PROJETO

Título: *Sistemas Hamiltonianos Elípticos Envolvendo Crescimento Crítico*

Participantes:

Everaldo Souto de Medeiros - UFPB
João Marcos Bezerra do Ó - UFPB
Jose Anderson Valença Cardoso - UFS

Fundamentação Teórica:

O presente projeto tem como tema principal o estudo da seguinte classe de sistemas de equações elípticas tipo Hamiltoniano

$$\left\{\begin{array}{rcll} -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u & = & H_v(u,v) & \text{em} \quad \Omega, \\ -\varepsilon^2\Delta v + V(x)v & = & H_u(u,v) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = v = 0 & & & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{1}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, Ω um domínio de $\mathbb{R}^N, N \geq 2$, (por exemplo, $\Omega = \mathbb{R}^N$), com fronteira suave ou vazia, $V : \Omega \to \mathbb{R}$ é uma função comumente chamada de potencial e $H : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $f = H_u$ e $g = H_v$ são as respectivas derivadas parciais. Esta classe de sistemas tem origem em várias áreas a exemplo da Física, Química e Biologia, e seu estudo tem consequências direta nas aplicações.

Nosso principal propósito neste projeto é estudar questões relacionadas à existência, multiplicidade de soluções para o sistema (1) e o comportamento assintótico destas soluções quando o parâmetro ε é pequeno. O estudo destas questões tem chamado a atenção de vários pesquisadores e tem sido objeto de intensos estudos nos recentes anos. Vários resultados têm sido publicados, sendo estes quase sempre ligados a condições de crescimento subcrítico nas não-linearidades f e g (ver detalhes, por exemplo, em [6, 8]), visto as grandes dificuldades que existem para se tratar esta classe de sistemas com condições mais diversas.

Estamos interessados neste projeto em estudar casos que o potencial V seja do tipo Hölder contínuo e tenha hipóteses interessantes e as não-linearidades $f(s,t)$ e $g(s,t)$ tenham os máximos crescimentos sobre s e t que tornem possível tratar o sistema variacionalmente num espaço de funções adequado, isto é, o crescimento subcrítico e o crescimento crítico do tipo Sobolev [5, 6, 8].

O estudo do sistema (1) usando métodos variacionais apresenta três principais dificuldades. A primeira é a perda de compacidade devido ao domínio $\Omega = \mathbb{R}^N$ ser ilimitado. A segunda é o crescimento das não-linearidades que $f(s,t)$ e $g(s,t)$ que não permitem em geral tratar o sistema nos espaços de Sobolev usuais. A terceira está relacionada ao funcional de Euler-Lagrange associado ao sistema (1) ser fortemente indefinido [2].

Estudando trabalhos publicados nos últimos cinco anos sobre este tema descobrimos, após algumas observações, ser bastante provável que algumas técnicas apresentadas em [1, 4, 7, 9, 10, 11, 12], podem ser aplicadas para o estudo do sistema (1) com uma classe mais ampla de não-linearidades do que as já tratadas pelos autores nestes trabalhos. Propomos então mostrar que estas técnicas respondem as questões de existência, multiplicidade e comportamento de soluções para a classe de sistemas (1), com não-linearidades não somente com crescimento subcrítico, mas também com crescimento crítico e arbitrário em certo sentido. Parte das técnicas dos trabalhos referidos já foram adaptadas com sucesso pelo participantes do presente projeto (veja [5]) para superar as três principais dificuldades na abordagem da classe de sistemas (1). A primeira dificuldade as vezes pode ser superada com a exploração de condições sobre o potencial V. A segunda algumas vezes é possível usar técnicas de truncamento e, a terceira, o uso de um método dual introduzido em [9, 10] pode ser trabalhado.

Referências

[1] C. O. Alves, *Existence of positive solutions for an equation involving supercritical exponent in* $\mathbb{R}^N$, Nonlinear Anal. **42** (2000), 573-581.

[2] V. Benci, P. H. Rabinowitz, *Critical point theorems for indefinite functionals,* Invent. Math. **52** (1979), 241-273.

[3] D. Bonheure, E. M. dos Santos, M. Ramos, *Ground state and non-ground state solutions of some strongly coupled elliptic systems,* Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 447-491.

[4] D. Bonheure, M. Ramos, *Multiple critical points of perturbed symmetric strongly indefinite functionals*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **26** (2009), 675-688.

[5] J. A. Cardoso, J. M. do Ó, E. Medeiros, *Standing waves for a hamiltonian system of Schrödinger equations with arbitrary growth* (2013), Preprint.

[6] Ph. Clément, D. G. de Figueiredo, E. Mitidieri, *Positive solutions of semilinear elliptic systems*, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 923-940.

[7] M. del Pino, P. L. Felmer, *Local mountain-pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), 121-137.

[8] J. Hulshof, R. C. A. M. Van der Vorst, *Differential systems with strongly indefinite variational structure*, J. Funct. Anal. **114** (1993), 32-58.

[9] M. Ramos, H. Tavares, *Solutions with multiple spike patterns for an elliptic system*, Calc. Var. Partial Differential Equations **31** (2008), 1-25.

[10] M. Ramos, J. Yang, *Spike-layered solutions for an elliptic system with Neumann boundary conditions*, Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 3265-3284.

[11] B. Sirakov, *On the existence of solutions of Hamiltonian elliptic systems in* $mathbbR^N$, Adv. Differential Equations **5** (2000), 1445-1464.

[12] B. Sirakov, S. H. M. Soares, *Soliton solutions to systems of coupled Schrödinger equations of Hamiltonian type*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), 5729-5744.