epsilon A(x)|U|^p + CA(x)|U|^{q+1+\delta} \quad \text{para todo} \quad U \in \mathbb{R}^m \quad \text{e} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Como

$$I(U) = \frac{1}{p}\|U\|^p - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^p\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,U)\,\mathrm{d}x.$$

Então,

$$I(U) \geq \frac{1}{p}\|U\|^p - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^p\,\mathrm{d}x - \epsilon\|U\|^p - C\|U\|^{q+1+\delta}.$$

Pela desigualdade de Hölder,

$$I(U) \geq \frac{1}{p}\|U\|^p - \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{m}\|b_i\|_\sigma\|u_i\|^p_{\sigma' p} - \epsilon\|U\|^p - C\|U\|^{q+1+\delta}.$$

Como $\|u_i\|^p_{\sigma' p} \leq \|U\|^p_{\sigma' p}$ para cada $i \in \{1, \cdots, m\}$, então

$$I(U) \geq \frac{1}{p}\|U\|^p - \frac{\|U\|^p_{\sigma' p}}{p}\sum_{i=1}^{m}\|b_i\|_\sigma - \epsilon\|U\|^p - C\|U\|^{q+1+\delta}.$$

Por (K_4),

$$\begin{aligned} I(U) &\geq \frac{1}{p}\|U\|^p - \frac{\|U\|^p S_{t_0}^{-p}}{p}\sum_{i=1}^{m}\|b_i\|_\sigma - \epsilon\|U\|^p - C\|U\|^{q+1+\delta} \\ &= \|U\|^p\left(\frac{1}{p} - \frac{S_{t_0}^{-p}}{p}\sum_{i=1}^{m}\|b_i\|_\sigma - \epsilon - C\|U\|^{q-p+1+\delta}\right) \end{aligned}$$

Assim, existe $\rho > 0$ tal que $I(U) > 0$ sempre que $\|U\| = \rho$. De fato, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno e, como $1 - S_{t_0}^{-p}\sum_{i=1}^{m}\|b_i\|_\sigma > 0$, podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{S_{t_0}^{-p}}{p}\sum_{i=1}^{m}\|b_i\|_\sigma - \epsilon\right) - C\rho^{q-p+1+\delta} > 0.$$

Portanto, para ϵ suficientemente pequeno, existe $\rho > 0$ tal que $I(U) > 0$ se $\|U\| = \rho$. $\square$

Lema 3.9. *Se as condições (K_1) e $(K_3) - (K_7)$ forem satisfeitas, então existirá $e \in E$ com $\|e\| > \rho$ tal que*

$$I(e) < \inf_{\|U\|=\rho} I(U).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}$ com suporte compacto, $K = \operatorname{supp}(\varphi)$ e $\varphi \geq 0$. Suponhamos que $|U| > 0$. Fazendo uma mudança de coordenadas para coordenadas esféricas, obtemos

$$U = (\rho, \phi_1, \ldots, \phi_{m-1}),$$

em que $\rho \geq 1$, $-\pi \leq \phi_1 \leq \pi$, $0 \leq \phi_i \leq \pi$ para $i \in \{2, \ldots, m-1\}$ e

$$\begin{aligned} u_1 &= \rho\sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{m-1}), \\ u_2 &= \rho\cos(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{m-1}), \\ u_3 &= \rho\cos(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{m-1}), \\ &\vdots \\ u_m &= \rho\cos(\phi_{m-1}). \end{aligned}$$

Notemos que

$$U \cdot \nabla F(x,U) = \rho \frac{\partial F}{\partial \rho}(x,U).$$

Por (K_7),

$$\mu F(x,U) \leq \rho \frac{\partial F}{\partial \rho}(x,U) \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\},$$

ou equivalentemente,

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \leq \frac{1}{\mu}\frac{\partial F(x,U)}{F(x,U)} \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}.$$

Fixado $s_0 > 0$ próximo de 0 e tal que $s > s_0$.

$$\int_{s_0}^{s} \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \leq \frac{1}{\mu}\int_{F(x,V_0)}^{F(x,V)} \frac{\partial F(x,U)}{F(x,U)} \quad \text{para todo} \quad s > s_0,\ x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad V \in \mathbb{R}^m.$$

Logo,

$$\ln\left(\frac{s}{s_0}\right)^{\mu} \leq \ln\left(\frac{F(x,V)}{F(x,V_0)}\right) \quad \text{para todo} \quad s > s_0,\ x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad V \in \mathbb{R}^m,$$

Dessa forma,

$$F(x,V) \geq \frac{F(x,V_0)}{s_0^{\mu}} s^{\mu} \quad \text{para todo} \quad s > s_0,\ x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad V \in \mathbb{R}^m.$$

Assim, ficamos com o seguinte fato.

$$F(x,V) \geq \left(\min_{x\in K} \frac{F(x,V_0)}{|V_0|^{\mu}}\right)|V|^{\mu} \quad \text{para todo} \quad s > s_0,\ x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad V \in \mathbb{R}^m,$$

e, portanto, $F(x,U) \geq C|U|^{\mu}$ para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Concluindo, assim, a afirmação.

Assim,

$$\begin{aligned}
I(t\varphi) &= \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{t^p}{p}\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|\varphi_i|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,t\varphi)\,\mathrm{d}x. \\
&\leq \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{t^p}{p}\sum_{i=1}^{m}\int_{K} b_i(x)|\varphi_i|^p \,\mathrm{d}x - \int_{K} F(x,t\varphi)\,\mathrm{d}x. \\
&\leq \frac{t^p}{p}\|\varphi\|^p - \frac{t^p}{p}C_1 - Ct^{\mu}\int_K |\varphi|^{\mu}\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{p}\|\varphi\|^p - C_1\right)t^p - Ct^{\mu}\int_K |\varphi|^{\mu}\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

para todo $t > 0$, isso implica que $I(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Considerando $e = t\varphi$ com t suficientemente grande, concluímos a demonstração. $\square$

3.4 Condição de Palais-Smale

Definição 3.10. Seja E um espaço de Banach real. Dizemos que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale se toda sequência (U_k) em E tal que $|I(U_k)| \leq C$ e $|I'(U_k)| \to 0$ em E^*, possui uma subsequência que converge fortemente em E.

Os próximos resultados mostram que I satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 3.11. *Suponhamos que as condições (K_1) e $(K_3) - (K_7)$ sejam válidas. Dada uma sequência (U_k) em E tal que*

$$|I(U_k)| \leq C \quad e \quad I'(U_k) \to 0 \quad em \quad E^*, \tag{3.24}$$

então a sequência (U_k) é limitada em E.

Demonstração. Consideremos uma sequência (U_k) em E satisfazendo (3.24).

Notemos que

$$I(U_k) - \frac{1}{\mu}I'(U_k)U_k = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)\|U_k\|^p + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i^{(k)}|^p\,\mathrm{d}x + J_{1,k}, \tag{3.25}$$

onde

$$J_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nabla F(x,U_k)\cdot U_k - \mu F(x,U_k)}{\mu}\,\mathrm{d}x.$$

A condição (K_7) nos diz que existe $\mu > p$ tal que $0 < \mu F(x,U) \leq \nabla F(x,U)\cdot U$ para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Assim, $\nabla F(x,U)\cdot U - \mu F(x,U) \geq 0$. Portanto,

$$J_{1,k} = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\nabla F(x,U_k)\cdot U_k - \mu F(x,U_k)}{\mu}\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Consequentemente, em (3.25),

$$I(U_k) - \frac{1}{\mu}I'(U_k)U_k \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)\|U_k\|^p + \left(\frac{1}{\mu} - \frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i^{(k)}|^p\,\mathrm{d}x.$$

Usando a desigualdade de Hölder, a imersão contínua $L^{p\sigma}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow E$, visto que $\sigma p < (p^{\#}+1)(\sigma - 1)$, e pela condição (K_4), concluímos

$$\begin{aligned} I(U_k) - \frac{1}{\mu}I'(U_k)U_k &\geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)\|U_k\|^p - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)S_{t_0}^{-p}\|U_k\|^p\sum_{i=1}^{m}\|b_i\|_\sigma \\ &= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right)\left[1 - S_{t_0}^{-p}\sum_{i=1}^{m}\|b_i\|_\sigma\right]\|U_k\|^p. \end{aligned}$$

Pelas condições (K_4) e (K_6),

$$1 - S_{t_0}^{-p} \sum_{i=1}^{m} \|b_i\|_\sigma \geq 0 \quad \text{e} \quad \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\mu}\right) > 0.$$

Assim,

$$I(U_k) - \frac{1}{\mu} I'(U_k)U_k \geq C\|U_k\|^p.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
C\|U_k\|^p &\leq I(U_k) - \frac{1}{\mu} I'(U_k)U_k \\
&\leq \left| I(U_k) - \frac{1}{\mu} I'(U_k)U_k \right| \\
&\leq |I(U_k)| + \frac{1}{\mu} |I'(U_k)u_k| \\
&\leq |I(U_k)| + \frac{1}{\mu} \|I'(U_k)\|_{E^*} \|U_k\|.
\end{aligned}$$

Como a sequência (U_k) satisfaz (3.24), então $|I(U_k)| \leq C_1$ e $\|I'(U_k)\|_{E^*} \leq C_2$. Dessa maneira,

$$C\|U_k\|^p \leq C_1 + C_2\|U_k\|.$$

Por consequência, a sequência (U_k) é limitada em E. □

Agora, vamos mostrar que a sequência (U_k) dada no Lema 3.11 satisfaz a condição de Palais-Smale.

Lema 3.12. *Seja uma sequência $(U_k) \subset E$ satisfazendo as hipóteses do Lema 3.11. Então o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Como E é um espaço reflexivo e pelo Lema 3.11 a sequência (U_k) é limitada em E. Então podemos extrair uma subsequência (U_{k_j}) de (U_k) tal que $U_{k_j} \rightharpoonup U$ em E. Vamos mostrar que, a menos de subsequência, (U_{k_j}) converge fortemente em E.

Afirmação 1:

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i \left(\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u \right) \mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x) |u_i|^{p-2} u_i \left(u_i^{(k_j)} - u_i \right) \mathrm{d}x \to 0.$$

De fato, sejam os funcionais $\widetilde{f}, \widehat{f} : E \to \mathbb{R}$ definidos por

$$\widetilde{f}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i \nabla \varphi_i \, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \widehat{f}(\varphi) = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x) |u_i|^{p-2} u_i \varphi_i \, \mathrm{d}x,$$

em que $\varphi = (\varphi_1, \cdots, \varphi_m) \in E$. Como $U_{k_j} \rightharpoonup U$ em E, então $\widetilde{f}(U_{k_j}) \to \widetilde{f}(U)$ e $\widehat{f}(U_{k_j}) \to \widehat{f}(U)$. Assim,

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i \left(\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u\right) \mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x) |u_i|^{p-2} u_i \left(u_i^{(k_j)} - u_i\right) \mathrm{d}x \to 0.$$

Afirmação 2: $\left|\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x) |u_{k_i}|^{p-2} u_{k_i} \left(u_i^{(k_j)} - u_i\right) \mathrm{d}x\right| \to 0.$

De fato, pela desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x) |u_{k_i}|^{p-2} u_{k_i} \left(u_i^{(k_j)} - u_i\right)\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |b_i(x)|^{\frac{p-1}{p}} \left|u_i^{(k_j)}\right|^{p-1} |b_i(x)|^{\frac{1}{p}} \left|u_i^{(k_j)} - u_i\right| \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b_i(x)| \left|u_i^{(k_j)}\right|^{p}\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |b_i(x)| \left|u_i^{(k_j)} - u_i\right|^{p}\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|b_i\|_{\sigma}^{(p-1)/p} \left\|u_i^{(k_j)}\right\|_{p\sigma'}^{(p-1)/p} \|b_i\|_{\sigma}^{1/p} \left\|u_i^{(k_j)} - u_i\right\|_{p\sigma'}^{1/p} \\
&= \|b_i\|_{\sigma} \left\|u_i^{(k_j)}\right\|_{p\sigma'}^{(p-1)/p} \left\|u_i^{(k_j)} - u_i\right\|_{p\sigma'}^{1/p}.
\end{aligned}$$

Como, $\left\|u_i^{(k_j)}\right\|_{p\sigma'}^{(p-1)/p} \leq \|U_{k_j}\|_{p\sigma'}^{(p-1)/p}$ e $\left\|u_i^{(k_j)} - u_i\right\|_{p\sigma'}^{1/p} \leq \|U_{k_j} - U\|_{p\sigma'}^{1/p}$, segue-se que

$$\left|\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x) |u_{k_i}|^{p-2} u_{k_i} \left(u_i^{(k_j)} - u_i\right) \mathrm{d}x\right| \leq \|U_{k_j}\|_{p\sigma'}^{(p-1)/p} \|U_{k_j} - U\|_{p\sigma'}^{1/p} \sum_{i=1}^{m} \|b_i\|_{\sigma}$$

A condição (K_4) e a imersão contínua $E \hookrightarrow L^{p\sigma'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ garantem que $\|U_{k_j}\|_{p\sigma'}$ seja limitada. Além disso, o Lema 3.11, junto com a Proposição 3.6 asseguram que $\|U_{k_j} - U\|_{p\sigma'} \to 0$. Isso conclui a Afirmação 2.

Afirmação 3: $\left|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla F(x, U_{k_j}) \cdot (U_{k_j} - U) \,\mathrm{d}x\right| \to 0.$

De fato, por (3.23)

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \nabla F(x, U_{k_j}) \cdot (U_{k_j} - U)\right| \leq \epsilon \int_{\mathbb{R}^n} A(x) |U_{k_j}|^{p-1} |U_{k_j} - U| + C \int_{\mathbb{R}^n} A(x) |U_{k_j}|^{q} |U_{k_j} - U|. \tag{3.26}$$

Vamos estimar as integrais de (3.26) separadamente.

Primeiro, usamos a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} A(x) |U_{k_j}|^{p-1} |U_{k_j} - U| \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} (A(x))^{(p-1)/p} |U_{k_j}|^{p-1} (A(x))^{1/p} |U_{k_j} - U| \,\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x) |U_{k_j}|^{p} \,\mathrm{d}x\right)^{(p-1)/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} A(x) |U_{k_j} - U|^{p}\right)^{1/p} \\
&= \|U_{k_J}\|_{L^p_{A(x)}}^{p-1} \|U_{k_J} - U\|_{L^p_{A(x)}}.
\end{aligned}$$

Pela Proposição 3.4, existe $C > 0$ tal que $\|U_{k_j}\|^{p-1}_{L^p_{A(x)}} \leq C\|U_{k_j}\|^{p-1}$ e, pelo Lema 3.11, $\|U_{k_j}\|^{p-1} \leq C_1$. Assim, $\|U_{k_j}\|^{p-1}_{L^p_{A(x)}} \leq C_2$. Já a Proposição 3.6 garante que $\|U_{k_j} - U\|_{L^p_{A(x)}} \to 0$, uma vez que, $U_{k_j} \rightharpoonup u$ em E. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U_{k_j}|^{p-1}|U_{k_j} - U| \, \mathrm{d}x \to 0. \tag{3.27}$$

De modo análogo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U_{k_j}|^{q}|U_{k_j} - U| \, \mathrm{d}x \to 0. \tag{3.28}$$

Substituindo (3.27) e (3.28) em (3.26), concluímos a Afirmação 3.

Finalizadas essas afirmações, vamos mostrar que $U_{k_j} \to U$ em E.

Por hipótese, $I'(U_{k_j}) \to 0$, isto é, $\|I'(U_{k_j})\|_{E^*} \to 0$. Como

$$\|I'(U_{k_j})\|_{E^*} = \sup_{\varphi \in E\setminus\{0\}} \frac{|I'(U_{k_j})\varphi|}{\|\varphi\|},$$

logo $|I'(U_{k_j})\varphi| \leq \epsilon\|\varphi\|$ para todo $\varphi \in E \setminus \{0\}$ e todo $\epsilon > 0$. Em particular, $|I'(U_{k_j})(U_{k_j} - U)| < \epsilon\|U_{k_j} - U\|$. Usando que (U_{k_j}) é uma sequência limitada em E e tomando ϵ suficientemente pequeno, segue-se que $I'(U_{k_j})(U_{k_j} - U) \to 0$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} I'(U_{k_j})(U_{k_i} - U) &= \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)}|^{p-2} \nabla u_i^{(k_j)} \nabla (u_i^{(k_j)} - u_i) + a_i(x)|u_i^{(k_j)}|^{p-2} u_i^{(k_j)} (u_i^{(k_j)} - u_i) \, \mathrm{d}x \\ &+ \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i^{(k_j)}|^{p-2} u_i^{(k_j)} (u_i^{(k_j)} - u_i) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n} \nabla F(x, U_{k_j}) \cdot (U_{k_j} - U) \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Com as Afirmações 2 e 3, concluímos que

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)}|^{p-2} \nabla u_i^{(k_j)} \nabla (u_i^{(k_j)} - u_i) + a_i(x)|u_i^{(k_j)}|^{p-2} u_i^{(k_j)} (u_i^{(k_j)} - u_i) \, \mathrm{d}x \to 0. \tag{3.29}$$

Agora, vamos analisar dois casos: quando $p \geq 2$ e quando $1 < p < 2$.

Quando $p \geq 2$, pelo Lema A.2,

$$\begin{aligned}
\|U_{k_j} - U\|^p &= \sum_{i=1}^{m} \left\| u_i^{(k_j)} - u_i \right\|_{E_i}^p \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i|^p + a_i(x)|u_i^{(k_j)} - u_i|^p \, \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{c_p} \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}|^{p-2} \nabla u_i^{(k_j)} - |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i)(\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i) \, \mathrm{d}x \\
&+ \frac{1}{c_p} \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}|^{p-2} u_i^{(k_j)} - |u_i|^{p-2} u_i)(u_i^{(k_j)} - u_i) \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{c_p} \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)}|^{p-2} \nabla u_i^{(k_j)} (\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i) + a_i(x)|u_i^{(k_j)}|^{p-2} u_i^{(k_j)} (u_i^{(k_j)} - u_i) \\
&- \frac{1}{c_p} \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i (\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i) + a_i(x)|u_i|^{p-2} u_i (u_i^{(k_j)} - u_i) \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Por (3.29) e pela Afirmação 1, concluímos que

$$U_{k_j} \to U \quad \text{em} \quad E.$$

Quando $1 < p < 2$, da mesma forma,

$$\begin{aligned}
\|U_{k_j} - U\|^p &= \sum_{i=1}^{m} \|u_i^{(k_j)} - u_i\|_{E_i}^p \\
&= \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_i)} - \nabla u_i|^p + a_i(x)|u_i^{(k_j)} - u_i|^p \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Igual ao que foi feito na demonstração do Lema 1.17, segue-se que

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i|^p \, \mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}| + |\nabla u_i|)^p \, \mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i|^2}{(|\nabla u_i^{k_j}| + |\nabla u_i|)^{2-p}} \, \mathrm{d}x$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u_i^{(k_j)} - u_i|^p \, \mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^p \, \mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x) \frac{|u_i^{(k_j)} - u_i|^2}{(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^{2-p}} \, \mathrm{d}x.$$

Pelo Lema A.2,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i|^p\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}| + |\nabla u_i|)^p\right)^{(2-p)/p}} \leq \frac{1}{c_p} \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}|^{p-2} \nabla u_i^{(k_j)} - |\nabla u_i|^{p-2} \nabla u_i)(\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i) \tag{3.30}$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u_i^{(k_j)} - u_i|^p\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^p\right)^{(2-p)/p}} \leq \frac{1}{c_p}\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}|^{p-2}u_i^{(k_j)} - |u_i|^{p-2}u_i)(u_i^{(k_j)} - u_i). \tag{3.31}$$

Somando (3.30) e (3.31),

$$J_{0,k} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u_i^{(k_j)}| + |\nabla u_i|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u_i^{(k_j)} - u_i|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}}.$$

Concluímos que,

$$J_{0,k} \leq J_{2,k} + J_{3,k}, \tag{3.32}$$

onde,

$$J_{2,k} = \frac{1}{c_p}\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}|^{p-2}\nabla u_i^{(k_j)} - |\nabla u_i|^{p-2}\nabla u_i)(\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i)\,\mathrm{d}x$$

e

$$J_{3,k} = \frac{1}{c_p}\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}|^{p-2}u_i^{(k_j)} - |u_i|^{p-2}u_i)(u_i^{(k_j)} - u_i)\,\mathrm{d}x.$$

Da Afirmação 1 e de (3.29), resulta que $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, quando $k \to \infty$.

Agora, notemos que os termos $\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}| + |\nabla u_i|)^p \,\mathrm{d}x$, $\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^p \,\mathrm{d}x$ são limitados, pois a sequência (U_k) é limitada em E. Como $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, quando $k \to \infty$, então

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i|^p\right)^{2/p} \to 0 \quad \text{e} \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u_i^{(k_j)} - u_i|^p\right)^{2/p} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Assim,

$$U_{k_j} \to U \quad \text{em} \quad E.$$

Suponha que $\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}| + |\nabla u_i|)^p \,\mathrm{d}x \to 0$ e $\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^p \,\mathrm{d}x \to 0$. Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}| + |\nabla u_i|)^p \,\mathrm{d}x$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u_i|^p \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^p \,\mathrm{d}x,$$

concluímos que $U = 0$. Substituindo $U = 0$ em (3.32),

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)}|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u_i^{(k_j)}|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u_i^{(k_j)}|^p \,\mathrm{d}x\right)^{2/p}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}|)^p \,\mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \leq J_{2,k} + J_{3,k},$$

e, como $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, segue-se que $U_k \to 0$ em E.

Por outro lado, se $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}|+|\nabla u_i|)^p \, \mathrm{d}x$ ou $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}|+|u_i|)^p \, \mathrm{d}x$ não convergem para 0, como $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, então, por (3.32),

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i^{(k_j)} - \nabla u_i|^p \, \mathrm{d}x\right)^{2/p} + \left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u_i^{(k_j)} - u_i|^p \, \mathrm{d}x\right)^{2/p} \to 0.$$

Sejam

$$L_{1,k_j} = \frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}| + |\nabla u_i|)^p \, \mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}} \quad \text{e} \quad L_{2,k_j} = \frac{1}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^p \, \mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}},$$

assim,

$$\min\left\{L_{1,k_j}, L_{2,k_j}\right\} 2^{2/p} \|u_i^{(k_j)} - u_i\|^2 \leq J_{0,k}.$$

Como $I(u_k) \to c > 0$, a menos de subsequência, existe um $\delta > 0$ tal que os termos $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i^{(k_j)}| + |\nabla u_i|)^p \, \mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p}$, $\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)(|u_i^{(k_j)}| + |u_i|)^p \, \mathrm{d}x\right)^{(2-p)/p} > \delta$. Isso, junto com o fato de que $J_{2,k} + J_{3,k} \to 0$, quando $k \to \infty$, permite-nos concluir que

$$U_{k_j} \to U \quad \text{em} \quad E.$$

Portanto, $U_{k_j} \to U$ em E e o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale.

□

3.5 Demonstração do Teorema 3.1

Pelo Lema 3.12, o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Além disso, o Lema 3.8 garante a existência de constantes $\rho, \gamma > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} > \gamma$, e, pelo Lema 3.9, existe $e \in E \setminus \partial B_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$. Assim, usando o Teorema A.12, concluímos que I possui um valor crítico $c > \gamma$, o qual é dado por

$$c = \inf_{g \in \Gamma} \max_{U \in g([0,1])} I(U),$$

onde $\Gamma = \{g \in C^1([0,1], E) : g(0) = 0; g(1) = e\}$. Isso nos diz que o problema (1.1) tem uma solução no nível minimax.

Por fim, notemos que, se $F(x, U)$ for par em U, então o funcional I também o é. Tomando $V = \{0\}$ e usando o Lema 3.9, concluímos, pelo Teorema A.13, que I possui uma sequência ilimitada de valores críticos. Portanto, (3.1) tem infintas soluções.

Capítulo 4

Sobre um sistema de equações de Schrödinger quase lineares com crescimento exponencial em $\mathbb{R}^n$

4.1 Introdução

Neste capítulo, vamos estudar a existência e a multiplicidade de soluções para o seguinte sistema em $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{cases} -\Delta_n u_1 + a_1(x)|u_1|^{n-2}u_1 = b_1(x)|u_1|^{n-2}u_1 + g_1(x)f_1(U) + \varepsilon h_1; \\ -\Delta_n u_2 + a_2(x)|u_2|^{n-2}u_2 = b_2(x)|u_2|^{n-2}u_2 + g_2(x)f_2(U) + \varepsilon h_2; \end{cases} \tag{4.1}$$

em que $n \geq 2$ e ε é positivo. Como no Capítulo 2, as funções $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ são contínuas com $f_i(x, 0, 0) = 0$ para cada $i \in \{1, 2\}$. Consideraremos a situação variacional em que

$$\nabla F(x, U) = (g_1(x)f_1(U), g_2(x)f_2(U))$$

para alguma função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1, cuja notação $\nabla F(x, U)$ denota o gradiente de F nas variáveis $U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$. Sobre $\mathbb{R}^2$ usaremos a norma euclideana, isto é,

$$|U| = \sqrt{|u_1|^2 + |u_2|^2}.$$

Para obter a existência e a multiplicidade de soluções fracas do problema (4.1) consideraremos o mesmo espaço variacional estudado no Capítulo 3, no caso em que

$p = n$, ou seja, o subespaço $E = E_1 \times E_2$ de $W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$, em que

$$E_i = \left\{ u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n); \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u|^n \, \mathrm{d}x < \infty \right\} \quad \text{para cada} \quad i \in \{1, 2\}.$$

Os espaços E_i são como os espaços estudados no Capítulo 2. Denotaremos a norma de cada espaço E_i por $\| \cdot \|_{E_i}$.

Como consequência das Proposições 1.7 e 1.8 o espaço E munido com a norma

$$\|U\| = \left(\sum_{i=1}^{2} \|u_i\|_{E_i}^n \right)^{1/n}$$

é um espaço de Banach reflexivo. Além disso, fazendo-se $p = n$ na Proposição 3.3, segue-se que a imersão de E em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$ é contínua.

Dizemos que $U \in E$ é uma solução fraca do problema (4.1) se, para todo $V = (v_1, v_2) \in E$ e para cada $i \in \{1, 2\}$, vale

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i|^{n-2} \nabla u_i \nabla v_i + a_i(x)|u_i|^{n-2} u_i v_i) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^{n-2} u_i v_i \, \mathrm{d}x \\ - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla g_i(x) f_i(U) \cdot v_i \, \mathrm{d}x - \varepsilon \langle h_i, v_i \rangle = 0. \end{aligned}$$

Sobre os potenciais $a_i(x)$, consideramos as condições:

(A_1) $a_i : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ é uma função mensurável e $a_i \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para cada $i \in \{1, 2\}$;

(A_2) $\lambda_1 := \inf\limits_{U \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\|U\|^n}{\|U\|_n^n} > 0.$

Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $s \geq n$, definimos

$$\nu_s(\Omega) = \inf_{U \in W_0^{1,n}(\Omega, \mathbb{R}^2) \setminus \{0\}} \frac{\|U\|^n}{\|U\|_s^n},$$

e $\nu_s(\emptyset) = \infty$. Para obter um resultado de compacidade, vamos considerar as seguintes hipóteses:

(A_3) $\lim\limits_{R \to \infty} \nu_n(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$;

(A_4) Existem uma função $A(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$, com $A(x) \geq 1$, e constantes $\beta > 1$, c_0, $R_0 > 0$ tais que

$$A(x) \leq c_0 \left[1 + \left(\min_{1 \leq i \leq m} \{a_i(x)\} \right)^{1/\beta} \right],$$

para todo $|x| \geq R_0$.

No que diz respeito às funções $g_i(x)$, assumimos que as mesmas são estritamente positivas e que podem ser ilimitadas em x, desde que seus crescimentos sejam controlados pelos potenciais $a_i(x)$. Mais precisamente,

(G_1) as funções $g_i : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ são contínuas para todo $i \in \{1, 2\}$ e existem $\lambda_0, \Lambda_0 > 0$ tais que

$$\lambda_0 \leq g_i(x) \leq \Lambda_0 A(x) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Para simplificar algumas estimativas, vamos assumir $f_i(s) = 0$ para todo $s \in (-\infty, 0]$ e cada $i \in \{1, 2\}$. Além disso, suponhamos que $F(x, U)$ satisfaça as seguintes condições:

(F_1) $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e $\displaystyle\lim_{|U| \to 0^+} \frac{|\nabla F(x, U)|}{A(x)|U|^{n-1}} = 0$;

(F_2) cada f_i tem *crescimento exponencial crítico* em $+\infty$, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|U| \to +\infty} f_i(U) e^{-\alpha |U|^{n/(n-1)}} = \begin{cases} 0, & \forall\, \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \forall\, \alpha < \alpha_0; \end{cases}$$

(F_3) existe um número $\mu > n$ tal que

$$0 < \mu |F(x, U)| \leq U \cdot \nabla F(x, U),$$

para todo $(x, U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(F_4) existem constantes $S_0, M_0 > 0$ tais que para todo $|U| \geq S_0$

$$0 < |F(x, U)| \leq M_0 |\nabla F(x, U)|.$$

Em relação às funções $b_i(x)$, assumimos que

(B_1) $b_i : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ são funções mensuráveis tais que $\displaystyle\sum_{i=1}^{2} \|b_i\|_\sigma < S_{t_0}^n$, em que $t_0 := \sigma n/(\sigma - 1)$ para algum σ e S_{t_0} é a melhor constante para a imersão de Sobolev $E \hookrightarrow L^{t_0}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$, isto é,

$$S_{t_0} := \inf_{U \in E \setminus \{0\}} \frac{\|U\|}{\|U\|_{t_0}}.$$

Agora, vamos enunciar nossos principais resultados.

Teorema 4.1. *Suponhamos que $(A_1) - (A_4)$, (G_1), $(F_1) - (F_3)$ e (B_1) sejam satisfeitas. Então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que se $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, o problema (4.1) tem uma solução fraca com energia negativa.*

Teorema 4.2. *Suponhamos que $(A_1)-(A_4)$, (G_1), $(F_1)-(F_4)$ e (B_1) são satisfeitas, e, além disso, assumamos que*

(F_5) *existem constantes $p > n$ e $C_p > 0$ tais que*

$$F(x, S_1) \geq \frac{C_p}{p}|S_1|^p,$$

onde $S_1 = (s_1, 0)$,

$$C_p > \left[S_p^p \left(\frac{\beta n}{\beta - 1} \right)^{p-n} \left(\frac{p-n}{p} \right)^{(p-n)/n} \left(\frac{\alpha_0}{\alpha_n} \right)^{(n-1)(p-n)/n} \frac{1}{\sqrt{2^{2n-1}}} \right]$$

e

$$S_p = \inf_{u \in E_1} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^n + a_1(x)|u|^n \, \mathrm{d}x \right)^{1/n}}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}}.$$

Então existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que, se $0 < \varepsilon < \varepsilon_2$, o problema (4.1) tem uma segunda solução fraca.

Observação 4.3. *A hipótese (F_5) poderia ter sido considerada para a direção $i = 2$.*

Teorema 4.4. *Suponhamos que $(A_1)-(A_4)$, (G_1), $(F_1)-(F_5)$, (B_1) sejam satisfeitas e $h \equiv 0$, então o problema (4.1) tem uma solução fraca não trivial.*

4.2 Alguns resultados preliminares

Nesta seção, justificaremos alguns resultados técnicos que serão utilizados nas demonstrações dos resultados principais.

Proposição 4.5. *Se as condições (A_1), (A_2) e (A_4) forem válidas, então a imersão $E \hookrightarrow L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$ é contínua para $t \geq n$.*

Demonstração. Daremos apenas a ideia, pois essa é análoga à demonstração da Proposição 3.4, trocando as imersões $E_i \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{(t\beta-p)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p-1 \leq t \leq p^{\#}$, $E \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e $W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{t+1}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para todo $p-1 \leq t \leq p^{\#}$, por $E_i \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$, $W^{1,n}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{(t\beta-n)/(\beta-1)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $t \geq n$, $E \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$ e $W^{1,n}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^2)$ para todo $t \geq n$, respectivamente.

$\square$

O próximo Lema garante que a condição (A_3) é válida para todo $t \geq n$.

Lema 4.6. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ e $n \leq t < \infty$. Então*

$$\nu_t(\Omega) \geq C\left(\nu_n(\Omega)\right)^{\theta_1}, \tag{4.2}$$

onde θ_1 é um número fixo em $(0,1)$. Além disso, se $\lim_{R\to\infty} \nu_n(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$, então $\lim_{R\to\infty} \nu_t(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B}_R) = \infty$, para todo $t \geq n$.

Demonstração. Esta demonstração é análoga à demonstração do Lema 3.5, porém com os argumentos que foram utilizados no Lema 2.6. De fato, pelo Teorema A.6, para cada $i \in \{1,2\}$,

$$\|u_i\|_t \leq C\|u_i\|_n^{1-\theta}\|\nabla u_i\|_n^{\theta}, \quad \text{com} \quad \frac{1}{t} = \frac{1-\theta}{n}.$$

Logo,

$$\|u_i\|_t^n \leq C\|u_i\|_n^{(1-\theta)n}\|\nabla u_i\|_n^{\theta n}, \quad \text{com} \quad \theta \in (0,1).$$

Sabemos que, para cada $i \in \{1,2\}$, $\|\nabla u_i\|_n \leq \|u_i\|_{1,n}$, e, pelas imersões contínuas $E_i \hookrightarrow W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$, obtemos,

$$\|u_i\|_t^n \leq C\|u_i\|_n^{(1-\theta)n}\|u_i\|_{E_i}^{\theta n} \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,2\}. \tag{4.3}$$

Como,

$$\|u_i\|_n^{(1-\theta)n} \leq \|U\|_n^{(1-\theta)n} \quad \text{e} \quad \|u_i\|_{E_i}^{\theta n} \leq \|U\|^{\theta n} \quad \text{para cada} \quad i \in \{1,2\},$$

então,

$$\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_n^{(1-\theta)n} \leq 2\|U\|_n^{(1-\theta)n} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_{E_i}^{\theta n} \leq 2\|U\|^{\theta n}. \tag{4.4}$$

Além disso, sabemos que as normas em $\mathbb{R}^2$ são equivalentes, então existem C_1 e C_2 tais que,

$$\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_t^n \geq C_1\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_t\right)^n \geq C_2\left(\sum_{i=1}^{2}\|u_i\|_t^t\right)^{n/t} = C_2\|U\|_t^n. \tag{4.5}$$

Substituindo (4.4) e (4.5) em (4.3),

$$\|U\|_t^n \leq C\|U\|_n^{(1-\theta)n}\|U\|^{\theta n}.$$

Quando $U \neq 0$, usaremos esta desigualdade da seguinte forma:

$$\frac{1}{\|U\|_t^n} \geq \frac{1}{C\|U\|_s^{(1-\theta)n}\|U\|^{\theta n}}. \tag{4.6}$$

Pela definição de $\nu_t(\Omega)$ e (4.6),

$$\begin{aligned}
\nu_t(\Omega) &= \inf_{U\in W_0^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^n}{\|U\|_t^n} \\
&\geq \inf_{U\in W_0^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^n}{C\|U\|_n^{(1-\theta)n}\|U\|^{\theta n}} \\
&\geq \frac{1}{C}\inf_{U\in W_0^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^n}{\|U\|_n^{(1-\theta)n}\|U\|^{\theta n}} \\
&= \frac{1}{C}\inf_{U\in W_0^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\|U\|^{(1-\theta)n}}{\|U\|_n^{(1-\theta)n}} \\
&= \frac{1}{C}\inf_{U\in W_0^{1,n}(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \left[\frac{\|U\|^n}{\|U\|_n^n}\right]^{(1-\theta)} \\
&= \frac{1}{C}\left(\nu_n(\Omega)\right)^{(1-\theta)}.
\end{aligned}$$

Isso conclui a desigualdade (4.2). □

Proposição 4.7. *Se as condições $(A_1)-(A_4)$ forem satisfeitas, então E estará imerso compactamente em $L^t(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)$ e em $L^t_{A(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)$ para todo $t\geq n$.*

Demonstração. Essa demonstração é análoga à demonstração da Proposição 3.6, porém usando as imersões contínua de E em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^2)$ e compacta de $W^{1,n}(B_{R+1},\mathbb{R}^2)$ em $L^t(B_{R+1},\mathbb{R}^2)$ para todo $t\geq n$, ao invés das imersões contínua de E em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ e compacta de $W^{1,n}(B_{R+1},\mathbb{R}^m)$ em $L^t(B_{R+1},\mathbb{R}^m)$ para todo $p-1\leq t\leq p^*$, respectivamente. □

Proposição 4.8. *Se as condições $(A_1)-(A_2)$, (A_4), (G_1), $(F_1)-(F_2)$ e (B_1) forem satisfeitas, então, para todo $U\in E$ e $t\geq n$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^t\Phi_\alpha(|U|)\,\mathrm{d}x<\infty. \tag{4.7}$$

Além disso, se $2^{(2n-1)/2(n-1)}\alpha\|U\|^{n/(n-1)}<\alpha_n$, então, para todo $t\geq n$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^t\Phi_\alpha(|U|)\,\mathrm{d}x\leq C\|U\|^t.$$

Demonstração. Primeiro, vamos encontrar uma estimativa conveniente para a função $\Phi_\alpha(|U|)$. Notemos que,

$$|U|^{2n/(n-1)}=(u_1^2+u_2^2)^{n/(n-1)}\leq 2^{1/(n-1)}(u_1^{2n/(n-1)}+u_2^{2n/(n-1)}),$$

Assim,

$$|U|^{n/(n-1)}\leq 2^{1/2(n-1)}\left[(u_1^{n/(n-1)})^2+(u_2^{n/(n-1)})^2\right]^{1/2}.$$

Usando que as normas em $\mathbb{R}^2$ são equivalentes,

$$|U|^{n/(n-1)} \leq 2^{1/2(n-1)}\left[u_1^{n/(n-1)} + u_2^{n/(n-1)}\right]. \tag{4.8}$$

Por outro lado, como $|u_i|^{nj/(n-1)} \leq |U|^{nj/(n-1)}$ para todo $i \in \{1,2\}$, então

$$|u_1|^{nj/(n-1)} + |u_2|^{nj/(n-1)} \leq 2|U|^{nj/(n-1)}.$$

Portanto,

$$-|U|^{nj/(n-1)} \leq -\frac{1}{2}(|u_1|^{nj/(n-1)} + |u_2|^{nj/(n-1)}). \tag{4.9}$$

Como a função $\Phi_\alpha(|U|)$ é crescente, segue-se, por (4.8) e (4.9), que

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(|U|) &= e^{\alpha|U|^{n/(n-1)}} - \sum_{j=0}^{n-2}\frac{\alpha^j|U|^{n/(n-1)}}{j!}\\ &\leq e^{\alpha 2^{1/2(n-1)}(u_1^{n/(n-1)}+u_2^{n/(n-1)})} - \sum_{j=0}^{n-2}\frac{\alpha^j}{j!}\frac{1}{2}(|u_1|^{nj/(n-1)} + |u_2|^{nj/(n-1)}).\end{aligned}$$

Pela desigualdade de Young,

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(|U|) &\leq \frac{1}{2}e^{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}u_1^{n/(n-1)}} + \frac{1}{2}e^{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}u_2^{n/(n-1)}} - \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n-2}\frac{\alpha^j}{j!}(|u_1|^{nj/(n-1)} + |u_2|^{nj/(n-1)})\\ &\leq \frac{1}{2}\left[\Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_1) + \Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_2)\right].\end{aligned}$$

Assim, encontramos a seguinte estimativa para a função $\Phi_\alpha(|U|)$:

$$\Phi_\alpha(|U|) \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2}\Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_i).$$

Usando mais uma vez que as normas em $\mathbb{R}^2$ são equivalentes, obtemos que existe uma constante C_1 tal que,

$$|U|^t\Phi_\alpha(|U|) \leq \frac{C_1}{2}(|u_1|^t + |u_2|^t)\sum_{i=1}^{2}\Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_i).$$

Isso implica que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^t\Phi_\alpha(|U|)\,\mathrm{d}x \leq \frac{C_1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} A(x)(|u_1|^t + |u_2|^t)\sum_{i=1}^{2}\Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_i)\,\mathrm{d}x. \tag{4.10}$$

A Proposição 2.8 garante que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_i|^t\Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_i)\,\mathrm{d}x < \infty \quad \text{para todo} \quad i \in \{1,2\}.$$

E, por argumentos análogos aos utilizados na mesma Proposição 2.8, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_1|^t \Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_2)\,\mathrm{d}x < \infty$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_2|^t \Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_1)\,\mathrm{d}x < \infty.$$

Isso, junto com (4.10) ,mostra (4.7). Para finalizar a demonstração, usamos mais uma vez a Proposição 2.8. Como $\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}\|U\|^{n/(n-1)} < \alpha_n$, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_i|^t \Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_i)\,\mathrm{d}x \leq C\|u_i\|_{E_i}^t \quad \text{para todo} \quad i \in \{1,2\}. \tag{4.11}$$

Usando argumentos análogos aos que foram utilizados na Proposição 2.8, é possível mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_1|^t \Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_2)\,\mathrm{d}x \leq C\|u_1\|_{E_1}^t \tag{4.12}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|u_2|^t \Phi_{\alpha 2^{(2n-1)/2(n-1)}}(u_1)\,\mathrm{d}x \leq C\|u_2\|_{E_2}^t. \tag{4.13}$$

Substituindo (4.11), (4.12) e (4.13) em (4.10), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^t \Phi_\alpha(|U|)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad C\|u_1\|_{E_1}^t + C\|u_2\|_{E_2}^t.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^t \Phi_\alpha(|U|)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad C\|U\|^t.$$

□

4.3 Formulação variacional

O funcional $I : E \to \mathbb{R}$ relacionado ao problema (2.1) é dado por

$$I(U) = \frac{1}{n}\|U\|^n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,U)\,\mathrm{d}x - \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\langle h_i, u_i\rangle. \tag{4.14}$$

Esse funcional está bem definido, uma vez que o Lema 2.9 garante que

$$\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^n\,\mathrm{d}x < \infty.$$

E

Lema 4.9. *Se $(F_1)-(F_3)$, (B_1) e (G_1) forem satisfeitas, então* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,u)|\,\mathrm{d}x<\infty$. *Além disso, para $q\geq 1$*

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,U)|\,\mathrm{d}x\leq\varepsilon\int_{\mathbb{R}^n}A(x)|U|^n\,\mathrm{d}x+C\int_{\mathbb{R}^n}A(x)|U|^{q+1}\Phi_\alpha(|U|)\,\mathrm{d}x. \tag{4.15}$$

Demonstração. Primeiro vamos mostrar uma desigualdade que é consequência das condições $(F_1)-(F_3)$ e (G_1).

Pela condição (F_1), dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que

$$|\nabla F(x,U)|<\varepsilon A(x)|U|^{n-1}\quad\text{sempre que}\quad 0<|U|<\delta.$$

Usando a condição (F_3) segue-se que

$$|F(x,U)|<\varepsilon A(x)|U|^{n}\quad\text{sempre que}\quad 0<|U|<\delta. \tag{4.16}$$

Por outro lado, a condição (F_2) garante que, para cada $\alpha>\alpha_0$,

$$\lim_{|U|\to+\infty}\frac{f_i(|U|)}{\Phi_\alpha(|U|)}=0,$$

ou seja, dado $\varepsilon>0$, existe $\gamma>0$ tal que

$$|f_i(|U|)|<\varepsilon\Phi_\alpha(|U|)\quad\text{sempre que}\quad |U|>\gamma.$$

Por (G_1),

$$|g_i(x)f_i(|U|)|\leq\varepsilon\Lambda_0A(x)\Phi_\alpha(|U|).$$

Assim,

$$\begin{aligned}|U\cdot\nabla F(x,U)| &\leq \sum_{i=1}^{2}|g_i(x)f_i(U)||u_i|\\ &\leq \varepsilon\Lambda_0A(x)\Phi_\alpha(|U|)\sum_{i=1}^{2}|u_i|.\end{aligned}$$

Logo,

$$|U\cdot\nabla F(x,U)| \;\leq\; m\varepsilon\Lambda_0A(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|\quad\text{sempre que}\quad |U|>\delta.$$

Substituindo na condição (F_3), obtemos

$$\begin{aligned}|F(x,U)| &\leq \frac{m}{\mu}\varepsilon\Lambda_0A(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|\\ &\leq \frac{m}{\mu}\frac{1}{|U|^q}\varepsilon\Lambda_0A(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|^{q+1}.\end{aligned}$$

Como $|U| > \gamma$,

$$|F(x,U)| \leq \frac{m}{\mu}\frac{1}{\gamma^q}\varepsilon\Lambda_0 A(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|^{q+1}.$$

Portanto,

$$|F(x,U)| \leq C_\varepsilon A(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|^{q+1} \quad \text{sempre que} \quad |U| > \gamma. \tag{4.17}$$

Por fim, no caso em que $|U| \in [\delta, \gamma]$, segue-se que $\Phi_\alpha(\delta) \leq \Phi_\alpha(|U|)$, para todo $|U| \in [\delta,\gamma]$, pois Φ_α é uma função crescente. Assim, $1 \leq (\Phi_\alpha(\delta))^{-1}\Phi_\alpha(|U|)$, para todo $|U| \in [\delta,\gamma]$. Como $f_i(|U|)$ é limitada para todo $|U| \in [\delta,\gamma]$. Assim,

$$\begin{aligned} |f_i(|U|)| &\leq C_0 \quad \text{para todo} \quad |U| \in [\delta,\gamma] \\ &\leq C_0(\Phi_\alpha(\delta))^{-1}\Phi_\alpha(|U|) \quad \text{para todo} \quad |U| \in [\delta,\gamma], \end{aligned}$$

ou seja,

$$|f_i(|U|)| \leq C\Phi_\alpha(|U|) \quad \text{para todo} \quad |U| \in [\delta,\gamma].$$

Por (G_1),

$$|g_i(x)f_i(|U|)| \leq C\Lambda_0 A(x)\Phi_\alpha(|U|) \quad \text{para todo} \quad |U| \in [\delta,\gamma]. \tag{4.18}$$

A condição (F_3) nos diz que

$$|F(x,U)| \leq \frac{1}{\mu}|U\cdot\nabla F(x,U)| \leq \frac{1}{\mu}\sum_{i=1}^{2}|g_i(x)f_i(|U|)||u_i|.$$

Assim, por (4.18), para todo $|U| \in [\delta,\gamma]$

$$\begin{aligned} |F(x,U)| &\leq \frac{m}{\mu}\Lambda_0 A(x)\Phi_\alpha(|U|)|U| \\ &\leq \frac{m}{\mu}\frac{1}{|U|^q}\Lambda_0 A(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|^{q+1}. \end{aligned}$$

Como $|U| > \delta$,

$$|F(x,U)| \leq \frac{m}{\mu}\frac{1}{\delta^q}\Lambda_0 A(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|^{q+1},$$

ou seja,

$$|F(x,U)| \leq CA(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|^{q+1} \quad \text{sempre que} \quad |U| \in [\delta,\gamma]. \tag{4.19}$$

Por (4.16), (4.17) e (4.19), para todo $|U| \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^2$,

$$|F(x,U)| \leq \varepsilon A(x)|U|^n + CA(x)\Phi_\alpha(|U|)|U|^{q+1}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^n\,\mathrm{d}x + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} A(x)|U|^{q+1}\Phi_\alpha(|U|)\,\mathrm{d}x.$$

Consequentemente, pelas Proposições 4.5 e 4.8,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x < \infty.$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon C_1\|U\|^n + C_\varepsilon\|U\|^{q+1}\Phi_\alpha(|U|). \tag{4.20}$$

□

Além disso, de forma análoga ao Capítulo 2, é possível mostrar que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ é de classe $C^1(E,\mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned}\langle I'(U),V\rangle = &\sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^n}(|\nabla u_i|^{n-2}\nabla u_i\nabla v_i + a_i(x)|u_i|^{n-2}u_iv_i)\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{2}\int_{\mathbb{R}^n} b_i(x)|u_i|^{n-2}u_iv_i\,\mathrm{d}x\\ &- \int_{\mathbb{R}^n}\nabla F(x,U)\cdot V\,\mathrm{d}x - \sum_{i=1}^{2}\varepsilon\langle h_i, v_i\rangle,\end{aligned}$$

para todo $V \in E$. Por conseguinte, pontos críticos de I são soluções fracas de (2.1).

A condição geométrica do Teorema do passo da montanha para o funcional I é estabelecida pelos próximos dois lemas.

Lema 4.10. *Se $(A_1)-(A_2)$, (A_4), (G_1), $(F_1)-(F_2)$ e (B_1) forem satisfeitas, então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, existe $\rho_\varepsilon > 0$ tal que*

$$I(U) > 0 \quad \textit{sempre que} \quad \|U\| = \rho_\varepsilon.$$

Além disso, ρ_ε pode ser escolhido de tal modo que $\rho_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

Demonstração. Seja $\rho > 0$ tal que $2^{(2n-1)/2(n-1)}\alpha\rho^{n/(n-1)} < \alpha_n$ e $\|u\| < \rho$. Por (4.20), pela desigualdade de Hölder e pela Proposição 4.6,

$$I(U) \geq \frac{1}{n}\|U\|^n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{2}\|b_i\|_\sigma\|u_i\|^n_{\sigma' n} - \varepsilon C_1\|U\|^n - C_\varepsilon\|U\|^{q+1} - \varepsilon\sum_{i=1}^{2}\|h_i\|_*\|u_i\|.$$

Como $\|u_i\|_{\sigma' n}^n \leq \|U\|_{\sigma' n}^n$ para cada $i \in \{1,2\}$, então

$$I(U) \geq \frac{1}{n}\|U\|^n - \frac{\|U\|_{\sigma' n}^n}{n} \sum_{i=1}^{2} \|b_i\|_\sigma - \epsilon C_1 \|U\|^n - C_\epsilon \|U\|^{q+1} - \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \|h_i\|_* \|u_i\|.$$

Como $\|u_i\| \leq \|U\|$ para cada $i \in \{1,2\}$, segue-se de (B_1) que

$$\begin{aligned} I(U) &\geq \frac{1}{n}\|U\|^n - \frac{\|U\|^n S_{t_0}^{-n}}{n} \sum_{i=1}^{2} \|b_i\|_\sigma - \varepsilon C_1 \|U\|^n - C_\varepsilon \|U\|^{q+1} - \varepsilon \|U\| \sum_{i=1}^{2} \|h_i\|_* \\ &= \left(\frac{1}{n} - \varepsilon C_1 - \frac{S_{t_0}^{-n}}{n} \sum_{i=1}^{2} \|b_i\|_\sigma \right) \|U\|^n - C_\varepsilon \|U\|^{q+1} - \varepsilon \|U\| \sum_{i=1}^{2} \|h_i\|_*. \end{aligned}$$

Logo,

$$I(U) \geq \left\{ \left(\frac{1}{n} - \varepsilon C_1 - \frac{S_{t_0}^{-n}}{n} \sum_{i=1}^{2} \|b_i\|_\sigma \right) \|U\|^{n-1} - C_\varepsilon \|U\|^{q} - \varepsilon \sum_{i=1}^{2} \|h_i\|_* \right\} \|U\|.$$

Assim, existe $\rho_\varepsilon > 0$ tal que $I(U) > 0$ sempre que $\|U\| = \rho_\varepsilon$. De fato, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $q > n$, podemos escolher $\rho_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{n} - \varepsilon C_1 - \frac{S_{t_0}^{-n}}{n} \sum_{i=1}^{2} \|b_i\|_\sigma \right) \rho_\varepsilon^{n-1} - C \rho_\varepsilon^{q} > 0.$$

Portanto, para ε suficientemente pequeno, existe $\rho_\varepsilon > 0$ tal que $I(U) > 0$ se $\|U\| = \rho_\varepsilon$. $\square$

Lema 4.11. *Suponhamos que $(A_1) - (A_2)$, (G_1) e (F_1), (F_3) e (B_1) sejam satisfeitas, então existe $e \in E$ com $\|e\| > \rho_\varepsilon$ tal que*

$$I(e) < \inf_{\|U\| = \rho_\varepsilon} I(U).$$

Demonstração. Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \backslash \{0\}$ com suporte compacto, $K = \operatorname{supp}(\varphi)$ e $\varphi \geq 0$. Suponhamos que $|U| > 0$. Fazendo $m = 2$ na demonstração do Lema 3.9, deduzimos, pela hipótese (F_3), que existe uma constante positiva C tal que

$$F(x,U) \geq C|U|^\mu, \tag{4.21}$$

para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Assim, para todo $tU = (t\varphi, 0)$, temos

$$\begin{aligned} I(tU) &= \frac{t^n}{n}\|\varphi\|^n - \frac{t^n}{n} \int_{\mathbb{R}^n} b_1(x)|\varphi|^n \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,(t\varphi,0)) \, \mathrm{d}x - t\varepsilon \langle h_1, \varphi \rangle \\ &\leq \frac{t^n}{n}\|\varphi\|^n - \frac{t^n}{n} \int_{K} b_1(x)|\varphi|^n \, \mathrm{d}x - \int_{K} F(x,(t\varphi,0)) \, \mathrm{d}x - t\varepsilon \langle h_1, \varphi \rangle \\ &\leq \frac{t^n}{n}\|\varphi\|^n - \frac{t^n}{n} C_1 - C t^\mu \int_K |\varphi|^\mu \, \mathrm{d}x - t\varepsilon \langle h_1, \varphi \rangle \\ &= \left(\frac{1}{n}\|\varphi\|^n - C_1 \right) t^n - C t^\mu \int_K |\varphi|^\mu \, \mathrm{d}x - t\varepsilon \langle h_1, \varphi \rangle, \end{aligned}$$

o qual implica que $I(t(\varphi,0)) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Considerando $e = t(\varphi,0)$, com t suficientemente grande, concluímos a demonstração.

□

A fim de encontrar uma bola apropriada para usar um argumento de minimização precisamos do seguinte resultado.

Lema 4.12. *Suponhamos que as condições* $(A_1) - (A_2)$, (G_1), (F_1) *e* (B_1) *sejam satisfeitas, então existem* $\eta > 0$ *e* $V \in E$ *com* $\|V\| = 1$ *tais que* $I(tV) < 0$ *para todo* $0 < t < \eta$. *Em particular,*

$$c_0 = \inf_{\|U\| \leq \eta} I(U) < 0. \tag{4.22}$$

Demonstração. Seja $v_1 \in E_1$ a única solução do problema

$$-\Delta_n u + a_1(x)|u|^{n-2}u = h_1 \ \text{ in } \mathbb{R}^n.$$

Assim, para $h_1 \neq 0$, temos

$$\langle h_1, v_1 \rangle = \|v_1\|_{E_1}^n > 0.$$

Para $t > 0$, seja $V = (v_1, 0)$. Então

$$\frac{d}{dt} I(tV) = t^{n-1}\|v_1\|_{E_1}^n - t^{n-1}\int_{\mathbb{R}^n} b_1(x)|v_1|^n - \int_{\mathbb{R}^n} g_1(x) f_1(tV) v_1 \,\mathrm{d}x - \varepsilon \langle h_1, v_1 \rangle.$$

Desde que $f_1(0) = 0$, por continuidade, segue-se que existe $\eta > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt} I(tV) < 0, \ \text{para todo } 0 < t < \eta.$$

Usando que $I(0) = 0$, temos que $I(tV) < 0$, para todo $0 < t < \eta$. □

4.4 Nível minimax

A fim de obtermos uma informação mais precisa sobre o nível minimax obtido pelo Teorema do passo da montanha, provaremos o seguinte lema.

Lema 4.13. *Seja* $\Psi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$\Psi(t) = \frac{t^n}{n}\|U_p\|^n - \int_{\mathbb{R}^n} F(x, tU_p) \,\mathrm{d}x,$$

em que $U_p = (u_p, 0) \in E$ *e* u_p *foi obtida no Lema 2.15. Suponhamos que* (G_1) *e* (F_5) *sejam válidas. Então*

$$\max_{t \geq 0} \Psi(t) < \frac{1}{n}\left(\frac{\beta - 1}{n\beta}\right)^n \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{2^{2n-1}}}. \tag{4.23}$$

Demonstração. Pelo Lema 2.14,

$$S_p = \|u_p\|_{E_1}^n \quad \text{com} \quad \|u_p\|_p = 1. \tag{4.24}$$

Por (F_5),

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x, tU_p)\,\mathrm{d}x \geq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{C_p}{p}|tU_p|^p\,\mathrm{d}x = \frac{C_p t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |u_p|^p\,\mathrm{d}x.$$

Assim,

$$\Psi(t) \leq \frac{t^n}{n}\|u_p\|_{E_1}^n - \frac{C_p t^p}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |u_p|^p\,\mathrm{d}x.$$

Por (4.24),

$$\Psi(t) \leq \frac{t^n}{n}S_p^n - \frac{C_p t^p}{p} \leq \max_{t\geq 0}\left[\frac{t^n}{n}S_p^n - t^p\frac{C_p}{p}\right].$$

Observemos que a função

$$h(t) = \frac{t^n}{n}S_p^n - t^p\frac{C_p}{p}$$

atinge seu valor máximo em $t = \left(\dfrac{S_p^n}{C_p}\right)^{1/(p-n)}$. Assim,

$$\max_{t\geq 0}\left[\frac{t^n}{n}S_p^n - t^p\frac{C_p}{p}\right] = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{S_p^p}{C_p}\right)^{n/(p-n)}.$$

Por outro lado, usando a condição sobre C_p em (F_5), deduzimos que

$$\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{p}\right)\left(\frac{S_p^p}{C_p}\right)^{n/(p-n)} < \frac{1}{n}\left(\frac{\beta-1}{n\beta}\right)^n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2^{2n-1}}}.$$

Portanto,

$$\max_{t\geq 0}\Psi(t) < \frac{1}{n}\left(\frac{\beta-1}{n\beta}\right)^n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2^{2n-1}}}.$$

□

Observação 4.14. *Segue-se imediatamente que se ε for suficientemente pequeno, então*

$$\max_{t\geq 0}\{I(tU_p)\} < \frac{1}{n}\left(\frac{\beta-1}{n\beta}\right)^n\left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2^{2n-1}}}.$$

4.5 Resultados principais

Diferentemente dos capítulos anteriores, não faremos as demonstrações dos resultados principais de forma detalhada, visto que a semelhança nos argumentos com capítulos anteriores poderia tornar a leitura cansativa. Por isso, faremos uma breve justificativa sobre como são determinadas as soluções do problema (4.1).

4.5.1 Demonstração do Teorema 4.1

Suponhamos que as hipóteses $(A_1) - (A_4)$, (G_1), $(F_1) - (F_3)$ e (B_1) sejam válidas. Seja ρ_ε como no Lema 4.10. Podemos escolher $\varepsilon_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\rho_\varepsilon < \frac{\beta - 1}{\beta n} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{(n-1)/n} \frac{1}{\sqrt{2^{2n-1}}}, \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_1).$$

Sendo $\overline{B}_{\rho_\varepsilon}$ um espaço métrico completo com a métrica dada pela norma de E, convexo, e tal que o funcional I é de classe C^1 e limitado sobre $\overline{B}_{\rho_\varepsilon}$. Pelo princípio variacional de Ekeland (Teorema A.15) existe uma sequência (U_k) em $\overline{B}_{\rho_\varepsilon}$ tal que

$$I(U_k) \to c_0 = \inf_{\|U\| \leq \rho_\varepsilon} I(U) \ \text{ e } \ \|I'(U_k)\|_* \to 0.$$

Observando que

$$\|U_k\| \leq \rho_\varepsilon < \frac{\beta - 1}{\beta n} \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_0}\right)^{(n-1)/n} \frac{1}{\sqrt{2^{2n-1}}},$$

a partir de argumentos análogos aos utilizados no Lema 2.20, é possível deduzir que (U_k) possui uma subsequência que converge fortemente para uma solução U_0 do problema (4.1). Portanto, $I(U_0) = c_0 < 0$.

4.5.2 Demonstração do Teorema 4.2

Para provar este teorema, assumimos as hipóteses $(A_1) - (A_4)$, (G_1), $(F_1) - (F_5)$ e (B_1) e, mostramos através dos Lemas 4.10 e 4.11, que I satisfaz a geometria do passo da montanha. Assim, aplicando uma versão do Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale (Teorema A.14), obtemos uma sequência (V_k) em E satisfazendo

$$I(V_k) \to c_M > 0 \ \text{ e } \ \|I'(V_k)\|_{E^*} \to 0,$$

onde c_M é o nível do passo da montanha. Agora, de forma análoga ao Corolário 2.19, concluímos que a sequência (V_k) converge fracamente para uma solução U_M do problema (4.1). Com isso, mostramos que $V_k \rightharpoonup U_M$ em E e $U_k \to U_0$ em E. Para provar que as soluções U_M e U_0 são distintas, usamos argumentos semelhantes aos utilizados na demonstração do Lema 2.25, porém é fundamental a estimativa (4.23) do nível minimax obtida na Proposição 4.13.

4.5.3 Demonstração do Teorema 4.3

Procedendo como na demonstração do Teorema 4.2, obtemos uma solução do tipo passo da montanha U_M para o problema (4.1). Para mostrar que essa solução é não trivial argumentamos como na Seção 2.7.

Apêndice A

Resultados Auxiliares

Neste apêndice, apresentaremos alguns resultados que foram utilizados ao longo de toda a tese.

Lema A.1. *Se $1 \leq p < \infty$, $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Lema A.2. [40, Lema A.05] *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno canônico em $\mathbb{R}^n$. Então*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \rangle \geq \begin{cases} c_p|x-y|^p & \text{se} \quad p \geq 2, \\ c_p \dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{se} \quad 1 < p < 2. \end{cases}$$

Teorema A.3. [12, Corolário 9.14] *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Se $1 \leq p \leq \infty$, então as imersões a seguir são todas contínuas:*

(i) *se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega)$, em que $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;*

(ii) *se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, +\infty)$.*

Teorema A.4. [12, Teorema 9.16] *Seja Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, limitado e de classe C^1. Então as imersões a seguir são todas compactas:*

(i) *se $p < n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$, onde $\dfrac{1}{p^*} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{n}$;*

(ii) *se $p = n$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para todo $q \in [p, +\infty)$.*

Teorema A.5. [12, Teorema 9.9] *Seja $1 \leq p < n$. Então a imersão $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e existe uma constante $C = C(p,n)$ tal que*

$$\|u\|_{p^*} \leq C\|\nabla u\|_p,$$

para todo $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, $p^* = pn/(n-p)$.

Teorema A.6. [32, Proposição 8.12] *Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq n$ e $1 \leq r \leq \infty$. Então a imersão existe uma constante $C = C(p,n,\theta)$ tal que $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^r(\Omega)$ e*

$$\|u\|_q \leq C\|u\|_r^{1-\theta}\|\nabla u\|_p^{\theta},$$

com $\theta > 0$ se $p = n \geq 2$,

$$\frac{1}{q} = \theta\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n}\right) + \frac{1-\theta}{r}.$$

Teorema A.7. [12, Teorema 4.9] *Sejam Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, (f_k) uma sequência de funções em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$ tais que $\|f_k - f\|_p \to 0$. Então existe uma subsequência (f_{k_i}) e uma função $h \in L^p(\Omega)$ tais que*

(i) *$f_{k_i}(x) \to f(x)$ quase sempre em Ω,*

(ii) *$|f_{k_i}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em Ω.*

Uma versão desse resultado foi provado em [30] para os espaços $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$.

Teorema A.8. [30, Proposição 1] *Seja (u_k) uma sequência em $W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ que converge fortemente. Então existe uma subsequência (u_{k_i}) de (u_k) e uma função $v \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ tais que $|u_{k_i}(x)| \leq v(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$.*

Teorema A.9. [16, Lema de Brezis-Lieb] *Sejam Ω um subconjunto de $\mathbb{R}^n$ e (u_k) uma sequência em $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$, satisfazendo:*

(i) *$\|u_k\|_p \leq C$, $C \in \mathbb{R}^n$;*

(ii) *$u_k \to u$ quase sempre em Ω.*

Então

$$\lim_{k\to\infty}(\|u_k\|_p^p - \|u_k - u\|_p^p) = \|u\|_p^p.$$

Como consequência dos resultados apresentados por Lions em [35] e [36], temos o seguinte resultado:

Teorema A.10. *Sejam $r > 0$ e $p \leq s < p^*$. Se (u_k) é uma sequência limitada em $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\int_{B(x,r)}|u_k|^p\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad k\to+\infty,$$

então $\|u_k\|_s \to 0$ para todo $p < s < p^*$.

Lema A.11. [52, Lema 2.1] *Sejam $\alpha > 0$ e $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ definimos a função Φ_α por*

$$\Phi_\alpha(s) := e^{\alpha|s|^{n/(n-1)}} - \sum_{j=0}^{n-2}\frac{\alpha^j|s|^{jn/(n-1)}}{j!}.$$

Se $s \geq 0$, $p \geq 1$ e $n \geq 2$, então

$$[\Phi_\alpha(s)]^p \leq \Phi_\alpha(ps).$$

Os próximos dois resultados são devidos a Ambrosetti-Rabinowitz e conhecidos como Teorema do passo da montanha.

Teorema A.12. [47, Teorema 2.2] *(Teorema do passo da montanha) Sejam E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E;\mathbb{R})$ satisfazendo a condição de Palais-Smale. Suponhamos que $I(0) = 0$ e*

(i) *existem constantes $\rho, \gamma > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho} > \gamma$,*

(ii) *existe $e \in E \setminus \partial B_\rho$ tal que $I(e) \leq 0$.*

Então I possui um valor crítico $c > \gamma$, o qual é dado por

$$c = \inf_{g\in\Gamma}\max_{u\in g([0,1])} I(u),$$

em que $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Uma versão mais geral é a seguinte:

Teorema A.13. [47, Teorema 9.12]*(Teorema do passo da montanha generalizado) Sejam E um espaço de Banach e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ um funcional par que satisfaça a condição de Palais-Smale com $I(0) = 0$. Se $E = V \oplus X$, onde V é um espaço de dimensão finita, e I satisfaz*

(i) *existem constantes $\rho, \gamma > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \gamma$, e*

(ii) *para cada subespaço de dimensão finita $\widetilde{E} \subset E$, existe $R = R(\widetilde{E})$ tal que $I \leq 0$ em $\widetilde{E}\backslash B_{R(\widetilde{E})}$,* *então I possui uma sequência ilimitada de valores críticos.*

A seguir enunciamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, o qual é uma consequência do Princípio Variacional de Ekeland.

Teorema A.14. [20, Teorema 5.1] *(Teorema do passo da montanha) Sejam E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E;\mathbb{R})$. Suponhamos que exista uma vizinhança U de 0 em E e $\delta > 0$ tais que I satisfaça as seguinte condições:*

(i) $I(0) = 0$;

(ii) *$I(u) \geq \delta$ na fronteira de U;*

(iii) *existe $e \neq U$ tal que $I(e) < \delta$.*

Então, para o número c definido por:

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{u\in g([0,1])} I(g(t)) \geq \delta,$$

existe uma sequência (u_k) em E tal que

$$I(u_k) \to c \quad e \quad I'(u_k) \to 0 \quad em \quad E^*;$$

em que $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Outra consequência do Princípio Variacional de Ekeland que utilizamos é dada no seguinte Teorema:

Teorema A.15. [20, Teorema 4.4] *(Princípio Variacional de Ekeland) Sejam E um espaço de Banach real e $I \to \mathbb{R}$ um funcional semicontínuo inferiormente de classe C^1 que é limitado inferiormente. Então existe uma sequência (u_k) em E tal que*

$$I(u_k) \to \inf_E I \quad e \quad \|I'(u_k)\|_* \to 0,$$

quando $k \to \infty$.

REFERÊNCIAS

[1] ABDELLAOUI, B.; FELLI, V.; PERAL, I. Existence and non-existence results for quasilinear elliptic equations involving the p-Laplacian. **Boll. Unione Mat. Ital. Sez. B Artic. Ric. Mat,** v.8, n. 9, p. 445-484, 2006.

[2] ADIMURTHI. Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the N-Laplacian. **Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci,** v. 17, p. 393-413, 1990.

[3] ADIMURTHI; YANG, Y. An interpolation of Hardy inequality and Trudinger-Moser inequality in $\mathbb{R}^N$ and its applications. **Internat. Mathematics Research Notices,** v. 13, p. 2394-2426, 2010.

[4] AMBROSETTI, A.; BADIALE, M.; CINGOLANI, S. Semiclassical states of nonlinear Schrödinger equations. **Arch. Ration. Mech. Anal,** v. 140, p. 285-300, 1997.

[5] AMBROSETTI, A.; FELLI, V.; MALCHIODI, A. Ground states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. **J. Eur. Math. Soc. (JEMS),** v. 7, p. 117-144, 2005.

[6] AMBROSETTI, A.; MALCHIODI, A.; RUIZ, D. Bound states of nonlinear Schrödinger equations with potentials vanishing at infinity. **J. Anal. Math.,** v. 98, p. 317-348, 2006.

[7] BAHRI, A.; LIONS, P. On the existence of a positive solution of semilinear elliptic equations in unbounded domains. **Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire,** v. 14, p. 365-413, 1997.

[8] BARTSCH, T.; WANG, Z.-Q. Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic equations on $\mathbb{R}^N$. **Comm. Partial Differential Equations,** v. 20, p. 1725-1741, 1995.

[9] BENCI, V.; et al. Solitons in several space dimensions: Derrick's problem and infinitely many solutions. **Arch. Ration. Mech. Anal.,** v. 154, p. 297-324, 2000.

[10] BENCI, V.; GRISANTI, C.; MICHELETTI, A. Existence and non-existence of the ground state solution for the nonlinear Schrödinger equations with $V(\infty) = 0$. **Topol. Methods Nonlinear Anal.,** v. 26, p. 203-219, 2005.

[11] BERESTYCKI, H.; LIONS, P. Nonlinear scalar field equations. I.. **Arch. Ration. Mech. Analysis,** v. 82, p. 313-345, 1983.

[12] BREZIS, H. Functional analysis, **Sobolev spaces and partial differential equations.** Universitext. Springer, New York, 2011.

[13] BROCK, F.; ITURRIAGA, L.; UBILLA, P. A Multiplicity result for the p-Laplacian involving a parameter. **Ann. Henri Poincaré,** v. 9, 1371-1386, 2008.

[14] CAO, D. Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in $\mathbb{R}^2$. **Comm. Partial Diff. Eq.,** v. 17, p. 407-435, 1992.

[15] CAO, D.; PENG, S. Semi-classical bound states for Schrödinger equations with potentials vanishing or unbounded at infinity. **Comm. Partial Differential Equations,** v. 34, p. 1566-1591, 2009.

[16] CHABROWSKI, J. **Variational methods for potential operator equations. With applications to nonlinear elliptic equations**. de Gruyter Studies in Mathematics, 24. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1997.

[17] COSTA, D.G. On a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^N$. **Electronic Journal of Differential Equations,** v. 7, 1-14, 1994.

[18] de FIGUEIREDO, D. G.; do Ó, J. M.; RUF, B. Elliptic equations and systems with critical Trudinger-Moser nonlinearities. **Discrete and Continuous Dynamical Systems,** v. 30, 455-476, 2011.

[19] de FIGUEIREDO, D. G.; MIYAGAKI, O. H.; RUF, B. Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range. **Calc. Var. Partial Differential Equations,** v. 3, 139-153, 1995.

[20] de FIGUEIREDO, D. G. Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours. Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, **81**. **Published for the Tata Institute of Fundamental Research**, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[21] de SOUZA, M. On a singular elliptic problem involving critical growth in $\mathbb{R}^N$. **NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.,** v. 18, p. 199-215, 2011.

[22] de SOUZA, M. Existence and multiplicity of solutions for a singular semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^2$. **Electronic Journal of Differential Equations,** v. 98, p. 1-13, 2011.

[23] de SOUZA, M.; do Ó, J. M. On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities and its applications. **Mathematische Nachrichten,** v. 284, 1754-1776, 2011.

[24] del PINO, M.; FELMER, P. L. Local mountain passes for semilinear elliptic problems in unbounded domains. **Calc. Var. Partial Differential Equations,** v. 4, p. 121-137, 1996.

[25] DÍAZ, J. I. Nonlinear Partial Differential Equations and Free Boundaries. **Elliptic Equations, Pitman Res. Notes Math. Ser.**, v. 106, Pitman, Boston, MA, 1985.

[26] do Ó, J. M. Semilinear Dirichlet problems for the N-Laplacian in $\mathbb{R}^N$ with nonlinearities in critical growth range. **Differential and Integral Equations,** v. 9, 967-979, 1996.

[27] do Ó, J. M. N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth. **Abstr. Appl. Anal.,** v. 2, 301-315, 1997.

[28] do Ó, J. M.; MEDEIROS, E.; SEVERO, U. B. A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two. **J. Math. Anal. Appl.,** v. 345, p. 286-304, 2008.

[29] do Ó, J. M.; et al. An improvement for the Trudinger-Moser inequality and applications. **To appear in Journal Differential Equations.**

[30] do Ó, J. M.; MEDEIROS, E.; SEVERO, U. B. On a quasilinear nonhomogeneous elliptic equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$. **J. Differential Equations**, v. 246, p. 1363-1386, 2009.

[31] GIACOMONI, J.; SREENADH, K. A multiplicity result to a nonhomogeneous elliptic equation in whole space $\mathbb{R}^2$. **Adv. Math. Sci. Appl.,** v. 15, p. 467-488, 2005.

[32] KAVIAN, O. **Introduction á la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques.** Springer-Verlag, Paris, 1993.

[33] MALCHIODI, A.; WANG, Z.-Q. Nonlinear Schrödinger equations with vanishing and decaying potentials. **Differential Integral Equations,** v. 18, p. 1321-1332, 2005.

[34] LAM, N.; LU, G. Existence and multiplicity of solutions to equations of N-Laplacian type with critical exponential growth in $\mathbb{R}^N$. **Journal of Functional Analysis,** v. 262, p. 1132-1165, 2012.

[35] LIONS, P. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The Limit Case, Part 1. **Revista Matematica Iberoamericana,** v. 1.1, p. 145-201, 1985.

[36] LIONS, P. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The Limit Case, Part 2. **Revista Matematica Iberoamericana,** v. 1.2, p. 45-121, 1985.

[37] LYBEROPOULOS, A. Quasilinear scalar field equations with competing potentials. **J. Differential Equations,** v. 251, p. 3625-3657, 2011.

[38] MAWHIM, J.; WILLEM, M. *Critical Point Theory and Hamiltonian Systems.* Springer Verlag, Belin (1989).

[39] MOSER, J. A sharp form of an inequality by N. Trudinger. **Ind. Univ. Math. J.,** v. 20, p. 1077-1092.

[40] PERAL, I. **Multiplicity of Solutions for the p-Laplacian**. Second School of Nonlinear Functional Analysis and Applications to Diferential Equations. Italy, 1997.

[41] POHOZAEV, S. I. The Sobolev embedding in the case $pl = n$. **Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research**. Mathematics Section, p. 158-170, Moscov. Energet. Inst., 1965.

[42] POHOZAEV, S. I. On the eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$. **Dokl. Akad. Nauk SSSR,** v. 165, p. 36-39, 1965.

[43] RABELO, P. Elliptic systems involving critical growth in dimension two. **Commun. Pure Appl. Anal.,** v. 8, p. 2013-2035, 2009.

[44] RABELO, P. Positive solutions for elliptic equations with supercritical nonlinearity. **Adv. Nonlinear Stud.,** v. 9, p. 523-535, 2009.

[45] RABELO, P. Existence and multiplicity of solutions for a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^n$. **Nonlinear Anal.,** v. 71, p. 2585-2599, 2009.

[46] RABELO, P. On a class of elliptic systems in $\mathbb{R}^n$ involving supercritical Sobolev exponent. **J. Math. Anal. Appl.,** v. 354, 46-59.

[47] RABINOWITZ, P. H. **Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.** CBMS 65, AMS, 1986.

[48] RABINOWITZ, P. H. On a class of nonlinear Schrödinger equations. **Z. Angew. Math. Phys.,** v. 43, p. 270-291, 1992.

[49] SIRAKOV, B. Existence and multiplicity of solutions of semi-linear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$. **Calc. Var. Partial Differential Equations,** v. 11, p. 119-142, 2000.

[50] TRUNDIGER, N. S. On the embedding into Orlicz spaces and some applications. **J. Math. Mech.,**, v. 17, p. 473-484, 1967.

[51] WILLEM, M. **Minimax Theorems**. Birkhäuser. Basel, 1996.

[52] YANG, Y. Existence of positive solutions to quasi-linear elliptic equations with exponential growth in the whole Euclidean space. **Journal of Functional Analysis,** v. 262, p. 1679-1704, 2012.

[53] ZOU, H. Existence and non-existence for Schrödinger equations involving critical Sobolev exponents. **J. Korean Math. Soc.,** v. 47, p. 547-572, 2010.