

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Curso de Bacharelado em Matemática

# Uma Introdução aos Espaços de Sobolev e Aplicações à Equações Diferenciais

por

**Victor José Araújo de Carvalho**

Março/2014  
João Pessoa - PB

Victor José Araújo de Carvalho

# Uma Introdução aos Espaços de Sobolev e Aplicações à Equações Diferenciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à  
Coordenação de Curso de Bacharelado em Matemática  
da Universidade Federal da Paraíba como requisito para  
obtenção do título de Bacharel em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

João Pessoa – PB  
Março de 2014

# Uma Introdução aos Espaços de Sobolev e Aplicações à Equações Diferenciais

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado à Coordenação do Curso de Bacharelado em Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito para obtenção do título de Bacharel em Matemática.

**Orientador:** Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

**Aprovado em:** \_\_\_\_ / \_\_\_\_ / \_\_\_\_

**COMISSÃO EXAMINADORA:**

---

**Prof. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB**

---

**Prof. Dr. Bruno Henrique Carvalho Ribeiro – UFPB**

---

**Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros – UFPB**

---

# AGRADECIMENTOS

- À Deus.
- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó por ter orientado este trabalho, pelo conhecimento transmitido, por me motivar, transmitindo sua experiência de forma sábia e precisa.
- A Professora Flávia Jerônimo pela ajuda nos momentos de dificuldade, apoio, incentivo, confiança, e por ter acreditado em mim sempre.
- Aos professores da UFPB.
- A minha família, em especial a minha mãe e a minha esposa Vanessa Furtado, pela cobrança, carinho, apoio e ajuda em todas as decisões.
- Aos meus amigos do milênio, mestrado e doutorado, em especial à Ageu, Leon, Mariana, Rayssa Caju, Ricardo Pinheiro, Suelena, Theago e Zecas pela amizade e companheirismo .
- A pessoas que contribuíram de forma significativa durante todo o trajeto da graduação até a presente conclusão, Alisson, Ailton e Eurení.
- A banca examinadora: Prof. Dr. Bruno Ribeiro e Prof. Dr. Everaldo Souto por aceitarem participar da avaliação deste trabalho.

*A minha mãe.*

---

# ABSTRACT

Our goal in this work is to present, in detail, an introduction to Sobolev spaces. Initially we will briefly review on Lebesgue spaces and some classical results of functional analysis, as the Riesz representation theorem and the theorem of Lax-Milgram, which will be crucial tools for the application of the theory constructed in solving problems in differential equations.

---

# RESUMO

Nosso objetivo neste trabalho é apresentar, de forma detalhada, uma introdução aos Espaços de Sobolev. Inicialmente faremos uma breve revisão sobre espaços de Lebesgue e alguns resultados clássicos de Análise Funcional, como o Teorema da Representação de Riesz e o Teorema de Lax-Milgram, que serão ferramentas de fundamental importância para a aplicação da teoria construída para a resolução de problemas em equações diferenciais.

---

# SUMÁRIO

<b>Introdução</b>	<b>ix</b>
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 Espaços de Lebesgue . . . . .	1
1.2 Resultados importantes sobre integração . . . . .	2
1.3 Definição e propriedades elementares dos espaços $L^p$ . . . . .	3
1.4 Reflexividade, Separabilidade e Dual de $L^p$ . . . . .	7
1.5 Convolução e Regularização . . . . .	12
1.6 Critério de Compacidade em $L^p$ . . . . .	18
<b>2 Espaços de Sobolev</b>	<b>19</b>
2.1 O Espaço de Sobolev $W^{m,p}$ . . . . .	37
2.2 O espaço $W_0^{1,p}$ . . . . .	38
2.3 O Dual de $W_0^{1,p}(I)$ . . . . .	40
<b>3 Aplicações</b>	<b>42</b>
3.1 O Princípio do Máximo . . . . .	49
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>51</b>



---

# INTRODUÇÃO

Para motivar o estudo de espaços de Sobolev, consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -u'' = f & \text{em } I \\ u = 0 & \text{em } \partial I \end{cases} \quad (1)$$

com  $I$  limitado e  $f \in \mathcal{C}(I)$ .

Uma solução clássica da equação acima é uma função  $u \in \mathcal{C}^2(I) \cap \mathcal{C}(\bar{I})$  satisfazendo (1) que se anula sob fronteira de  $I$ . O problema acima com a mera hipótese de  $f$  não ser contínua, pode não admitir solução clássica. Portanto, se desejamos que (1) tenha solução é necessária a imposição de mais condições sobre  $f$ . Uma condição suficiente é que  $f$  seja Hölder contínua, por exemplo. Podemos tratar o problema (1) dentro do aparato das funções diferenciáveis com derivadas Hölder contínuas e obter a solução clássica.

A partir da década de 1950, desenvolveu-se uma outra forma de abordar tais problemas que é mais vantajosa por se aplicar a muitos outros problemas lineares e não lineares.

Neste novo método, formulamos um problema generalizado associado a (1), cuja característica desse novo problema é que uma solução clássica de (1) também é solução dele e a recíproca é parcialmente verdadeira, isto é, uma solução deste problema que possui propriedades adequadas de regularidade será solução de (1).

Para formular tal problema, necessitamos do conceito de espaço de Sobolev, que será o tema central deste trabalho.

Especificamente no Capítulo 1 de resultados preliminares, estudamos diversos resultados de Análise Funcional, e demos uma atenção principal como não poderia deixar de ser aos espaços  $L^p$ .

No capítulo 2 estudamos os principais resultados no que se refere a teoria dos espaços de Sobolev, no entanto vale desde já salientar que trata-se de um trabalho de introdução a essa teoria, e sendo assim trabalhamos apenas com espaços de Sobolev cujo domínio do seu conjunto de funções é a reta real ou um subconjunto dela.

Por fim no último capítulo apresentamos algumas aplicações em equações diferenciais, assunto que, a princípio, foi o principal motivador do estudo de tais espaços.

Para a leitura deste texto, consideramos requisitos indispensáveis apenas o conhecimento de um pouco de Análise Real e de Análise Funcional.

---

---

# CAPÍTULO 1

---

## RESULTADOS PRELIMINARES

Faremos a seguir uma breve revisão sobre importantes tópicos de teoria de medida e integração e análise funcional. Para maiores detalhes sobre teoria da medida indicaremos [4] e com respeito a análise funcional nos citamos os livros [1] e [3]

### 1.1 Espaços de Lebesgue

Sejam  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  um espaço de medida, isto é,  $\Omega$  é um conjunto e

1.  $\mathcal{M}$  é uma  $\sigma$ -álgebra em  $\Omega$  é uma coleção de subconjuntos de  $\Omega$  tal que:

(a)  $\emptyset \in \mathcal{M}$ ;

(b)  $A \in \mathcal{M} \Rightarrow A^c \in \mathcal{M}$ ;

(c)  $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ , sempre que  $A_n \in \mathcal{M}$ , para todo  $n$

2.  $\mu$  é mensurável, isto é,  $\mu : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty)$ , satisfazendo:

(a)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;

(b)  $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ , sempre que  $A_n$  for uma família enumerável disjunta de membros de  $\mathcal{M}$ .

Os membros de  $\mathcal{M}$  são chamados de conjuntos mensuráveis.

3.  $\Omega$  é  $\sigma$ -finito, isto é, existe uma família enumerável  $(\Omega_n)$  em  $\mathcal{M}$  tal que  $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$ , e  $\mu(\Omega_n) < \infty$ , para todo  $n$ .

Conjuntos  $E \in \mathcal{M}$  com a propriedade de  $\mu(E) = 0$  são chamados conjuntos de medida nula. Diremos que uma propriedade é q.t.p. se tal propriedade vale em  $\Omega$  exceto em um conjunto de medida nula. Denotaremos por  $L^1(\Omega, \mu)$ , ou simplesmente  $L^1(\Omega)$ , o espaço das funções integráveis de  $\omega$  de  $\Omega$  na  $\mathbb{R}$ . Frequentemente utilizaremos  $\int f$ , em vez de  $\int f d\mu$ , e usaremos também a notação

$$\|f\|_{L^1} = \|f\|_1 = \int |f| d\mu = \int |f|.$$

Identificaremos funções que coincidem q.t.p.

## 1.2 Resultados importantes sobre integração

Nesta seção listaremos alguns dos resultados relevantes sobre espaços  $L^p$ . Para mais detalhes ver [4].

**Teorema 1.1** (Convergência Monotona, Beppo Levi). *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções em  $L^1$  que satisfaz*

1.  $f_1 \leq f_2 \leq \dots \leq f_n \leq f_{n+1} \leq \dots$  q.t.p. em  $\Omega$ .

2.  $\sup_n \int f_n < \infty$

*Então  $f_n(x)$  converge q.t.p. em  $\Omega$  para um limite finito, que nós denotaremos por  $f(x)$ ; a função  $f$  pertence a  $L^1$  e ainda  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$ .*

**Teorema 1.2** (Convergência Dominada, Lebesgue). *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções em  $L^1$  satisfazendo*

1.  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$

2. Existe uma função em  $g \in L^1$  tal que para todo  $n$ ,  $|f_n| \leq g(x)$  q.t.p.

*Então  $f \in L^1$  e  $\|f_n - f\|_1 \rightarrow 0$*

**Lema 1.1.** *Seja  $(f_n)$  uma sequência de funções em  $L^1$  satisfazendo*

1. Para todo  $n$ ,  $f_n \geq 0$  q.t.p.

2.  $\sup_n \int f_n < \infty$ .

*Para quase todo  $x \in \Omega$  definimos  $f(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \leq +\infty$*

*Então  $f \in L^1$  e  $\int f \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n$ .*

Um exemplo básico de um espaço de medida é o caso em que  $\Omega = \mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{M}$  consiste de um conjunto mensurável a Lebesgue, e  $\mu$  é a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$ .

Denotaremos por  $C_c(\mathbb{R}^n)$  o espaço das funções contínuas de  $\mathbb{R}^n$  com suporte compacto, isto é,

$$C_c(\mathbb{R}^n) = \{f \in C(\mathbb{R}^n); f(x) = 0, \forall x \in (\mathbb{R}^n - K), \text{ onde } K \text{ é compacto}\}$$

**Teorema 1.3.** *O espaço  $C_c(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , isto é,*

$$\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } \forall \varepsilon > 0, \exists f_1 \in C_c(\mathbb{R}^n), \text{ tal que } \|f - f_1\|_1 \leq \varepsilon.$$

Seja  $(\Omega_1, \mathcal{M}_1, \mu_1)$  e  $(\Omega_2, \mathcal{M}_2, \mu_2)$ , dois espaços mensuráveis que são  $\sigma$ -finitos. Podemos definir de uma forma natural uma estrutura de espaço mensurável  $(\Omega, \mathcal{M}, \mu)$  no produto cartesiano  $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ .

**Teorema 1.4.** *Seja  $F(x, y) : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{R}$  uma função mensurável satisfazendo*

$$1. \int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty \text{ q.t.p. } x \in \Omega_1$$

$$2. \int_{\Omega_1} d\mu_1 \int_{\Omega_2} |F(x, y)| d\mu_2 < \infty$$

Então  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ .

**Teorema 1.5. (Fubini)** *Assuma que  $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$ . Então para quase todo  $x \in \Omega_1$ ,  $F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2)$  e  $\int_{\Omega_2} F(x, y) d\mu_2 \in L^1_x(\Omega_1)$ . Analogamente para quase todo  $y \in \Omega_2$ ,  $F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1)$  e  $\int_{\Omega_1} F(x, y) d\mu_1 \in L^1_y(\Omega_2)$ .*

### 1.3 Definição e propriedades elementares dos espaços $L^p$

**Definição 1.1.** *Seja  $p \in \mathbb{R}$  com  $1 \leq p \leq \infty$ ; definiremos*

$$L^p(\Omega) = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } |f|^p \in L^1(\Omega)\}$$

com

$$\|f\|_{L^p} = \|f\|_p = \left[ \int |f(x)|^p d\mu \right]^{\frac{1}{p}}$$

**Definição 1.2.** *Definiremos*

$$L^\infty = \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ é mensurável e } \exists C \text{ tal que } |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

com

$$\|f\|_{L^\infty} = \|f\|_\infty = \inf\{C : |f(x)| \leq C \text{ q.t.p. em } \Omega\}$$

**Observação 1.1.** *Note que  $\|\cdot\|_\infty$  é uma norma para o espaço  $L^\infty$ .*

Seja  $1 \leq p \leq \infty$ , denotaremos por  $p'$  o expoente conjugado de  $p$ , isto é,  $p'$  é o número real que satisfaz a seguinte equação

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

**Teorema 1.6** (Desigualdade de Young). *Sejam  $p > 1$  e  $p' > 1$  reais tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Dados  $a \geq 0$  e  $b \geq 0$  então vale  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}$ , valendo a igualdade se  $a^p = bp'$ .*

*Demonstração.* Se  $a = 0$  ou  $b = 0$ , a desigualdade é válida. Sejam  $a, b > 0$ , então

$$\begin{aligned} ab = e^{\ln(ab)} &= e^{\ln a + \ln b} \\ &= e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{p'} \ln b^{p'}} \\ &\leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{p'} e^{\ln b^{p'}} \\ &\leq \frac{1}{p} a^p + \frac{1}{p'} b^{p'} \end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade, estamos utilizando a convexidade da função exponencial.  $\square$

**Teorema 1.7** (Desigualdade De Hölder). *Sejam  $f \in L^p$  e  $g \in L^{p'}$ , com  $p$  e  $p' > 0$  e tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então  $f, g \in L^1$  e*

$$\int |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

*Demonstração.* Dividiremos em 2 casos, no caso 1 ( $p = 1, p' = \infty$ ) e caso 2 ( $1 < p < \infty$ ).

**Caso 1:** Sem perda de generalidade suponhamos que  $f, g \geq 0$ , sabemos que  $g(x) \leq \|g\|_\infty$  q.t.p. assim

$$f(x)g(x) \leq f(x)\|g\|_\infty$$

o que implica que

$$\int f(x)g(x) \leq \|g\|_\infty \int f(x) \leq \|g\|_\infty \|f\|_1.$$

**Caso 2:** Considere  $\|f\|_p \neq 0$  e  $\|g\|_{p'} \neq 0$  e definimos  $\frac{|f(x)|}{\|f\|_p}$  e  $\frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}}$ .

Para cada  $x \in [a, b]$ , pela desigualdade de Young, temos

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \leq \frac{1}{p} \left( \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \right)^p + \frac{1}{p'} \left( \frac{|g(x)|}{\|g\|_{p'}} \right)^{p'}$$

Integrando, obtemos

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|^p dx + \frac{1}{p' \|g\|_{p'}^{p'}} \int_a^b |g(x)|^{p'} dx$$

donde segue que

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_{p'}} \int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \frac{1}{p \|f\|_p^p} \|f\|_p^p + \frac{1}{p' \|g\|_{p'}^{p'}} \|g\|_{p'}^{p'} = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$$

e portanto,

$$\int_a^b |f(x)| |g(x)| dx \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

□

**Teorema 1.8.**  $L^p$  é um espaço vetorial e  $\|\cdot\|_p$  é uma norma para todo  $p$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

*Demonstração.* Os casos  $p = 1$  e  $p = \infty$  são óbvios.

Sejam  $1 < p < \infty$  e  $f, g \in L^p$ , assim teremos

$$|f(x) + g(x)| \leq (|f(x)| + |g(x)|)^p \leq 2^p (|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

e conseqüentemente  $f + g \in L^p$ . De forma semelhante provamos que  $\lambda f \in L^p$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ , ficando demonstrado que  $L^p$  é um espaço vetorial.

Provaremos que  $\|\cdot\|_p$  é uma norma. As primeiras propriedades são facilmente verificadas portanto provaremos a seguir apenas a desigualdade triangular.

$$\|f + g\| = \int |f + g|^{p-1} |f + g| \leq \int |f + g|^{p-1} |f| + \int |f + g|^{p-1} |g|$$

mas  $|f + g|^{p-1} \in L^p$  e, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|f + g\| \leq \|f + g\|_p^{p-1} (\|f\|_p + \|g\|_p),$$

isto é

$$\|f + g\| \leq \|f\|_p + \|g\|_p.$$

□

**Teorema 1.9** (Teorema de Riesz-Fischer).  $L^p$  é um espaço de Banach para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .

*Demonstração.* Dividiremos a prova em dois casos no caso 1 consideramos  $p = \infty$  e no caso 2  $1 \leq p < \infty$ .

**Caso 1:** Seja  $(f_n)$  uma seqüência de Cauchy em  $L^\infty$ . Dado um inteiro  $k \geq 1$  existe um número natural  $N_k$  tal que  $\|f_m - f_n\| \leq \frac{1}{k}$  para  $m, n \leq N_k$ .

Portanto existe um conjunto de medida nula  $E_K$  tal que

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega - E_k, m, n \geq N_k. \quad (1.1)$$

Considerando  $E = \cup_k E_k$ , temos que  $E$  é de medida nula pois é a união enumerável de conjuntos de medida nula. Assim para todo  $x \in \Omega - E$  a sequência  $f_n(x)$  é Cauchy na reta. Logo,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , para todo  $x \in \Omega - E$ . Tomando o limite em (1.1) com  $m \rightarrow \infty$  obtemos

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{k}, \forall x \in \Omega - E, \forall n \geq N_k.$$

Donde concluímos que  $f \in L^\infty$  e  $\|f - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{k}, \forall n \geq n_k$ , ou seja,  $f_n \rightarrow f$  em  $L^{infty}$ .

**Caso 2 :** Seja  $(f_n)$  uma sequência de Cauchy em  $L^p$ . Para concluirmos a afirmação é suficiente mostrar que uma subsequência converge em  $L^p$ .

Podemos extrair uma subsequência  $(f_{n_k})$  tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \frac{1}{2^k}, \forall k \geq 1.$$

Para isto procedemos da seguinte forma, escolha  $n_1$  tal que  $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2}, m, n \leq n_1$ , então escolha  $n_2 > n_1$  tal que  $\|f_m - f_n\|_p \leq \frac{1}{2^2}, m, n \leq n_2$  e assim sucessivamente.

Afirmamos que  $f_{n_k}$  converge em  $L^p$ . A fim de simplificar a notação escreveremos  $f_k$  em vez de  $f_{n_k}$ , deste modo temos

$$\|f_{k+1} - f_k\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1.$$

Seja

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^n |f_{k+1}(x) - f_k(x)|.$$

Assim,

$$\|g_n\|_p \leq 1.$$

Como consequência do teorema da convergência monótona,  $g_n(x)$  tende a um limite, digamos  $g(x)$ , q.t.p. em  $\Omega$  com  $g \in L^p$ . Por outro lado, para  $m \geq n \geq 2$  temos

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f_{m-1}(x)| + \dots + |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x)$$

para quase todo  $x \in \Omega$ .  $f_n(x)$  é de Cauchy e converge e converge para um limite, digamos  $f(x)$ . Temos assim que,

$$\|f(x) - f_n(x)\| \leq g(x) \text{ q.t.p. em } \Omega, \text{ para } n \geq 2 \tag{1.2}$$

em particular,  $f \in L^p$ . Finalmente concluímos que, pelo teorema da convergência dominada que  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$ , desde que  $|f_n(x) - f(x)|^p \rightarrow 0$  q.t.p. e ainda  $|f_n - f|^p \leq g^p \in L^1$ .  $\square$

**Teorema 1.10.** *Seja  $(f_n)$  uma sequência em  $L^p$  e seja  $f \in L^p$  tal que  $\|f_n - f\| \rightarrow 0$ . Então existe uma subsequência  $(f_{n_k})$  e uma função  $h \in L^p$  tal que*



1.  $f_{n_k} \rightarrow f(x)$  q.t.p. em  $\Omega$
2.  $|f_{n_k}(x)| \leq h(x), \forall k$  q.t.p em  $\Omega$ .

*Demonstração.* A conclusão é óbvia quando  $p = \infty$ . Assim considere  $1 \leq p < \infty$ . Desde que  $(f_n)$  é uma sequência de Cauchy podemos voltar a prova do teorema anterior e considerar a subsequência  $(f_{n_k})$  que denotaremos por  $f_k$  satisfazendo (1.1), tal que  $f_k$  tende q.t.p. para um limite  $f^*(x)$  com  $f^* \in L^p$ . Além disso por (1.2) temos  $|f^*(x) - f_k| \leq g(x), \forall k$  q.t.p. em  $\Omega$  com  $g \in L^p$ . Por convergência dominada sabemos que  $f_n \rightarrow f$  em  $L^p$  e assim  $f = f^*$  q.t.p. Além disso temos que  $|f_k| \leq |f(x)| + |g(x)|$ , e o resultado segue.  $\square$

## 1.4 Reflexividade, Separabilidade e Dual de $L^p$

Seja  $E$  uma espaço normado. Denotaremos por

$$(E')' = E''$$

o espaço bidual de  $E$ . Definimos um operador linear limitado canônico

$$J : E \rightarrow E''$$

da seguinte forma: para cada  $x \in E$ , o funcional linear limitado  $J_x : E' \rightarrow \mathbb{R}$  é dado por

$$J_x(f) = f(x), \quad \forall f \in E'$$

**Afirmção 1.1.**  $J_x$  é um funcional linear limitado em  $E'$ .

De fato

$$|J_x(f)| = |f(x)| \leq \|f\| \|x\| = \|x\| \|f\|,$$

ou seja,

$$\|J_x\| \leq \|x\|$$

Além disso,  $J$  é uma isometria de  $E$  sobre sua imagem  $J(E)$ . Com efeito, pelo Teorema de Hanh-Banach, para cada  $x \in E$  existe um funcional  $f_0 \in E'$  tal que  $\|f_0\| = 1$  e  $f_0(x) = \|x\|$ , logo

$$\|J_x\| = \sup_{\|f\|=1} |J_x(f_0)| \geq |J_x(f_0)| = f_0(x) = \|x\|.$$

Portanto,

$$\|J_x\| = \|x\|, \quad \forall x \in E.$$

Em particular,  $J$  é injetivo. Se  $J$  for também sobrejetivo, dizemos que  $E$  é reflexivo.

**Definição 1.3.** Dizemos que um espaço de Banach  $E$  é reflexivo se o operador  $J : E \rightarrow E''$  for um isomorfismo isométrico.

Nosso objetivo é demonstrar que  $L^p$  é reflexivo, para  $1 < p < \infty$ , para isto necessitaremos de alguns lemas cuja demonstração foge aos objetivos do nosso trabalho.

**Lema 1.2.** Seja  $E$  espaço reflexivo. Se  $F \subset E$  é uma subespaço vetorial fechado, então  $F$  é reflexivo.

**Lema 1.3.** Seja  $E$  espaço reflexivo e  $T : E \rightarrow F$  isometria, então  $F$  é reflexivo.

**Lema 1.4.** Sejam  $E_1, E_2, \dots, E_n$  reflexivos, então  $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$  também é reflexivo.

**Teorema 1.11.**  $L^p$  é reflexivo para  $1 < p < \infty$ .

*Demonstração.* A prova consiste em 3 passos:

*Passo 1 (Primeira desigualdade de Clarkson):* Seja  $2 \leq p < \infty$ , afirmamos que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^p \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p), \quad \forall f, g \in L^p \quad (1.3)$$

Para mostrar a desigualdade acima é suficiente mostrar que

$$\left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p \leq \frac{1}{2} (|a|^p + |b|^p), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Primeiro note que a seguinte desigualdade é válida

$$\alpha^p + \beta^p \leq (\alpha^2 + \beta^2)^{\frac{p}{2}}, \quad \forall \alpha, \beta \geq 0 \quad (1.4)$$

De fato por homogenidade podemos assumir que  $\beta = 1$  sendo suficiente, para verificar (1.4), observar que a função

$$(x^2 + 1)^{\frac{p}{2}} - x^p - 1$$

cresce em  $[0, +\infty)$ . Considerando  $\alpha = \|\frac{a+b}{2}\|$  e  $\beta = \|\frac{a-b}{2}\|$ , obtemos

$$\begin{aligned} \left| \frac{a+b}{2} \right|^p + \left| \frac{a-b}{2} \right|^p &\leq \left( \left| \frac{a+b}{2} \right|^2 + \left| \frac{a-b}{2} \right|^2 \right)^{\frac{p}{2}} \\ &= \left( \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2} \right)^{\frac{p}{2}} \\ &\leq \frac{1}{2} (|a|^p + |b|^p) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade segue da convexidade da função  $x \mapsto |x|^{\frac{p}{2}}$ , desde que  $p \geq 2$ .

*Passo 2* :  $L^p$  é uniformemente convexo, e assim reflexivo para  $2 \leq p < \infty$ .

De fato, seja  $\varepsilon > 0$  e seja  $f, g \in L^p$  com  $\|f\|_p \leq 1, \|g\|_p \leq 1, \|f - g\| > \varepsilon$ . Deduzimos de (1.3) que

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^p < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$$

e assim  $\left\| \frac{f+g}{2} \right\| < 1 - \delta$  com  $\delta = 1 - \left[1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} > 0$ . Portanto,  $L^p$  é uniformemente convexo e assim, pelo teorema de Milman-Pettis, segue a reflexividade. Para mais detalhes veja [3][Theorem 3.11].

*Passo 3* :  $L^p$  é reflexivo para  $1 < p \leq 2$ .

Seja  $1 < p < \infty$ . Considere o operador  $T : L^p \rightarrow (L^{p'})^*$  definido da seguinte forma: Seja  $u \in L^p$  fixada: a função  $f \in L^{p'} \mapsto \int uf$  é um funcional linear contínuo em  $L^{p'}$  e assim definindo um elemento, digamos  $Tu$ , em  $(L^{p'})^*$  tal que

$$\langle Tu, f \rangle = \int uf, \forall f \in L^{p'}.$$

Afirmamos que

$$\|Tu\|_{(L^{p'})^*} = \|u\|_p, \forall u \in L^p$$

De fato, pela desigualdade de Hölder, tem-se

$$|\langle Tu, f \rangle| \leq \|u\|_p \|f\|_{p'}, \forall f \in L^{p'}$$

e portanto  $\|Tu\|_{(L^{p'})^*} \leq \|u\|_p$ . Por outro lado definimos

$$f_0(x) = |u(x)|^{p-2}u(x) \quad (f_0(x) = 0, \text{ se } u(x) = 0)$$

Claramente temos

$$f_0 \in L^{p'}, \|f_0\|_{p'} = \|u\|_p^{p-1} \langle Tu, f_0 \rangle = \|u\|_p^p$$

assim

$$\|Tu\|_{(L^{p'})^*} \geq \frac{\langle Tu, f_0 \rangle}{\|f_0\|_{p'}} = \|u\|_p$$

Assim, mostramos que  $T$  é uma isometria de  $L^p$  em  $(L^{p'})^*$  implicando que  $T(L^p)$  é um subespaço fechado que  $(L^{p'})^*$ , pois  $L^p$  é um espaço de Banach. Assuma agora que  $1 < p \leq 2$ . Desde que, pelo passo 2,  $L^{p'}$  é reflexivo, segue que  $(L^{p'})^*$  é também reflexivo. Nós concluímos, pelo lema 1.2, que  $T(L^p)$  é reflexivo, e consequentemente,  $L^p$  é também reflexivo.  $\square$

**Observação 1.2.** De fato,  $L^p$  é também uniformemente convexo para  $1 < p < \infty$ . Isto é uma

consequência da segunda desigualdade de Clarkson,

$$\left\| \frac{f+g}{2} \right\|_p^{p'} + \left\| \frac{f-g}{2} \right\|_p^{p'} \leq \frac{1}{2} (\|f\|_p^p + \|g\|_p^p)^{\frac{1}{p-1}}, \forall f, g \in L^p.$$

Esta desigualdade é mais complicada de provar que a primeira. Claramente, implica que  $L^p$  é uniformemente convexo quando  $1 < p \leq 2$ .

**Teorema 1.12** (Representação de Riesz). *Seja  $1 < p < \infty$  e seja  $\phi \in (L^p)^*$ . Então existe uma única função  $u \in L^p$  tal que*

$$\langle \phi, f \rangle = \int u f, \forall f \in L^p.$$

Além disso

$$\|u\|_{p'} = \|\phi\|_{(L^p)^*}.$$

*Demonstração.* Consideremos o operador  $T : L^{p'} \rightarrow (L^p)^*$  definido por  $\langle Tu, f \rangle = \int u f, \forall u \in L^{p'}$  e  $\forall f \in L^p$ . O argumento usado é o mesmo da prova do teorema anterior (passo 3), mostra que

$$\|Tu\|_{(L^p)^*} = \|u\|_{p'}, \forall u \in L^{p'}$$

Afirmamos que  $T$  é sobrejetiva. De fato, seja  $E = T(L^{p'})$ . Desde que  $E$  é uma subespaço fechado, é suficiente provar que  $E$  é denso em  $(L^p)^*$ . Seja  $h \in (L^p)^{**}$  satisfazendo  $\langle h, Tu \rangle = 0, \forall u \in L^{p'}$ . Como  $L^p$  é reflexivo,  $h \in L^p$ , e satisfaz  $\int u f = 0, \forall u \in L^{p'}$ . Escolhendo  $u = |h|^{p-2}$  vemos que  $h = 0$ . □

**Observação 1.3.** *O teorema anterior é muito importante. Nos diz que para cada funcional linear contínuo em  $L^p$  com  $1 < p < \infty$  pode ser representado "concretamente" como uma integral. A função  $\phi \rightarrow u$  é uma isometria linear que é sobrejetiva, o que nos permite identificar o "abstrato" espaço  $(L^p)^*$  com  $L^{p'}$ .*

*No que segue vamos sistematicamente fazer a identificação*

$$(L^p)^* = L^{p'}.$$

**Notação:** O operador truncamento  $T_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por

$$T_n r = \begin{cases} r, & \text{se } |r| \leq n \\ \frac{nr}{|r|}, & \text{se } |r| > n \end{cases}$$

Dado um conjunto  $E \subset \Omega$  definimos a função característica  $X_E$  como

$$X_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in E \\ 0, & \text{se } x \in \Omega - E \end{cases}$$

**Teorema 1.13.** *O espaço  $C_c(\mathbb{R}^n)$  é denso em  $L^p$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .*

*Demonstração.* Primeiramente afirmamos que dado  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e  $\varepsilon > 0$  existe, uma função  $g \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  e um conjunto  $K$  compacto em  $\mathbb{R}^n$  tal que  $g = 0$  fora de  $K$  e

$$\|f - g\| < \varepsilon.$$

De fato, seja  $X_n$  a função característica da  $B(0, n)$  e seja  $f_n = X_n T_n f$ . Pelo Teorema da Convergência Dominada vemos que  $\|f_n - f\|_p \rightarrow 0$  e assim podemos escolher  $g = f_n$  com  $n$  grande o suficiente. Em seguida, dado  $\delta > 0$  existe, pelo teorema 1.3, uma função  $g_1 \in C_c(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$\|g - g_1\| < \delta.$$

Podemos sempre assumir que  $\|g_1\|_\infty < \|g\|_\infty$ , caso contrário substituímos  $g_1$  por  $T_n g_1$  com  $n = \|g\|_\infty$ . Finalmente, temos

$$\|g - g_1\|_p \leq \|g - g_1\|_1^{\frac{1}{p}} \|g - g_1\|_\infty^{1 - (\frac{1}{p})} \leq \delta^{\frac{1}{p}} (2\|g\|_\infty)^{1 - (\frac{1}{p})}.$$

Concluimos que por escolha de  $\delta > 0$  suficientemente pequeno temos que

$$\delta^{\frac{1}{p}} (2\|g\|_\infty)^{1 - (\frac{1}{p})} < \varepsilon.$$

□

**Definição 1.4.** *O espaço de medida  $\Omega$  é chamado separável se existir uma família enumerável  $(E_n)$  de membros de  $\mathcal{M}$  tal que a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $(E_n)$  coincide com  $\mathcal{M}$  (isso é  $\mathcal{M}$  é a menor  $\sigma$ -álgebra contendo  $E_n$ s).*

**Exemplos 1.1.** *O espaço de medida  $\Omega = \mathbb{R}^n$  é separável. De fato, podemos escolher de  $(E_n)$  alguma família enumerável de conjuntos abertos tal que cada conjunto aberto de  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito como união de  $E_n$ s. Mas geralmente, se  $\Omega$  é um espaço métrico separável e  $\mathcal{M}$  consistem nos conjuntos de Borel isto é  $\mathcal{M}$  é a  $\sigma$ -álgebra gerada pelos conjuntos abertos de  $\Omega$ , então  $\Omega$  é um espaço de medida separável.*

**Teorema 1.14.** *Considere  $\Omega$  um espaço de medida separável. Então  $L^p(\Omega)$  é separável para todo  $p$ ,  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demonstração.* Considere  $\Omega = \mathbb{R}^n$ . Seja  $\mathfrak{R}$  uma família de conjuntos de  $\mathbb{R}^n$  da forma  $\mathcal{R} = \prod_{k=1}^n (a_k, b_k)$  com  $a_k, b_k \in \mathbb{Q}$ . Seja  $E$  o espaço vetorial sobre  $\mathbb{Q}$  gerado pelas funções  $(X_{\mathcal{R}})_{\mathcal{R} \in \mathfrak{R}}$ , ou seja,  $E$  consiste de uma combinação linear finita de funções com coeficientes racionais  $X_{\mathcal{R}}$  de modo que  $E$  é enumerável. Afirmamos que  $E$  é denso em  $L^p(\mathbb{R})$ . De fato, dado  $f \in L^p(\mathbb{R})$  e  $\varepsilon > 0$ ,

existe alguma  $f_1 \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  tal que  $\|f - f_1\|_p < \varepsilon$ . Seja  $\mathcal{R} \in \mathfrak{R}$  um cubo contendo uma função  $f_1 \in E$  tal que  $\|f_1 - f_2\|_\infty < \delta$  e  $f_2$  anula-se fora de  $\mathcal{R}$  basta dividir em pequenos cubos de  $\mathfrak{R}$ , onde a oscilação, isto é,  $\sup - \inf$  de  $f_1$  menor que  $\delta$ . Portanto temos

$$\|f_1 - f_2\|_p < \|f_1 - f_2\|_\infty |\mathcal{R}|^{\frac{1}{p}} < \delta |\mathcal{R}|^{\frac{1}{p}}.$$

Concluimos que  $\|f - f_2\|_p < 2\varepsilon$ , desde que  $\delta > 0$  seja escolhido de modo que  $\delta |\mathcal{R}|^{\frac{1}{p}}$ .  $\square$

## 1.5 Convolução e Regularização

Nosso objetivo nesta seção é construir funções suaves com propriedades especiais, propriedades as quais torna possível, dada uma função  $f$ , não necessariamente suave, criar uma sequência de funções suaves que a aproximam via convolução.

**Teorema 1.15.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e seja  $g \in L^p(\mathbb{R})$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então para quase todo  $x \in \mathbb{R}$  a função  $y \mapsto f(x - y)g(y)$  é integrável em  $\mathbb{R}$  e definimos*

$$(f \star g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy.$$

Além disso  $f \star g \in L^p(\mathbb{R})$  e

$$\|f \star g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

*Demonstração.* A conclusão é óbvia onde  $p = \infty$ . Consideramos dois casos, no primeiro caso com  $p = 1$ . Considere  $F(x, y) = f(x - y)g(y)$ . Para quase todo  $y \in \mathbb{R}$  temos

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|dx = |g(y)| \int_{\mathbb{R}} |f(x - y)|dx = |g(y)| \|f\|_1 < \infty,$$

além disso,

$$\int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|dx = \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.$$

Deduzimos do Teorema de Tonelli que  $F \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ . Aplicando o Teorema de Fubini, vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} |F(x, y)|dx = \|f\|_1 \|g\|_1.$$

Donde segue o resultado para  $p = 1$ .

Agora vamos considerar o caso em que  $1 < p < \infty$  sabemos que, para quase todo  $x$  fixado  $x \in \mathbb{R}$  a função  $y \mapsto |f(x - y)||g(y)|^p$  e integrável em  $\mathbb{R}$ , que é

$$|f(x - y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \in L^p_y(\mathbb{R}).$$

Desde que  $|f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} \in L_y^{p'}(\mathbb{R})$ . Deduzimos da desigualdade de Hölder que

$$|f(x-y)||g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p'}} |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \in L_y^1(\mathbb{R}),$$

e

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)| dy \leq \|f\|_1^{\frac{1}{p'}} \left( \int_{\mathbb{R}} |f(x-y)||g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}},$$

que é

$$|(f \star g)(x)|^p = \|f\|_1^{\frac{p}{p'}} (|f| \star |g|^p)(x),$$

concluimos, pela primeira parte o caso onde  $p = 1$  sabemos que  $f \star g \in L^p(\mathbb{R})$  e

$$\|f \star g\|_p^p \leq \|f\|_1^{\frac{p}{p'}} \|f\|_1 \|g\|_p^p,$$

logo,

$$\|f \star g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p.$$

□

**Notação:** Dado uma função real  $f$  definimos  $\check{f}(x) = f(-x)$ .

**Teorema 1.16.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R})$  e  $f \in L^{p'}(\mathbb{R})$ . Então temos*

$$\int_{\mathbb{R}} (f \star g)h = \int_{\mathbb{R}} g(\check{f} \star h).$$

*Demonstração.* A função  $F(x, y) = f(x-y)g(y)h(x)$  pertence a  $L^p(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$  desde que

$$\int |h(x)| dx \int |f(x-y)||g(y)| dy < \infty,$$

pelo teorema 1.15 e a desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} \int (f \star g)(x)h(x) dx &= \int dx \int F(x, y) dy = \int dy \int F(x, y) dx \\ &= \int g(y)(\check{f} \star h)(y) dy, \end{aligned}$$

Donde segue o resultado

□

**Suporte e convolução:** A noção de suporte de uma função ( $supp f$ ) é o complemento do maior conjunto aberto em que  $f$  se anula, em outras palavras  $supp f$  é o fecho do conjunto  $\{x : f(x) \neq 0\}$  Esta notação não é adequada quando lidamos com classes de equivalência, tal como nos espaços  $L^p$ .

**Teorema 1.17.** *Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Considere a família  $(w_i)_{i \in I}$  para todo conjunto aberto em  $\mathbb{R}$  tal que para cada  $i \in I$ ,  $f = 0$  q.t.p. em  $w_i$ . Considere  $W = \bigcup_{i \in I} w_i$ , então  $f = 0$  q.t.p. em  $W$ .*

*Demonstração.* Desde que o conjunto  $I$  não seja enumerável não fica claro que  $f = 0$  q.t.p. em  $W$ . No entanto, podemos recuperar o caso enumerável como segue. Existe uma família enumerável  $(O_n)$  de conjuntos abertos de  $\mathbb{R}$  tal que todo conjunto aberto de  $\mathbb{R}$  pode ser escrito como união de  $O_n$ s. Como  $w_i \in \mathbb{R}$  é aberto temos

$$w_i = \bigcup_{\substack{n \in A_1 \\ A_i \subset \mathbb{N}}} O_n,$$

logo

$$\begin{aligned} W &= \bigcup_{i \in I} w_i = \bigcup_{i \in I} \left( \bigcup_{\substack{n \in A_1 \\ A_i \subset \mathbb{N}}} O_n \right) \\ &= \bigcup_{\substack{i \in I \\ A_i \subset \mathbb{N}}} O_n = \bigcup_{n \in B} O_n, \text{ onde } B = \bigcup_{i \in I} A_i \end{aligned}$$

Uma vez que  $f = 0$  q.t.p. em cada  $O_n$  com  $n \in B$ , concluímos daí que  $f = 0$  q.t.p. em  $W$ . □

**Teorema 1.18.** *Seja  $f \in L^1(\mathbb{R})$  e  $g \in L^p(\mathbb{R})$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então*

$$\text{supp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp}f + \text{supp}g}.$$

*Demonstração.* Fixado  $x \in \mathbb{R}$  tal que a função  $y \mapsto f(x - y)g(y)$  é integrável pelo teorema 1.15.

Logo

$$(f \star g)(x) = \int f(x - y)g(y)dy = \int_{(x - \text{supp}f) \cap \text{supp}g} f(x - y)g(y)dy.$$

Se  $x \notin \text{supp}f + \text{supp}g$ , então  $(x - \text{supp}f) \cap \text{supp}g = \emptyset$  e assim  $(f \star g)(x) = 0$ . Assim

$$(f \star g)(x) = 0 \text{ q.t.p. em } (\text{supp}f + \text{supp}g)^c.$$

Em particular,

$$(f \star g)(x) = 0 \text{ q.t.p. em } \text{int}[(\text{supp}f + \text{supp}g)^c],$$

e portanto

$$\text{supp}(f \star g) \subset \overline{\text{supp}f + \text{supp}g}.$$

□

**Observação 1.4.** *Se tanto  $f$  quanto  $g$  tem suporte compacto, então  $f \star g$  também tem suporte*



compacto. Entretanto,  $f \star g$  não necessariamente terá suporte compacto, se apenas uma delas tem suporte compacto.

**Definição 1.5.** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  aberto e seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Diremos que a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  pertence  $L^1_{loc}(I)$  se  $fX_K \in L^p(I)$  para cada compacto  $K$  contido em  $I$ .

Note que se  $f \in L^p_{loc}(I)$ , então  $f \in L^1_{loc}(I)$ .

**Teorema 1.19.** Seja  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  e  $g \in L^1_{LOC}(\mathbb{R})$ . Então  $(f \star g)(x)$  está bem definida para cada  $x \in \mathbb{R}$ , e além disso  $(f \star g) \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Note que para cada  $x \in \mathbb{R}$  a função  $y \mapsto (f(x-y)g(y))$  é integrável em  $\mathbb{R}$  e portanto  $(f \star g)(x)$  está definida para cada  $x \in \mathbb{R}$ . Seja  $x_n \rightarrow x$  e seja  $K$  um conjunto compacto fixado em  $\mathbb{R}$  tal que  $(x_n - \text{supp}f) \subset K, \forall n$ . Portanto temos  $f(x_n - y) = 0, \forall n, \forall y \notin K$ . Deduzimos da continuidade uniforme da  $f$  que

$$|f(x_n - y) - f(x - y)| \leq \varepsilon_n X_K(y), \forall n, \forall y \in \mathbb{R}$$

com  $\varepsilon_n \rightarrow 0$ . Concluimos que

$$|(f \star g)(x_n) - (f \star g)(x)| \leq \varepsilon_n \int_K |g(y)| dy \rightarrow 0.$$

□

**Notações Importantes:** Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um conjunto aberto.

$\mathcal{C}(I)$  = é o espaço das funções contínuas em  $I$

$\mathcal{C}^k(I)$  = é o espaço das funções  $k$  vezes continuamente diferenciáveis em  $I$

$\mathcal{C}^\infty(I) = \bigcap_k \mathcal{C}^k$

$\mathcal{C}_c(I)$  = é o espaço das funções contínuas em  $I$  com suporte compacto

$\mathcal{C}^k_c(I) = \mathcal{C}^k(I) \cap \mathcal{C}_c(I)$

$\mathcal{C}^k_c(I) = \mathcal{C}^\infty(I) \cap \mathcal{C}_c(I)$ .

**Teorema 1.20.** Seja  $f \in \mathcal{C}^k_c(\mathbb{R})(k \geq 1)$  e seja  $g \in L^1_{LOC}(\mathbb{R})$ . Então  $f \star g \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$  e

$$D^\alpha(f \star g) = (D^\alpha f) \star g, \forall \alpha.$$

**Definição 1.6.** Uma sequência regularizante  $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$  é uma sequência de funções nos  $\mathbb{R}$  tal que

$$\rho_n \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}), \text{ com } \text{supp}\rho_n \subset [-1, 1] \text{ e } \int \rho_n = 1,$$

Utilizaremos a notação  $(\rho_n)$  para denotar uma sequência regularizante.

**Exemplo 1.1.** Vamos gerar uma sequência regularizante começando com uma única função  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $\text{supp}\rho \subset [-1, 1]$ ,  $\rho \geq 0$  em  $\mathbb{R}$  e  $\rho$  não é identicamente nula.

Seja

$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}} & \text{se } |x| < 1 \\ 0 & \text{se } |x| > 1 \end{cases}$$

Obtemos uma sequência regularizante tomando  $\rho_n = cn\rho(nx)$  com  $c = \frac{1}{\int \rho}$ .

**Teorema 1.21.** Considere  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ . Então  $(\rho_n \star f) \rightarrow f$  uniformemente em um compacto de  $\mathbb{R}$ .

*Demonstração.* Seja  $K \subset \mathbb{R}$  um conjunto compacto fixado. Dado  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  dependendo de  $K$  e de  $\varepsilon$  tal que

$$|f(x-y) - f(x)| < \varepsilon, \forall x \in K, \forall y \in (-1, 1),$$

temos para todo  $x \in \mathbb{R}$

$$(\rho_n \star f)(x) - f(x) = \int_{-1}^1 [f(x-y) - f(x)]\rho_n dy.$$

Para  $n > \frac{1}{\delta}$  e  $x \in K$  obtemos

$$|(\rho_n \star f)(x) - f(x)| \leq \varepsilon \int \rho_n = \varepsilon.$$

□

**Teorema 1.22.** Considere  $f \in L^p(\mathbb{R})$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então  $(\rho_n \star f) \rightarrow f$  quando  $n \rightarrow \infty$  em  $L^p(\mathbb{R})$ .

*Demonstração.* Dado  $\varepsilon > 0$ . Fixamos uma função  $f \in \mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  tal que  $\|f - f_1\|_p \leq \varepsilon$ . Pelo teorema 1.21 sabemos que  $(\rho_n \star f_1) \rightarrow f_1$  uniformemente em cada compacto de  $\mathbb{R}$ . Pelo teorema 1.18 temos que

$$\text{supp}(\rho_n \star f_1) \subset \overline{\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)} + \text{supp}f_1 \subset \overline{(-1, 1)} + \text{supp}f_1,$$

que é um conjunto compacto, daí resulta que

$$\|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p \rightarrow 0.$$

Finalizando

$$\|(\rho_n \star f) - f\|_p \leq 2\|f - f_1\|_p + \|(\rho_n \star f_1) - f_1\|_p,$$

e pelo teorema 1.18 concluímos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|(\rho_n \star f) - f\|_p \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon,$$

e portanto  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(\rho_n \star f) - f\|_p = 0$ . □

**Corolário 1.1.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um conjunto aberto. Então  $\mathcal{C}_c^\infty(I)$  é denso em  $L^p(I)$  para cada  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demonstração.* Dado  $f \in L^p(I)$  considere

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in I \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - I \end{cases},$$

de modo que  $\tilde{f} \in L^p(\mathbb{R})$ .

Seja  $(K_n)$  uma sequência de conjuntos compactos de  $\mathbb{R}$  tais que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = I \quad \text{e} \quad \text{dis}(K_n, I^c) \geq \frac{2}{n} \forall n.$$

Podemos escolher, por exemplo,  $K_n = \{x \in \mathbb{R} \text{ tal que } |x| \leq n \text{ e } \text{dist}(x, I^c) \geq \frac{2}{n}\}$ .

Considere

$$q_n = \chi_{K_n} \tilde{f} \text{ e } f_n = \rho_n \star q_n,$$

deste modo

$$\text{supp} f_n \subset \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) + K_n \subset I.$$

Segue que  $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ . Mas por outro lado temos que

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{L^p(I)} &= \|f_n - \tilde{f}\|_{L^p(I)} \\ &\leq \|(\rho_n \star q_n) - (\rho_n \star \tilde{f})\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(\rho_n \star \tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \\ &\leq \|q_n - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|(\rho_n \star \tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Finalizando, note que  $\|q_n - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$  por convergência dominada e  $\|(\rho_n \star \tilde{f}) - \tilde{f}\|_{L^p(\mathbb{R})} \rightarrow 0$  pelo teorema 1.22. Concluindo assim que  $\|f_n - f\|_{L^p(I)} \rightarrow 0$ . □

**Corolário 1.2.** *Seja  $I \subset \mathbb{R}$  um conjunto aberto e seja  $u \in L^1_{loc}(I)$  tal que*

$$\int u f = 0, \quad \forall f \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

*Então  $u = 0$  q.t.p. em  $I$ .*

*Demonstração.* Seja  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$  uma função tal que  $\text{supp} g$  é um compacto contido em  $I$ . Definimos  $g_n = \rho_n \star g$ , deste modo  $g_n \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$  desde que  $n$  seja suficientemente grande. Dai temos

$$\int u g_n = 0, \quad \forall n \tag{1.5}$$

Como  $g_n \rightarrow g$  em  $L^1(\mathbb{R})$  pelo teorema 1.22 existe uma subsequência  $(g_{n_k})$  tal que  $g_{n_k} \rightarrow g$  q.t.p. em  $\mathbb{R}$ . Além disso, temos  $\|g_n\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$ . Tomando o limite em (1.5) e pela convergência dominada, obtemos

$$\int ug = 0. \quad (1.6)$$

Seja  $K \subset I$  um conjunto compacto. Definimos como função  $g$  a função

$$g = \begin{cases} \text{sing} & \text{em } K \\ 0 & \text{em } \mathbb{R} - K \end{cases}.$$

Deduzimos da equação (1.6) que  $\int_K |u| = 0$  e assim  $u = 0$  q.t.p. em  $K$ . Uma vez que isto é verdade para qualquer compacto  $K \subset I$ , concluímos que  $u = 0$  q.t.p. em  $I$ .  $\square$

## 1.6 Critério de Compacidade em $L^p$

É importante ser capaz de identificar se uma família de funções em  $L^p(\mathbb{R})$  tem fecho compacto em  $L^p(\mathbb{R})$ . Lembramos que o Teorema de Ascoli-Arzela responde a esta pergunta em  $\mathcal{C}(K)$ , o espaço das funções contínuas ao longo de um espaço métrico compacto  $K$  com valores em  $\mathbb{R}$ .

**Teorema 1.23** (Ascoli-Arzela). *Seja  $K$  um espaço métrico compacto e seja  $\mathfrak{H}$  um subconjunto limitado de  $\mathcal{C}(K)$ . Considerando que  $\mathfrak{H}$  é uniformemente equicontínuo, isto é,*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que } d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon, \forall f \in \mathfrak{H}.$$

*Então o fecho de  $\mathfrak{H}$  em  $\mathcal{C}(K)$  é compacto.*

**Teorema 1.24** (Riesz-Fréchet-Kolmogorov). *Seja  $\mathcal{F}$  um subconjunto limitado de  $L^p(\mathbb{R}^n)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Assuma que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\| = 0 \quad \text{uniformemente em } f \in \mathcal{F}.$$

*Então o fecho de  $\mathcal{F}|_\Omega$  em  $L^p(\Omega)$  é compacto para qualquer  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  subconjunto mensurável com medida finita.*

---

---

## CAPÍTULO 2

---

### ESPAÇOS DE SOBOLEV

Em muitos problemas da matemática em geral, em particular do cálculo das variações, não é suficiente trabalhar com a noção de soluções clássicas de equações diferenciais. É necessário assim, estender o conceito de solução. Para isto introduziremos a seguir a ideia de derivadas fracas e os chamados espaços de Sobolev.

Para entender melhor a motivação por trás da ideia de soluções fracas, consideremos o seguinte problema: Dada  $f \in C([a, b])$ , queremos encontrar uma função  $u$  satisfazendo

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } I = [a, b] \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

Uma solução clássica de (2.1) é uma função de classe  $C^2$  em  $[a, b]$  satisfazendo (2.1) no sentido usual. Sabemos que uma solução do problema acima pode ser obtida utilizando um cálculo simples. Ignoraremos tal fato e ilustraremos a seguir uma nova forma de atacar tal problema.

Multiplicando (2.1) por  $\varphi \in C^1([a, b])$  e utilizando integração por partes obteremos

$$\int_a^b u' \varphi' + \int_a^b u \varphi = \int_a^b f \varphi, \forall \varphi \in C^1([a, b]), \varphi(a) = \varphi(b) = 0. \quad (2.2)$$

Note que (2.2) faz sentido apenas se  $u \in C^1([a, b])$ . De fato, é suficiente mostrar que  $u, u' \in L^1(a, b)$ , onde o significado de  $u'$  será dado de forma precisa mais na frente. Diremos, provisoriamente, que uma função  $u$  satisfazendo (2.2) é uma *solução fraca* de (2.1).

Os passos a seguir nos dão um esquema para a abordagem variacional da teoria de equações diferenciais parciais:

**Passo A :** Definiremos de maneira precisa a noção de derivada fraca, juntamente com os espaços de Sobolev e demonstraremos algumas ferramentas básicas.

**Passo B :** Provaremos a existência e unicidade de soluções fracas através do Teorema da Representação de Riesz e do Teorema de Lax-Milgram.

**Passo C :** Provaremos que na verdade as soluções fracas são de classe  $C^2$ , o que é um resultado de regularidade.

**Passo D :** Mostramos que na verdade a solução fraca de classe  $C^2$  é uma solução clássica.

Uma vez motivado, introduziremos abaixo o conceito fundamental de espaços de Sobolev.

**Definição 2.1.** *Seja  $I = (a, b)$  um intervalo aberto, definimos por*

$$W^{1,p}(I) = \{u \in L^p(I) : \exists g \in L^p(I) \text{ tal que } \int_I u\varphi' = - \int_I g\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)\}.$$

Denotaremos por  $H^1(I) = W^{1,2}(I)$  para  $u \in W^{1,p}(I)$  denotaremos  $u' = g$ .

**Observação 2.1.** *Na definição acima  $\varphi$  é chamada função teste. Podemos supor que a classe das funções teste será a classe das funções  $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ . Com efeito, suponhamos que  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ , deste modo, sabemos que existem aplicações  $\rho_n$  tais que  $\rho_n \star \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$ . Deste modo, se  $u \in W^{1,p}$ , temos*

$$\begin{aligned} \int_I u(\rho_n \star \varphi)' &= - \int_I g(\rho_n \star \varphi) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I u(\rho_n \star \varphi)' &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I g(\rho_n \star \varphi). \end{aligned}$$

Assim temos

$$\int_I u\varphi' = - \int_I g\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

**Observação 2.2.** *Se  $u \in \mathcal{C}^1(I) \cap L^p(I)$  e se  $u' \in L^p$  (onde  $u'$  denota a derivada usual) então  $u \in W^{1,p}(I)$  e a derivada usual coincide com a derivada no sentido de Sobolev que de agora em diante denotaremos por derivada fraca. Devemos mostrar que*

$$\int_I u\varphi' = \int_I u'\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

Denotaremos  $I = (a, b)$ , e integrando por partes temos

$$\begin{aligned} \int_a^b u\varphi' &= \int_a^b (u\varphi)' - \int_a^b u'\varphi \\ &= (u\varphi)(b) - (u\varphi)(a) - \int_a^b u'\varphi, \end{aligned}$$

mas  $(u\varphi)(b) = (u\varphi)(a) = 0$ , pois  $\varphi$  tem suporte compacto em  $I$  e portanto

$$\int_a^b u\varphi' = \int_a^b u'\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(I).$$

**Exemplo 2.1.** Seja  $I = (-1, 1)$  mostraremos o seguinte:

A função  $u(x) = |x|$  pertence a  $W^{1,p}(I)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$  e  $u' = g$  onde

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } 0 < x < 1 \\ -1 & \text{se } -1 < x < 0 \end{cases} .$$

De maneira geral uma função contínua em  $\bar{I}$  que é  $\mathcal{C}^1$  por partes em  $I$  pertence a  $W^{1,p}(I)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ . Com efeito

$$\int_{-1}^1 u\varphi' dx = \int_{-1}^0 u\varphi' dx + \int_0^1 u\varphi' dx,$$

integrando o lado direito da igualdade por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 u\varphi' dx &= u\varphi(0) - u\varphi(-1) - \int_{-1}^0 u'\varphi dx + u\varphi(1) - u\varphi(0) - \int_0^1 u'\varphi dx \\ &= u\varphi(0) - u\varphi(0) - \int_{-1}^0 u'\varphi dx - \int_0^1 u'\varphi dx \\ &= \int_{-1}^0 \varphi dx - \int_0^1 \varphi dx. \end{aligned}$$

Por outro lado

$$\begin{aligned} - \int_{-1}^1 g\varphi dx &= - \left( \int_{-1}^0 g\varphi dx + \int_0^1 g\varphi dx \right) \\ &= - \int_{-1}^0 -1\varphi dx - \int_0^1 1\varphi dx \\ &= \int_{-1}^0 \varphi dx - \int_0^1 \varphi dx. \end{aligned}$$

Portanto  $u = |x|$  pertence a  $W^{1,p}(I)$  e  $g$  é sua derivada no sentido de Sobolev

**Notação:** O espaço  $W^{1,p}$  equipado com a norma

$$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \|u'\|_p,$$

ou ainda se  $1 < p < \infty$ , com a norma equivalente

$$\|u\|_{1,p} = (\|u\|_p^p + \|u'\|_p^p)^{\frac{1}{p}}.$$

O espaço  $H^1$  equipado com o produto interno

$$(u, v) = \langle u, v \rangle_{L^2} + \langle u', v' \rangle_{L^2} = \int_a^b (uv + u'v'),$$

e com a norma associada

$$\|u\|_{H^1} = (\|u\|_{L^2}^2 + \|u'\|_{L^2}^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Verifica-se que as normas acima são equivalentes.

**Proposição 2.1.** *O espaço  $W^{1,p}(I)$  é um espaço de Banach para  $1 \leq p \leq \infty$ , é reflexivo para  $1 < p < \infty$  e é separável para  $1 \leq p < \infty$ . Em particular  $H^1$  é um espaço de Hilbert separável.*

*Demonstração.* Dividiremos a demonstração em 3 etapas, na primeira parte mostraremos que  $W^{1,p}(I)$  é um espaço de Banach, na segunda parte mostraremos que tal espaço é reflexivo para  $1 < p < \infty$  e por fim mostraremos que é separável se  $1 \leq p < \infty$ .

1. Seja  $(u_n)$  uma sequência de Cauchy em  $W^{1,p}$ , então  $(u_n)$  e  $(u'_n)$  são sequências de Cauchy em  $L^p$ . Deste modo

$$\|u_n - u_m\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u_m\|_p + \|u'_n - u'_m\|_p \rightarrow 0.$$

Como  $L^p$  é completo  $u_n \rightarrow u$  e  $u'_n \rightarrow g$  em  $L^p$ . Assim teremos

$$\int_I u_n \varphi' = - \int_I u'_n \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$$

e tomando o limite

$$\int_I u \varphi' = - \int_I g \varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$$

Portanto  $u \in W^{1,p}(I)$  e  $u' = g$ . Mais ainda

$$\|u_n - u\|_{W^{1,p}} = \|u_n - u\|_p + \|u'_n - g\|_p \rightarrow 0$$

2. Para  $1 < p < \infty$  sabemos da proposição 1.11 que  $L^p$  é reflexivo e pelo lema 1.4 temos que  $E = L^p(I) \times L^p(I)$  é reflexivo. Defina o operador

$$\begin{aligned} T : W^{1,p} &\rightarrow E \\ u &\mapsto (u, u') \end{aligned}$$

Consequentemente, munindo  $E$  com a norma do produto, temos

$$\|Tu\|_{L^p \times L^p} = \|u\|_p + \|u'\|_p = \|u\|_{W^{1,p}}$$

Uma vez que  $W^{1,p}$  é Banach e  $T$  é isometria segue que  $T(W^{1,p})$  é Banach e consequentemente fechado em  $E$  assim pelo lema 1.2 do apêndice,  $T(W^{1,p})$  é reflexivo e pelo lema 1.3 do apêndice,  $W^{1,p}$  é reflexivo.



3. Considere o operador anteriormente definido, sabemos que o produto cartesiano de espaços separáveis é separável e pelo lema 1.3 do apêndice temos que  $T(W^{1,p}) \subset E$  é separável e conseqüentemente  $W^{1,p}$  é separável.

□

**Observação 2.3.** Vale salientar que na proposição anterior ganhamos como corolário o fato de se  $(u_n)$  é uma sequência em  $W^{1,p}$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p$  e  $(u'_n)$  converge para algum limite em  $L^p$ , então  $u \in W^{1,p}$  e  $\|u_n - u\|_{1,p} \rightarrow 0$ . De fato, quando  $1 < p \leq \infty$  é suficiente que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p$  e  $\|u'_n\|_p$  seja limitada para concluirmos que  $u \in W^{1,p}$ .

**Teorema 2.1.** Seja  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ , com  $I$  limitado ou não, então existe  $\tilde{u} \in \mathcal{C}(I)$  tal que

$$u = \tilde{u}$$

e

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t) dt, \forall x, y \in I.$$

**Observação 2.4.** Vamos enfatizar o conteúdo do teorema anterior. Primeiramente note que se uma função  $u \in W^{1,p}$ , então toda função  $v$  tal que  $u = v$  q.t.p. em  $I$  pertence a  $W^{1,p}$ . O teorema afirma que cada função  $u \in W^{1,p}$  admite unico representante contínuo em  $\bar{I}$ , isto é, existe uma função contínua em  $\bar{I}$  que pertence a classe de equivalência de  $u$ . Quando nos for conveniente substituiremos  $u$  pelo seu representante contínuo. Finalizamos observando que "u ter um representante contínuo" não é o mesmo que "u ser contínua q.t.p."

Antes de demonstrarmos o teorema acima necessitaremos dos seguintes lemas:

**Lema 2.1.** Seja  $f \in L^1_{loc}(I)$  e tal que

$$\int_I f \varphi' = 0, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I) \tag{2.3}$$

Então existe uma constante  $c$  tal que  $f = c$  q.t.p. em  $I$ .

*Demonstração.* Fixemos a função  $\psi \in \mathcal{C}_c^1(I)$  e tal que  $\int_I \psi = 1$ . Para algum  $w \in \mathcal{C}_c(I)$  e tal que

$$\varphi' = w - \left[ \int_I w \right] \psi.$$

De fato a função  $h = \varphi'$  é contínua e tem suporte compacto em  $I$ , e ainda

$$\int_I h = \int_I \left[ w - \left( \int_I w \right) \psi \right] = \int_I w - \int_I \left( \int_I w \right) \psi = \int_I w - \int_I w \int_I \psi = 0$$

Portanto  $h$  tem única primitiva com suporte compacto em  $I$ . Deduzimos de (2.3) que

$$\int_I f\varphi' = \int_I f \left[ w - \left( \int_I w \right) \psi \right] = 0, \forall w \in \mathcal{C}_c(I).$$

isto é

$$\int_I \left[ f - \left( \int_I f\psi \right) \right] w = 0, \forall w \in \mathcal{C}_c(I).$$

e portanto pelo corolário 1.2  $f - \int_I f\psi = 0$  q.t.p. em  $I$ , isto é  $f = c$  q.t.p. em  $I$  com  $c = \int_I f\psi$   $\square$

**Lema 2.2.** *Seja  $g \in L^1_{loc}(I)$  para  $y_0$  fixado em  $I$*

$$v(x) = \int_{y_0}^x g(t)dt, x \in I,$$

então  $v \in \mathcal{C}(I)$  e

$$\int_I v\varphi' = \int I g\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

*Demonstração.* Sabemos que

$$\begin{aligned} \int_I v\varphi' &= \int \left[ \int_{y_0}^x g(t)dt \right] \varphi(x)dx \\ &= \int_a^{y_0} dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt \\ &= - \int_a^{y_0} dx \int_x^{y_0} g(t)\varphi'(x)dt + \int_{y_0}^b dx \int_{y_0}^x g(t)\varphi'(x)dt, \end{aligned}$$

pelo Teorema de Fubini temos

$$\int_I v\varphi' = - \int_a^{y_0} g(t)dt \int_a^t \varphi'(x)dx + \int_{y_0}^b g(t)dt \int_t^b \varphi'(x)dx,$$

note que

$$\int_a^t \varphi'(x)dx = \varphi(t) - \varphi(a) = \varphi(t), \text{ pois } \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I),$$

de modo que analogo tem-se

$$\int_t^b \varphi'(x)dx = -\varphi(t),$$

logo

$$\begin{aligned} \int_I v\varphi' &= \varphi(t) \int_a^{y_0} g(t)dt - \varphi(t) \int_{y_0}^b g(t)dt \\ &= - \int_I g(t)\varphi(t)dt. \end{aligned}$$

$\square$

*Demonstração do Teorema:* Fixado  $y_0 \in I$  considere

$$\bar{u}(x) = \int_{y_0}^x u'(t) dt,$$

como  $u'(t) \in L^p(I)$ , então  $u' \in L^1_{loc}(I)$ . Desse modo, pelo lema 2.2 temos

$$\int_I \bar{u} \varphi' = - \int_I u' \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I),$$

assim

$$\int_I u \varphi' = - \int_I u' \varphi, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I),$$

logo

$$\int_I (u - \bar{u}) \varphi' = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

E pelo lema 2.1 tem-se

$$u - \bar{u} = c \text{ q.t.p. em } I, \tag{2.4}$$

então

$$\tilde{u}(x) = \bar{u}(x) + c.$$

Deste modo, como  $\bar{u}$  é contínua, segue que  $\tilde{u} \in \mathcal{C}(I)$  e  $\tilde{u} = u$  q.t.p. em  $I$  e por (2.4), da definição de  $\tilde{u}$ , temos

$$\begin{aligned} \tilde{u}(y) - \tilde{u}(x) &= \bar{u}(y) + c - \bar{u}(x) - c \\ &= \int_{y_0}^y u'(t) dt - \int_{y_0}^x u'(t) dt \\ &= \int_x^y u'(t) dt. \end{aligned}$$

□

**Observação 2.5.** O lema 2.2 mostra que a primitiva  $v$  de uma função  $g \in L^p$  pertence a  $W^{1,p}$ , sabemos ainda que  $v \in L^p$  sempre  $I$  for limitado.

**Observação 2.6.** Segue ainda do teorema 2.1 que, se  $u \in W^{1,p}$  e se  $u' \in C(\bar{I})$ , isto é,  $u'$  admite um representante contínuo em  $\bar{I}$ , então  $u \in C^1(\bar{I})$ , mais especificamente  $\tilde{u} \in C^1(\bar{I})$ .

**Teorema 2.2.** Seja  $u \in L^p$  com  $1 < p < \infty$ , as seguintes propriedades são equivalentes

1.  $u \in W^{1,p}$
2. existe uma constante  $C$  tal que

$$\left| \int_I u \varphi' \right| \leq C \|\varphi\|_{L^{p'}(I)}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Além disso, nos temos que  $C = \|u'\|_{L^p}$ .

*Demonstração.* (1) $\Rightarrow$ (2) Como  $u \in W^{1,p}$ , então existe  $u' \in L^p$  tal que

$$\int_I u\varphi' = \int_I u'\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Deste modo

$$\begin{aligned} \left| \int_I u\varphi' \right| &= \left| \int_I u'\varphi \right| \\ &\leq \left( \int_I |u'|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_I |\varphi|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}} = \|u'\|_p \|\varphi\|_{p'}, \end{aligned}$$

tomando  $\|u'\|_p = C$  tem-se

$$\left| \int_I u\varphi' \right| = C \|\varphi\|_{p'}, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Considere o funcional linear

$$\begin{aligned} G : \mathcal{C}_c^1 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto G(\varphi) = \int_I u\varphi', \end{aligned}$$

o funcional está definido em um subespaço denso de  $L^{p'}$  ( $p' < \infty$ ) e  $G$  é contínuo em relação a norma de  $L^{p'}$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$ , tome  $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$ , onde  $c = \|u\|_p$ , então sempre que  $\|\varphi - \psi\|_{p'} < \delta$  tem-se

$$\begin{aligned} |G(\varphi) - G(\psi)| &= \left| \int_I u\varphi' - \int_I u\psi' \right| \\ &= \left| \int_I u(\varphi - \psi)' \right| \\ &\leq c \|\varphi - \psi\|_{p'} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Portanto podemos estendê-lo a um funcional linear limitado  $F$  definido em todo  $L^{p'}$ , aplicando o Teorema de Hanh-Banach. E pelo Teorema de Representação de Riez, existe  $g \in L^p$  tal que

$$\langle F, \varphi \rangle = \int_I g\varphi, \forall \varphi \in L^{p'}.$$

Em particular

$$\int_I u\varphi' = \int_I g\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1$$

e assim  $u \in W^{1,p}$ . □

**Observação 2.7** (Funções absolutamente contínuas e Funções de variação limitada). *Quando*

$p = 1$ , a implicação (1) $\Rightarrow$ (2) permanece válida mas não vale a recíproca. Para ilustrar este fato, suponhamos  $I$  um intervalo limitado. As funções  $u$  satisfazendo (1) com  $p = 1$ , isto é, as funções em  $W^{1,p}(I)$ , são chamadas funções absolutamente contínuas. Elas são caracterizadas por

$$(AC) \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que para cada sequência finita de intervalos disjuntos} \\ (a_k, b_k) \subset I \text{ tal que } \sum |b_k - a_k| < \delta, \text{ tomemos } \sum |u(b_k) - u(a_k)| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Por outro lado, as funções  $u$  satisfazendo (2) com  $p = 1$  são chamadas funções podem ser caracterizada de diferentes maneiras:

1. Elas são a diferença de duas funções limitadas não-decrescentes (possibilitando descontinuidade) em  $I$ .
2. Elas são funções  $u$  satisfazendo a propriedade de

$$(VL) \left\{ \begin{array}{l} \exists c \text{ tal que } \sum_{i=0}^{k-1} |u(t_{i+1}) - u(t_i)| \leq c, \\ \forall t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \text{ em } I \end{array} \right.$$

Note que funções de variação limitada não precisam ter um representante contínuo.

**Teorema 2.3.** Uma função  $u \in L^\infty(I)$  pertence a  $W^{1,p}(I)$  se, e somente se, existe constante  $c$  tal que

$$|u(x) - u(y)| \leq c|x - y|, \text{ para } x, y \text{ q.t.p. em } I.$$

*Demonstração.* Suponha que  $u \in W^{1,\infty}$ , sabemos do teorema 2.1 que

$$u(x) - u(y) = \int_y^x u'(t)dt \Rightarrow |u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)dt \right|,$$

como  $u' \in L^\infty(I)$  temos

$$|u(x) - u(y)| \leq \|u'\|_\infty |x - y|, \text{ para } x, y \text{ q.t.p em } I.$$

Reciprocamente, seja  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(I)$ . Para  $h \in \mathbb{R}$  com  $|h|$  suficientemente pequeno, temos

$$\int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx = \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx$$

(estas integrais fazem sentido para  $h$  pequeno pois  $\varphi$  tem suporte compacto em  $I$ ). Utilizando a hipótese sobre  $u$  temos

$$\left| \int_I u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)]dx \right| = \left| \int_I [u(x+h) - u(x)]\varphi(x)dx \right| \leq c|h|\|\varphi\|_1.$$

Dividindo por  $|h|$

$$\left| \int_I u(x) \left[ \frac{\varphi(x-h) - \varphi(x)}{|h|} \right] dx \right| \leq c \|\varphi\|_1,$$

tomando limite quando  $h \rightarrow 0$  obtemos

$$\left| \int_I u(x) \varphi'(x) dx \right| \leq c \|\varphi\|_1, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Aplicando o teorema anterior concluímos que  $u \in W^{1,\infty}(I)$  □

**Teorema 2.4.** *Seja  $u \in L^p(\mathbb{R})$  com  $1 < p < \infty$ . As seguintes propriedades são equivalentes*

1.  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$
2. existe uma constante  $c$  tal que para todo  $h \in \mathbb{R}$

$$\|u(x+h) - u(x)\|_p \leq c|h|$$

Além disso, podemos tomar  $c = \|u'\|_p$

*Demonstração.* (1)  $\Rightarrow$  (2) Pelo teorema 2.1 temos que para todo  $x, h \in \mathbb{R}$

$$u(x+h) - u(x) = \int_x^{x+h} u'(t) dt,$$

tomando a mudança de variável  $t = x + sh \Rightarrow dt = h ds$ , daí

$$u(x+h) - u(x) = \int_0^1 h u'(x+sh) ds \Rightarrow |u(x+h) - u(x)| \leq \int_0^1 |h| |u'(x+sh)| ds.$$

Pela Desigualdade de Hölder

$$\begin{aligned} |u(x+h) - u(x)| &\leq \left( \int_0^1 |h|^p |u'(x+sh)|^p ds \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^1 |1|^{p'} ds \right)^{\frac{1}{p'}} \\ \Rightarrow |u(x+h) - u(x)|^p &\leq |h|^p \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds, \end{aligned}$$

daí segue que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)| dx &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}} dx \int_0^1 |u'(x+sh)|^p ds \\ &\leq |h|^p \int_0^1 ds \int_{\mathbb{R}} |u'(x+sh)|^p dx, \end{aligned}$$

mas para  $0 < s < 1$

$$\int_{\mathbb{R}} |u'(x+hs)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int |u(x+h) - u(x)|^p dx &\leq |h|^p \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy \\ \Rightarrow \left( \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq |h| \left( \int_{\mathbb{R}} |u'(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}}, \end{aligned}$$

ou seja

$$\|u(x+h) - u(x)\|_p \leq |h| \|u\|_p.$$

(2) $\Rightarrow$ (1) Seja  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ . Para todo  $h \in \mathbb{R}$  temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} [u(x+h) - u(x)]\varphi(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} u(x+h)\varphi(x) dx - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(y)\varphi(y-h) dy - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x-h) dx - \int_{\mathbb{R}} u(x)\varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(x)[\varphi(x-h) - \varphi(x)] dx, \end{aligned}$$

usando a Desigualdade de Hölder e a hipótese em (2)

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} [u(x+h) - u(x)]\varphi(x) dx \right| &\leq \left( \int_{\mathbb{R}} |u(x+h) - u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &\leq c|h| \|\varphi\|_{p'}, \end{aligned}$$

deste modo

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u(x)[\varphi(x+h) - \varphi(x)] dx \right| \leq c|h| \|\varphi\|_{p'}.$$

Dividindo por  $|h|$  e tomando o limite quando  $h \rightarrow 0$  obtemos

$$\left| \int_{\mathbb{R}} u\varphi' \right| \leq c\|\varphi\|_{p'}.$$

Aplicando o teorema 2.3 concluímos que  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . □

Certas operações analíticas básicas têm um significado apenas para as funções definidas sobre toda a reta real (por exemplo convoluções e transformadas de Fourier). Por esse motivo é conveniente quando possível estender a função  $u \in W^{1,p}(I)$  para uma função  $\tilde{u} \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . O seguinte resultado trata deste ponto.

**Teorema 2.5 (Operador extensão).** *Seja  $1 \leq p \leq \infty$ . Existe um operador linear limitado  $P : W^{1,p}(I) \rightarrow W^{1,p}(\mathbb{R})$ , chamado operador extensão, satisfazendo as seguintes propriedades:*

1.  $Pu|_I = u, \forall u \in W^{1,p}(I)$ ;
2.  $\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{L^p(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I)$ ;
3.  $\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I)$ .

onde  $c$  depende somente de  $|I| \leq \infty$ .

*Demonstração.* Começaremos com o caso em que  $I = (0, \infty)$  nós mostraremos que a extensão dada pela reflexão

$$(Pu)(x) = u^*(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \geq 0 \\ u(-x), & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Pela forma como  $Pu$  está definida temos claramente satisfeita a propriedade (1), e ainda

$$\begin{aligned} \|Pu\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left( \int_{\mathbb{R}} |Pu|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int_{-\infty}^0 |Pu|^p + \int_0^{+\infty} |Pu|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq 2\|u\|_{L^p(I)} \end{aligned}$$

Tomando

$$v(x) = \begin{cases} u'(x) & \text{se } x \geq 0 \\ -u'(-x) & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

Note que  $v \in L^p$ , de fato

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^p dx = \int_{-\infty}^0 |-u'(-x)|^p dx + \int_0^{+\infty} |u'(x)|^p dx,$$

mas

$$\int_{-\infty}^0 |-u'(-x)|^p dx = \int_0^{+\infty} |-u'(y)|^p dy = \int_0^{+\infty} |u'(x)|^p dx < \infty,$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} |v(x)|^p dx < \infty.$$

Além disso

$$u^*(x) - u^*(0) = \int_0^x v(t) dt, \forall x \in \mathbb{R},$$

onde segue que  $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  e

$$\begin{aligned} \|u^*\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} &= \|u^*\|_{L^p(\mathbb{R})} + \|u^{*'}\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2(\|u\|_{L^p(I)} + \|u'\|_{L^p(I)}) \\ &\leq \|u\|_{W^{1,p}(I)}. \end{aligned}$$

Agora considerando o caso onde  $I$  é um intervalo limitado. Sem perda de generalidade



consideremos o intervalo  $I = (0, 1)$ . Fixada uma função  $\eta \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \eta \leq 1$ , tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < \frac{1}{4} \\ 0 & \text{se } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

dado uma função  $f$  definida em  $(0, 1)$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Precisaremos da seguinte afirmação

**Afirmção 2.1.** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$ . Então*

$$\eta\tilde{u} \in W^{1,p}(0, +\infty) \text{ e } (\eta\tilde{u})' = \eta'\tilde{u} + \eta\tilde{u}'.$$

Seja  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1((0, +\infty))$ , então

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \eta\tilde{u}\varphi' &= \int_0^1 \eta u \varphi' = \int_0^1 u[(\eta\varphi)' - \eta'\varphi] \\ &= - \int_0^1 u'\eta\varphi - \int_0^1 u\eta'\varphi \text{ desde que } \eta\varphi \in \mathcal{C}_c^1((0, 1)) \\ &= - \int_0^1 (u'\eta + u\eta')\varphi. \end{aligned}$$

ficando assim demonstrada a afirmação. Voltando a prova do teorema, dado  $u \in W^{1,p}(I)$  escrevemos

$$u = \eta u + (1 - \eta)u.$$

A função  $\eta u$  é a primeira extensão para  $(0, +\infty)$  pela  $\eta\tilde{u}$  e em seguida extendendo a toda reta real pela reflexão. Desta forma obtemos uma função  $v_1 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  que estende  $\eta u$  e tal que

$$\|v_1\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|u\|_{L^p(I)}, \quad \|v_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq c\|u\|_{W^{1,p}(I)}$$

onde  $c$  depende de  $\|\eta'\|_\infty$ . Procedendo do mesmo modo com  $(1 - \eta)u$ , ou seja, primeiro estendendo para  $(-\infty, 1)$  por 0 e então estendendo para toda a reta real por reflexão (desta vez sobre o ponto 1, não no ponto 0). Desta forma, obtemos uma função  $v_2 \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ , que estende  $(1 - \eta)u$  e satisfaz

$$\|v_2\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq 2\|v_2\|_{L^p(I)}, \quad \|v_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R})} \leq c\|v_2\|_{W^{1,p}(I)}$$

Então definindo  $Pu = v_1 + v_2$ , tal aplicação satisfaz as condições do teorema, ficando assim demonstrado o resultado.  $\square$

Certas propriedades de funções  $\mathcal{C}^1$  permanecem verdadeiras para funções em  $W^{1,p}$ . É conveniente estabelecer estas propriedades por um argumento de densidade com base nos seguintes resultados

**Teorema 2.6 (Densidade).** *Seja  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então existe uma sequência  $(u_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $u_n|_I \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(I)$ .*

**Observação 2.8.** *Em geral, não ha sequência  $(u_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(I)$ . Isso esta em contraste com os espaços  $L^p$  onde para cada função  $u \in L^p(I)$  existe uma sequência  $(u_n) \in \mathcal{C}_c^\infty(I)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $L^p(I)$ .*

*Demonstração.* Podemos sempre supor  $I = \mathbb{R}$ ; caso contrário extenderemos  $u$  para uma função pertencente a  $W^{1,p}(\mathbb{R})$  pelo teorema 2.5. Usaremos um tecnica básica de convolução e cut-off.

**(a) Convolução**

Precisamos de seguinte lema

**Lema 2.3.** *Seja  $\rho \in L^1(\mathbb{R})$  e  $v \in W^{1,p}(\mathbb{R})$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então*

$$\rho \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad e \quad (\rho \star v)' = \rho \star v'$$

*Demonstração.* Primeiramente suponhamos que  $\rho$  tenha suporte compacto. Sabemos pelo teorema 1.15 que  $\rho \star v \in L^p(\mathbb{R})$ . Seja  $\varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$ ; pelos teoremas 1.16 e 1.20 obtemos

$$\int (\rho \star v)\varphi' = \int v(\check{\rho} \star \varphi') = \int v(\check{\rho} \star \varphi)' = \int v'(\check{\rho} \star \varphi) = - \int (\rho \star v')\varphi,$$

Dai obtemos que

$$\rho \star v \in W^{1,p} \quad e \quad (\rho \star v)' = \rho \star v'.$$

Se  $\rho$  não tem suporte compacto, pelo corolário 1.1, introduzimos uma sequência  $(\rho_n)$  de  $\mathcal{C}_c(\mathbb{R})$  tal que  $\rho_n \rightarrow \rho$  em  $L^1(\mathbb{R})$ . Donde segue que

$$\rho_n \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad e \quad (\rho_n \star v)' = \rho_n \star v'.$$

Mas  $\rho_n \star v \rightarrow \rho \star v$  em  $L^p(\mathbb{R})$  e  $\rho_n \star v' \rightarrow \rho \star v'$  em  $L^p(\mathbb{R})$  pelo teorema 1.15 concluimos com a ajuda da observação 2.3 que

$$\rho \star v \in W^{1,p}(\mathbb{R}) \quad e \quad (\rho \star v)' = \rho \star v'.$$

□

**(b) Cut-off**

Fixada uma função  $\zeta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tal que  $0 \leq \zeta \leq 1$  e

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } |x| < 1 \\ 0, & \text{se } |x| \geq 2 \end{cases}$$

Defina a sequência

$$\zeta_n(x) = \zeta\left(\frac{x}{n}\right), \text{ para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Segue facilmente pelo Teorema da Convergência Dominada que se uma função  $f$  pertence  $L^p(\mathbb{R})$  com  $1 \leq p < \infty$ , então  $\zeta_n f \rightarrow f$  em  $L^p(\mathbb{R})$ .

**(c) Conclusão**

Escolha uma sequência regularizante  $(\rho_n)$ . Afirmamos que a sequência  $u_n = \zeta_n(\rho_n \star u)$  converge para  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ . Primeiramente mostraremos que  $\|u_n - u\|_p \rightarrow 0$ .

De fato,

$$u_n - u = \zeta_n(\rho_n \star u) - u = \zeta_n((\rho_n \star u) - u) + (\zeta_n u - u),$$

e assim

$$\|u_n - u\|_p \leq \|\rho_n \star u - u\|_p + \|\zeta_n u - u\|_p \rightarrow 0,$$

em seguida pelo lema 2.3 obtemos

$$u'_n = \zeta'_n(\rho_n \star u) + \zeta_n(\rho_n \star u').$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|u'_n - u'\|_p &\leq \|\zeta'_n(\rho_n \star u)\|_p + \|\zeta_n(\rho_n \star u') - u'\|_p \\ &\leq \frac{c}{n} \|u\|_p + \|\rho_n \star u' - u'\|_p + \|\zeta_n u' - u'\|_p \rightarrow 0, \end{aligned}$$

onde  $c = \|\zeta'\|_\infty$ .

□

O proximo resultado é um importante protótipo para as Desigualdades de Sobolev.

**Teorema 2.7.** *Existe uma constante  $c$  dependendo de  $|I| \leq \infty$  tal que*

(1)  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq c \|u\|_{W^{1,p}(I)}, \forall u \in W^{1,p}(I), \forall 1 \leq p \leq \infty.$

*Em outras palavras,  $W^{1,p}(I)$  está imerso continuamente em  $L^\infty(I)$  para todo  $1 \leq p \leq \infty$ .  
mais ainda, se  $I$  for limitado então*

(2) *A imersão  $W^{1,p}(I) \subset C(I)$  é compacta para todo  $1 < p \leq \infty$ .*

(3) *A imersão  $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$  é compacta para todo  $1 \leq p < \infty$ .*

*Demonstração.* Começaremos provando (1) para  $I = \mathbb{R}$  pois o caso geral segue deste pelo teorema 2.5. Seja  $v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  se  $1 \leq p < \infty$  tome  $G(s) = |s|^{p-1}s$ .

A função  $w = G(v)$  pertence a  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  e

$$w' = G'(v)v' = p|v|^{p-1}v'.$$

Assim, para  $x \in \mathbb{R}$ , obtemos

$$G(v(x)) = \int_{-\infty}^x p|v(t)|^{p-1}v'(t)dt,$$

e pela Desigualdade de Hölder

$$|v(x)|^p \leq p\|v\|_p^{p-1}\|v'\|_p,$$

dai podemos concluir que

$$\|v\|_\infty \leq c\|v\|_{W^{1,p}}, \forall v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}), \quad (2.5)$$

onde  $c$  é uma constante universal que independe de  $p$ . Utilizaremos a seguir alguns argumentos de densidade. Seja  $u \in W^{1,p}(\mathbb{R})$ , então existe uma sequência  $(u_n) \subset \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(\mathbb{R})$  pelo teorema 2.6. Aplicando (2.5) vemos que  $(u_n)$  é uma sequência de Cauchy em  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Assim  $u_n \rightarrow u$  em  $L^\infty(\mathbb{R})$  e obtemos (1).

Agora provaremos (2) Seja  $\mathcal{H}$  uma bola unitaria em  $W^{1,p}(I)$  com  $1 < p \leq \infty$ . Para  $u \in \mathcal{H}$  temos

$$|u(x) - u(y)| = \left| \int_y^x u'(t)dt \right| \leq \|u'\|_p |x - y|^{\frac{1}{p'}} \leq |x - y|^{\frac{1}{p'}}, \forall x, y \in I$$

Segue então do Teorema de Ascoli-Arzelà que  $\mathcal{H}$  tem fecho compacto em  $\mathcal{C}(\bar{I})$ .

Prova de (3): Seja  $\mathcal{H}$  uma bola unitaria em  $W^{1,1}(I)$ . Seja  $P$  o operador extensão do teorema 2.5 e tome  $\mathcal{F} = P(\mathcal{H})$  de modo que  $\mathcal{H} = \mathcal{F}|_I$ . Provaremos que  $\mathcal{H}$  tem fecho compacto em  $L^q(I)$ , para todo  $1 \leq q < \infty$  aplicando o teorema (4.26). Claramente  $\mathcal{F}$  é limitado em  $W^{1,p}(\mathbb{R})$ , portanto  $\mathcal{F}$  é também limitado em  $L^q(\mathbb{R})$ , uma vez que é limitado tanto em  $L^1(\mathbb{R})$  quanto em  $L^\infty(\mathbb{R})$ . Vamos agora verificar a hipótese do Teorema de Riesz-Fréchet-Kolmogorov, isto é,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tau_h f - f\| = 0 \quad \text{uniformemente em } f \in \mathcal{F}$$

Pela teorema 2.4 temos, para cada  $f \in \mathcal{F}$ ,

$$\|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq |h| \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq c|h|,$$

como  $\mathcal{F}$  é uma subconjunto limitado de  $W^{1,1}(\mathbb{R})$ . Temos

$$\|\tau_h f - f\|_{L^q(\mathbb{R})}^q \leq (2\|f\|_{L^{inf}(\mathbb{R})})^{q-1} \|\tau_h f - f\|_{L^1(\mathbb{R})} < c|h|$$

e conseqüentemente

$$\|\tau_h f - f\|_{L^q(\mathbb{R})} \leq c|h|^{\frac{1}{q}},$$

onde  $c$  independe de  $f$  o resultado segue desde que  $q \neq \infty$  □

**Observação 2.9.** A imersão  $W^{1,1}(I) \subset \mathcal{C}(\bar{I})$  é contínua mas nunca compacta, mesmo que o intervalo seja limitado. Entretanto se  $(u_n)$  é uma seqüência limitada de  $W^{1,1}(I)$ , existe uma subsequência  $(u_{n_k})$  tal que  $u_{n_k}(x)$  converge para todo  $x \in I$ . Quando  $I$  é ilimitado e  $1 < p \leq \infty$ , sabemos que a imersão  $W^{1,1}(I)$  é contínua porém essa imersão nunca é compacta. No entanto, se  $(u_n)$  é uma seqüência limitada em  $W^{1,p}(I)$  com  $1 < p \leq \infty$ , existe um subsequência  $(u_{n_k})$  e alguma  $u \in W^{1,p}(I)$  tal que  $u_{n_k} \rightarrow u$  em  $L^\infty(J)$  para cada subconjunto  $J$  limitado de intervalo  $I$ .

**Observação 2.10.** Sejam  $I$  um intervalo limitado,  $1 \leq p \leq \infty$  e  $1 \leq q \leq \infty$ . Pelo teorema 2.1 e por (1) podemos ver facilmente que a norma

$$\|u\| = \|u'\|_p + \|u\|_q$$

é equivalente a norma de  $W^{1,p}(I)$ .

**Observação 2.11.** Seja  $I$  um intervalo ilimitado. Seja  $u \in W^{1,p}(I)$ , então  $u \in L^q(I)$  para todo  $q \in [p, \infty]$  visto que

$$\int_I |u|^q \leq \|u\|_\infty^{q-p} \|u\|_p^p.$$

Mas geralmente  $u$  não pertence a  $L^p(I)$  para  $q \in [1, p)$ .

**Corolário 2.1.** Suponha que  $I$  é um intervalo ilimitado e  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \rightarrow \infty}} u(x) = 0.$$

*Demonstração.* Pelo Teorema 2.6 existe uma seqüência  $(u_n)$  em  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(I)$ . Afirmamos de (1) que  $\|u_n - u\|_{L^\infty(I)} \rightarrow 0$ . De fato, dado  $\varepsilon > 0$  escolhemos  $n$  suficientemente grande tal que  $\|u_n - u\|_{L^p(I)} < \varepsilon$ . Para  $|x|$  grande  $u_n(x) = 0$  desde que  $u_n \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  e assim  $|u(x)| < \varepsilon$ . □

**Corolário 2.2 (Regra do Produto).** Seja  $u, v \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . então

$$uv \in W^{1,p}(I)$$

e

$$(uv)' = u'v + uv'. \tag{2.6}$$

Além disso abtemos a fórmula da integral por partes

$$\int_y^x u'v = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv', \forall x, y \in \bar{I}. \quad (2.7)$$

*Demonstração.* Primeiramente lembremos que se  $u \in L^\infty$  pelo Teorema 2.7 e ainda  $uv \in L^p$ . Para mostrarmos que  $(uv)' \in L^p$ , começaremos com o caso  $1 \leq p < \infty$ . Seja  $(u_n)$  e  $(v_n)$  sequências em  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  tal que  $u_n|_I \rightarrow u$  e  $v_n \rightarrow v$  em  $W^{1,p}(I)$ . Assim  $u_n|_I \rightarrow u$  e  $v_n \rightarrow v$  em  $L^\infty(I)$  e, novamente pelo teorema 2.7, segue que  $u_nv_n \rightarrow uv$  em  $L^\infty(I)$  e também em  $L^p(I)$ . Dai temos

$$(u_nv_n)' = u'_n v_n + u_n v'_n \rightarrow u'v + uv' \text{ em } L^p(I).$$

Aplicando a obsevação 2.3 para a sequência  $(u_nv_n)$ , concluímos que  $uv \in W^{1,p}(I)$

Para o caso em que  $p = \infty$ , seja  $u, v \in W^{1,p}(I)$ . Assim  $uv \in L^\infty(I)$  e  $u'v + uv' \in L^\infty(I)$ .

Resta-nos mostrar que

$$\int_I uv\varphi' = - \int_I (u'v + uv')\varphi, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(I).$$

Para isso, fixemos um intervalo aberto  $J \subset I$  tal que  $\text{supp}\varphi \subset J$ . Assim  $u, v \in W^{1,p}(J)$  para todo  $p < \infty$  e pelo que acabamos de mostrar

$$\int_J uv\varphi' = - \int_J (u'v + uv')\varphi,$$

logo

$$\int_I uv\varphi' = - \int_I (u'v + uv')\varphi.$$

Por fim integrando (2.6) obtemos (2.7). □

**Corolário 2.3 (Derivada da composição).** *Seja  $G \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  tal que  $G(0) = 0$ , e seja  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$ . Então*

$$G \circ u \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (G \circ u)' = (G' \circ u)u'.$$

*Demonstração.* Seja  $M = \|u\|_\infty$ . onde  $G(0) = 0$ , existe uma constante  $c$  tal que  $|G(s)| \leq c|s|$  para todo  $s \in [-M, +M]$ . Assim  $|G \circ u| \leq c|u|$  donde segue que  $G \circ u \in L^p(I)$ . Analogamente mostrar-se que  $(G' \circ u)u' \in L^p(I)$ . Resta-nos mostrar que

$$\int_I (G \circ u)\varphi' = - \int_I (G' \circ u)u'\varphi. \quad (2.8)$$

Primeiramente suponha o caso em que  $1 \leq p < \infty$ . Então existe uma sequência  $(u_n)$  de  $\mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$  tal que  $u_n|_I \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(I)$  e também em  $L^\infty(I)$ . Assim  $(G \circ u_n)|_I \rightarrow G \circ u$  em  $L^\infty(I)$  e  $(G' \circ u_n)u'_n \rightarrow (G' \circ u)u'$  em  $L^p(I)$ . Pelas propriedades das funções  $\mathcal{C}^1$  obtemos (2.8).

Para o caso em que  $p = \infty$  procedemos de maneira analoga ao que foi feito na prova do corolário anterior.  $\square$

## 2.1 O Espaço de Sobolev $W^{m,p}$

**Definição 2.2.** Dado um inteiro  $m \geq 2$  e um real  $1 \leq p < \infty$  definimos por indução o espaço

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p} \text{ tal que } u' \in W^{m-1,p}\}.$$

Definimos também

$$H^m(I) = W^{m,2}(I).$$

É de fácil verificação que  $u \in W^{m,p}(I)$  se, e somente se, existir  $m$  funções  $g_1, g_2, \dots, g_m \in L^p(I)$  tal que

$$\int_I u D^j \varphi = (-1)^j \int_I g_j \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(I), \forall j = 1, 2, 3, \dots, m,$$

onde  $D^j \varphi$  denota a  $j$ -ésima derivada de  $\varphi$ . Podemos assim considerar as derivadas sucessivas de  $u$ .  $u' = g_1, (u')' = g_2, \dots$ , até ordem  $m$ . Vamos denota-las por  $Du, D^2u, \dots, D^m u$ . O espaço  $W^{m,p}(I)$  será dotado com a norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(I)} = \|u\|_p + \sum_{\alpha}^m \|D^\alpha u\|_p,$$

e o espaço  $H^m(I)$  será dotado com o produto por escalar

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \langle u, v \rangle_{L^2} + \sum_{\alpha=1}^m \langle D^\alpha u, D^\alpha v \rangle = \int_I uv + \sum_{\alpha=1}^m \int_I D^\alpha u D^\alpha v$$

Podemos verificar que a norma  $\|\cdot\|_{W^{m,p}}$  é equivalente a norma

$$\| \|u\| \| = \|u\|_p + \|D^m u\|_p.$$

Mais precisamente prova-se que para cada  $j, 1 \leq j \leq m-1$  e para cada  $\varepsilon > 0$  existe uma constante  $c$  dependendo de  $\varepsilon$  e de  $|I| \leq \infty$  é tal que

$$\|D^j u\|_p \leq \varepsilon \|D^m u\|_p + c \|u\|_p, \forall u \in W^{m,p}(I).$$

Podemos estender para o espaço  $W^{m,p}$  todas as propriedade contruídas para  $W^{1,p}$ .

## 2.2 O espaço $W_0^{1,p}$

**Definição 2.3.** Dado  $1 \leq p < \infty$ , denotaremos por  $W_0^{1,p}(I)$  pelo fecho de  $C_c^1(I)$  em  $W^{1,p}(I)$ . Denotaremos também

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I).$$

Podemos ainda introduzir ao espaço  $W_0^{1,p}$  a norma de  $W^{1,p}(I)$  e de maneira analoga introduzimos ao espaço  $H_0^1(I)$  o produto por escalar de  $H^1(I)$ . Observe que o espaço  $W_0^{1,p}$  é uma espaço de Banach separável. Mais ainda, é reflexivo se  $1 < p \leq \infty$ . O espaço de Hilbert  $H_0^1$  é separável.

**Observação 2.12.** Quando  $I = \mathbb{R}$  sabemos que  $C_c^1(\mathbb{R})$  é denso em  $W^{1,p}(\mathbb{R})$  ver Teorema 2.6 e portanto

$$W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R}).$$

**Observação 2.13.** Utilizando uma sequência regularizante  $(\rho_n)$  é fácil verificar que

1.  $C_c^\infty(I)$  é denso em  $W_0^{1,p}(I)$
2. Se  $u \in W^{1,p}(I) \cap C_c(I)$  então  $u \in W_0^{1,p}(I)$

O próximo resultado caracteriza as funções em  $W_0^{1,p}(I)$ .

**Teorema 2.8.** Seja  $u \in W^{1,p}(I)$ . Então  $u \in W_0^{1,p}(I)$  se, e somente se  $u = 0$  em  $\partial I$ .

**Observação 2.14.** O teorema anterior explica o papel central desempenhado pelo espaço  $W_0^{1,p}(I)$  nas equações diferenciais parciais pois são muitas vezes associados a estas equações condições de contorno.

*Demonstração.* Se  $u \in W_0^{1,p}(I)$ , existe uma sequência  $(u_n)$  em  $C_c^1(I)$  tal que  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(I)$ . Portanto  $u_n \rightarrow u$  uniformemente em  $\bar{I}$  e em consequência disso  $u = 0$  em  $\partial I$ . Reciprocamente seja  $u \in W^{1,p}(I)$  tal que  $u = 0$  em  $\partial I$ . Fixada uma função  $G \in C^1(\mathbb{R})$  tal que

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{se } |t| \leq 1 \\ t & \text{se } |t| \geq 2 \end{cases}$$

e

$$|G(t)| \leq |t|, \forall t \in \mathbb{R}$$

Considere  $u_n = \frac{1}{n}G(nu)$ , pelo conrolário 2.3 temos que  $u_n \in W^{1,p}(I)$ . e ainda

$$\text{supp}u_n \subset \left\{ x \in I \text{ tal que } |u(x)| \geq \frac{1}{n} \right\},$$



assim  $\text{supp}u_n$  é um subconjunto compacto de  $I$  e utilizando o fato que  $u = 0$  em  $\partial I$  e  $u(x) \rightarrow 0$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $x \in I$ . Portanto  $u_n \in W_0^{1,p}(I)$  pelo que vimos na observação 2.13. Para finalizar é fácil ver que  $u_n \rightarrow u$  em  $W^{1,p}(I)$  pelo Teorema da Convergência Dominada. Portanto  $u \in W_0^{1,p}(I)$ .  $\square$

**Observação 2.15.** *Vamos mencionar duas outras caracterizações das funções em  $W_0^{1,p}$ .*

1. *Seja  $1 \leq p < \infty$  e seja  $u \in L^p(I)$ . Definimos  $\bar{u}$  por*

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x), & \text{se } x \in I \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - I, \end{cases}$$

*então  $u \in W_0^{1,p}(I)$  se, e somente se  $\bar{u} \in W_0^{1,p}(I)$*

2. *Seja  $1 < p < \infty$  e seja  $u \in L^p(I)$ . Então  $u$  pertence a  $W_0^{1,p}(I)$  se, e somente se existe uma constante  $c$  tal que*

$$\left| \int_I u \varphi' \right| \leq c \|\varphi\|_{L^{p'}(I)}, \forall \varphi \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R})$$

**Teorema 2.9 (Desigualdade de Poincaré).** *Suponha  $I$  uma intervalo limitado. Então existe uma constante  $c$  dependendo de  $|I| < \infty$  tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq c \|u'\|_{L^p(I)}, \forall u \in W_0^{1,p}(I) \quad (2.9)$$

*Demonstração.* Seja  $u \in W_0^{1,p}(I)$  com  $I = (a, b)$ , onde  $u(a) = 0$ , temos

$$|u(x)| = |u(x) - u(a)| = \left| \int_a^x u'(t) dt \right| \leq \|u'\|_{L^1(I)}.$$

Assim  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u'\|_{L^p(I)}$  e (2.9) segue da desigualdade de Höder.  $\square$

**Observação 2.16.** *Se  $I$  é limitado a expressão  $(u', v')_{L^2(I)} = \int_I u' v'$  define um produto escalar em  $H_0^1(I)$  e esta associada a norma, isto é  $\|u'\|_{L^2(I)}$ , é equivalente a norma em  $H^1(I)$ .*

**Observação 2.17.** *Dado um inteiro  $m \geq 2$  e um real  $1 \leq p < \infty$  o espaço  $W_0^{m,p}(I)$  é o fecho de  $\mathcal{C}_c^m(I)$  em  $W^{m,p}(I)$ . Dai vemos que*

$$W_0^{m,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I) \text{ tal que } u = Du = D^2u = \dots = D^{m-1}u = 0 \text{ em } \partial I\}$$

*é essencial notar a distinção entre*

$$W_0^{2,p}(I) = \{u \in W^{m,p}(I) \text{ tal que } u = Du = D^2u = 0 \text{ em } \partial I\}$$

e

$$W^{2,p}(I) \cap W_0^{1,p}(I) = \{u \in W^{2,p}(I) \text{ tal que } u = 0 \text{ em } \partial I\}$$

### 2.3 O Dual de $W_0^{1,p}(I)$

O dual de espaço  $W_0^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p \leq \infty$  é denotado por  $W^{-1,p}(I)$  e o espaço dual de  $H_0^1(I)$  é denotado por  $H^{-1}(I)$ .

Sabemos que é possível identificar  $L^2$  com o seu dual, mas não é possível identificarmos  $H_0^1$  com o seu dual. Obteremos, na verdade,

$$H_0^1 \subset L^2 \subset H^{-1},$$

onde estas imersões são contínuas e densas.

Se  $I$  for um intervalo limitado temos

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \quad \text{para todo } 1 \leq p < \infty$$

imersões contínuas.

Se  $I$  for um intervalo limitado temos apenas

$$W_0^{1,p} \subset L^2 \subset W^{-1,p'} \quad \text{para todo } 1 \leq p \leq 2$$

são imersões contínuas.

Os elementos de  $W^{-1,p'}$  podem ser representados com a utilização das funções em  $L^{p'}$ . Mais precisamente, obtemos o seguinte resultado

**Teorema 2.10.** *Seja  $F \in W^{-1,p}(I)$ . Então existe duas funções  $f_0, f_1 \in L^{p'}(I)$  tal que*

$$\langle F, u \rangle = \int_I f_0 u + \int_I f_1 u', \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

e

$$\|F\|_{W^{-1,p}(I)} = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}.$$

Onde  $I$  é limitado e podemos tomar  $f_0 = 0$ .

*Demonstração.* Considere o espaço produto  $E = L^p(I) \times L^p(I)$  com a norma

$$\|h\| = \|h_0\|_{L^p(I)} + \|h_1\|_{L^p(I)} \quad \text{onde } h = [h_0, h_1]$$

Definimos a aplicação

$$T : W_0^{1,p}(I) \rightarrow E \quad u \mapsto [u, u']$$

é uma isometria de  $W_0^{1,p}(I)$  em  $E$ . O conjunto  $G = T(W_0^{1,p}(I))$  dotado com a norma de  $E$  e  $S = T^{-1} : G \rightarrow W_0^{1,p}(I)$ . A aplicação  $h \in G \rightarrow \langle F, Sh \rangle$  é um funcional linear contínuo em  $G$ .

Pelo Teorema de Hanh-Banach, podemos estendê-lo à um funcional contínuo  $\Phi$  para todo  $E$  com  $\|\Phi\|_{E^*} = \|F\|$ . Pelo Teorema da Representação de Riesz nós sabemos que existe duas funções  $f_0, f_1 \in L^p(I)$  tal que

$$\langle \Phi, h \rangle = \int_I f_0 h_0 + \int_I f_1 h_1, \forall h = [h_0, h_1] \in E$$

É facil verificar que  $\|\Phi\|_{E^*} = \max\{\|f_0\|_{L^{p'}(I)}, \|f_1\|_{L^{p'}(I)}\}$  e temos também

$$\langle \Phi, Tu \rangle = \langle F, u \rangle = \int_I f_0 u + \int_I f_1 u', \forall u \in W_0^{1,p}(I)$$

Quando  $I$  é limitado o espaço  $W_0^{1,p}(I)$  pode ser equipado com a norma  $\|u'\|_{L^p(I)}$  como no teorema 2.9. □

**Observação 2.18.** *As funções  $f_0$  e  $f_1$  não são as únicas determinadas por  $F$ .*

**Observação 2.19.** *O elemento  $F \in W^{-1,p}(I)$  é usualmente identificado com a distribuição  $f_0 - f_1'$  que por definição é um funcional linear  $u \mapsto \int_I f_0 u + \int_I f_1 u'$  em  $\mathcal{C}_c^\infty(I)$ .*

**Observação 2.20.** *A primeira afirmação do teorema anterior também vale para o funcional linear contínuo em  $W^{1,p}(I)$  para  $1 \leq p < \infty$ , isto é, cada funcional linear contínuo  $F$  em  $W^{1,p}$  pode ser representado por*

$$\langle F, u \rangle = \int_I f_0 u + \int_I f_1 u', \forall u \in W^{1,p},$$

*para algumas funções  $f_0, f_1 \in L^{p'}(I)$ .*

---

---

# CAPÍTULO 3

---

## APLICAÇÕES

Neste capítulo utilizaremos os passos descritos na motivação do capítulo anterior como um guia para a resolução de problemas interessantes em equações diferenciais. A técnica utilizada a seguir será basicamente a mesma, com algumas diferenças sutis, porém bastante relevantes.

**Aplicação 3.1.** *Consideremos assim o problema*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.1)$$

**Definição 3.1.** *Uma solução clássica de (3.1) é a função  $u \in \mathcal{C}^2(I)$  satisfazendo (3.1) no sentido usual. Uma solução fraca de (3.1) é uma função  $u \in H_0^1(I)$  satisfazendo*

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \forall v \in H_0^1(I).$$

### ***Existência e Unicidade***

*Considere o espaço de Hilbert  $H_0^1(I)$  munido com o produto interno:*

$$(u, v)_{H^1} = \int_I u'v' + \int_I uv,$$

*e seja  $\varphi : H_0^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$  funcional linear dado por  $\varphi(v) = \int_I fv$ . Como  $H_0^1(I)$  é Hilbert, aplicando o Teorema da representação de Riesz existe único  $u \in H_0^1(I)$  tal que*

$$\varphi(v) = (u, v)_{H^1},$$

ou seja,

$$\int_I f v = \int_I u' v' + \int_I u v, \forall v \in H_0^1(I), \quad (3.2)$$

ou seja,  $u$  é solução do problema fraco do problema (3.1). Note que, pela construção acima  $u$  é a única solução fraca do problema.

### Regularidade

Note que se  $f \in L^2$  e  $u \in H_0^1$  é solução fraca então  $u \in H^2$ . De fato, observe que a igualdade (3.2) é válida para toda  $v \in H_0^1(I)$  em particular vale para toda  $v \in C_c^1(I)$ , ou seja,

$$\int_I u' v' = \int_I (f - u) v, \forall v \in C_c^1(I).$$

e assim, como  $f - u \in L^2$ , segue  $u' \in H^1$ , ou seja,  $u \in H^2$ .

Se, mais ainda, assumirmos que  $f \in C(\bar{I})$ , então a solução fraca pertence a  $C^2(\bar{I})$ . De fato, observe que  $(u')' = f - u \in C(\bar{I})$ , portanto, pela observação 2.6,  $u' \in C^1(\bar{I})$  e, pelo mesmo argumento,  $u \in C^2(\bar{I})$ , ou seja a solução fraca é de classe  $C^2(\bar{I})$ . Precisamos agora mostrar que  $u$  é solução clássica.

De fato, como  $u \in C^2(\bar{I})$  e  $u(0) = u(1) = 0$  e satisfaz (3.1), utilizando integração por partes obtemos

$$\int_a^b (-u'' + u - f) \varphi = 0, \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Portanto, pelo corolário 1.2, segue que

$$-u'' + u = f \text{ em } I,$$

e portanto  $u$  é solução clássica do problema desde que  $u \in C^2(\bar{I})$ .

Se  $f \in H^k(I)$ , com  $k$  um inteiro maior igual a 1, é fácil verificar por indução que a solução da equação pertence a  $H^{k+2}(I)$ .

O método descrito anteriormente é extremamente flexível e pode ser adaptado para uma grande diversidade de problemas, com faremos a seguir.

**Aplicação 3.2.** Considere o seguinte problema não homogêneo com condições de Dirichlet.

$$F(x) = \begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } I = (0, 1) \\ u(0) = \alpha, u(1) = \beta \end{cases} \quad (3.3)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  dadas e  $f$  uma função.

Fixando uma aplicação  $u_0$  tal que  $u_0(0) = \alpha$  e  $u_0(1) = \beta$ . Considerando a aplicação  $\tilde{u} = u - u_0$ ,

então  $\tilde{u}$  satisfaz

$$F(x) = \begin{cases} -\tilde{u}'' + \tilde{u} = f + u_0'' - u_0 & \text{em } I = (0, 1) \\ \tilde{u}(0) = 1 = \tilde{u}(1) = 0 \end{cases} \quad (3.4)$$

reduzimos o problema ao problema anterior que já sabemos que possui solução.

**Aplicação 3.3** (Problema de Sturm-Liouville). *Considere o problema*

$$\begin{cases} -(pu')' + qu = f & \text{em } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.5)$$

onde  $p \in C^1(\bar{I})$ ,  $q \in C^1(\bar{I})$  e  $f \in L^2(I)$  são dados. Com  $p(x) \geq \alpha > 0$ ,  $\forall x \in I$ ,  $q > 0$ .

### Existência e Unicidade

Se  $u$  é uma solução clássica de (3.5). Temos

$$\int_I pu'v' + \int_I quv = \int_I fv, \forall v \in H_0^1(I).$$

Usaremos  $H_0^1(I)$  como nosso espaço de trabalho. Considere

$$a(u, v) = \int_I pu'v' + \int_I quv.$$

uma forma bilinear simétrica contínua em  $H_0^1(I)$ . Que  $a(u, v)$  é bilinear e simétrica é óbvio, mostraremos que é contínuo. De fato,

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_I pu'v' + \int_I quv \\ &\leq \|p\|_\infty \int u'v' + \|q\|_\infty \int uv \\ &\leq \max \|p\|_\infty \left( \int u'v' + \int uv \right) \\ &= c \langle u, v \rangle_{H_0^1} \\ &\leq c_1 \|u\|_{H_0^1} \|v\|_{H_0^1}. \end{aligned}$$

ficando demonstrado que a forma bilinear simétrica é contínua. Nosso objetivo é mostrar que  $a(u, v)$ , na verdade, é um produto interno em  $H_0^1$ , restando assim demonstrar que

$$a(u, u) \geq 0 \text{ e } a(u, u) = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 a(u, u) &= \int_I p(u')^2 + \int_I qu^2 \\
 &\geq c \int_I (u')^2 + \int_I qu^2 \\
 &\geq c \int_I (u')^2 \\
 &\geq \frac{c}{c_1} \|u\|_{H_0^1}^2.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\tag{3.7}$$

Deste modo, se  $a(u, u) = 0$  temos que

$$0 \leq \frac{c}{c_1} \|u\|_{H_0^1}^2 \leq a(u, u) = 0$$

assim,  $\|u\|_{H_0^1} = 0$ , ou seja  $u = 0$ . Ficando demonstrado que  $a(u, v)$  é um produto interno para  $H_0^1(I)$ . Nosso objetivo é mostrar que, na verdade, o espaço  $H_0^1(I)$  munido com o produto interno acima construído é um espaço de Hilbert. Para tal considere  $\|u\|_a = a(u, u)^{\frac{1}{2}}$  a norma proveniente deste produto interno em  $H_0^1(I)$ . Como  $a(u, u)$  é contínua, temos

$$\|u\|_a^2 = a(u, u) \leq c \left( \|u\|_{H_0^1} \|u\|_{H_0^1} \right) = c \|u\|_{H_0^1}^2 \Rightarrow \|u\|_a \leq c \|u\|_{H_0^1}.$$

E como por 3.6,  $a(u, v)$  é coersiva, obtemos que as normas  $\|\cdot\|_a$  e  $\|\cdot\|_{H_0^1}$  são equivalentes, isto é,  $(H, a(u, v))$  é Hilbert. Pelo Teorema de representação de Riesz aplicado ao produto interno  $a(u, v)$ , existe única  $u$  tal que

$$a(u, v) = \int_I f v, \forall v \in H_0^1(I). \tag{3.8}$$

ficando demonstrada a existência de solução fraca.

### Regularização

Agora, note que se  $f \in L^2$  e  $u \in H_0^1$  é solução fraca então  $u \in H^2$ . De fato, observe que a desigualdade em (3.8) é válida para todo  $v \in H_0^1(I)$  em particular vale para todo  $v \in C_c^1(I)$ , ou seja,

$$\int_I pu'v' = \int_I (f - qu)v, \forall v \in C_c^1(I).$$

Portanto como  $f - qu \in L^2$ , segue que  $u' \in H^1$ , ou seja,  $u \in H^2$ . Se assumirmos que  $f \in C(\bar{I})$  então a solução fraca pertence a  $C^2(\bar{I})$ . De fato, observe que  $(pu') = (f - qu) \in C(\bar{I})$ , portanto  $u' \in C^1(I)$ . Como vemos na observação 2.6 e pelo mesmo argumento,  $u \in C^2(\bar{I})$ , ou seja, a solução fraca é de classe  $C^2(\bar{I})$ . Precisamos agora mostrar que  $u$  é solução clássica.

De fato, como  $u \in C^2(\bar{I})$  e  $u(0) = u(1) = 0$  e  $u$  satisfaz 3.5, utilizando integração por partes temos

$$\int_0^1 (-(pu')' + qu - f)\varphi = 0, \forall \varphi \in C_c^1(I).$$

Portanto pelo corolário 1.2, segue que

$$-(pu')' + qu = f \text{ em } I,$$

e portanto  $u$  é solução clássica do problema desde que  $u \in C^2(\bar{I})$

**Aplicação 3.4.** Consideramos agora o caso geral

$$\begin{cases} -(pu')' + ru + qu = f & \text{em } I = (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

assumindo que  $p, q$  e  $f$  estão na mesmas condições do caso anterior, e  $r \in C(\bar{I})$ . Se  $u$  é uma solução clássica de (3.9) temos

$$\int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv = \int_I fv, \forall v \in H_0^1.$$

Considere o espaço  $H_0^1(I)$  e

$$a(u, v) = \int_I pu'v' + \int_I ru'v + \int_I quv,$$

uma forma bilinear contínua. Em geral, esta forma não é simétrica. Porém vamos recuperar sua simetria como segue.

Considere  $R$  a primitiva de  $\frac{r}{p}$  e seja  $\zeta = \exp(-R)$ . Multiplicando a equação (3.9) por  $\zeta$  obtemos

$$-\zeta pu'' - \zeta p'u' + \zeta ru' + \zeta qu = \zeta f,$$

desde que  $\zeta'p + \zeta r = 0$ . Note que

$$\begin{aligned} -(\zeta pu')' &= -\zeta pu'_\zeta(p'u' + pu'') \\ &= -\zeta'pu' - \zeta p'u' - \zeta pu'' \\ &= \zeta ru' - \zeta p'u' - \zeta pu'', \end{aligned}$$

ou seja,

$$-(\zeta pu')' + \zeta qu = \zeta f. \quad (3.10)$$

Definimos em  $H_0^1$  a forma bilinear simétrica contínua, como no exemplo anterior



$$a(u, v) = \int_I \zeta p u' v' + \int_I \zeta q u v.$$

De maneira análogo ao que fizemos usando o Teorema de Representação de Riesz garantimos existência e unicidade de solução para o problema (3.10) e, conseqüentemente, para o problema inicial.

**Aplicação 3.5.** Considere o problema homogêneo com condições de Neumann.

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } I = (0, 1) \\ u'(0) = \alpha, u'(1) = \beta \end{cases} \quad (3.11)$$

com  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $f$  uma função dada.

Se  $u$  é uma solução fraca de (3.11) temos

$$\int_I u' v' + \int_I u v = \int_I f v - \alpha v(0) + \beta v(1), \forall v \in H^1(I).$$

Trabalharemos no espaço  $H^1(I)$  pois, a priori, não temos qualquer informação sobre  $u(0)$  e  $u(1)$ .

Considere  $\varphi : H^1(I) \rightarrow \mathbb{R}$  definido por  $\varphi(v) = \int_I f v$ . Como  $H^1$  é Hilbert, aplicando o Teorema da Representação de Riesz existe um único  $u \in H^1(I)$  tal que

$$\varphi(v) = (u, v)_{H^1},$$

ou seja,

$$\int_I f v - \int_I u' v' + \int_I u v, \forall v \in h^1(I),$$

isto é,  $u$  é uma solução fraca de (3.11). De (3.11) segue, como anteriormente, que  $u \in H^2(I)$ .

Usando a identidade (3.11) novamente obtemos

$$- \int u'' v + u' v \Big|_0^1 + \int u v = \int f v, \forall v \in H^1,$$

ou seja,

$$\int (-u'' + u' - f)v + u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \forall v \in H^1. \quad (3.12)$$

De (3.12) temos

$$\int (-u'' + u' - f)v = 0, \forall v \in H_0^1(I),$$

pelo corolário 1.2 obtemos  $-u'' + u = f$ , e retornando a (3.12) segue que

$$u'(1)v(1) - u'(0)v(0) = 0, \forall v \in H^1.$$

e desde que  $v(0)$  e  $v(1)$  são arbitrários, deduzimos que  $u'(0) = u'(1) = 0$ .

**Proposição 3.1.** *Suponha que  $I$  é um intervalo não limitado e  $u \in W^{1,p}(I)$  com  $1 \leq p < \infty$ . Então*

$$\lim_{\substack{x \in I \\ |x| \rightarrow \infty}} u(x) = 0.$$

**Aplicação 3.6** (O problema de valor de fronteira em  $\mathbb{R}$ ). *Considere o problema*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } \mathbb{R}, \\ u(x) \rightarrow 0 & \text{com } |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (3.13)$$

com  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . Uma solução clássica de (3.13) é uma função  $u \in C^2(\mathbb{R})$  satisfazendo (3.13) no sentido usual. Uma solução fraca de (3.13) é uma função  $u \in H^1(\mathbb{R})$  satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv, \forall v \in H^1(\mathbb{R}).$$

Temos primeiramente que provar que qualquer solução clássica  $u$  é uma solução fraca; vamos verificar primeiro que  $u \in H^1(\mathbb{R})$ . Tomemos uma sequência  $(\zeta_n)$  de função cut-off como na prova do teorema (2.6). Multiplicando (3.13) por  $\zeta_n u$ , segue que

$$\int_{\mathbb{R}} u'(v'u)\zeta_n + \int_{\mathbb{R}} u^2 v \zeta_n = \int_{\mathbb{R}} f v u \zeta_n$$

e integrando por partes, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} u'(\zeta_n u' + \zeta_n' u) + \int_{\mathbb{R}} \zeta_n u^2 = \int_{\mathbb{R}} \zeta_n f u,$$

daí deduzimos que

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta_n (u'^2 + u^2) = \int_{\mathbb{R}} \zeta_n f u + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \zeta_n'' u^2. \quad (3.14)$$

Mas

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \zeta_n'' u^2 \leq \frac{C}{n^2} \int_{n < |x| < 2n} u^2 \text{ com } C = \|\zeta_n''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

e  $\frac{C}{n^2} \int_{n < |x| < 2n} u^2 \rightarrow 0$  quando  $n \rightarrow \infty$ , desde que  $u(x) \rightarrow 0$  com  $|x| \rightarrow \infty$ .

Pela Desigualdade de Hölder, obtemos ainda a desigualdade

$$\int_{\mathbb{R}} \zeta_n f u \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \zeta_n u^2 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \zeta_n f^2$$

e assim substituindo-a em (3.14) concluímos que  $\int_{\mathbb{R}} \zeta_n (u'^2 + u^2)$  permanece limitado quando  $n \rightarrow \infty$

e portanto  $u \in H^1(\mathbb{R})$ . Assumindo que  $u$  é uma solução clássica de (3.13), temos

$$\int_{\mathbb{R}} u'v' + \int_{\mathbb{R}} uv = \int_{\mathbb{R}} fv, \forall v \in \mathcal{C}_c^1(\mathbb{R}). \quad (3.15)$$

Por densidade (e desde que  $u \in H^1(\mathbb{R})$ ) tal fato vale para todo  $v \in H^1(\mathbb{R})$ . Portanto  $u$  é uma solução fraca para (3.13). Para obtermos existência e unicidade da solução fraca é suficiente aplicarmos o Teorema de Representação de Riesz no espaço de Hilbert  $H^1(\mathbb{R})$ . Verifica-se facilmente que a solução fraca  $u$  pertence a  $H^2(\mathbb{R})$  e além disso se  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  então  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ . Concluimos assim, usando a proposição anterior, dado que  $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R})$ , o problema (3.13) tem única solução clássica que, além disso, pertence a  $H^2(\mathbb{R})$ .

### 3.1 O Princípio do Máximo

**Teorema 3.1.** *Seja  $f \in L^2(I)$  com  $I = (0, 1)$  e seja  $u \in H^2(I)$  a solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} -u'' + u = f & \text{em } I \\ u(0) = \alpha, & u(1) = \beta. \end{cases} \quad (3.16)$$

Então temos, para cada  $x \in I$ ,

$$\min\{\alpha, \beta, \inf_I f\} \leq u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\}.$$

*Demonstração. (Método de truncamento de Stampacchia)*

Sabemos que

$$\int_I u'v' + \int_I uv = \int_I fv, \forall v \in H_0^1(I). \quad (3.17)$$

Fixemos uma função  $G \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  tal que

1.  $G$  estritamente crescente em  $(0, +\infty)$ ,
2.  $G(t) = 0$  para  $t \in (-\infty, 0]$ .

Consideremos  $K = \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\}$  e suponhamos que  $K < \infty$ . Mostraremos que  $u \leq K$  em  $I$ . De fato, a função  $v = G(u - K)$  pertence a  $H^1(I)$  e o mesmo para  $H_0^1(I)$ , desde que

$$u(0) - K = \alpha - K \leq 0 \text{ e } u(1) - K = \beta - K \leq 0.$$

Aplicando  $v$  em (3.17), obtemos

$$\int_I u'^2 G'(u - K) + \int_I uG(u - K) = \int_I fG(u - K),$$

e somando  $-\int_I KG(u-K)$  a ambos os lados obtemos

$$\int_I u'^2 G'(u-K) + \int_I (u-K)G(u-K) = \int_I (f-K)G(u-K).$$

Mas  $(f-K) \leq 0$  e  $G(u-K) \geq 0$ , donde segue que  $(f-K)G(u-K) \leq 0$ , e portanto

$$\int_I (u-K)G(u-K) \leq 0.$$

Desde que  $tG(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$  a desigualdade anterior implica que  $(u-K)G(u-K) = 0$  q.t.p. donde segue que  $u \leq K$  q.t.p. em todo  $I$ , desde que  $u$  é contínua.

Obtemos o outro lado da desigualdade aplicando  $-u$ , ficando assim demonstrado o resultado.  $\square$

**Corolário 3.1.** *Seja  $u$  uma solução de (3.16)*

1. *Se  $u \geq 0$  em  $\partial I$  e se  $f \geq 0$  em  $I$ , então  $u \geq 0$  em  $I$ .*
2. *Se  $u = 0$  em  $\partial I$  e se  $f \in L^\infty(I)$ , então  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|f\|_{L^\infty(I)}$ .*
3. *Se  $f = 0$  em  $I$ , então  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial I)}$ .*

*Demonstração.* 1. Supondo  $\alpha, \beta \geq 0$  e  $f \geq 0$ , então pelo teorema anterior

$$\min\{\alpha, \beta, \inf_I f\} \leq u(x), \forall x \text{ em } I.$$

Dai segue que  $u \geq 0$ .

2. Supondo  $\alpha, \beta = 0$  e  $f \in L^\infty(I)$ , ou seja  $\exists C$  tal que  $|f(x)| \leq C$ . Mas

$$u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, \sup_I f\} \leq \max\{\alpha, \beta, \|f\|_{L^\infty(I)}\}, \forall x \in I$$

Dai segue que  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|f\|_{L^\infty(I)}$ .

3. Supondo  $f = 0$  em  $I$ , temos

$$u(x) \leq \max\{\alpha, \beta, 0\} = \max\{u(0), u(1), 0\} \leq \max\{|\alpha|, |\beta|\} = \|u\|_{L^\infty(\partial I)}, \forall x \in I.$$

Dai segue que  $\|u\|_{L^\infty(I)} \leq \|u\|_{L^\infty(\partial I)}$ .  $\square$

---

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate studies in mathematics, American mathematical society, ed.19, (1998).
- [2] Lima, E. L., *Curso de análise volume 2*, Projeto Euclides Rio de Janeiro: IMPA, ed.11 2009.
- [3] Brezis, H. *Functional Analysis, Sobolev Space and Partial Differential Equations* , Springer New York 18 (5 e 6), 1043 – 1054, 1993.
- [4] Isnard, Carlos. *Introdução à medida e integração*, Projeto Euclides Rio de Janeiro: IMPA, ed, 2 2009.