Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exata e da Natureza
Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

Desigualdades do Tipo Adams
e
Aplicações

Abiel Costa Macedo

Tese de Doutorado

Recife - PE
julho 2013

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exata e da Natureza
Departamento de Matemática

Abiel Costa Macedo

Desigualdades do Tipo Adams
e
Aplicações

Trabalho apresentado ao Programa de Pós-graduação em Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *Prof. João Marcos Bezerra do Ó*

Recife - PE
julho 2013

Catalogação na fonte
Bibliotecária Jane Souto Maior, CRB4-571

Macedo, Abiel Costa
Desigualdades do tipo Adams e aplicações / Abiel Costa Macedo. - Recife: O Autor, 2013.
viii, 100 f.

Orientador: João Marcos Bezerra do Ò.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Pernambuco. CCEN, Matemática, 2013.

Inclui referências e apêndice.

1. Matemática. 2. Análise não-linear. 3. Equações diferenciais parciais. I. do Ó, João Marcos Bezerra (orientador). II. Título.

510 CDD (23. ed.) MEI2014 – 001

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ____

João Marcos Bezerra do Ó*, UFPB*
Orientador

____

Miguel Fidencio Loayza Lozano*,UFPE*

____

Marco Aurélio Soares Souto, *UFCG*

____

Everaldo Souto de Medeiros, *UFPB*

____

Uberlandio Batista Severo*, UFPB*

DESIGUALDADES DO TIPO ADAMS E APLICAÇÕES

Por

Abiel Costa Macedo

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL
Julho – 2013

À minha amada mãe, em memória.

Agradecimentos

Acima de tudo agradeço à Deus, por estar sempre comigo dando-me saúde e forças para realizar este trabalho.

Ao meu orientador João Marcos Bezerra do Ó pela cooperação e compreensão nos momentos mais difíceis.

Aos meus familiares que apoiaram e torceram pelo meu sucesso na produção deste trabalho, em especial aos meus pais.

Ao CNPq pelo apoio financeiro.

Em fim, à todos que colaboraram, direta ou indiretamente, na produção deste trabalho.

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um estudo sobre as desigualdades do tipo Adams e algumas de suas consequências no desenvolvimento da pesquisa em equações diferenciais parciais elípticas não lineares de ordem superior. Apresentamos um resultado de concentração-compacidade para a desigualdade de Adams e, utilizando este resultado, provamos a existência de uma solução do tipo passo da montanha para uma equação diferencial parcial elíptica de ordem superior não linear com crescimento crítico dado pela desigualdade de Adams. Além disso, mostramos uma desigualdade do tipo Adams em domínios quaisquer e aplicamos esta desigualdade para provar a existência de soluções para algumas classes equações diferenciais parciais elípticas não lineares envolvendo o operador poliharmônico.

Palavras-chave: Desigualdade de Adams; Métodos Variacionais; Crescimento Crítico; Princípio de Concentração-Compacidade; Desigualdade de Trudinger-Moser.

Abstract

In this work we present a study on Adams-type inequalities and some consequences of these inequalities on the development of the research on the nonlinear elliptic partial differential equations of superior order. We present a concentration-compactness result for the Adams inequality and we use this result to study the existence of Mountain Pass type solution for a nonlinear elliptic equation of superior order involving nonlinearity with critical growth given by the Adams inequality. Furthermore, we prove an Adams-type inequality for arbitrary domain and we apply this inequality to prove the existence of solutions for a class of nonlinear elliptic partial differential equations involving the polyharmonic operator.

Keywords: Adams Inequality; Variational Methods; Critical Growth; Concentration-Compactness Principle; Trudinger-Moser Inequality.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, estudamos desigualdades do tipo Adams e algumas de suas consequências no estudo de equações elípticas não lineares. Estas desigualdades são generalizações naturais para espaços de Sobolev envolvendo derivadas de ordem superior da famosa desigualdade de Trudinger-Moser.

Façamos uma descrição breve dos principais resultados envolvendo as desigualdades de Trudinger-Moser para facilitar e motivar o estudo do tema.

Dado Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^n$, V. I. Judovič [26], S. I. Pohozhaev [36], N. S. Trudinger [47] e J. Peetre [35] provaram que o espaço de Sobolev $W_0^{1,n}(\Omega)$ está continuamente imerso no espaço de Orlicz determinado pela função de Young $\phi = \phi_\alpha(t) = e^{\alpha|t|^{n/(n-1)}} - 1$, $\alpha > 0$, isto é,

$$W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L_\phi(\Omega).$$

Posteriormente, J. Moser [39] refinou este resultado mostrando a seguinte desigualdade:

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{1,n}(\Omega) \\ \|\nabla u\|_n \leq 1}} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{n/(n-1)}}\,\mathrm{d}x < +\infty, \quad \forall\, \alpha \leq \alpha_n, \tag{1}$$

onde $\alpha_n := n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$. Mais ainda, a constante α_n é ótima, no sentido que o supremo acima torna-se infinito para $\alpha > \alpha_n$.

A desigualdade (1) possui ainda uma versão para domínios suaves quaisquer, a qual foi provada por D. Cao em [10], para $n = 2$, e posteriormente por J.M. do Ó em [18] e S. Adachi e K. Tanaka em [1], para $n \geq 2$ qualquer, que podemos enunciar do seguinte modo:

Para todo $u \in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)$ e $\alpha > 0$ temos que

$$\Phi(\alpha|u|^{n/(n-1)}) \in L^1(\mathbb{R}^n), \qquad \text{onde} \qquad \Phi(t) := e^t - \sum_{j=0}^{n-2} \frac{t^j}{j!}.$$

Mais ainda, se $\|\nabla u\|_n \leq 1$, $\|u\|_n \leq M$ e $\alpha < \alpha_n$, então existe $C = C(n, M, \alpha)$ tal que

$$\int_\Omega \Phi(\alpha|u|^{n/(n-1)})\,\mathrm{d}x \leq C.$$

Porém, nestes trabalhos, os autores não dão nenhuma informação sobre o caso em que $\alpha = \alpha_n$.

Nesta direção, Li e B.Ruf em [31] substituiram a norma de Dirichlet pela norma de Sobolev e mostraram que

$$\sup_{\substack{u\in W^{1,n}(\mathbb{R}^n)\\ \|u\|_n^n+\|\nabla u\|_n^n\leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\alpha|u|^{n/(n-1)})\,\mathrm{d}x < +\infty, \quad \forall\, \alpha \leq \alpha_n. \tag{2}$$

Mais ainda, este supremo é atingido e α_n é a constante ótima para a desigualdade (2).

Para o caso de derivada de ordem superior, D. Adams em [2] provou a seguinte desigualdade: *sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave e limitado e m um inteiro positivo com $m < n$. Então*

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega),\\ \|\nabla^m u\|_{\frac{n}{m}}\leq 1}} \int_{\Omega} e^{\beta|u|^{n/(n-m)}}\,\mathrm{d}x \leq +\infty, \qquad \beta \leq \beta_0, \tag{3}$$

onde

$$\beta_0 = \beta_0(m,n) = \begin{cases} \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}2^m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{\frac{n}{n-m}}, & m \text{ ímpar;}\\ \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}2^m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\right]^{\frac{n}{n-m}}, & m \text{ par,}\end{cases}$$

e

$$\nabla^m u = \begin{cases} \Delta^{m/2}u, & m = 2,4,6,...\\ \nabla\Delta^{(m-1)/2}u, & m = 1,3,5,...\end{cases}$$

Mais ainda, a constante β_0 é ótima.

Como consequência da desigualdade (3) temos que

$$W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega) \hookrightarrow L_\phi(\Omega), \tag{4}$$

com $\phi = \phi_\beta(t) = e^{\beta|t|^{n/(n-m)}} - 1$, qualquer que seja $\beta > 0$.

B. Ruf e F. Sani em [41] provaram uma versão da desigualdade (3), que denominamos de desigualdade do tipo Adams, para domínios quaisquer não necessariamente limitados com m par, a saber:

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio qualquer, $m = 2k$, para $k \in \mathbb{N}$, com $m < n$ e

$$\Phi(t) := e^t - \sum_{j=0}^{j_{m,n}-2} \frac{t^j}{j!},$$

onde $j_{m,n} := \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq \frac{n}{m}\}$. Então,

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega)\\ \|(-\Delta+I)^k u\|_{\frac{n}{m}}\leq 1}} \int_{\Omega} \Phi(\beta|u|^{m/(n-m)})\,\mathrm{d}x < +\infty, \quad \forall\, \beta \leq \beta_0. \tag{5}$$

Mais ainda, β_0 é a constante ótima.
Posteriormente, N. Lam e G. Lu em [30] mostraram uma desigualdade do tipo Adams para m ímpar e domínios quaisquer, cujo enunciado é o seguinte:
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, um domínio qualquer, $m = 2k+1$, para $k \in \mathbb{N}$, com $m < n$. Então,

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega) \\ \|\nabla(-\Delta+I)^k u\|_{\frac{n}{m}}^{\frac{n}{m}} + \|(-\Delta+I)^k u\|_{\frac{n}{m}}^{\frac{n}{m}} \leq 1}} \int_\Omega \Phi(\beta |u|^{n/(n-m)})\, \mathrm{d}x < +\infty, \quad \forall\, \beta \leq \beta_0. \tag{6}$$

Mais ainda, para $n = 2m$ mostraram as seguintes desigualdades:
Dado $\tau > 0$ temos, para $m = 2k$, que

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega) \\ \|(-\Delta+\tau I)^k u\|_{\frac{n}{m}} \leq 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta|u|^2} - 1\right) \mathrm{d}x < +\infty, \quad \forall\, \beta \leq \beta_0. \tag{7}$$

e para $m = 2k+1$

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega) \\ \|\nabla(-\Delta+\tau I)^k u\|_{\frac{n}{m}}^{\frac{n}{m}} + \tau\|(-\Delta+\tau I)^k u\|_{\frac{n}{m}}^{\frac{n}{m}} \leq 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta|u|^2} - 1\right) \mathrm{d}x < +\infty, \quad \forall\, \beta \leq \beta_0. \tag{8}$$

Agora, passaremos a apresentar os principais resultados contidos neste trabalho. No Capítulo 1, mostramos que exceto por uma "pequena vizinhança fraca de 0" o mergulho em (4) é compacto para $\beta = \beta_0$, onde garantirmos que, em certos casos, esta constante pode ser melhorada. Provamos o seguinte teorema:
Teorema 1.1.1. *Sejam m um número positivo inteiro com $m < n$ e $p = n/m \geq 2n/(n+2)$. Sejam $u_i, u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, μ uma medida em $\overline{\Omega}$, de modo que $\|\nabla^m u_i\|_p = 1$, $u_i \rightharpoonup u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $|\nabla^m u_i|^p \rightharpoonup \mu$ em $\mathscr{M}(\overline{\Omega})$. Então, um dos seguintes casos ocorre:*

(i) se $u \equiv 0$ e $\mu = \delta_{x_0}$, para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$, então, a menos de subsequência,

$$e^{\beta_0 |u_i|^{p/(p-1)}} \rightharpoonup c\delta_{x_0} + \mathscr{L}_n \quad \text{em} \quad \mathscr{M}(\overline{\Omega}), \quad \text{para algum } c \geq 0;$$

onde $\mathscr{L}_n$ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

(ii) se $u \equiv 0$ e μ não é uma concentração de massa de Dirac sobre um ponto, então existem $\gamma > 1$ e $C = C(\gamma, \Omega) > 0$ de modo que

$$\int_\Omega e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p/(p-1)}} \leq C;$$

(iii) se $u \not\equiv 0$, então para $\gamma \in [1, \eta)$ existe uma constante $C = C(\gamma, \Omega) > 0$ tal que

$$\int_\Omega e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p/(p-1)}} \leq C,$$

onde

$$\eta_{m,n}(u) := \begin{cases} \left(1 - \|\nabla(\Delta^k u)^*\|_p^p\right)^{-1/(p-1)} & se \quad m = 2k+1, \\ \left(1 - \|\nabla^m u\|_p^p\right)^{-1/(p-1)} & se \quad m = 2k. \end{cases}$$

e $(\Delta^k u)^*$ o rearranjamento esfericamente simétrico e decrescente de $\Delta^k u$.

Este teorema mostra um resultado de concentração-compacidade para o funcional de Adams de modo que ou o funcional converge ao longo da sequência ou o funcional se concentra em um ponto. Este resultado generaliza o Teorema I.6. de [33] onde P. -L. Lions prova a concentração-compacidade para o funcional de Trudinger-Moser, dado pela desigualdade (1).

Resultados de concentração-compacidade são cruciais no estudo de existência de extremais para desigualdades do tipo Trudinger-Moser. Os autores L. Carleson e A. Chang [11] mostraram um resultado de concentração-compacidade para sequências de funções radiais definidas em uma bola. Usando este resultado, juntamente com uma técnica de análise de blow-up, eles provaram que a desigualdade (1) possui um extremal sempre que Ω é uma bola. Outros trabalhos que utilizam argumentos envolvendo concentração-compacidade foram: M. Struwe [43], onde o autor estendeu o estudo de existência de extremais para domínios não simétricos, M. Flucher [23], onde o autor prova a existência de extremal para domínios suaves e limitados quaisquer em $\mathbb{R}^2$, e por fim K. Lin [32], onde o autor mostra a existência de extremal para a desigualdade (1). Citamos ainda D.G. De Figueiredo, J. M do Ó e B. Ruf [14] onde os autores apresentam uma nova prova de existência de extremais para (1) baseados em concentração-compacidade.

Relativo ao estudo de equações elípticas, o resultado de concentração-compacidade de P.-L. Lions também possui um importante papel. Em [13], D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki e B. Ruf mostraram que o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio suave e limitado e f possui crescimento crítico, possui uma solução no nível do passo da montanha. O estudo foi feito de modo variacional, mostrando que o funcional associado ao problema,

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u) \, \mathrm{d}x$$

onde $F(x,s) = \int_0^s f(x,t) \, \mathrm{d}t$, satisfaz a condição de Palais-Smale. Na obtenção deste resultado, a concentração-compacidade de P.-L. Lions e a desigualdade (1) foram cruciais.

Seguindo esta linha, no Capítulo 2, aplicamos o princípio de concentração-compacidade (Teorema 1.1.1) para provar a existência de pontos críticos para funcionais do tipo

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\Delta^k u|^p \,\mathrm{d}x - \int_{\Omega} F(x,u)\mathrm{d}x,$$

definidos em $W_0^{2k,p}(\Omega)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio suave e limitado, $n = 2kp$ e $F(x,s) = \int_0^s f(x,t)\,\mathrm{d}t$, sendo f superquadrática com crescimento crítico do tipo Adams, cuja não linearidade modelo é dada por

$$F(x,s) = g(x)\left(\frac{1}{p}|s|^q + |s|^q e^{\alpha_0 |s|^{p/(p-1)}}\right),$$

para algum $q > p$ e $g : \Omega \to (1,+\infty)$ contínua e limitada. O ponto mais delicado é a prova da condição de Palais-Smale. Para tanto, utilizamos o Teorema 1.1.1 para mostrar que o funcional J satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale para todo $c \in (-\infty, \frac{1}{p}(\beta_0/\alpha_0)^{p-1})$. Assim, usando o Teorema do Passo da Montanha, podemos garantir a existência de pontos críticos no nível do passo da montanha.

No capítulo 3, iniciamos o estudo das desigualdades do tipo Adams em domínios quaisquer. Em uma primeira direção, provamos a existência de uma sequência radial maximizante para as desigualdades (5) e (6) no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^n$. Mais precisamente provamos o seguinte resultado:

Existe uma sequência $(u_i) \subset W_{rad}^{m,n/m}(\mathbb{R}^n)$ satisfazendo $\|u_i\|^{n/m} = 1$, para todo i, e

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\beta_0 u_i^{n/(n-m)})\,\mathrm{d}x = \sup_{\substack{u\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\\ \|u_i\|^{n/m}\le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\beta_0 u^{n/(n-m)})\,\mathrm{d}x.$$

onde

$$\|u\|^{\frac{n}{m}} = \begin{cases} \|\nabla(-\Delta+I)^k u\|^{\frac{n}{m}}_{\frac{n}{m}} + \|(-\Delta+I)^k u\|^{\frac{n}{m}}_{\frac{n}{m}}, & \textit{para} \quad m = 2k+1; \\ \\ \|(-\Delta+I)^k u\|^{\frac{n}{m}}_{\frac{n}{m}}, & \textit{para} \quad m = 2k. \end{cases}$$

Como uma conseguência direta deste resultado temos, por exemplo, que

$$\sup_{\substack{u\in W^{m,\frac{n}{m}}(\mathbb{R}^n)\\ \|u\|\le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\beta_0 |u|^{n/(n-m)})\,\mathrm{d}x = \sup_{\substack{u\in W_{rad}^{m,\frac{n}{m}}(\mathbb{R}^n)\\ \|u\|\le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\beta_0 |u|^{n/(n-m)})\,\mathrm{d}x.$$

Resultados como estes são importantes no estudo de existência de extremais para desigualdades do tipo Trudinger-Moser com o domínio sendo todo o espaço. Citamos o trabalho de Y. Li e B. Ruf [31], onde os autores provaram a existência de extremal para a desigualdade (2) quando $\alpha = \alpha_n$ e $\Omega = \mathbb{R}^n$. Neste caso especial, este resultado sobre as funções radiais segue de forma imediata por argumento de simetrização, o que não acontece no caso das desigualdades (5) e (6).

Em uma segunda direção, provamos a seguinte desigualdade do tipo Adams:
Sejam $\beta < \beta_0 = \frac{n2^n\pi^n}{\omega_{n-1}}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio qualquer, onde $n = 2m$. Então

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,2}(\Omega)\\ \|u\|_2^2+\|\nabla^m u\|_2^2\leq 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta|u|^2}-1\right) \mathrm{d}x < \infty. \tag{9}$$

Para provar este resultado, fizemos uso das desigualdades (7) e (8). A norma utilizada na desigualdade (9) se mostrou bem mais apropriada em muitos aspectos.

O estudo de problemas elípticos relacionados com o poliharmônico envolvendo crescimento crítico tem sido intenso nestes últimos anos. No caso em que $n > 2m$, o crescimento crítico para os problemas

$$(-\Delta)^m u = f(x,u), \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{10}$$

é dado pela imersão de Sobolev. Miyagaki [34], estendendo o estudo do célebre trabalho de H. Brezis e L. Nirenberg [9], estudou a existência de solução não trivial para a equação $-\Delta u + V(x)u = f(x,u)$ em $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, envolvendo o expoente crítico de Sobolev, isto é, $f(x,u) = \lambda|u|^{q-1}u + |u|^{2^*-2}u$ com $\lambda > 0$. P. Pucci e J. Serrin [38, 37] iniciaram o estudo para o poliharmônico com a não linearidade envolvendo expoente crítico de Sobolev em domínios limitados. Posteriormente, D. Edmunds, D. Fortunato e E. Jannelli [21, 22], adotando um método semelhante ao desenvolvido por H. Brezis e L. Nirenberg [9], estudaram a existência de solução não trivial para o biharmônico com não linearidade envolvendo o expoente crítico de Sobolev , isto é, $\Delta^2 u = u|u|^{8/(N-4)} + \lambda u$ em $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, um domínio limitado. C. O. Alves, J. M. do Ó e O. H. Miyagaki [7] estudaram ainda o problema $\Delta^2 u + a(x)u = h(x)u|u|^{q-1} + k(x)u|u|^{p-1}$ em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 5$, $1 < q < p \leq (N+4) = (N-4)$ e $a,h,k : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ são funções limitadas, não negativas e contínuas.

Para o caso em que $n = 2m$, o crescimento crítico é dado pelas desigualdades do tipo Trudinger-Moser-Adams. Adimurthi, P.N. Srikanth, S.L. Yadava [6] estudaram o problema $-\Delta u = f(u)$ com f possuindo crescimento crítico dado pela desigualdade de Trudinger-Moser (1). O. Lakkis [29] e N. Lam , G. Lu [27] estudaram o problema (10), em domínios limitados, com f possuindo crescimento subcrítico e crítico dado pela desigualdade de Adams (3). Para o caso especial do biharmônico, F. Sani [42], motivada pela desigualdade (3.1.1), estudou a existência de soluções para o problema $\Delta^2 u + V(x)u = f(x,u)$ com f possuindo crescimento crítico.

Seguindo esta linha e motivados pela desigualdade (9), no Capítulo 4, mostramos a existência de solução radial de energia mínima, sobre o espaço $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$, para o seguinte

problema:
$$(-\Delta)^m u(x)+u(x)=f(x,u), \quad \text{em } \mathbb{R}^{2m}, \tag{11}$$
sendo f superquadrática com crescimento crítico dado pela desigualdade do tipo Adams (9), onde consideramos a não linearidade modelo

$$F(x,s)=Cg(x)\left(\frac{1}{2}s^4+s^4e^{\alpha_0 s^2}\right),$$

com $g:\Omega\to[1,+\infty)$ contínua e limitada e $C=C(m)>0$.

Note que a importância de trabalharmos com $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ advém da perca de compacidade ao trabalharmos em domínios ilimitados, de modo que a seguinte imersão é compacta

$$W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^{2m})$$

para todo $2<q<\infty$.

No Capítulo 5, mostramos as seguintes versões das desigualdades (6) e (8) para o caso singular:

Sejam $m>0$, um número inteiro, $0\le\alpha<2m$, um número real e Ω um domínio qualquer de $\mathbb{R}^{2m}$. Suponha ainda que $\tau>0$ é uma constante positiva. Então, para todo $0\le\beta\le\beta_{\alpha,m}=(1-\frac{\alpha}{2m})\frac{n2^n\pi^n}{\omega_{n-1}}$, existe uma constante $C_{\alpha,m,\tau}>0$ tal que, se $m=2k+1$, para algum $k\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{\substack{u\in W^{m,2}_0(\Omega)\\ \|\nabla(-\Delta+\tau I)^k u\|_2+\tau\|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2\le 1}}\int_\Omega \frac{e^{\beta u^2}-1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\le C_{\alpha,m,\tau}.$$

Se $m=2k$, para algum $k\in\mathbb{N}$,

$$\sup_{\substack{u\in W^{m,2}_0(\Omega)\\ \|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2\le 1}}\int_\Omega \frac{e^{\beta u^2}-1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x\le C_{\alpha,m,\tau}.$$

Além disso, se $\beta>\beta_{\alpha,m}$ os supremos são infinitos.

Fazendo uso destas desigualdades, provamos ainda uma versão da desigualdade (9) para o caso singular, a saber:

Sejam $m>0$ um numero inteiro, $0\le\alpha<2m$, um número real e Ω um domínio qualquer de $\mathbb{R}^{2m}$. Então, para todo $0\le\beta<\beta_{\alpha,m}=(1-\frac{\alpha}{2m})\frac{n2^n\pi^n}{\omega_{n-1}}$, existe uma constante $C_{\alpha,m}>0$ tal que

$$\sup_{\substack{u\in W^{m,2}_0(\Omega)\\ \|u\|_2^2+\|\nabla^m u\|_2^2\le 1}}\int_\Omega \frac{e^{\beta u^2}-1}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x\le C_{\alpha,m}. \tag{12}$$

Além disso, se $\beta > \beta_{\alpha,m}$ o supremo acima se torna infinito.

Estudos de problemas elípticos e singulares envolvendo crescimento crítico exponencial também tem sido alvo de intensivo estudo. Adimurthi e K. Sandeep [5] mostraram uma desigualdade de tipo Trudinger-Moser com peso e, como aplicação, estudaram a existência de soluções para um problema elíptico e singular com não linearidade possuindo crescimento crítico dado por esta desigualdade. Motivados por estes trabalhos, J. M. do Ó e M. de Souza [20] estudaram a multiplicidade de soluções para o problema elíptico

$$-\Delta u + V(x)u = \frac{f(u)}{|x|^a} + h(x), \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^2,$$

para $a \in [0,2)$, $h \in (W^{1,2}(\mathbb{R}^2))^*$ uma pequena perturbação, $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua positiva e f possuindo crescimento crítico exponencial . Citamos ainda [15, 16, 50].

Motivados por estes trabalhos e pela desigualdade (12), no Capítulo 6, mostramos a multiplicidade de solução para o seguinte problema singular:

$$u(x) + (-\Delta)^m u(x) = \frac{f(u)}{|x|^a} + h(x), \tag{13}$$

onde $h \in \left(W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\right)^*$ é uma pequena pertubação da equação, $0 \leq a < 2m$ e f é superquadrática com crescimento crítico do tipo Adams. Para isto, assumimos ainda que f satisfaz condições semelhantes às assumidas no Capítulo 4. O estudo neste capítulo também é via métodos variacionais, onde utilizamos o Princípio Variacional de Ekeland para garantir a existência de uma solução de energia negativa e o Teorema do Passo da Montanha para garantir a existência de uma segunda solução.

CAPÍTULO 1

Concentração-Compacidade para o Funcional de Adams

1.1 Introdução

Neste capítulo, estudamos um refinamento das imersões de Sobolev relativas às conhecidas desigualdades de N. Trudinger [47], J. Moser [39] e D. Adams [2] que garantem a imersão do espaço de Sobolev no espaço de Orlicz sobre um domínio suave Ω em $\mathbb{R}^n (n \geq 2)$, com medida finita, isto é, $|\Omega| < \infty$. Denotando por m um inteiro positivo qualquer e por $W_0^{m,p}(\Omega)$ o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ no espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$, onde $1 \leq p < \infty$. Sabemos que, se $p > 1$ e $mp = n$, então temos a imersão

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega) \qquad \forall q \geq 1,$$

mas

$$W_0^{m,p}(\Omega) \nsubseteq L^\infty(\Omega),$$

como podemos ver tomando $u(r) = \ln(\ln(4R/r))$ com $0 < r < 4R$, para algum $R > 0$ pequeno de modo que $\overline{B_{4R}(0)} \subset \Omega$, onde sem perda de generalidade assumimos que $0 \in \Omega$ (cf. [3]). Para $m = 1$ and $p = n$, N. Trudinger [47] provou que

$$W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L_\phi(\Omega),$$

onde $L_\phi(\Omega)$ é o espaço de Orlicz determinado pela função de Young $\phi = \phi_\alpha(t) = e^{\alpha|t|^{n/(n-1)}} - 1$, qualquer que seja $\alpha > 0$, i.e,

$$L_\phi(\Omega) \text{ é o espaço vetorial gerado por } K_\phi(\Omega)$$

onde $K_\phi(\Omega)$ é o conjunto das funções mensuráveis definidas em Ω tais que $\int_\Omega \phi(|u|)\, \mathrm{d}x < \infty$ e $L_\phi(\Omega)$ é dotado da norma de Luxemburgo

$$\|u\|_{L_\phi} := \inf\left\{t > 0 : \int_\Omega \phi\left(\frac{|u|}{t}\right)\, \mathrm{d}x < 1\right\}.$$

(Veja também S. I. Pohozaev [36] e V. I. Yudovich [49]). Este resultado possui várias generalizações, extensões e aplicações em Análise Geométrica, Equações Diferenciais Parciais e problemas físicos. Em uma primeira direção, o resultado foi melhorado por J. Moser [39], que encontrou o melhor expoente α no seguinte sentido:

Teorema A (Moser, 1971). *Sendo $\alpha_n := n\omega_{n-1}^{1/(n-1)}$ (onde ω_{n-1} é a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^n$), então existe uma constante $C = C_n$ tal que*

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{1,n}(\Omega)\\ \|\nabla u\|_n\leq 1}} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{n/(n-1)}}\,\mathrm{d}x \leq C_n\mathscr{L}_n(\Omega), \quad \forall\, \alpha\leq\alpha_n, \tag{1.1.1}$$

onde $\mathscr{L}_n$ denota a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$. Mais ainda, α_n é a melhor constante, isto é, o supremo em (1.1.1) torna-se infinito se $\alpha > \alpha_n$.

Note que esta limitação garante a imerção contínua de $W_0^{1,n}(\Omega)$ no espaço de Orlicz gerado por $\phi(t) = e^{\alpha t^{n'}} - 1$, com $n' = n/(n-1)$. De fato, da desigualdade (1.1.1) temos que

$$\|u\|_{L_\phi} \leq \frac{(C_n\mathscr{L}_n(\Omega)\alpha)^{\frac{1}{n'}}}{\alpha_n^{\frac{1}{n'}}}\|\nabla u\|_n.$$

Em [33], P. -L. Lions observou que a imersão $W_0^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L_\phi(\Omega)$ não é compacta, para $\phi = \phi_\alpha(t) = e^{\alpha_n|t|^{n'}} - 1$, mas provou que exceto por uma "pequena vizinhança fraca de 0" a imersão é compacta, o qual enunciamos em sequência, onde denotamos por $\mathscr{M}(\overline{\Omega})$ o espaço das medidas de Radon em $\mathbb{R}^n$.

Teorema B (P. -L. Lions, 1985). *Seja $(u_i) \subset W_0^{1,n}(\Omega)$ satisfazendo $\|\nabla u_i\|_n \leq 1$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u_i \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,n}(\Omega)$ e que $\|\nabla u_i\|_n^n \rightharpoonup \mu$ em $\mathscr{M}(\overline{\Omega})$. Então, um dos seguintes casos ocorre:*

(i) se $u \equiv 0$ e $\mu = \delta_{x_0}$, para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$, então, a menos de subsequência,

$$e^{\alpha_n\,|u_i|^{n'}} \rightharpoonup c\delta_{x_0} + \mathscr{L}_n \quad \text{em} \quad \mathscr{M}(\overline{\Omega}), \quad \text{para algum } c\geq 0;$$

(ii) se $u \equiv 0$ e μ não é uma concentração de massa de Dirac sobre algum ponto, então existem $\gamma > 1$ e $C = C(\gamma,\Omega) > 0$ de modo que

$$\int_\Omega e^{\alpha_n\gamma|u_i|^{n'}} \leq C;$$

(iii) se $u \not\equiv 0$, então para $\gamma \in [1,\eta)$ existe uma constante $C = C(\gamma,\Omega) > 0$ tal que

$$\int_\Omega e^{\alpha_n\gamma|u_i|^{n'}} \leq C,$$

onde $\eta = 1/(1-\|\nabla u^*\|_n^n)^{1/(n-1)}$.

Citamos, também, o recente trabalho de R. Černý [12], onde os autores apresentaram uma nova abordagem para este resultado. Eles estudaram este relevante princípio no caso padrão, em que as função se anulam no bordo, e também em um caso mais geral, em que não há restrições no bordo de um domínio suave limitado qualquer.

Em uma segunda direção, D. Adams (cf. [2]) obteve uma versão generalizada do resultado de Trudinger para o espaço de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$:

Teorema C (D. Adams, 1988)**.** *Sejam* m *um inteiro positivo com* $m < n$ *e* $p = n/m$*. Então, existe uma constante* $C_{m,n}$ *tal que*

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,p}(\Omega),\\ \|\nabla^m u\|_p\le 1}} \int_\Omega e^{\beta|u|^{p'}}\,\mathrm{d}x \le C_{m,n}\mathscr{L}_n(\Omega), \qquad \beta \le \beta_0, \tag{1.1.2}$$

onde

$$\beta_0 = \beta_0(m,n) = \begin{cases} \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}2^m\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m+1}{2}\right)}\right]^{\frac{n}{n-m}}, & m \text{ ímpar},\\[2ex] \dfrac{n}{\omega_{n-1}}\left[\dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}2^m\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n-m}{2}\right)}\right]^{\frac{n}{n-m}}, & m \text{ par}, \end{cases} \tag{1.1.3}$$

e β_0 *é a melhor constante, isto é, o supremo em* (1.1.2) *torna-se infinito se* $\beta > \beta_0$*.*

Neste teorema, denotamos por $\nabla^m u$ o m-ésimo gradiente de $u \in C^m(\Omega)$ definido por

$$\nabla^m u = \begin{cases} \Delta^{m/2}u, & m = 2,4,6,\ldots \\ \nabla\Delta^{(m-1)/2}u, & m = 1,3,5,\ldots \end{cases}$$

Como consequência do Teorema C, semelhantemente ao caso Trudinger-Moser, temos a seguinte imersão contínua

$$W_0^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L_\phi(\Omega), \tag{1.1.4}$$

com $\phi = \phi_\alpha(t) = e^{\beta|t|^{p'}} - 1$, qualquer que seja $\beta > 0$, que é dada por

$$\|u\|_{L_\phi} \le \frac{(C_{m,n}\mathscr{L}_n(\Omega)\beta)^{\frac{1}{p'}}}{\beta_0^{\frac{1}{p'}}}\|\nabla^m u\|_p.$$

Mas novamente, como no caso Trudinger-Moser, esta imersão não é compacta, para L_ϕ determinado por $\phi = \phi_\alpha(t) = e^{\beta_0|t|^{p'}} - 1$. O objetivo deste capítulo é estudar a compacidade da imersão (1.1.4). Mais precisamente, provaremos uma versão generalizada do princípio de concentração-compacidade de Lions, Teorema B, para o espaço de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Teorema 1.1.1. *Sejam m um número positivo inteiro com $m < n$ e $p = n/m \geq 2n/(n+2)$. Sejam $u_i, u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, μ, uma medida em $\overline{\Omega}$, de modo que $\|\nabla^m u_i\|_p = 1$, $u_i \rightharpoonup u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$ e $|\nabla^m u_i|^p \rightharpoonup \mu$ em $\mathscr{M}(\overline{\Omega})$. Então, teremos um dos seguinte casos:*

(i) se $u \equiv 0$ e $\mu = \delta_{x_0}$, para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$, então, a menos de subsequência,

$$e^{\beta_0 |u_i|^{p'}} \rightharpoonup c\delta_{x_0} + \mathscr{L}_n \quad \text{em} \quad \mathscr{M}(\overline{\Omega}), \quad \text{para algum } c \geq 0,$$

(ii) se $u \equiv 0$ e μ não é uma concentração de massa de Dirac sobre um ponto, então existem $\gamma > 1$ e $C = C(\gamma, \Omega) > 0$ de modo que

$$\int_\Omega e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p'}} \leq C,$$

(iii) se $u \not\equiv 0$, então para $\gamma \in [1, \eta)$ existe uma constante $C = C(\gamma, \Omega) > 0$ tal que

$$\int_\Omega e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p'}} \leq C, \tag{1.1.5}$$

onde

$$\eta_{m,n}(u) := \begin{cases} \left(1 - \|\nabla(\Delta^k u)^*\|_p^p\right)^{-1/(p-1)} & \text{se} \quad m = 2k+1, \\ \left(1 - \|\nabla^m u\|_p^p\right)^{-1/(p-1)} & \text{se} \quad m = 2k. \end{cases}$$

Observação 1.1.2. *É interessante notar que para o caso $p = 2$, isto é, para os espaços $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$, pode se verificar facilmente, explorando a estrutura de Hilbert do espaço (veja [19] e [33]), que η pode alcançar o valor $\left(1 - \|\nabla^m u\|_2^2\right)^{-1}$ para qualquer m. Para provarmos o princípio de concentração-compacidade para o espaço de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$, desigualdade* (1.1.5)*, usamos um argumento de simetrização, o qual impede-nos de garantir que η pode alcançar o valor $\left(1 - \|\nabla^m u\|_p^p\right)^{-1/(p-1)}$ para $p \neq 2$ e $m = 2k+1$. Encontramos um problema similar no Teorema B devido ao uso da técnica de simetrização em sua prova. Neste contexto, em [12] R. Černý, A. Cianchi e S. Hencl, estudando o princípio de concentração–compacidade para o espaço de Sobolev $W_0^{1,n}(\Omega)$, provaram que η na verdade pode atingir o valor $(1 - \|\nabla u\|_n^n)^{-1/(n-1)}$ (cf. [12, Proposição 2.1]). Deste modo, também esperamos que um resultado similar seja verdadeiro para o caso geral.*

Consideramos agora um espaço que possui um papel fundamental na prova do Teorema 1.1.1, o qual contêm propriamente o espaço $W_0^{m,p}(\Omega)$, que definimos por

$$W_{\mathscr{N}}^{m,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u_{|\partial\Omega} = \Delta^j u_{|\partial\Omega} = 0 \text{ no sentido do traço, } 1 \leq j < m/2\}.$$

Uma desigualdade do tipo Adams também foi provado por C. Tarsi em [44, Teorema 4] sobre este espaço, que é a seguinte:

Teorema D. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave e limitado e $m < n$ um inteiro positivo. Então*

$$\sup_{\substack{u \in W^{m,p}_{\mathcal{N}}(\Omega) \\ \|\nabla^m u\|_p^p \leq 1}} \int_\Omega e^{\beta |u|^{p'}} \leq C_{m,n}\mathscr{L}_n(\Omega), \quad \textit{para todo } 0 \leq \beta \leq \beta_0, \tag{1.1.6}$$

onde β_0 é dado como em (1.1.3). *Mais ainda, β_0 é ótimo.*

Assim, temos também um resultado de concentração-compacidade que melhora esta desigualdade

Teorema 1.1.3. *O Teorema 1.1.1 ainda é verdadeiro quando consideramos o espaço de Sobolev $W^{m,p}_{\mathcal{N}}(\Omega)$ em lugar do espaço $W^{m,p}_0(\Omega)$.*

1.2 Preliminares

1.2.1 Rearranjamento Decrescente

Dado $A \subset \mathbb{R}^l$ um conjunto qualquer, denotamos por A^* a bola em $\mathbb{R}^l$ de raio $R > 0$ centrada na origem tal que $|A^*| = |A|$. Seja agora $u : A \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Denotamos por

$$\mu(t) = \mu_u(t) = |\{x \in A : |u(x)| > t\}| \qquad e \qquad u^\#(s) := \inf\{t \geq 0 : \mu(t) < s\} \quad \forall s \in [0, |A|],$$

a *função de distribuição* e o *rearranjamento decrescente* de u, respectivamente, e

$$u^*(x) := u^\#(\omega_{l-1}|x|^l) \quad \forall x \in A^*,$$

o *rearranjamento esfericamente simétrico e decrescente* de u. Primeiro, observamos que a função de distribuição é contínua à direita, isto é, as descontinuidades ocorrem por conta dos níveis $\{x \in A : |u(x)| = t\}$. Podemos ver isto usando a continuidade da medida de Lebesgue. Com isso vejamos o seguinte lema:

Lema 1.2.1. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^l$ um conjunto aberto e $f \in L^q(A)$, $q \geq 1$. Então, dado $s \in [0, |A|)$ qualquer, existe $E_s = E(f, s) \subset A$ tal que $|E_s| = s$ e*

$$\int_0^s (f^\#)^q = \int_{E_s} |f|^q. \tag{1.2.1}$$

Demonstração. Primeiramente, note que

$$\int_0^s (f^\#)^q \geq \int_E |f|^q,$$

qualquer que seja $E \subset A$, com $|E| = s$. De fato, seja $v = f_{|_E}$. Se $r \in [0, s]$ e $\mu_f(t) < r$ então

$\mu_v(t) < r$. Assim $v^\#(r) \le f^\#(r)$ e portanto

$$\int_E |f|^q = \int_E |v|^q = \int_0^s (v^\#)^q \le \int_0^s (f^\#)^q.$$

Nesta prova, observamos que e igualdade ocorre sempre que $v^\# = u^\#$ q.t.p. em $[0,s]$. Deste modo, quando s pertencer a imagem de μ é suficiente tomarmos $E_s = \{x \in A : |u(x)| > t\}$ para termos (1.2.1). Caso contrário, pela continuidade a direita da função distribuição basta tomarmos $E_s = \{x \in A : |u(x)| > t\} \cup N$, onde t satisfaz $\mu(t) < s \le \mu(t-\varepsilon)$, para todo $\varepsilon > 0$, e $N \subset \{x \in A : |u(x)| = t\}$ tal que $\mu(t) + |N| = s$. □

Lema 1.2.2. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^l$ um conjunto aberto e $f_i, f \in L^p(A)$ de modo que $f_i \rightharpoonup f$ fracamente em $L^p(A)$, $p > 1$. Então, a menos de subsequência, $f_i^\# := g_i \to g$ q.t.p. para algum $g \in L^p([0,|A|])$ tal que $\|g\|_p \ge \|f^\#\|_p$.*

Demonstração. Tome $a = |A|$, que pode ser infinito. Primeiramente observe que, como $f_i \rightharpoonup f$ fracamente em $L^p(A)$, f_i é uniformemente limitado em $L^p(A)$. Temos assim que $g_i|_{[c,d]} \in BV([c,d])$, para cada $[c,d] \subset (0,a)$, e é uniformemente limitado, na verdade, dado $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe uma constante $C > 0$, que independe de i, tal que

$$(t - c + \varepsilon) g_i(t)^p \le \int_{c-\varepsilon}^t |g_i(s)|^p ds \le \int_0^a |g_i(s)|^p ds \le C,$$

para todo $t \in [c,d]$, o que implica que $g_i(t) \le (C/\varepsilon)^{1/p}$. Deste modo, como $BV([c,d])$ é compactamente imerso em $L^1([c,d])$, a menos de uma subsequência, $g_i \to g$ em $L^1([c,d])$ para cada $[c,d] \subset (0,a)$ e portanto $g_i \to g$ q.t.p. em $(0,a)$. Note agora que, pelo Lema 1.2.1, dado um $t \in (0,a)$ qualquer, existe $E_t \subset A$ tal que $|E_t| = t$ e

$$\int_0^t (f^\#)^q = \int_{E_t} |f|^q,$$

para todo $q \in (1,p)$. Mais ainda, como g_i^q é limitado em $L^r([0,t])$, para $r > 1$, g_i^q converge fracamente em $L^r([0,t])$. Note porém que, como $g_i \to g$ q.t.p., teremos $g_i^q \rightharpoonup g^q$ em $L^r([0,t])$ e portanto

$$\int_0^t g_i^q \to \int_0^t g^q.$$

Assim, de

$$\int_0^t g_i^q = \int_0^t (|f_i|^q)^\# \ge \int_{E_t} |f_i|^q$$

e do Lema de Fatou, segue que

$$\int_0^t g^q \ge \liminf_i \int_{E_t} |f_i|^q \ge \int_{E_t} |f|^q = \int_0^t (f^\#)^q \qquad \forall q \in (1,p) \quad \text{e} \quad t \in (0,a),$$

o que conclui nossa demonstração. □

Note que em geral não é verdade que $f^{\#} = g$, como podemos ver através do seguinte exemplo: $f_i : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ definido por

$$f_i(t) = \begin{cases} e^{1/((t-i)^2-1)}, & i-1 < t < i+1, \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $f_i \rightharpoonup f \equiv 0$ em $L^p(0,+\infty)$ e $(f_i)^{\#} := g_i \rightharpoonup g \not\equiv 0$.

1.2.2 Teorema de Comparação

Em [45] G. Talenti apresentou um importante resultado de comparação que é conhecido hoje como Princípio de Comparação de Talenti, o qual é,

Teorema 1.2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave. Se u é solução fraca de*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & em \quad \Omega \\ u = 0 & em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

com $f \in L^p(\Omega)$, $p = 2n/(n+2)$, e v é a solução de

$$\begin{cases} -\Delta v = f^* & em \quad \Omega^* \\ v = 0 & em \quad \partial\Omega^*. \end{cases}$$

Então $v \geq u^*$ q.t.p. em Ω^*.

Agora, usando de modo iterativo este Teorema, juntamente com o Princípio do Máximo, podemos estender este princípio de comparação para a equação dada pelo poli-harmônico, com condição de bordo de Navier.

Proposição 1.2.4. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, um domínio suave e limitado e $q \geq 2n/(n+2)$. Se $f \in L^q(\Omega)$ e $u \in W^{2k,q}_{\mathcal{N}}(\Omega)$ é a única solução forte de*

$$\begin{cases} (-\Delta)^k u = f & em \quad \Omega, \\ \Delta^j u = u = 0 & em \quad \partial\Omega,\ j = 1,2,\ldots,k-1. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

e $v \in W^{2k,q}_{\mathcal{N}}(\Omega^*)$ é a única solução forte de

$$\begin{cases} (-\Delta)^k v = f^* & em \quad \Omega^*, \\ \Delta^j v = v = 0 & em \quad \partial\Omega^*,\ j = 1,2,\ldots,k-1. \end{cases} \tag{1.2.3}$$

Então, $v \geq u^*$ q.t.p. em Ω^*.

Demonstração. Quando $k = 1$ a proposição é exatamente o Teorema 1.2.3. Assim para $k \geq 2$ podemos escrever o problema (1.2.2) e (1.2.3) na forma de sistema

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f & \text{em} \quad \Omega \\ u_1 = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta v_1 = f^* & \text{em} \quad \Omega^* \\ v_1 = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega^*. \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\Delta u_i = u_{i-1} & \text{em} \quad \Omega \\ u_i = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \qquad \begin{cases} -\Delta v_i = v_{i-1} & \text{em} \quad \Omega^* \\ v_i = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega^*. \end{cases}$$

para $i = 2, ..., k$. Notando que $u_k = u$, $v_k = v$ e aplicando iterativamente o Teorema 1.2.3, juntamente com o princípio do máximo, temos $v_i \geq u_i^*$ e portanto o resultado está provado. $\square$

1.3 Prova do Teorema de Concentração-Compacidade

Primeiramente, vamos provar a seguinte proposição:

Proposição 1.3.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave e limitado. Suponha que $u_i, u \in W_0^{m,p}(\Omega)$, com $p = n/m$, $\|\nabla^m u_i\|_p \leq 1$, $u \neq 0$ e $u_i \rightharpoonup u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Então para $\gamma \in [1, \eta)$ existe uma constante $C = C(\gamma, \Omega) > 0$ tal que*

$$\int_\Omega e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p'}} \leq C,$$

onde

$$\eta_{m,n}(u) := \begin{cases} \left(1 - \|\nabla(\Delta^k u)^*\|_p^p\right)^{-1/(p-1)} & se \quad m = 2k+1, \\ \left(1 - \|\nabla^m u\|_p^p\right)^{-1/(p-1)} & se \quad m = 2k. \end{cases}$$

Demonstração. Apresentamos aqui a prova para o caso $m > 1$, o caso $m = 1$ é dado pelo Teorema B. Nossa estratégia para provar a proposição consiste em encontrar uma sequência com boas propriedades que limite superiormente à sequência original. No caso em que m é par, a prova consistirá de uma única etapa. No caso em que m é ímpar, a prova consistirá de duas etapas. Iniciaremos obtendo $v_i \in W_{\mathcal{N}}^{m,p}(\Omega^*)$ tal que $v_i \geq u_i^*$ e $0 < \|\nabla^m v_i\|_p \leq \|\nabla^m u_i\|_p \leq 1$, o que implica que

$$\int_\Omega e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p'}} = \int_\Omega e^{\beta_0 \gamma u_i^{*p'}} \leq \int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \gamma v_i^{p'}},$$

onde Ω^* é a bola de raio R, centrada no origem com $|\Omega^*| = |\Omega|$. De fato, sendo $m = 2k$ ou $m = 2k+1$, para cada i, tomamos $v_i \in W_{\mathcal{N}}^{2k,p}(\Omega^*)$ como a única solução forte do seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^k v_i = \big((-\Delta)^k u_i\big)^* & \text{em} \quad \Omega^*, \\ \Delta^j v_i = v_i = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega^*,\ j = 1,2,\ldots,k-1. \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Da Proposição 1.2.4 $v_i \geq u_i^*$. Mais anida, quando $m = 2k$, temos que

$$\|\nabla^m v_i\|_p = \|\Delta^k v_i\|_p = \|(\Delta^k u_i)^*\|_p = \|\Delta^k u_i\|_p = \|\nabla^m u_i\|_p,$$

e quando $m = 2k+1$, por regularidade $v_i \in W^{m,p}_{\mathcal{N}}(\Omega^*)$ e mais, da desigualdade de Pólya-Szegö,

$$\|\nabla^m v_i\|_p = \|\nabla\Delta^k v_i\|_p = \|\nabla(\Delta^k u_i)^*\|_p \leq \|\nabla\Delta^k u_i\|_p = \|\nabla^m u_i\|_p.$$

Agora, para continuarmos a prova, dividimos em dois casos:

Caso $m = 2k$: aplicando o Lema 1.2.2 teremos que $\nabla^m v_i \to \nabla^m v$ q.t.p. em Ω^* e $\|\nabla^m v\|_p \geq \|\nabla^m u\|_p$, onde v é o limite fraco de v_i em $W^{m,p}_{\mathcal{N}}(\Omega^*)$. Então, aplicando o Lema de Brezis-Lieb, obtemos

$$\|\nabla^m v_i - \nabla^m v\|_p^p \to c \leq 1 - \|\nabla^m v\|_p^p,$$

e de

$$\gamma < \frac{1}{(1-\|\nabla^m u\|_p^p)^{1/(p-1)}} \leq \frac{1}{(1-\|\nabla^m v\|_p^p)^{1(/p-1)}}$$

temos que, para i suficientemente grande,

$$\|\nabla^m v_i - \nabla^m v\|_p^{p'} \gamma < 1.$$

Assim, observando a seguinte desigualdade

$$(a+b)^q \leq (1+\delta)^q a^q + \beta_0\,\gamma(1+1/\delta)^q b^q$$

para todo $a,b \geq 0$, $q \geq 1$ e $\delta > 0$, que é provado no Apêndice, temos que

$$\int_{\Omega^*} e^{\beta_0\,\gamma v_i^{p'}} \leq \int_{\Omega^*} e^{\beta_0\,\gamma(1+\delta)^{p'}(v_i-v)^{p'} + \beta_0\,\gamma(1+1/\delta)^{p'} v^{p'}}$$

e mais, pela desigualdade de Holder temos

$$\int_{\Omega^*} e^{\beta_0\,\gamma v_i^{p'}} \leq \left(\int_{\Omega^*} e^{q\beta_0\gamma(1+\delta)^{p'}(v_i-v)^{p'}}\right)^{1/q} \left(\int_{\Omega^*} e^{q'\beta_0\,\gamma(1+1/\delta)^{p'} v^{p'}}\right)^{1-1/q}.$$

Assim para $\delta > 0$ suficientemente pequenos, $q > 1$ suficientemente próximo de 1 e i suficientemente grande

$$\|\nabla^m v_i - \nabla^m v\|_p^{p'} q\gamma(1+\delta)^{p'} < 1,$$

e portanto

$$\int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \gamma v_i^{p'}} \leq \left(\int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \frac{(v_i - v)^{p'}}{\|\nabla^m v_i - \nabla^m v\|_p^{p'}}} \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \gamma \tilde{q} v^{p'}} \right)^{1-1/q},$$

com $\tilde{q} = q' p (1 + 1/\delta)^{p'}$. Então, usando o teorema D, o resultado segue para este caso.

Caso $m = 2k+1$: para este caso, construiremos ainda uma nova sequência usando a sequência v_i. Como $(-\Delta)^k v_i$ é uma função radial, positiva e não decrescente, definimos $f_i, f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$

$$f_i(-h(|x|)) = (-\Delta)^k v_i(x), \quad f(-h(|x|)) = (-\Delta)^k v(x),$$

onde $h : (0,R] \to \mathbb{R}$ é dada por

$$h(r) = \frac{p-1}{p-n} r^{\frac{p-n}{p-1}} - \frac{p-1}{p-n} R^{\frac{p-n}{p-1}}.$$

Assim, f_i, f são contínuas, não decrescentes, $f_i(0) = f(0) = 0$ e

$$1 \geq \int_{\Omega^*} |\nabla \Delta^k v_i|^p \, \mathrm{d}x = \omega_{n-1} \int_0^\infty |f_i'(t)|^p dt.$$

Considerando $g_i(t) = (f_i')^\#(t)$, o rearranjamento decrescente de f_i' em $(0,\infty)$ definimos:

$$\tilde{f}_i(t) = \int_0^t g_i(s) ds \qquad \text{e} \qquad w_i(x) = \tilde{f}_i(-h(|x|)).$$

Então, temos

$$\int_{\Omega^*} |\nabla w_i|^p \, \mathrm{d}x = \omega_{n-1} \int_0^\infty |\tilde{f}_i'(t)|^p dt = \omega_{n-1} \int_0^\infty |f_i'(t)|^p dt \leq 1$$

e

$$w_i(x) = \int_0^{-h(|x|)} g_i(s) ds \geq \int_0^{-h(|x|)} f_i'(t) dt = (-\Delta)^k v_i(x), \ \forall x \in \Omega^*.$$

Deste modo, tomamos $\tilde{v}_i \in W_{\mathcal{N}}^{m,p}(\Omega^*)$ como a solução do seguinte problema

$$\begin{cases} (-\Delta)^k \tilde{v}_i = w_i & \text{em} \quad \Omega^*, \\ \Delta^j \tilde{v}_i = \tilde{v}_i = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega^*, \ j = 1, 2, \ldots, k-1, \end{cases} \tag{1.3.2}$$

que satisfaz $\|\nabla^m \tilde{v}_i\|_p = \|\nabla^m v_i\|_p \leq 1$ e pelo princípio do máximo $\tilde{v}_i \geq v_i$, e novamente temos

$$\int_{\Omega} e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p'}} = \int_{\Omega} e^{\beta_0 \gamma u_i^{*p'}} \leq \int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \gamma v_i^{p'}} \leq \int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \gamma \tilde{v}_i^{p'}}.$$

Então, aplicando o Lema 1.2.2 para f_i', f' podemos ver que $\nabla^m \tilde{v}_i \to \nabla^m \tilde{v}$ q.t.p. em Ω^* e $\|\nabla^m \tilde{v}\|_p \geq \|\nabla^m v\|_p = \|\nabla(\Delta^k u)^*\|_p$, onde $\tilde{v}$ é o limite fraco de $\tilde{v}_i$ em $W^{m,p}_{\mathscr{N}}(\Omega^*)$. Portanto, como no caso $m = 2k$, podemos aplicar o Lema de Brezis-Lieb e obtermos que, para $\delta > 0$ suficientemente pequenos, $q > 1$ suficientemente próximo de 1 e i suficientemente grande,

$$\|\nabla^m \tilde{v}_i - \nabla^m \tilde{v}\|_p^{p'} q\gamma(1+\delta)^{p'} < 1,$$

e, portanto,

$$\int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \gamma \tilde{v}_i^{p'}} \leq \left(\int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \frac{(\tilde{v}_i - \tilde{v})^{p'}}{\|\nabla^m \tilde{v}_i - \nabla^m \tilde{v}\|_p^{p'}}} \right)^{1/q} \left(\int_{\Omega^*} e^{\beta_0 \gamma \tilde{q} \tilde{v}^{p'}} \right)^{1-1/q},$$

com $\tilde{q} = q' p(1+1/\delta)^{p'}$. Então, usando novamente o teorema D o resultado segue para este caso também. $\square$

Prova do Teorema 1.1.1: Primeiramente, suponhamos que $u \equiv 0$. Com isso, dado $\xi \in C^m(\overline{\Omega})$, temos que

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega |\nabla^m(\xi u_i)|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\xi|^p d\mu,$$

pois, pela imersão compacta de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{m-1,p}(\Omega)$, $D^i u \to 0$ fortemente em $L^p(\Omega)$, para $0 \leq i \leq m-1$.

Suponha que $\mu = \delta_{x_0}$ para algum $x_0 \in \overline{\Omega}$, (i). Para $r > 0$ tome $\xi \in C^m(\overline{\Omega})$ tal que $0 \leq \xi \leq 1$, $\xi \equiv 0$ em $B(x_0, r/2) \cap \overline{\Omega}$ e $\xi \equiv 1$ em $\overline{\Omega} \setminus B(x_0, r)$. Assim,

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega |\nabla^m(\xi u_i)|^p \, \mathrm{d}x = 0,$$

e, dado $\delta > 0$,

$$\int_\Omega e^{\beta_0(1+\delta)|\xi u_i|^{p'}} = \int_\Omega e^{\beta_0(1+\delta)\|\nabla^m(\xi u_i)\|_p^{p'} \frac{|\xi u_i|^{p'}}{\|\nabla^m(\xi u_i)\|_p^{p'}}} < C,$$

para i suficientemente grande. Dado agora $A \subset\subset \overline{\Omega} \setminus \{x_0\}$, tomando $r > 0$ tal que $A \subset\subset \overline{\Omega} \setminus B(x_0, r)$ temos

$$\int_A \left(e^{\beta_0(1+\delta)|u_i|^{p'}} - 1 \right) \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega e^{\beta_0(1+\delta)|\xi u_i|^{p'}} < C,$$

e, como consequência do Teorema de Vitalli,

$$\int_A \left(e^{\beta_0 |u_i|^{p'}} - 1 \right) \, \mathrm{d}x \to 0. \tag{1.3.3}$$

Deste modo, como

$$\sup_i \int_\Omega \left(e^{\beta_0 |u_i|^{p'}} - 1 \right) \, \mathrm{d}x \leq \tilde{C} < \infty,$$

podemos considerar, a menos de subsequência, que

$$c = \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \left(e^{\beta_0 |u_i|^{p'}} - 1 \right) \, \mathrm{d}x,$$

para algum $c \in \mathbb{R}$. Assim, dado $\phi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ e $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \left| \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \Phi \left(e^{\beta_0 |u_i|^{p'}} - 1 \right) \, \mathrm{d}x - c\Phi(x_0) \right| &= \left| \lim_{i\to\infty} \int_\Omega \left(e^{\beta_0 |u_i|^{p'}} - 1 \right) (\Phi(x) - \Phi(x_0)) \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \left| \lim_{i\to\infty} \int_{B_{x_0}(d)\cap\Omega} \left(e^{\beta_0 |u_i|^{p'}} - 1 \right) (\Phi(x) - \Phi(x_0)) \, \mathrm{d}x \right| \leq c\varepsilon, \end{aligned}$$

para $d > 0$ tal que $|\Phi(x) - \Phi(x_0)| < \varepsilon$ sempre que $x \in B_{x_0}(d) \cap \Omega$. O que prova o caso (i).

Suponha agora que μ não é uma concentração de massa de Dirac, (ii). Então, existe um conjunto compacto $F \subset \overline{\Omega}$ tal que $0 < \mu(F) < \mu(\overline{\Omega}) \leq 1$, pois $\|\nabla^m u_i\| \leq 1$. Deste modo, tomando

$$O_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : dist(F,x) > \varepsilon\},$$

temos que $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mu(O_\varepsilon) = 1 - \mu(F)$ e assim $0 < \mu(O_\varepsilon) < 1$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Então, tomando $\xi_1, \xi_2 \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tais que $0 \leq \xi_1, \xi_2 \leq 1$

$$\begin{cases} \xi_1 \equiv 1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega} \cap O_{\varepsilon/2} \quad \text{e} \quad \xi_1 \equiv 0 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega} \setminus O_\varepsilon. \\ \xi_2 \equiv 1 \quad \text{em} \quad \overline{\Omega} \cap O_\varepsilon^c \quad \text{e} \quad \xi_2 \equiv 0 \quad \text{em} \quad F. \end{cases}$$

e

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega |\nabla^m(\xi_1 u_i)|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\xi_1|^p \, \mathrm{d}x \leq \mu(O_\varepsilon) < 1,$$

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega |\nabla^m(\xi_2 u_i)|^p \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega |\xi_2|^p \, \mathrm{d}x \leq \mu(\Omega \setminus F) < 1.$$

Portanto, pela desigualdade de Adams, teremos que existe $\gamma > 1$ tal que

$$\int_F e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p'}} \, \mathrm{d}x \leq C' < \infty \qquad \text{e} \qquad \int_{\Omega\setminus F} e^{\beta_0 \gamma |u_i|^{p'}} \, \mathrm{d}x \leq C' < \infty,$$

o que prova o caso (ii).

A prova do caso (iii) é dado pela Proposição 1.3.1. $\square$

CAPÍTULO 2

Problemas Elítpicos Envolvendo Derivadas de Ordem Superior e Crescimento Crítico em Domínios Limitados

2.1 Introdução

Neste capítulo, usaremos o Princípio de Concentração Compacidade provado no Capítulo 1 para estudar o intervalo onde o funcional

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\Delta^k u|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x, \qquad u \in W_0^{m,p}(\Omega), \quad m = 2k, \tag{2.1.1}$$

satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, em que Ω é um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau$. Sabemos que este é o ponto mais delicado na aplicação de teoremas do tipo mini-max para provar a existência de pontos críticos de funcionais associados a problemas variacionais.

Aqui aplicaremos o Teorema do passo do Montanha e obteremos um ponto crítico para o funcional J no nível do passo da montanha, i.e.,

$$J(u) = c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], W_0^{m,p}(\Omega)\right) : \gamma(0) = 0 \text{ e } J(\gamma(1)) < 0\}$.

Estamos interessados na condição de Palais-Smale para o funcional J quando, como em [29, 27], a não linearidade $f(x,s)$ possui crescimento máximo em s. Mais precisamente, seguindo as linhas de [13, 18] e motivado pela desigualdade de Adams (1.1.2), dizemos que $f(x,s)$ tem *crescimento subcrítico exponencial* no infinito quando

$$\lim_{|s|\to+\infty} f(x,s)e^{-\alpha|s|^{p'}} = 0 \qquad \text{para todo} \quad \alpha > 0,$$

e $f(x,s)$ tem *crescimento crítico exponencial* no infinito, quando existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to+\infty} f(x,s)e^{-\alpha|s|^{p'}} = \begin{cases} 0, & \text{para todo} \quad \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \text{for all} \quad \alpha < \alpha_0, \end{cases} \tag{2.1.2}$$

uniformemente em $x \in \Omega$, onde $p' = p/(p-1)$. Restringiremos nossas discussões ao caso em que $f(x,s)$ tem crescimento crítico exponencial. Assumiremos ainda que $p \geq 2$ e f satisfaz as seguintes condições:

(F_1) $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(x,0) = 0$;

(F_2) $\exists R > 0$ e $M > 0$ tal que $\forall |t| \geq R$, $\forall x \in \Omega$

$$0 < F(x,t) = \int_0^t f(x,\tau)d\tau \leq M|f(x,t)|;$$

(F_3) $0 < F(x,t) \leq \frac{1}{p} f(x,t)t$ para todo $(x,t) \in \Omega \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Note que, pelas condições acima, segue que para cada $\theta > 0$ existem $t_\theta > 0$ e $C_\theta > 0$ tais que

$$\theta F(x,t) - f(x,t)t \leq 0 \quad \text{para todo } x \in \Omega \text{ e } |t| > t_\theta. \tag{2.1.3}$$

De fato, por (F_2) e (F_3), basta tomar $t_\theta \geq \max\{\theta M, R\}$. E ainda como f possui crescimento crítico, existem $C > 0$ e $\alpha > \alpha_0$ tais que

$$|f(x,t)| \leq Ce^{\alpha t^{p'}}, \qquad \forall (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{2.1.4}$$

Sob as hipóteses (F_2) e (F_3) o funcional J está bem definido em $W_0^{m,p}(\Omega)$ e é de classe C^1 (Veja Apêndice). Além disso, usando o Teorema da Divergência, prova-se que pontos críticos de J correspondem às soluções fracas do problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta^k(|\Delta^k u|^{p-2}\Delta^k u) = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ D^\alpha u = 0 & \text{em} \quad \partial\Omega \quad 0 \leq |\alpha| < m, \end{cases} \tag{2.1.5}$$

no seguinte sentido

$$\int_\Omega |\Delta^k u|^{p-2}\Delta^k u \Delta^k \varphi \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u)\varphi \mathrm{d}x, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

O estudo deste tipo de problema tem sido bastante frequente nos últimos anos, citamos [22, 24, 25, 38] onde os autores estudam o problema (2.1.5) no caso em que $p = 2$. Citamos ainda o trabalho de O. Lakkis [29] e N. Lam e G. Lu [27], onde os autores, motivados pela desigualdade de Adams, estudaram o problema (2.1.5), ainda com $p = 2$, para o caso em que a não linearidade $f(x,s)$ possui crescimento máximo em s.

Aqui, aplicamos o Teorema 1.1.1 para generalizarmos estes resultados e ainda obtermos uma solução no nível do passo da montanha.

Agora, enunciamos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 2.1.1. *Suponha que f tem crescimento crítico em Ω e satisfaz* $(\mathrm{F}_1), (\mathrm{F}_2), (\mathrm{F}_3)$. *Mais ainda, assumindo que*

$$(\mathrm{F}_4) \qquad \limsup_{t\to 0^+} \frac{pF(x,t)}{t^p} < \lambda_1, \quad \textit{uniformemente em} \quad x \in \Omega,$$

onde $\lambda_1 = \inf\{\|\nabla^m u\|_p^p : u \in W_0^{m,p}(\Omega), \|u\|_p^p = 1\}$, *e que*

$$(\mathrm{F}_5) \qquad \lim_{t\to+\infty} tf(x,t)e^{-\alpha_0 t^{p'}} \geq \gamma_0 > \frac{n}{d^n \omega_{n-1}(p-1)}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{p-1},$$

onde d é o raio da maior bola contida em Ω, então o funcional J possui ponto um crítico não trivial no nível do passo da montanha em $W_0^{m,p}(\Omega)$.

2.2 Condição de Compacidade de Palais-Smale

Consideremos as seguintes propriedades das sequências de Palais-Smale do funcional J :

Lema 2.2.1. *Seja $(u_i) \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale, isto é,*

$$J(u_i) \to c \qquad \text{e} \qquad J'(u_i) \to 0 \quad \textit{quando} \quad i \to \infty \quad \textit{em} \quad W^{-m,p'}.$$

Então, a menos de subsequência, existe $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ tal que

$$f(x,u_i) \to f(x,u) \qquad \textit{em} \quad L^1(\Omega),$$

e

$$|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \rightharpoonup |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u.$$

Demonstração. Suponha que $(u_i) \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ seja uma sequência de Palais-Smale, i.e.,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla^m u_i|^p \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u_i)\mathrm{d}x \to c, \tag{2.2.1}$$

$$\left|\int_\Omega |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \nabla^m v\, \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u_i)v\, \mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon_i \|\nabla^m v\|_p, \tag{2.2.2}$$

para todo $v \in W_0^{p,m}(\Omega)$, onde $\varepsilon_i \to 0$ com $i \to \infty$. De (2.2.1) e (2.2.2), para algum $\theta > p$, com

$v = u_i$, obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla^m u_i|^p \, \mathrm{d}x - \varepsilon_i \|\nabla^m u_i\|_p \leq C + \int_\Omega (\theta F(x,u_i) - f(x,u_i)u_i) \, \mathrm{d}x.$$

Esta desigualdade, juntamente com (2.1.3) e (F_1), fornece que (u_i) é uma sequência limitada em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, podemos considerar que (u_i) satisfaz

$$\begin{array}{lll} u_i \rightharpoonup u & em & W_0^{m,p}(\Omega), \\ u_i \to u & em & L^q(\Omega), \text{ para } \quad q \geq 1, \\ u_i(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em} & \Omega. \end{array}$$

Assim usando [13, Lema 2.1] temos que $f(x,u_i) \to f(x,u)$ em $L^1(\Omega)$.

Agora provaremos que $|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \rightharpoonup |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u$. Para tanto, podemos considerar que

$$|\nabla^m u_i - \nabla^m u|^p \to \mu \quad \text{em} \quad \mathscr{D}'(\Omega)$$

e

$$|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \rightharpoonup V \quad \text{em} \quad L^p(\Omega).$$

Dado $\eta > 0$, definimos $\mathscr{A}_\eta$ por

$$\mathscr{A}_\eta := \{x \in \overline{\Omega} : \forall r > 0, \ \mu(B_r(x) \cap \overline{\Omega}) \geq \eta\}.$$

Note que $\mathscr{A}_\eta$ é um conjunto finito. Caso contrário, existiria uma sequência (x_i) de pontos distintos em $\mathscr{A}_\eta$ satisfazendo

$$\mu(B_r(x_i) \cap \overline{\Omega}) \geq \eta, \qquad \forall r > 0,$$

e como consequência $\mu(\{x_i\}) > \eta$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Portanto, $\mu(\mathscr{A}_\eta) = \infty$, que é uma contradição com o fato de

$$\mu(\mathscr{A}_\eta) = \lim_{i \to \infty} \int_{\mathscr{A}_\eta} |\nabla^m u_i|^p \, \mathrm{d}x \leq C < \infty.$$

Assim $\mathscr{A}_\eta = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Vejamos agora que, se escolhermos $\eta > 0$ com $\eta^{1/(p-1)}\beta < \beta_0$ teremos que

$$\lim_{i \to \infty} \int_K f(x,u_i)u_i \, \mathrm{d}x = \int_K f(x,u)u \, \mathrm{d}x,$$

qualquer que seja K relativamente compacto em $\overline{\Omega} \setminus \mathscr{A}_\eta$. De fato, dado $x_0 \in K$, tome $r_0 > 0$ tal que $\mu(B_{r_0}(x_0) \cap \overline{\Omega}) < \eta$. Seja agora $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ em $B_{r_0/2}(x_0) \cap \overline{\Omega}$

e $\varphi \equiv 0$ em $\overline{\Omega} \setminus B_{r_0}(x_0)$. Assim,

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |\nabla^m(\varphi u_i - \varphi u)|^p \, \mathrm{d}x = \int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \varphi^p d\mu \leq \mu(B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}) < \eta,$$

pois, pela imersão compacta de $W^{m,p}(\Omega)$ em $W^{m-1,p}(\Omega)$, $D^i u \to 0$ fortemente em $L^p(\Omega)$, para $0 \leq 1 \leq m-1$. Assim, por (2.1.4), obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_0/2}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_i)|^q \, \mathrm{d}x &\leq \int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x,\varphi u_i)|^q \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{q\beta|\varphi u_i|^{p'}} \, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{q(1+\delta)^{p'}\beta|\varphi u_i - \varphi u|^{p'} + q(1+1/\delta)^{p'}\beta|\varphi u|^{p'}} \, \mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{rq(1+\delta)^{p'}\beta|\varphi u_i - \varphi u|^{p'}} \mathrm{d}x\right)^{1/r} \left(\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{r'q(1+1/\delta)^{p'}\beta|\varphi u|^{p'}} \mathrm{d}x\right)^{1/r'}
\end{aligned}$$

qualquer que seja $\delta > 0$, onde utilizamos a seguinte desigualdade elementar

$$(a+b)^{p'} \leq (1+\delta)^{p'} a^{p'} + (1+1/\delta)^{p'} b^{p'}$$

quaisquer que sejam os números reais $a, b \geq 0$. Deste modo, para algum $q > 1$, $\delta > 0$, $r > 1$ e i suficientemente grande,

$$\left(\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |\nabla^m(\varphi u_i - \varphi u)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/(p-1)} rq(1+\delta)^{p'} < \eta^{1/(p-1)}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_i)|^q \, \mathrm{d}x &\leq \left(\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{\eta^{1/(p-1)}\beta\left(\frac{|\varphi u_i - \varphi u|}{\|\varphi u_i - \varphi u\|_p}\right)^{p'}} \mathrm{d}x\right)^{1/r} \left(\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{r'q(1+1/\delta)^{p'}\beta|\varphi u|^{p'}} \mathrm{d}x\right)^{1/r'} \\
&\leq \left(\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{\beta_0\left(\frac{|\varphi u_i - \varphi u|}{\|\varphi u_i - \varphi u\|_p}\right)^{p'}} \mathrm{d}x\right)^{1/r} \left(\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} e^{r'q(1+1/\delta)^{p'}\beta|\varphi u|^{p'}} \mathrm{d}x\right)^{1/r'}
\end{aligned}$$

e, pela desigualdade de Adams (1.1.2), temos

$$\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_i)|^q \, \mathrm{d}x \leq C < \infty, \qquad \forall i$$

e para algum $q > 1$. Assim, pelo Teorema de Convergência de Vitali, $f(x,u_i) \to f(x,u)$ em

$L^q(B_{r_0/2}(x_0)\cap\overline{\Omega})$. Logo, como $u_i \to u$ em $L^r(\Omega)$ para todo $r \geq 1$,

$$\int_{B_{r_0/2}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_i)u_i - f(x,u)u| \,\mathrm{d}x \leq \int_{B_{r_0/2}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_i) - f(x,u)||u| \,\mathrm{d}x + \int_{B_{r_0/2}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_i)||u_i - u| \,\mathrm{d}x,$$

tende à 0, isto é,

$$\lim_{i\to\infty} \int_{B_{r_0/2}(x_0)\cap\overline{\Omega}} f(x,u_i)u_i \,\mathrm{d}x = \int_{B_{r_0/2}(x_0)\cap\overline{\Omega}} f(x,u)u \,\mathrm{d}x. \tag{2.2.3}$$

Seja $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno, de modo que $B_{\varepsilon_0}(x_j)\cap B_{\varepsilon_0}(x_l) = \varnothing$, sempre que $j \neq l$. Para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, seja $\varphi_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$,

$$\varphi_\varepsilon \equiv 0 \qquad \text{em} \qquad \bigcup_{j=1}^m B_{\varepsilon/2}(x_j)$$

e

$$\varphi_\varepsilon \equiv 1 \qquad \text{em} \qquad \overline{\Omega}\setminus \bigcup_{j=1}^m B_{\varepsilon}(x_j)$$

Usando (2.2.2) para $v = \varphi_\varepsilon u_i$ e para $v = \varphi_\varepsilon u$ temos

$$\int_\Omega |\nabla^m u_i|^p \varphi_\varepsilon + \sum_{j=1}^m |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \nabla^{m-j} u_i \nabla^j \varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon f(x,u_i)u_i \leq \varepsilon_i \|\nabla^m(\varphi_\varepsilon u_i)\|_p, \tag{2.2.4}$$

e

$$\int_\Omega -|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \nabla^m u \varphi_\varepsilon - \sum_{j=1}^m |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \nabla^{m-j} u \nabla^j \varphi_\varepsilon + \varphi_\varepsilon f(x,u_i)u \leq \varepsilon_i \|\nabla^m(\varphi_\varepsilon u)\|_p, \tag{2.2.5}$$

Agora, como $g(v) = |v|^p$ é estritamente convexa para $p \geq 2$, temos que

$$0 \leq \left(|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i - |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u\right)(\nabla^m u_i - \nabla^m u),$$

e assim, tomando $\Omega_\varepsilon = \overline{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^m B_\varepsilon(x_j)$,

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i - |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u\right)(\nabla^m u_i - \nabla^m u)\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\Omega} \left(|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i - |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u\right)(\nabla^m u_i - \nabla^m u)\varphi_\varepsilon\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\Omega} |\nabla^m u_i|^p \varphi_\varepsilon - |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \nabla^m u \varphi_\varepsilon - |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u \nabla^m u_i \varphi_\varepsilon + |\nabla^m u_i|^p \varphi_\varepsilon\ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Deste modo, de (2.2.4) e (2.2.5), temos

$$\begin{aligned}
0 &\leq \int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i - |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u\right)(\nabla^m u_i - \nabla^m u)\ \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\Omega} \left(\sum_{j=1}^m |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \nabla^{m-j} u \nabla^j \varphi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon f(x,u_i)u \right) \mathrm{d}x + \varepsilon_i \|\nabla^m(\varphi_\varepsilon u)\|_p \\
&\qquad + \int_{\Omega} \left(\varphi_\varepsilon f(x,u_i)u_i - \sum_{j=1}^m |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \nabla^{m-j} u_i \nabla^j \varphi_\varepsilon \right) \mathrm{d}x + \varepsilon_i \|\nabla^m(\varphi_\varepsilon u_i)\|_p \\
&\qquad\quad + \int_{\Omega} \left(|\nabla^m u_i|^p \varphi_\varepsilon - |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u \nabla^m u_i \varphi_\varepsilon\right)\ \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega} |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \sum_{j=1}^m \nabla^j \varphi_\varepsilon \left(\nabla^{m-j} u - \nabla^{m-j} u_i\right)\ \mathrm{d}x + \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon f(x,u_i)(u_i - u)\ \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u (\nabla^m u_i - \nabla^m u)\ \mathrm{d}x + \varepsilon_i \|\nabla^m(\varphi_\varepsilon u)\|_p + \varepsilon_i \|\nabla^m(\varphi_\varepsilon u_i)\|_p \\
&= I_1 + I_2 + I_2 + \varepsilon_i \|\nabla^m(\varphi_\varepsilon u)\|_p + \varepsilon_i \|\nabla^m(\varphi_\varepsilon u_i)\|_p
\end{aligned}$$

Vejamos que I_1, I_2 e I_2 tendem a 0 com i tendendo para infinito. De fato, no caso de I_1, como $\||\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i\|_{p'} = \|\nabla^m u_i\|_p$, que é uniformemente limitado, temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \sum_{j=1}^m \nabla^j \varphi_\varepsilon \left(\nabla^{m-j} u - \nabla^{m-j} u_i\right)\ \mathrm{d}x \leq \tilde{C} \|\nabla^{m-j} u - \nabla^{m-j} u_i\|_p,$$

e, por $\nabla^{m-j} u_i \to \nabla^{m-j} u$ em $L^p(\Omega)$, I_1 tende a 0 com i tendendo para infinito.

No caso de I_2, como $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon) \subset \overline{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^m B_{\varepsilon/2}(x_j)$, segue de (2.2.3) que

$$\int_{\Omega} \varphi_\varepsilon |f(x,u_i)(u_i - u)|\ \mathrm{d}x \leq \int_{\overline{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^m B_{\varepsilon/2}(x_j)} |f(x,u_i)(u_i - u)|\ \mathrm{d}x \to 0,$$

com i tendendo ao infinito.

A terceira integral I_3 tende a 0 pois $\nabla^m u_i \rightharpoonup \nabla^m u$ em $L^p(\Omega)$ e $\||\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u\|_{p'} = \|\nabla^m u\|_p$. Portanto,

$$\int_{\Omega_\varepsilon} \left(|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i - |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u\right)(\nabla^m u_i - \nabla^m u)\ \mathrm{d}x \to 0,$$

para todo $\varepsilon > 0$. Por fim $\nabla^m u_i \to \nabla^m u$ q.t.p. em Ω e, assim,

$$|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \rightharpoonup V = |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u,$$

o que conclui a prova do teorema. $\square$

2.3 Geometria do Passo da Montanha

Para provar o Teorema 2.1.1, primeiramente mostraremos que J possui a geometria do passo da montanha.

Lema 2.3.1. *Suponha que f tem crescimento crítico em Ω e satisfaz* (F_1), (F_2) *e* (F_3). *Então,*

$$J(tu) \to -\infty \qquad \textit{com} \qquad t \to +\infty,$$

para todo $u \in W_0^{m,p}(\Omega) \setminus \{0\}$.

Demonstração. Por (F_2), existem $M > 0$ e $C > 0$ de modo que

$$F(x,s) \geq Ce^{M|s|} - C, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Assim, dado um $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$ qualquer, existe $c > 0$ tal que

$$F(x,u) \geq c|u|^q \qquad \Rightarrow \qquad J(tu) \leq \frac{t^p}{p}\int_\Omega |\nabla^m u|^p \mathrm{d}x - ct^q \int_\Omega |u|^q \mathrm{d}x - C|\Omega|,$$

para $q > p$ e $t > 0$. Portanto, $J(tu) \to -\infty$ com $t \to +\infty$, para todo $u \in W_0^{m,p}(\Omega)$. $\square$

Lema 2.3.2. *Suponha que f tem crescimento crítico em Ω e satisfaz* (F_1) *e* (F_4). *Então, existem δ e $\rho > 0$ de modo que*

$$J(u) \geq \delta, \qquad \textit{sempre que} \quad u \in W_0^{m,p}(\Omega) \quad \textit{e} \quad \|\nabla^m u\|_p = \rho.$$

Demonstração. Usando (F_1), (F_4) e o crescimento crítico de f, podemos escolher $\lambda < \lambda_1$ tal que

$$F(x,s) \leq \frac{\lambda}{p}|s|^p + Ce^{\alpha_0|s|^{p'}}|s|^q,$$

para todo $(x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}$ e para $q > p$. Agora, pela desigualdade de Hölder e (1.1.2), obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\alpha_0|u|^{p'}}|u|^q \,\mathrm{d}x &\leq \left(\int_\Omega e^{\alpha_0 s'|u|^{p'}} \,\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u|^{sq} \,\mathrm{d}x\right)^{1/s} \\ &\leq C\left(\int_\Omega |u|^{sq} \,\mathrm{d}x\right)^{1/s},\end{aligned}$$

para

$$\|\nabla^m u\|_p \leq \sigma,$$

onde σ é tal que

$$\sigma \leq \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0 s'}\right)^{1/p'}.$$

Então, da hipótese (F_4) e da imersão contínua de Sobolev, segue que

$$J(u) \geq \frac{1}{p}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|\nabla^m u\|_p^p - C\|\nabla^m u\|_p^q.$$

Como $\lambda < \lambda_1$ e $q > p$, podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$J(u) \geq \delta,$$

sempre que $\|\nabla^m u\|_p^p = \rho$, para algum $\delta > 0$. □

2.4 Estimativa do Nível do Passo da Montanha

Sob as hipóteses assumidas no funcional J, iremos obter a seguinte estimativa para o nível do passo da montanha

$$c := \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)) < \frac{1}{p}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{p-1},$$

onde

$$\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], W_0^{m,p}(\Omega)\right) : \ \gamma(0) = 0 \text{ e } J(\gamma(1) < 0)\}.$$

Para tanto, precisamos apenas mostrar a existência de $\omega \in W_0^{m,p}(\Omega)$ tal que $\|\omega\| = 1$ e

$$\max\{J(t\omega) : t \geq 0\} < \frac{1}{p}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{p-1}. \tag{2.4.1}$$

No caso em que $m = 1$, usualmente se mostra que para algum $i \in \mathbb{N}$ a função de Moser

$$\omega_i(x) = \begin{cases} (\log i)^{\frac{n-1}{n}}, & \text{se} \quad |x| \leq \frac{1}{i} \\ (\log i)^{-\frac{1}{n}} \log\frac{1}{|x|}, & \text{se} \quad \frac{1}{i} \leq |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad 1 \leq |x|, \end{cases}$$

satisfaz a desigualdade (2.4.1). Para $m \geq 2$, modificaremos a função usada no caso $m = 1$, usando um truncamento suave, como foi feito em [2]. Seja $\Phi(t) \in C^\infty[0,1]$ tal que

$$\begin{aligned}
&\Phi(0) = \Phi'(0) = \cdots = \Phi^{(m-1)}(0) = 0,\\
&\Phi(1) = \Phi'(1) = 1 \qquad \Phi''(1) = \Phi'''(1) = \cdots = \Phi^{(m-1)}(1) = 0.
\end{aligned}$$

Definimos assim

$$H(t) = \begin{cases} \frac{1}{i}\Phi(it), & \text{se} \quad t \leq \frac{1}{i}\\ t, & \text{se} \quad \frac{1}{i} \leq t \leq 1 - \frac{1}{i}\\ 1 - \frac{1}{i}\Phi(i(1-t)), & \text{se} \quad 1 - \frac{1}{i} \leq t \leq 1\\ 1, & \text{se} \quad 1 \leq t, \end{cases}$$

e

$$\psi_i(r) = H\left((\log i)^{-1} \log \frac{1}{r}\right).$$

Note que $\psi_i(|x|) \in W_0^{m,p}(B)$, onde B é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem, $\psi_i(|x|) = 1$ para $|x| \leq 1/i$ e, como foi provado em [2], temos

$$\|\nabla^m \psi_i\|_p = n^{\frac{1-p}{p}} \beta_0^{\frac{p-1}{p}} (\log i)^{\frac{1-p}{p}} A_i,$$

onde

$$A_i \leq \left[1 + 2\frac{1}{i}\left(\|\Phi'\|_\infty + O\left(\left((\log i)^{-1}\right)^2\right)\right)\right].$$

Com isso, $0 \leq \lim_{i\to\infty} A_i \leq 1$. Assim, sendo $x_0 \in \Omega$ e $r_0 > 0$, o maior valor de $r > 0$ tal que $B(x_0, r) \subset \Omega$, definimos

$$\Psi_i(x) = \begin{cases} \frac{\psi_i(|x_0 - x|)}{\|\nabla^m \psi_i\|_p}, & \text{se} \quad x \in B(x_0, r_0)\\ 0, & \text{se} \quad x \in \Omega \setminus B(x_0, r_0). \end{cases}$$

Agora, temos o seguinte resultado:

Lema 2.4.1. *Suponha que* (F_1), (F_2), (F_3) *são satisfeitas e assuma que exista* $r > 0$ *tal que*

$$\lim_{t\to+\infty} t f(x,t) e^{-\alpha_0 t^{p'}} \geq \gamma_0 > \frac{n}{r^n \omega_{n-1}(p-1)} \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{n-1}, \tag{2.4.2}$$

uniformemente para quase todo $x \in \Omega$ *e* $B = B(x_0, r) \subset \Omega$ *para algum* $x_0 \in \Omega$. *Então, existe* i *tal que*

$$\max\{J(t\Psi_i) : t \geq 0\} < \frac{1}{p}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{p-1}.$$

Demonstração. Tome $r = r_0$ e suponha, por contradição, que

$$\max\{J(t\Psi_i) : t \geq 0\} \geq \frac{1}{p}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{p-1}, \quad \forall\, i.$$

Assim, como $J(t\Psi_i) \to -\infty$, podemos tomar $t_i > 0$ de modo que

$$J(t_i\Psi_i) = \max\{J(t\Psi_i) : t \geq 0\}, \tag{2.4.3}$$

o que implica que

$$\frac{1}{p}t_i^p - \int_\Omega F(x, t_i\Psi_i)\mathrm{d}x \geq \frac{1}{p}\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{p-1}.$$

De $F \geq 0$, temos

$$t_i^p \geq \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{p-1}, \tag{2.4.4}$$

e desde que $\frac{d}{dt}J(t\Psi_i)\big|_{t=t_i} = 0$, temos

$$t_i^p = \int_\Omega t_i\Psi_i f(x, t_i\Psi_i)\mathrm{d}x. \tag{2.4.5}$$

Agora, de (2.4.2), dado $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$uf(x,u) \geq (\gamma_0 - \varepsilon)e^{\alpha_0 t^{p'}} \qquad \forall t \geq R_\varepsilon, \tag{2.4.6}$$

e, por (2.4.4), sendo i suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned}
t_i^p &\geq (\gamma_0 - \varepsilon)\int_{B(x_0, \frac{r}{i})} e^{\alpha_0 t_i^{p'}|\Psi_i(x)|^{p'}}\mathrm{d}x \\
&\geq (\gamma_0 - \varepsilon)\int_{B(x_0, \frac{r}{i})} e^{\alpha_0 t_i^{p'}|\Psi_i(x)|^{p'}}\mathrm{d}x \\
&= (\gamma_0 - \varepsilon)\frac{\omega_{n-1}}{n}\left(\frac{r}{i}\right)^n e^{\frac{\alpha_0 t_i^{p'} n\log i}{\beta_0 A_i^{p'}}} = (\gamma_0 - \varepsilon)\frac{\omega_{n-1}}{n} r^n e^{\left(\frac{\alpha_0 t_i^{p'}}{\beta_0 A_i^{p'}} - 1\right)n\log i}
\end{aligned}$$

Mas por (2.4.4) e $c \leq 1$ a desigualdade acima é verdade se e somente se

$$\lim_{i\to\infty} A_i = 1 \qquad \text{e} \qquad t_i \to \left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{2.4.7}$$

Denotando

$$B_i = \{x \in B(x_0, r) : t_i\Psi_i \geq R_\varepsilon\},$$

de (2.4.5) e (2.4.6) segue que

$$t_i^p \geq (\gamma_0-\varepsilon)\int_{B(x_0,r)} e^{\alpha_0 t_i^{p'}|\Psi_i(x)|^{p'}}\mathrm{d}x+\int_{B_i} t_i\Psi_i f(x,t_i\Psi_i)\mathrm{d}x-(\gamma_0-\varepsilon)\int_{B_i} e^{\alpha_0 t_i^{p'}|\Psi_i(x)|^{p'}}\mathrm{d}x. \quad (2.4.8)$$

Como $\Psi_i(x)\to 0$ para todo $x\in B(x_0,r)$, temos que $\chi_{B_i}\to 0$ q.t.p. em $B(x_0,r)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue que

$$\lim_{i\to\infty}\int_{B_i} t_i\Psi_i f(x,t_i\Psi_i)\mathrm{d}x\to 0$$

e

$$\lim_{i\to\infty}\int_{B_i} e^{\alpha_0 t_i^{p'}|\Psi_i(x)|^{p'}}\mathrm{d}x\to \frac{\omega_{n-1}r^n}{n}.$$

Assim, usando (2.4.4) e a definição de Ψ_i,

$$\begin{aligned}\int_{B(x_0,r)} e^{\alpha_0 t_i^{p'}|\Psi_i(x)|^{p'}}\mathrm{d}x &\geq \int_{B(x_0,r)} e^{\beta_0|\Psi_i(x)|^{p'}}\mathrm{d}x \geq r^n\int_{B(x_0,1)\setminus B(x_0,\frac{1}{i})} e^{\beta_0|\Psi_i(x)|^{p'}}\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{\omega_{n-1}}{n}r^n\int_{\frac{1}{i}}^{1-\frac{1}{i}} n\log i\; e^{(\frac{t^{p'}}{A_i^{p'}}-t)n\log i}\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

onde fizemos a seguinte mudança de variável $t=(\log i)^{-1}\log|x|^{-1}$. Então, de (2.4.7) e (2.4.8) segue que

$$\left(\frac{\beta_0}{\alpha_0}\right)^{p-1}\geq(\gamma_0-\varepsilon)\frac{\omega_{n-1}}{n}r^n(p-1), \quad \forall\,\varepsilon>0.$$

o que é uma contradição por (2.4.2). Portanto, o resultado segue. □

Observação 2.4.2. *Facilmente, podemos verificar que*

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\frac{1}{i}}^{1-\frac{1}{i}} n\log i\; e^{\left(\frac{t^{p'}}{\xi_i^{p'}}-t\right)n\log i}\mathrm{d}t=p,$$

2.5 Existência de Ponto Crítico para o Funcional J

Primeiramente, provaremos a seguinte condição de compacidade de Palais-Smale.

Proposição 2.5.1. *Suponha que f tem crescimento crítico em Ω e satisfaz* (F_1), (F_2) *e* (F_3). *Então o funcional J satisfaz a condição $(PS)_c$ para $c\in(-\infty,\frac{1}{p}(\beta_0/\alpha)^{p-1})$, isto é, toda sequência $(u_i)\subset W_0^{m,p}(\Omega)$ tal que*

$$J(u_i)\to c \qquad \text{e} \qquad J'(u_i)\to 0 \quad \textit{quando} \quad i\to\infty,$$

admite uma subsequência convergente em $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Demonstração. Suponha que $(u_i) \subset W_0^{m,p}(\Omega)$ é uma sequência $(PS)_c$ para algum $c \in (-\infty, \frac{1}{p}(\beta_0/\alpha)^{p-1})$, i.e.,

$$\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla^m u_i|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u_i) \, \mathrm{d}x \to c, \tag{2.5.1}$$

$$\left|\int_\Omega |\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \nabla^m v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u_i)v \, \mathrm{d}x\right| \leq \varepsilon_i \|\nabla^m v\|_p, \tag{2.5.2}$$

para todo $v \in W_0^{p,m}(\Omega)$, onde $\varepsilon_i \to 0$ com $n \to \infty$. De (2.5.1) e (2.5.2) com $v = u_i$, para $\theta > p$, obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla^m u_i|^p \, \mathrm{d}x - \int_\Omega (\theta F(x,u_i) - f(x,u_i)u_i) \, \mathrm{d}x \leq C + \varepsilon_i \|\nabla^m u_i\|_p.$$

Esta desigualdade juntamente com (2.1.3) fornece que (u_i) é uma sequência limitada em $W_0^{m,p}(\Omega)$. Assim, a menos de subsequência, podemos considerar que (u_i) satisfaz

$$\begin{array}{lll} u_i \rightharpoonup u & em & W_0^{m,p}(\Omega), \\ u_i \to u & em & L^q(\Omega), \forall q \geq 1, \\ u_i(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em} & \Omega. \end{array}$$

Usando que $f(x,u_i) \to f(x,u)$ em $L^1(\Omega)$, veja [13, Lemma 2.1], junto com (F_2) e o Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado, temos que

$$F(x,u_i) \to F(x,u) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Logo, por (2.5.1) e (2.5.2), obtemos

$$\lim_{i\to\infty} \int_\Omega f(x,u_i)u_i \, \mathrm{d}x = p\left(c + \int_\Omega F(x,u) \, \mathrm{d}x\right). \tag{2.5.3}$$

De (F_3) e (2.5.3), concluímos que $c \geq 0$. Assim usando o Lema 2.2.1 temos

$$|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i \rightharpoonup |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u \quad \text{in} \quad L^{p'}(\Omega), \tag{2.5.4}$$

o que juntamente com (2.5.2) fornece

$$\int_\Omega |\nabla^m u|^{p-2}\nabla^m u \nabla^m \psi \, \mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_\Omega f(x,u_i)\psi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega f(x,u)\psi \, \mathrm{d}x \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Vejamos agora que, por densidade,

$$\lim_{i\to\infty}\int_\Omega f(x,u_i)u\ \mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,u)u\ \mathrm{d}x. \tag{2.5.5}$$

Dado $\varepsilon>0$ existe $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|\nabla^m\varphi-\nabla^m u\|_p<\varepsilon$. Assim

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x,u_i)u\ \mathrm{d}x-\int_\Omega f(x,u)u\ \mathrm{d}x\right|\le\left|\int_\Omega f(x,u_i)(u-\varphi)\ \mathrm{d}x\right|+\left|\int_\Omega f(x,u)(u-\varphi)\ \mathrm{d}x\right|\\ +\|\varphi\|_\infty\int_\Omega|f(x,u_i)-f(x,u)|\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

De (2.5.2), tomando $v=u-\varphi$, segue que

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega f(x,u_i)(u-\varphi)\ \mathrm{d}x\right|&\le\int_\Omega|\nabla^m u_i|^{p-2}\nabla^m u_i\nabla^m(u-\varphi)\ \mathrm{d}x+\varepsilon_i\|\nabla^m(u-\varphi)\|_p\\ &\le\|\nabla^m u_i\|_p\|\nabla^m(u-\varphi)\|_p+\varepsilon_i\|\nabla^m(u-\varphi)\|_p\le C\varepsilon.\end{aligned}$$

De $f(x,u)\in L^q(\Omega)$, para todo $q\ge1$, segue que

$$\left|\int_\Omega f(x,u)(u-\varphi)\ \mathrm{d}x\right|\le\|f(x,u)\|_{p/(p-1)}\|u-\varphi\|_p\le C\|\nabla^m(u-\varphi)\|_p\le C\varepsilon.$$

Por fim, como $f(x,u_i)\to f(x,u)$ em $L^1(\Omega)$, (2.5.5) fica provada. Deste modo, de (2.5.5) e (2.5.4) temos

$$\int_\Omega|\nabla^m u|^p\ \mathrm{d}x=\int_\Omega f(x,u)u\ \mathrm{d}x\ge p\int_\Omega F(x,u)\ \mathrm{d}x.$$

Portanto $J(u)\ge0$. Como $F(x,u_i)\to F(x,u)$ em $L^1(\Omega)$, apenas resta mostrar que

$$J(u)=c.$$

Para isto separamos a prova em três casos.
Caso 1. $c>0$ e $u\not\equiv0$. Pelo Lema de Fatou $J(u)\le c$. Suponha que $J(u)<c$. Então,

$$\|\nabla^m u\|_p^p<p\left(c+\int_\Omega F(x,u)\ \mathrm{d}x\right).$$

Assim, definindo

$$v_i=\frac{u_i}{\|\nabla^m u_i\|_p},$$

e

$$v=\frac{u}{\sqrt[p]{p(c+\int_\Omega F(x,u))}},$$

temos que $v_i \rightharpoonup v$, $\|\nabla^m v_i\| = 1$, $v \not\equiv 0$ e $\|\nabla^m v\|_p^p < 1$. Então, do Teorema 1.1.1 segue que

$$\sup \int_\Omega e^{\beta_0 \gamma |v_i|^{p'}} \, \mathrm{d}x < \infty, \qquad \text{para todo} \quad \gamma < \frac{1}{\left(1 - \|\nabla^m v\|_p^p\right)^{1/(p-1)}}. \tag{2.5.6}$$

Note que, como $c < \frac{1}{p}\,(\beta_0/\alpha)^{p-1}$ e $J(u) \geq 0$, temos

$$q\alpha \|\nabla^m u_i\|_p^{p'} < \beta_0 \left(\frac{c + \int_\Omega F(x,u)\, \mathrm{d}x}{c - J(u)} \right)^{1/(p-1)} = \beta_0 \frac{1}{\left(1 - \|\nabla^m v\|_p^p\right)^{1/(p-1)}},$$

para i suficientemente grande e algum $q > 1$. Assim, de (2.1.4) e (2.5.6) segue que

$$\int_\Omega |f(x,u_i)|^q \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega e^{\alpha q \|\nabla^m u_i\|_p^{p'} |v_i|^{p'}} \, \mathrm{d}x < \tilde{C} < \infty,$$

para i suficientemente grande e algum $q > 1$. Disto segue que

$$\int_\Omega f(x,u_i)(u_i - u) \, \mathrm{d}x \to 0,$$

e desde que

$$J'(u_i)(u_i - u) \to 0 \quad \text{e} \quad |\nabla^m u_i|^{p-2} \nabla^m u_i \rightharpoonup |\nabla^m u|^{p-2} \nabla^m u,$$

temos

$$\|\nabla^m u_i\|_p \to \|\nabla^m u\|_p,$$

o que conclui este caso.
Caso 2. $c > 0$ e $u \equiv 0$. Como $F(x,u_i) \to 0$ segue de (2.5.3) e (2.5.2) que $\|\nabla^m u_i\|_p^p \to c$ e, como $c < \frac{1}{p}\,(\beta_0/\alpha)^{p-1}$ e por (2.1.4), obtemos

$$\int_\Omega |f(x,u_i)|^q \, \mathrm{d}x \leq C \int_\Omega e^{\alpha q \|\nabla^m u_i\|_p^{p'} |v_i|^{p'}} \, \mathrm{d}x,$$

onde $\alpha q \|\nabla^m u_i\|_p^{p'} < \beta_0$ para i suficientemente grande e para algum $q > 1$. Então

$$\int_\Omega f(x,u_i) u_i \, \mathrm{d}x \to 0$$

e assim $\|\nabla^m u_i\|_p \to 0$, o que finaliza este caso.
Caso 3. $c = 0$. Assim,

$$0 \leq J(u) \leq \liminf J(u_i) = 0.$$

Como $F(x,u_i) \to F(x,u)$ em $L^1(\Omega)$ temos que $\|\nabla^m u_i\|_p \to \|\nabla^m u\|_p$ e então $u_i \to u$ em $W_0^{m,p}(\Omega)$, o que conclui este último caso. □

Demonstração. **(Teorema 2.1.1)** Tendo em vista a Proposição 2.5.1 e os Lemas 2.3.1, 2.3.2 e 2.4.1, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha para obter um ponto crítico para o funcional J e assim concluímos a prova. □

CAPÍTULO 3

Desigualdade de Adams em $\mathbb{R}^n$

3.1 Introdução

Neste capítulo, estamos interessados em estudar desigualdades do tipo Adams em domínios não necessariamente limitados do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Mais precisamente, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio qualquer, e $W_0^{m,p}(\Omega)$ o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{j=0}^{m} \|\nabla^j u\|_p^p \right)^{1/p}.$$

em $W^{m,p}(\Omega)$. Considerando $mp = n$, seja

$$\Phi(t) := e^t - \sum_{j=0}^{j_p-2} \frac{t^j}{j!},$$

onde $j_p := \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$. Em [41], B. Ruf e F. Sani provaram uma desigualdade do tipo Adams para m par, a saber:

Teorema E. *([41, Teorema 1.4]) Seja m um número natural par, isto é, $m = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Existe uma constante $C_{m,n} > 0$ tal que*

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,p}(\Omega) \\ \|(-\Delta+I)^k u\|_p \leq 1}} \int_\Omega \Phi(\beta_0 |u|^{p'})\, \mathrm{d}x \leq C_{m,n}, \tag{3.1.1}$$

qualquer que seja o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Além disso, esta desigualdade é ótima, isto é, o supremo acima torna-se infinito quando β_0 e substituído por algum $\beta > \beta_0$.

Em [28], N. Lam e G. Lu estenderam o resultado de Ruf e Sani para m ímpar provando o seguinte resultado:

Teorema F. *([28, Teorema 1.1]) Seja m um número natural ímpar, isto é, $m = 2k+1$ para* *algum $k \in \mathbb{N}$. Existe uma constante $C_{m,n} > 0$ tal que*

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,p}(\Omega) \\ \|\nabla(-\Delta+I)^k u\|_p^p + \|(-\Delta+I)^k u\|_p^p \leq 1}} \int_\Omega \Phi(\beta_0 |u|^{p'})\, \mathrm{d}x \leq C_{m,n},$$

qualquer que seja o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Além disso, esta desigualdade é ótima.

Em [28], os autores também provaram uma versão mais geral do Teorema E and F para o caso em que $p = 2$, a saber:

Teorema G. *([28, Teorema 1.2]) Se $m = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então, dado $\tau > 0$,*

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,2}(\Omega) \\ \|\nabla(-\Delta+\tau I)^k u\|_2 + \tau\|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2 \leq 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta_0 |u|^2} - 1\right) \mathrm{d}x < \infty,$$

qualquer que seja o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Se $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, então, dado $\tau > 0$,

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,2}(\Omega) \\ \|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2 \leq 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta_0 |u|^2} - 1\right) \mathrm{d}x < \infty,$$

qualquer que seja o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Além disso, estas desigualdades são ótimas.

Em uma primeira direção, iremos provar que, quando $\Omega = \mathbb{R}^n$, os supremos nos Teoremas E e F podem ser tomados somente sobre as funções radiais. Mais precisamente, iremos mostra que existe uma sequência maximizante de funções radiais para estes supremos.

Teorema 3.1.1. *Se $m = 2k+1$, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos*

$$\sup_{\substack{u \in W_{rad}^{m,p}(\mathbb{R}^n), \\ \|\nabla(-\Delta+I)^k u\|_p^p + \|(-\Delta+I)^k u\|_p^p \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\beta_0 u^{p'})\, \mathrm{d}x = \sup_{\substack{u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \\ \|\nabla(-\Delta+I)^k u\|_p^p + \|(-\Delta+I)^k u\|_p^p \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\beta_0 u^{p'})\, \mathrm{d}x,$$

se $m = 2k$, para algum $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{\substack{u \in W_{rad}^{m,p}(\mathbb{R}^n), \\ \|(-\Delta+I)^k u\|_p^p \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\beta_0 u^{p'})\, \mathrm{d}x = \sup_{\substack{u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \\ \|(-\Delta+I)^k u\|_p^p \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\beta_0 u^{p'})\, \mathrm{d}x.$$

Em uma segunda direção usaremos o Teorema G para provar o seguinte resultado

Teorema 3.1.2. *Sejam $\beta < \beta_0 = \frac{n 2^n \pi^n}{\omega_{n-1}}$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio qualquer, onde $n = 2m$. Então* *existe uma constante* $C_{\beta,m,n} > 0$ *tal que*

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,2}(\Omega)\\ \|u\|_2^2+\|\nabla^m u\|_2^2\leq 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta|u|^2}-1\right)\,\mathrm{d}x < C_{\beta,m,n}. \tag{3.1.2}$$

Além disso, se $\beta > \beta_0$ *o supremo acima torna-se infinito.*

Observamos que não sabemos se (3.1.2) vale para o caso crítico, $\beta = \beta_0$.

3.2 Existência de Sequência Radial Maximizante

Para provar o Teorema 3.1.1, iremos fazer uso de um lema radial, similar ao Lema Radial A.II de H. Berestycki e P.-L. Lions em [8], e do princípio de comparação de G. Trombetti e J. L. Vazquez [46], que possui um papel crucial neste capítulo por permitir-nos tratar o espaço de Sobolev de ordem superior com um tipo especial de simetrização.

Lema 3.2.1. *Seja* $B_R \subset \mathbb{R}^n$ *a bola de raio* $R > 0$ *centrada em* 0. *Sendo ainda* $p > 1$ *e* $u \in W^{m,p}_{\mathcal{N},rad}(B_R)$, *onde* $mp = n$, *então*

$$\left.\begin{aligned} |u(x)| &\leq \frac{\omega_n^{-1/p}p}{|x|^{(n-1)/p}}\|u\|^p_{W^{m,p}} \\ |\nabla^j u(x)| &\leq \frac{\omega_n^{-1/p}p}{|x|^{(n-1)/p}}\|u\|^p_{W^{m,p}} \end{aligned}\right. \qquad \text{q.t.p. em} \quad B_R\setminus\{0\}, \quad 1\leq j<m.$$

Demonstração. A prova é dividida em duas partes. Para i natural satisfazendo $0 < i < m/2$, como u é radial, tomamos

$$g_0(|x|) = u(x), \qquad g_i(|x|) = \Delta^i u(x).$$

Para l natural satisfazendo $2l+1 < m$, tomamos

$$h_l(|x|) = |g_l'(|x|)| = |\nabla\Delta^l u(x)|.$$

De $u \in W^{m,p}_{\mathcal{N},rad}(B_r)$ segue que $g_i \in W^{1,p}_{0,rad}(B_r)$ e $h_l \in W^{1,p}_{rad}(B_r)$. Assim $g_i(r)$ e $h_i(r)$ podem ser vistas como funções absolutamente contínuas, de onde segue que

$$\begin{aligned} |g_i(r)|^p &\leq p\int_r^R |g_i'(s)||g_i(s)|^{p-1}\mathrm{d}s \leq r^{1-n}p\int_r^R |g_i'(s)||g_i(s)|^{p-1}s^{n-1}\mathrm{d}s \\ &\leq r^{1-n}p\int_r^R \left(|g_i'(s)|^p + |g_i(s)|^p\right)s^{n-1}\mathrm{d}s \\ &\leq r^{1-n}p\|u\|^p_{W^{m,p}}. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|r^{n-1}h_l(r)|^p &\le p\int_0^r |\left(s^{n-1}g_l'(s)\right)'||s^{n-1}g_l'(s)|^{p-1}\mathrm{d}s\\
&\le p\int_0^r s^{p(n-1)}|(n-1)s^{-1}g_l'(s)+g_l''(s)|^p + s^{p(n-1)}|g_l'(s)|^p\mathrm{d}s\\
&\le r^{(p-1)(n-1)}p\int_0^r s^{(n-1)}\left(|(n-1)s^{-1}g_l'(s)+g_l''(s)|^p+|g_l'(s)|^p\right)\mathrm{d}s\\
&\le r^{(p-1)(n-1)}p\|u\|^p_{W^{m,p}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$|g_i(r)| \le r^{(1-n)/p}p\|u\|_{W^{m,p}} \qquad \text{e} \qquad |h_l(r)| \le r^{(1-n)/p}p\|u\|_{W^{m,p}},$$

o que conclui a prova do lema. □

Teorema 3.2.2 (G. Trombetti e J. L. Vazquez, 1985)**.** *Seja $B_R \subset \mathbb{R}^n$ a bola de raio $R>0$ centrada em 0. Sejam $f \in L^p(B_R)$ e $u \in W^{2,p}_{\mathcal{N}}(B_R)$ a única solução forte de*

$$\begin{cases} u-\Delta u = f & \text{em} \quad B_R\\ u=0 & \text{em} \quad \partial B_R.\end{cases}$$

Sejam ainda, $f^* \in L^p(B_R)$ e u^* os rearranjamentos esfericamente simétrico e decrescente de f e u, respectivamente, e $v \in W^{2,p}_{\mathcal{N}}(B_R)$ a única solução forte de

$$\begin{cases} v-\Delta v = f^* & \text{em} \quad B_R\\ v=0 & \text{em} \quad \partial B_R.\end{cases}$$

Então, $v \ge u^*$.

Aplicando de modo iterativo o princípio de comparação de G. Trombetti e J. L. Vazquez temos, agora, uma importante ferramenta para tratar com o espaço de Sobolev de dimensão superior, a qual é dada no resultado a seguir.

Proposição 3.2.3. *Seja $B_R \subset \mathbb{R}^n$ a bola de raio $R>0$ centrada em 0. Sejam $f \in L^p(B_R)$ e $u \in W^{2k,p}_{\mathcal{N}}(B_R)$ a única solução forte de*

$$\begin{cases} (I-\Delta)^k u = f & \text{em} \quad B_R\\ \Delta^j u = u = 0 & \text{em} \quad \partial B_R, \quad j=1,2,\dots,k-1.\end{cases}$$

Sejam ainda, $f^* \in L^p(B_R)$ e u^* os rearranjamentos esfericamente simétrico e decrescente de f

e u, respectivamente, e $v \in W^{m,p}_{\mathcal{N}}(B_R)$ a única solução forte de

$$\begin{cases} (I-\Delta)^k v = f^* & \text{em} \quad B_R \\ \Delta^j v = v = 0 & \text{em} \quad \partial B_R, \quad j = 1,2,\dots,k-1. \end{cases}$$

Então, $v \geq u^*$.

Demonstração. A prova desta proposição segue de forma análoga a prova da Proposição 1.2.4, onde neste caso usamos o Teorema 3.2.2 em lugar do Teorema 1.2.3. □

Com o objetivo de tornar a demonstração mais clara, dividiremos a prova do Teorema 3.1.1 em dois casos, o caso em que $m = 2$, $p = 2$ e o caso geral.

3.2.1 Caso $m = 2$ e $p = 2$

Nosso objetivo aqui é provar a existência de uma sequência radial maximizante em $W^{2,2}_{rad}(\mathbb{R}^4)$. A prova do Teorema 3.1.1, para o caso $m = 2$ e $p = 2$, é uma consequência direta da seguinte proposição:

Proposição 3.2.4. *Existe uma sequência positiva (R_i), onde $R_i \to \infty$ com $i \to \infty$, tal que para $u_i \in W^{2,2}_{0,rad}(B_{R_i})$ satisfazendo $\|u_i - \Delta u_i\|_2^2 = 1$ e*

$$\int_{B_{R_i}} \left(e^{\beta_i u_i^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x = \sup_{\substack{u \in W^{2,2}_{0,rad}(B_{R_i}), \\ \|u-\Delta u\|_2^2 = 1}} \int_{B_{R_i}} \left(e^{\beta_i u^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x,$$

temos

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{\beta_i u_i^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x = \sup_{\substack{u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^4), \\ \|u-\Delta u\|_2^2 = 1}} \int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{32\pi^2 u^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x,$$

onde $\beta_i \nearrow 32\pi^2$ com $i \to \infty$ e u_i é tomado em $W^{2,2}(\mathbb{R}^4)$ como uma extensão natural de u_i.

Denominamos de extensão natural de u_i a função dada por

$$\begin{cases} u_i(x) & \text{se} \quad x \in B_{R_i} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que para provar a proposição é suficiente mostrar que existem $(R_i) \subset \mathbb{R}$ e (z_i) com $R_i \to \infty$, $z_i \in W^{2,2}_{0,rad}(B_{R_i})$ e $\|z_i - \Delta z_i\|_2^2 = 1$, tal que

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_{R_i}} \left(e^{\beta_i z_i^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x = \sup_{\substack{u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^4), \\ \|u-\Delta u\|_2^2 = 1}} \int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{32\pi^2 u^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x, \tag{3.2.1}$$

para $\beta_i \to 32\pi^2$. Para isto, vamos considerar os lemas a seguir.

Lema 3.2.5. *Seja $w_\varepsilon \in W_0^{2,2}(B_{r_\varepsilon})$ tal que $\|w_\varepsilon - \Delta w_\varepsilon\|_2^2 = 1$ e satisfazendo*

$$\int_{B_{r_\varepsilon}} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)w_\varepsilon^2} - 1\right) \mathrm{d}x = \sup_{\substack{w \in W_0^{2,2}(B_{r_\varepsilon}), \\ \|w-\Delta w\|_2^2=1}} \int_{B_{r_\varepsilon}} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)w^2} - 1\right) \mathrm{d}x.$$

Então, tomando $r_\varepsilon \to +\infty$ com $\varepsilon \to 0$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)w_\varepsilon^2} - 1\right) \mathrm{d}x = \sup_{\substack{u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^4), \\ \|u-\Delta u\|_2^2=1}} \int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{32\pi^2 u^2} - 1\right) \mathrm{d}x,$$

onde w_ε é visto em $W_{rad}^{2,2}(\mathbb{R}^4)$ pela extensão natural.

Demonstração. Seja $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^4)$ tal que $0 \le \eta \le 1$, $\eta \equiv 1$ em B_1 e $\eta \equiv 0$ em $\mathbb{R}^4 \setminus B_2$. Então, dado $w \in W^{2,2}(\mathbb{R}^4)$ com $\|w - \Delta w\|_2^2 = 1$, temos

$$\tau^2(L) = \int_{\mathbb{R}^4} |\eta(x/L)w - \Delta(\eta(x/L)w)|^2 \,\mathrm{d}x \to 1, \quad \text{com} \quad L \to +\infty.$$

Agora, dado $L > 0$ fixado, teremos que $r_\varepsilon > 2L$, para $\varepsilon > 0$ pequeno, e assim

$$\int_{B_L} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)(\frac{w}{\tau(L)})^2} - 1\right) \mathrm{d}x \le \int_{B_{2L}} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)(\frac{\eta(x/L)w}{\tau(L)})^2} - 1\right) \mathrm{d}x \le \int_{B_{r_\varepsilon}} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)w_\varepsilon^2} - 1\right) \mathrm{d}x.$$

Isto juntamente com o Lema de Fatou implica que

$$\int_{B_L} \left(e^{(32\pi^2)(\frac{w}{\tau(L)})^2} - 1\right) \mathrm{d}x \le \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)w_\varepsilon^2} - 1\right) \mathrm{d}x.$$

Então, fazendo $L \to +\infty$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{(32\pi^2)w^2} - 1\right) \mathrm{d}x \le \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)w_\varepsilon^2} - 1\right) \mathrm{d}x,$$

o que conclui o lema. □

Lema 3.2.6. *Seja $v_\varepsilon \in W_{\mathcal{N}}^{2,2}(B_{r_\varepsilon})$ tal que $\|v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon\|_2^2 = 1$ e satisfazendo*

$$\int_{B_{r_\varepsilon}} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)v_\varepsilon^2} - 1\right) \mathrm{d}x = \sup_{\substack{v \in W_{\mathcal{N}}^{2,2}(B_{r_\varepsilon}), \\ \|v-\Delta v\|_2^2=1}} \int_{B_R} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)v^2} - 1\right) \mathrm{d}x.$$

Então, tomando $r_\varepsilon \to +\infty$ com $\varepsilon \to 0$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_\varepsilon}}\left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)v_\varepsilon^2}-1\right)\,\mathrm{d}x \geq \sup_{\substack{u\in W^{2,2}(\mathbb{R}^4),\\ \|u-\Delta u\|_2^2=1}}\int_{\mathbb{R}^4}\left(e^{32\pi^2u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.2}$$

Demonstração. Primeiro, vejamos que

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{2,2}(B_{r_\varepsilon}),\\ \|u-\Delta u\|_2^2=1}}\int_{\mathbb{R}^4}\left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x \leq \sup_{\substack{v\in W_{\mathcal{N}}^{2,2}(B_{r_\varepsilon}),\\ \|v-\Delta v\|_2^2=1}}\int_{B_R}\left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)v^2}-1\right)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.3}$$

De fato, dado um $u \in W_0^{2,2}(B_{r_\varepsilon})$ qualquer, pela Proposição 3.2.3, sendo $v \in W_{\mathcal{N}}^{2,2}(B_{r_\varepsilon})$ a única solução forte de

$$\begin{cases} v-\Delta v = (u-\Delta u)^* & \text{em} \quad B_{r_\varepsilon} \\ v = 0 & \text{em} \quad \partial B_{r_\varepsilon}, \end{cases}$$

então

$$\int_{B_{r_\varepsilon}}\left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)v^2}-1\right)\,\mathrm{d}x \geq \int_{B_{r_\varepsilon}}\left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x,$$

e $\|v-\Delta v\|_2^2 = \|u-\Delta u\|_2^2$, o que prova (3.2.3). Agora, usando o Lema 3.2.5, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_\varepsilon}}\left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)v_\varepsilon^2}-1\right)\,\mathrm{d}x \geq \sup_{\substack{u\in W^{2,2}(\mathbb{R}^4),\\ \|u-\Delta u\|_2^2=1}}\int_{\mathbb{R}^4}\left(e^{32\pi^2u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x.$$

□

Observação 3.2.7. *Note que, pelo Teorema 3.2.2, pode se tomar v_ε radialmente simétrica e com $v_\varepsilon - \Delta v_\varepsilon \geq 0$ de modo que, pelo o Princípio do Máximo, $v_\varepsilon \geq 0$.*

Demonstração. **(Proposição 3.2.4)** Construiremos uma sequência $z_i \subset W_{rad}^{2,2}(\mathbb{R}^4)$ satisfazendo (3.2.1). Para tanto, definimos

$$f(x) = \begin{cases} v_\varepsilon(x) - \Delta v_\varepsilon(x) & \text{se} \quad x \in B_R \\ 0 & \text{se} \quad x \in B_{2R}\setminus B_R. \end{cases} \tag{3.2.4}$$

Tomemos agora $\tilde{v}_\varepsilon \in W_{\mathcal{N}}^{2,2}(B_{2R})$ satisfazendo

$$\begin{cases} \tilde{v}_\varepsilon - \Delta\tilde{v}_\varepsilon = f & \text{em} \quad B_{2R} \\ \tilde{v}_\varepsilon = 0 & \text{em} \quad \partial B_{2R}. \end{cases}$$

Assim, pela Observação 3.2.7 e pelo Princípio do Máximo,

$$\tilde{v}_\varepsilon \geq v_\varepsilon \quad \text{em} \quad B_R \qquad \Rightarrow \qquad \int_{B_R} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)v_\varepsilon^2}-1\right)\,\mathrm{d}x \leq \int_{B_R} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon)\tilde{v}_\varepsilon^2}-1\right)\,\mathrm{d}x. \quad (3.2.5)$$

Deste modo, sendo $\eta : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função C^∞ satisfazendo $0 \leq \eta(t) \leq 1$, $|\eta'(t)|, |\eta''(t)| \leq C$, $\eta \equiv 1$ para $0 < t \leq 1$, $\eta \equiv 0$ quando $t \geq 2$, temos que $\eta(\frac{|x|}{R})\tilde{v}_\varepsilon \in W^{2,2}_{0,rad}(B_{2R})$ e

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2R}} \left|\eta(\tfrac{|x|}{R})\tilde{v}_\varepsilon - \Delta\left(\eta(\tfrac{|x|}{R})\tilde{v}_\varepsilon\right)\right|^2 \mathrm{d}x &= \int_{B_R} |\tilde{v}_\varepsilon - \Delta\tilde{v}_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\eta(\tfrac{|x|}{R})\tilde{v}_\varepsilon - \Delta\left(\eta(\tfrac{|x|}{R})\tilde{v}_\varepsilon\right)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&= 1 + \int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\eta(\tfrac{|x|}{R})(\tilde{v}_\varepsilon - \Delta\tilde{v}_\varepsilon) - \tilde{v}_\varepsilon\Delta(\eta(\tfrac{|x|}{R})) - 2\nabla\left(\eta(\tfrac{|x|}{R})\right)\nabla\tilde{v}_\varepsilon\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\leq 1 + 9\int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\eta(\tfrac{|x|}{R})(\tilde{v}_\varepsilon - \Delta\tilde{v}_\varepsilon)\right|^2 \mathrm{d}x \\
&\quad + 9\int_{B_{2R}\setminus B_R} |\tilde{v}_\varepsilon|^2 \left|\Delta(\eta(\tfrac{|x|}{R}))\right|^2 \mathrm{d}x + 36\int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\nabla\left(\eta(\tfrac{|x|}{R})\right)\right|^2 |\nabla\tilde{v}_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Usando (3.2.4) e que

$$\left|\nabla\left(\eta(\tfrac{|x|}{R})\right)\right| = \frac{|\eta'(\frac{|x|}{R})|}{R} \qquad \text{e} \qquad \left|\Delta\left(\eta(\tfrac{|x|}{R})\right)\right| \leq \frac{|\eta''(\frac{|x|}{R})|}{R^2} + 3\frac{|\eta'(\frac{|x|}{R})|}{R^2} \quad \text{em} \quad B_{2R}\setminus B_R,$$

juntamente com o Lema Radial 3.2.1, temos

$$1 \leq \int_{B_{2R}} \left|\eta(\tfrac{|x|}{R})\tilde{v}_\varepsilon - \Delta\left(\eta(\tfrac{|x|}{R})\tilde{v}_\varepsilon\right)\right|^2 \mathrm{d}x \leq 1 + \frac{\tilde{C}}{R},$$

para $R \geq 1$, onde $\tilde{C}$ somente depende de p e n. Assim, dado $\varepsilon_i \to 0$ com $i \to \infty$, podemos tomar R_i suficientemente grande de modo que

$$\beta_i = (32\pi^2 - \varepsilon_i)\|\eta(\tfrac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i} - \Delta\left(\eta(\tfrac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i}\right)\|_2^2 < 32\pi^2$$

e então definimos $z_i \in W^{2,2}_{0,rad}(B_{R_i})$ por

$$z_i = \frac{\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i}}{\left\|\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i} - \Delta\left(\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i}\right)\right\|_2}.$$

Observe que de $\left\|\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i} - \Delta\left(\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i}\right)\right\|_2^2 \geq 1$ segue que $\beta_i \nearrow 32\pi^2$ com $i \to \infty$. Portanto, segue de (3.2.5) que

$$\int_{B_{R_i}} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon_i)v_{\varepsilon_i}^2}-1\right)\,\mathrm{d}x \leq \int_{B_{2R_i}} \left(e^{(32\pi^2-\varepsilon_i)\tilde{v}_{\varepsilon_i}^2}-1\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^4} \left(e^{\beta_i z_i^2}-1\right)\,\mathrm{d}x,$$

o que, juntamente com (3.2.2), fornece

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^4}\left(e^{\beta_i z_i^2}-1\right)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{u\in W^{2,2}(\mathbb{R}^4),\\ \|u-\Delta u\|_2^2=1}}\int_{\mathbb{R}^4}\left(e^{32\pi^2u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x,$$

O que prova a proposição. □

Demonstração. **(Teorema 3.1.1 caso $m=2$ e $p=2$)**
Como foi dito antes, a prova segue da Proposição 3.2.4. □

3.2.2 Caso geral

Primeiramente, dado $u\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, definimos a seguinte notação:

$$\|u\|^p=\begin{cases}\|\nabla(-\Delta+I)^k u\|_p^p+\|(-\Delta+I)^k u\|_p^p, & \text{para}\quad m=2k+1;\\ \\ \|(-\Delta+I)^k u\|_p^p, & \text{para}\quad m=2k.\end{cases}$$

Note que, usando o mesmo argumento do Lema 3.2.5, obtemos o seguinte lema:

Lema 3.2.8. *Seja $w_\varepsilon\in W_0^{m,p}(B_{r_\varepsilon})$ tal que $\|w_\varepsilon\|^p=1$ e satisfazendo*

$$\int_{B_{r_\varepsilon}}\Phi\left((\beta_0-\varepsilon)|w_\varepsilon|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{w\in W_0^{m,p}(B_{r_\varepsilon}),\\ \|w\|^p=1}}\int_{B_{r_\varepsilon}}\Phi\left((\beta_0-\varepsilon)|w|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Então, tomando $r_\varepsilon\to+\infty$ com $\varepsilon\to 0$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left((\beta_0-\varepsilon)|w_\varepsilon|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{u\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\\ \|u\|^p=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\beta_0|u|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Assim consideremos o seguinte lema

Lema 3.2.9. *Seja $v_\varepsilon\in W_{\mathcal{N}}^{m,p}(B_{r_\varepsilon})$ tal que $\|v_\varepsilon\|^p=1$ e satisfazendo*

$$\int_{B_{r_\varepsilon}}\Phi\left((\beta_0-\varepsilon)|v_\varepsilon|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{v\in W_{\mathcal{N}}^{m,p}(B_{r_\varepsilon}),\\ \|v\|^p=1}}\int_{B_R}\Phi\left((\beta_0-\varepsilon)|v|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x.$$

Então, tomando $r_\varepsilon\to+\infty$ com $\varepsilon\to 0$, temos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{B_{r_\varepsilon}}\Phi\left((\beta_0-\varepsilon)|v_\varepsilon|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x\geq\sup_{\substack{u\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\\ \|u\|^p=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\beta_0|u|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.6}$$

Demonstração. Dado $u \in W_0^{m,p}(B_{r_\varepsilon})$ com $\|u\| \leq 1$, usando a Proposição 3.2.3 mostraremos que existe $v \in W_{\mathcal{N}}^{m,p}(B_{r_\varepsilon})$ que satisfaz $\|v\| \leq \|u\| \leq 1$ e $u^* \leq v$ q.t.p. em B_{r_ε}

De fato, para $m = 2k$, tome $v \in W_{\mathcal{N}}^{m,p}(B_{r_\varepsilon})$, dada como a única solução forte de

$$\begin{cases} (I-\Delta)^k v = \left((I-\Delta)^k u\right)^* & \text{em} \quad B_{r_\varepsilon} \\ v = \Delta^j v = 0 & \text{em} \quad \partial B_{r_\varepsilon}, \quad 1 \leq j < \frac{m}{2}. \end{cases}$$

Assim $\|v\| = \|u\|$ e, pela Proposição 3.2.3, $u^* \leq v$ q.t.p. em B_{r_ε}.

Para $m = 2k+1$, tome $v \in W_{\mathcal{N}}^{2k,p}(B_{r_\varepsilon})$, dada como a única solução forte de

$$\begin{cases} (I-\Delta)^k v = \left((I-\Delta)^k u\right)^* & \text{em} \quad B_{r_\varepsilon} \\ v = \Delta^j v = 0 & \text{em} \quad \partial B_{r_\varepsilon}, \quad 1 \leq j < \frac{m}{2}. \end{cases}$$

Assim pela Proposição 3.2.3, $u^* \leq v$ q.t.p. em B_{r_ε}. Mais ainda, por regularidade $v \in W_{\mathcal{N}}^{2k+1,p}(B_{r_\varepsilon})$ e, pela desigualdade de Pólya-Szegö,

$$\|\nabla(I-\Delta)^k v\|_p^p = \|\nabla\left((I-\Delta)^k u\right)^*\|_p^p \leq \|\nabla(I-\Delta)^k u\|_p^p,$$

o que implica que $\|v\| \leq \|u\|$.

Deste modo, em ambos os casos temos

$$\int_{B_{r_\varepsilon}} \Phi\left((\beta_0 - \varepsilon)v^{p'}\right) \, \mathrm{d}x \geq \int_{B_{r_\varepsilon}} \Phi\left((\beta_0 - \varepsilon)(u^*)^{p'}\right) \, \mathrm{d}x \geq \int_{B_{r_\varepsilon}} \Phi\left((\beta_0 - \varepsilon)|u|^{p'}\right) \, \mathrm{d}x,$$

o que implica que

$$\sup_{\substack{v \in W_{\mathcal{N}}^{m,p}(B_{r_\varepsilon}), \\ \|v\|^p = 1}} \int_{B_{r_\varepsilon}} \Phi\left((\beta_0 - \varepsilon)|v|^{p'}\right) \, \mathrm{d}x \geq \sup_{\substack{u \in W_0^{m,p}(B_{r_\varepsilon}), \\ \|u\|^p = 1}} \int_{B_{r_\varepsilon}} \Phi\left((\beta_0 - \varepsilon)|u|^{p'}\right) \, \mathrm{d}x.$$

Portanto, o resultado segue do Lema 3.2.8. □

Observação 3.2.10. *Note que, pela Proposição 3.2.3, pode se tomar v_ε radialmente simétrica e com $(I-\Delta)^k v_\varepsilon \geq 0$ de modo que, pelo o Princípio do Máximo, $v_\varepsilon \geq 0$*

Proposição 3.2.11. *Existe uma sequência (R_i), onde $R_i \to \infty$ com $k \to \infty$, tal que para $u_i \in W_{0,rad}^{m,p}(B_{R_i})$ satisfazendo $\|u_i\|^p = 1$ e*

$$\int_{B_{R_i}} \Phi\left(\beta_i |u_i|^{p'}\right) \, \mathrm{d}x = \sup_{\substack{u \in W_{0,rad}^{m,p}(B_{R_i}), \\ \|u\|^p = 1}} \int_{B_{R_i}} \Phi\left(\beta_i |u|^{p'}\right) \, \mathrm{d}x,$$

temos

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\beta_i|u_i|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{u\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\\ \|u\|=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\beta_0|u|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x,$$

onde $\beta_i\nearrow\beta_0$ *com* $i\to\infty$ *e* u_i *é vista em* $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ *pela extensão natural.*

Demonstração. A idéia é similar à usada no caso $m=2$ e $p=2$. Construiremos uma sequência $z_i\in W^{m,p}_{0,rad}(B_{R_i})$ com $\|z_i\|=1$ tal que, para algum $R_i\to\infty$, tenhamos

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\beta_i z_i^{p'}\right)\,\mathrm{d}x=\sup_{\substack{u\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\\ \|u\|=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\beta_0 u^{p'}\right)\,\mathrm{d}x,$$

onde $\beta_i\to\beta_0$. Dado $\varepsilon>0$ e $R>0$, iniciamos definindo

$$f(x)=\begin{cases}(I-\Delta)^k v_\varepsilon & \text{se}\quad x\in B_R\\ 0 & \text{se}\quad x\in B_{2R}\setminus B_R,\end{cases}$$

onde v_ε é dado como na Observação 3.2.10. Tomamos agora $\tilde v_\varepsilon\in W^{2k,p}_{\mathscr{N}}(B_{2R})$ a única solução forte de

$$\begin{cases}(I-\Delta)^k\tilde v_\varepsilon=f & \text{em}\quad B_{2R}\\ \tilde v_\varepsilon=\Delta^j\tilde v_\varepsilon=0 & \text{em}\quad \partial B_{2R},\quad 0<j<\frac{m}{2},\end{cases}$$

em ambos os casos, i.e., $m=2k$ e $m=2k+1$. Assim, pela Observação 3.2.10 e pelo Princípio do Máximo,

$$\tilde v_\varepsilon\geq v_\varepsilon\quad\text{in}\quad B_R\qquad\Rightarrow\qquad\int_{B_R}\Phi\left((\beta_0-\varepsilon)v_\varepsilon^{p'}\right)\,\mathrm{d}x\leq\int_{B_R}\Phi\left((\beta_0-\varepsilon)\tilde v_\varepsilon^{p'}\right)\,\mathrm{d}x. \tag{3.2.7}$$

Note que quando $m=2k+1$, por regularidade, $v\in W^{m,p}_{\mathscr{N}}(B_{r_\varepsilon})$ e assim $\|v_\varepsilon\|=\|\tilde v_\varepsilon\|$ tanto no caso m ímpar quanto no caso de m par.

Agora, seja $\eta:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ uma função C^∞ satisfazendo $0\leq\eta(t)\leq 1$, $|\eta^{(j)}(t)|\leq C$, $j=1,2,\ldots,m$, $\eta\equiv 1$ quando $t\leq 1$ e $\eta\equiv 0$ quando $t\geq 2$. Deste modo, $\eta\left(\frac{|x|}{R}\right)\tilde v_\varepsilon\in W^{m,p}_{0,rad}(B_{2R})$ e, dado que

$$(I-\Delta)^k u=\sum_{j=1}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\Delta^j u,$$

temos, para $m = 2k$, que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{2R}} \left|(I-\Delta)^k \left(\eta\left(\tfrac{|x|}{R}\right)\tilde{v}_\varepsilon\right)\right|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{B_R} |(I-\Delta)^k \tilde{v}_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x + \int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|(I-\Delta)^k \left(\eta\left(\tfrac{|x|}{R}\right)\tilde{v}_\varepsilon\right)\right|^p \,\mathrm{d}x \\
&= 1 + \int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \Delta^j \left(\eta\left(\tfrac{|x|}{R}\right)\tilde{v}_\varepsilon\right)\right|^p \,\mathrm{d}x \\
&\leq 1 + K\int_{B_{2R}\setminus B_R} \left|\eta\left(\tfrac{|x|}{R}\right)\right|^p \left|\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \Delta^j \tilde{v}_\varepsilon\right|^p \,\mathrm{d}x \\
&\quad + K\int_{B_{2R}\setminus B_R} \sum_{j=0}^{k} \sum_{i=0}^{2j-1} \left|\nabla^{2j-i}\eta\left(\tfrac{|x|}{R}\right)\right|^p \left|\nabla^i \tilde{v}_\varepsilon\right|^p \,\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

para alguma constante $K > 0$ dependendo apenas de p. Assim, considerando que,

$$
\sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \Delta^j \tilde{v}_\varepsilon = (I-\Delta)^k \tilde{v}_\varepsilon = 0 \qquad \text{em} \quad B_{2R}\setminus B_R,
$$

juntamente com a desigualdade

$$
\left|\nabla^s \eta\left(\tfrac{|x|}{R}\right)\right| \leq \frac{C' \sum_{i=1}^{s} \left|\eta^{(i)}\left(\tfrac{|x|}{R}\right)\right|}{R^s}, \qquad 1 \leq s \leq 2k, \quad \text{e} \quad x \in B_{2R}\setminus B_R,
$$

e o Lema Radial 3.2.1, concluímos que

$$
1 \leq \|\tilde{v}_\varepsilon\|^p \leq 1 + \frac{\tilde{C}}{R},
$$

para $R \geq 1$, onde $\tilde{C}$ apenas depende de p e n. Então, dado $\varepsilon_i \to 0$ com $i \to \infty$, podemos tomar R_i suficientemente grande de tal forma que $\beta_i = (\beta_0 - \varepsilon_i)\|\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i}\|^{p'} < \beta_0$ e então definimos $z_i \in W^{2,2}_{0,rad}(B_{R_i})$ por

$$
z_i = \frac{\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i}}{\|\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i}\|}.
$$

Note que $\beta_i \nearrow \beta_0$ com $k \to \infty$, pois $\|\eta(\frac{|x|}{R_i})\tilde{v}_{\varepsilon_i}\| \geq 1$. Assim, por (3.2.7)

$$
\int_{B_{R_i}} \Phi\left((\beta_0 - \varepsilon_i) v_{\varepsilon_i}^{p'}\right) \,\mathrm{d}x \leq \int_{B_{R_i}} \Phi\left((\beta_0 - \varepsilon_i)\tilde{v}_{\varepsilon_i}^{p'}\right) \,\mathrm{d}x = \int_{B_{R_i}} \Phi\left(\beta_i z_i^{p'}\right) \,\mathrm{d}x,
$$

o que juntamente com (3.2.6) implica que

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\beta_i z_i^{p'}\right)\,\mathrm{d}x = \sup_{\substack{u\in W^{m,p}(\mathbb{R}^n),\\ \|u\|=1}}\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\left(\beta_0|u|^{p'}\right)\,\mathrm{d}x,$$

e isto conclui a proposição. O caso em que m é impar segui de modo análogo. □

Demonstração. **(Teorema 3.1.1 caso geral)** A prova segue da Proposição 3.2.4. □

3.3 Prova do Teorema 3.1.2

Primeiramente, note que, pela extensão natural, necessitamos apenas mostrar o Teorema para $\Omega = \mathbb{R}^n$. Assim, denotando

$$\|u\|_{\mu,\tau}^2 = \begin{cases} \mu\|\nabla(-\Delta+\tau I)^k u\|_2^2 + \tau\mu\|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2^2, & \text{for} \quad m = 2k+1; \\ \\ \mu\|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2^2, & \text{for} \quad m = 2k, \end{cases} \tag{3.3.1}$$

para $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$, $\mu > 0$ e $\tau > 0$, temos a seguinte desigualdade do tipo Adams

Proposição 3.3.1. *Dados $\tau,\mu > 0$ então, existe $C = C(\tau,\mu)$ tal que*

$$\sup_{\substack{u\in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)\\ \|u\|_{\mu,\tau}^2\le 1}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{\beta_0\mu|u|^2}-1\right)\,\mathrm{d}x \le C,$$

Demonstração. Esta proposição é uma aplicação direta do Teorema G. Dado $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\|u\|_{\mu,\tau,2}^2 \le 1$, definimos $\tilde{u} = \mu^{1/2}u$ e assim

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{\beta_0\mu|u|^2}-1\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n}\left(e^{\beta_0|\tilde{u}|^2}-1\right)\,\mathrm{d}x$$

e $\|\tilde{u}\|_{\tau,\mu}^2 \le 1$. Então aplicando o Teorema G, o resultado segue. □

Note que para todo $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n)$, quando $m = 2k$

$$(-\Delta+\tau I)^k u = \sum_{i=1}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\tau^i\Delta^{k-i}u.$$

Disto, segue que

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mu,\tau}^2 &= \mu \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta+\tau I)^k u|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{0\le i,j\le k} (-1)^{k-i}(-1)^{k-j} \binom{k}{i}\binom{k}{j} \mu \tau^i \tau^j \Delta^{k-i}u \Delta^{k-j}u \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{s=0}^{2k} \sum_{i+j=s} (-1)^{2k-s} \binom{k}{i}\binom{k}{j} \mu \tau^s \Delta^{k-i}u \Delta^{k-j}u \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{s=0}^{2k} \sum_{i+j=s} \binom{k}{i}\binom{k}{j} \mu \tau^s |\nabla^{2k-s}u|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{s=0}^{m} \binom{m}{s} \mu \tau^s |\nabla^{2k-s}u|^2 \, \mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

onde usamos que

$$\sum_{i+j=s} \binom{k}{i}\binom{k}{j} = \binom{2k}{s}.$$

Quando $m = 2k+1$, temos

$$\nabla(-\Delta+\tau I)^k u = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} \tau^i \nabla \Delta^{k-i} u.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{\mu,\tau}^2 &= \mu \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(-\Delta+\tau I)^k u|^2 \, \mathrm{d}x + \tau\mu \int_{\mathbb{R}^n} |(-\Delta+\tau I)^k u|^2 \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{0\le i,j\le k} (-1)^{2k-i-j} \binom{k}{i}\binom{k}{j} \tau^i\tau^j \mu \left(\nabla\Delta^{k-i}u \nabla\Delta^{k-j}u + \tau\Delta^{k-i}u\Delta^{k-j}u\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{s=0}^{2k} \binom{2k}{s} \mu \left(\tau^s |\nabla^{2k-s+1}u|^2 + \tau^{s+1}|\nabla^{2k-s}u|^2\right) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \mu \tau^{m-j} |\nabla^j u|^2 \, \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Agora, apresentaremos uma bem conhecida desigualdade que relaciona a norma L^2 das derivadas de ordem inferior com a norma L^2 das derivadas de ordem superior. A prova desta desigualdade pode ser encontrada em [3, Teorema 5.2]

Lema 3.3.2. *Seja $m \ge 2$, $1 \le p \le \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Existe $K = K(p,\Omega)$ tal que para todo $0 \le j < m$ e todo $u \in W^{m,p}(\Omega)$ temos*

$$|u|_{j,p}^p \le K(|u|_{m,p}^p + |u|_{0,p}^p),$$

onde

$$|u|^p_{j,p} = \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|^p_p.$$

Com este resultado em mãos, podemos agora provar o Teorema 3.1.2. Dado $0 < \beta < \beta_0$ fixo, tome $0 < \mu < 1$ de modo que $\beta < \mu\beta_0$. Assim, usando que

$$\|\nabla^j u\|_2^2 = \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_2^2, \quad \text{for} \quad 0 \le j \le m,$$

juntamente com o Lema 3.3.2, obtemos

$$\|\nabla^j u\|_2^2 \le K(\|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2) \quad \text{for} \quad 1 \le j \le m-1.$$

Portanto, podemos tomar $\tau > 0$ suficientemente pequeno de tal forma que

$$\tau^m \mu + K \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{s} \mu \tau^{m-j} + \mu \le 1,$$

de onde obtemos

$$\|u\|^2_{\mu,\tau} \le \|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2, \qquad \forall\, u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^n).$$

Então,

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,2}(\mathbb{R}^n) \\ \|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2 \le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{\beta|u|^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x \le \sup_{\substack{u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^n), \\ \|u\|_{\mu,\tau} \le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} \left(e^{\beta|u|^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Mostraremos, agora, que

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,2}(\Omega) \\ \|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2 \le 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta u^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x = +\infty.$$

para $\beta > \beta_0$. Para tanto, iremos construir uma sequência de funções $v_i \in W_0^{m,2}(\Omega)$ de tal forma que $\|\nabla^2 v_i\|_2^2 + \|v_i\|_2^2 \le 1$ e

$$\lim_{i \to \infty} \int_\Omega \left(e^{\beta v_i^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x = +\infty$$

Seja $\Phi(t) \in C^\infty[0,1]$ tal que

$$\Phi(0) = \Phi'(0) = \cdots = \Phi^{(m-1)}(0) = 0,$$
$$\Phi(1) = \Phi'(1) = 1 \qquad \Phi''(1) = \Phi'''(1) = \cdots = \Phi^{(m-1)}(1) = 0.$$

Para $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, definimos

$$H(t) = \begin{cases} \varepsilon\Phi(\frac{1}{\varepsilon}t), & \text{se} \quad t \leq \varepsilon \\ t, & \text{se} \quad \varepsilon \leq t \leq 1-\varepsilon \\ 1-\varepsilon\Phi(\frac{1}{\varepsilon}(1-t)), & \text{se} \quad 1-\varepsilon \leq t \leq 1 \\ 1, & \text{se} \quad 1 \leq t, \end{cases}$$

e

$$\psi_i(r) = H\left((\log i)^{-1}\log\frac{1}{r}\right).$$

Note que $\psi_i(|x|) \in W_0^{m,2}(B)$, onde B é a bola unitária em $\mathbb{R}^n$ centrada na origem, $\psi_i(|x|) = 1$ para $|x| \leq 1/i$ e como foi provado em [2]

$$\|\nabla^m\psi_i\|_2 = (2m)^{-1/2}\beta_0^{1/2}\left(\log i\right)^{-1/2}A_i^{1/2},$$

onde

$$A_i \leq \left[1+2\varepsilon\left(\|\Phi'\|_\infty + O\left(\left((\log i)^{-1}\right)^2\right)\right)\right].$$

Além disso,

$$\|\psi_i\|_2^2 = o\left((\log i)^{-1}\right).$$

Assim, sendo $x_0 \in \Omega$ e $r_0 > 0$ o maior valor de $r > 0$ tal que $B(x_0,r) \subset \Omega$, definimos

$$v_i(x) = \begin{cases} \psi_i(|x_0-x|)(\log i)^{1/2}, & \text{se} \quad x \in B(x_0,r_0) \\ 0, & \text{se} \quad x \in \Omega\setminus B(x_0,r_0), \end{cases}$$

de modo que, para i suficientemente grande, $v_i \in W_0^{m,2}(\Omega)$, $v_i \equiv (\log i)^{1/2}$ em $B(x_0,1/i)$ e

$$\|v_i\|_2^2 + \|\nabla^m v_i\|_2^2 \leq (2m)^{-1}\beta_0(A_i + o(1)).$$

Logo,

$$
\begin{aligned}
\sup_{\substack{u\in W_0^{m,2}(\Omega)\\ \|u\|_2^2+\|\nabla^m u\|_2^2\le 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x &\geq \int_\Omega \left(e^{\beta \frac{v_i^2}{\|v_i\|_2^2+\|\nabla^m v_i\|_2^2}}-1\right)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{B(x_0,1/i)} \left(e^{\beta \frac{v_i^2}{(2m)^{-1}\beta_0(A_i+o(1))}}-1\right)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \frac{\omega_{2m-1}}{2m}\left(e^{\beta \frac{2m}{\beta_0(A_i+o(1))}\log i}-1\right)\frac{1}{i^{2m}} \\
&\geq \frac{\omega_{2m-1}}{2m}\left(e^{2m\log\frac{1}{i}\left(1-\beta\frac{1}{\beta_0(A_i+o(1))}\right)}-1\right).
\end{aligned}
$$

Agora, dado $\beta>\beta_0$, podemos tomar ε suficientemente pequeno de forma que

$$\beta_0\left(1+2\varepsilon\|\Phi'\|_\infty\right)<\beta.$$

Com isso, para i grande

$$1-\beta\frac{1}{\beta_0(A_i+o(1))}\leq 1-\beta\frac{1}{\beta_0(\left[1+2\varepsilon\left(\|\Phi'\|_\infty+O\left((\log i)^{-1}\right)^2\right)\right]+o(1))}<0.$$

Portanto,

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,2}(\Omega)\\ \|u\|_2^2+\|\nabla^m u\|_2^2\le 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x=+\infty.$$

CAPÍTULO 4

Solução Radial de Energia Mínima para Problemas Elípticos de Ordem Superior com Crescimento Crítico em $\mathbb{R}^{2m}$

4.1 Introdução

Neste capítulo, como aplicação do Teorema 3.1.2, mostraremos a existência de solução para o seguinte problema elíptico envolvendo o operador poliharmônico:

$$(-\Delta)^m u(x) + u(x) = f(|x|, u), \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2m}, \tag{4.1.1}$$

onde f possui crescimento crítico exponencial, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to+\infty} f(|x|, s)e^{-\alpha s^2} = \begin{cases} 0, & \text{for all} \quad \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \text{for all} \quad \alpha < \alpha_0. \end{cases}$$

Para o estudo do problema (4.1.1), assumiremos ainda que f satisfaz as seguintes condições

(f_0) $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(|x|, 0) = 0$;

(f_1) Existem $R > 0$ e $M > 0$ tais que

$$0 < F(|x|, t) = \int_0^t f(|x|, \tau)d\tau \leq M|f(|x|, t)|, \qquad \forall |t| \geq R, \forall x \in \mathbb{R}^{2m};$$

(f_2) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(|x|, t) \leq f(|x|, t)t,$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^{2m} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

(f_3) Existe $p > 2$ tal que

$$f(|x|, s) \geq \lambda \ |s|^{p-1},$$

qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$ e para algum $\lambda > 0$ suficientemente grande.

Note que, como f possui crescimento crítico, dado $\alpha > \alpha_0$ existe $C = C(\alpha) > 0$ tal que

$$|f(|x|,t)| \leq C\left(e^{\alpha t^2} - 1\right), \qquad \forall (x,t) \in \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}. \tag{4.1.2}$$

Estudaremos a equação (4.1.1) via métodos variacionais. Concidere o funcional

$$J(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u|^2 + u^2\right)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|,u)\, \mathrm{d}x,$$

onde $F(|x|,s) = \int_0^s f(|x|,t)dt$. Devido a perda de compacidade, estudaremos o funcional J sobre o subespaço de $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ dado pelas funções radiais, isto é, $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ equipado com a norma

$$\|u\| := \left[\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u|^2 + u^2\right)\, \mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

Provaremos a existência de pontos críticos para o funcional J sobre o espaço $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$, o qual, pelo princípio da criticalidade simétrica(veja [17]), também será um ponto crítico para o funcional J em $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ e portanto uma solução fraca do problema (4.1.1). Assim, provaremos o seguinte resultado:

Teorema 4.1.1. *Suponha que f tem crescimento crítico em $\mathbb{R}^{2m}$ e que* $(\mathrm{f}_1), (\mathrm{f}_2)$ *e* (f_3) *são satisfeitas. Mais ainda, suponha que*

$$(\mathrm{f}_4) \qquad \limsup_{t\to 0^+} \frac{2F(|x|,t)}{t^q} < S_q^2, \text{ uniformemente em } x \in \mathbb{R}^{2m},$$

onde $S_q^2 = \inf\{\|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2 : u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}), \|u\|_q^q = 1\}$, *para algum* $q > 3$. *Então, a equação* (4.1.1) *possui uma solução não trivial* $u_M \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$. *Além disso, assumindo ainda que*

$$(\mathrm{f}_5) \quad (ts)^{-1} f(|x|,ts) \quad \text{seja crescente em função de } t > 0, \quad \text{qualquer que seja} \quad s \in \mathbb{R}\setminus\{0\},$$

a solução u_M *obtida é uma solução radial de energia mínima, isto é,*

$$J(u_M) = \inf\{J(u) : u \in \mathscr{M}\},$$

onde

$$\mathscr{M} := \{u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) \setminus \{0\} : u \text{ é uma solução fraca de } (4.1.1)\}.$$

Problemas elípticos envolvendo não linearidades com crescimento crítico dado pela desigualdade de Trudiger-Moser têm sido extensivamente estudado nos últimos anos como visto na Introdução. Nos casos de problemas relacionados com a equação (4.1.1), O. Lakkis [29] provou a existência de soluções não triviais para o problema envolvendo o poliharmônico com não linearidade com crescimento crítico dado pela desigualdade de Adams em domínios limitados. Ainda em domínios limitados, N. Lam e G. Lu [27] estudaram a existência de soluções não triviais para o seguinte problema:

$$\begin{cases} (-\Delta)^m u = f(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = D^j u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \quad \text{para} \quad j = 1,2,\dots,k-1, \end{cases}$$

com f possuindo crescimento subcrítico e crítico. Mais recentemente, F. Sani [42] estudou a existência de soluções não triviais para problemas envolvendo o biharmônico definido em todo o espaço , mais precisamente, estudaram o problema

$$\Delta^2 u + V(x)u = f(x,u), \text{em } \mathbb{R}^4,$$

com f possuindo crescimento crítico.

4.2 Resultado do Tipo Lions

Nesta seção mostraremos uma versão do resultado de tipo Lions para a desigualdade (3.1.2), a saber:

Proposição 4.2.1. *Seja $(u_i) \subset W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ tal que $u_i \rightharpoonup u$ em $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$, para algum $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ com $u \not\equiv 0$. Então, dado $0 < \beta < \beta_0 = \frac{2m2^{2m}\pi^{2m}}{\omega_{2m-1}}$, temos que*

$$\sup_i \int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{\gamma |u_i|^2} - 1 \right) \, \mathrm{d}x < \infty,$$

para todo $0 \leq \gamma < \beta/(1 - \|u\|_2^2 - \|\nabla^m u\|_2^2)$.

Demonstração. Usando a estrutura de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^{2m})$, temos

$$\|u_i - u\|_2^2 + \|\nabla^m u_i - \nabla^m u\|_2^2 = 1 - 2\langle u_i, u\rangle - 2\langle \nabla^m u_i, \nabla^m u\rangle + \|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2.$$

Assim,

$$\|u_i - u\|_2^2 + \|\nabla^m u_i - \nabla^m u\|_2^2 \to 1 - \|u\|_2^2 - \|\nabla^m u\|_2^2 < \frac{1}{\gamma},$$

desde que $\gamma < 1/(1 - \|u\|_2^2 - \|\nabla^m u\|_2^2)$. Portanto, para i suficientemente grande

$$\gamma(\|u_i - u\|_2^2 + \|\nabla^m u_i - \nabla^m u\|_2^2) < 1.$$

Esta desigualdade junto com

$$\beta\gamma u_i^2 \leq \beta\gamma(1+\delta)(u_i - u)^2 + \beta\gamma(1 + 1/\delta)u^2,$$

para $\delta > 0$, que é provado usando a desigualdade de Yang como mostrado no Apêndice, fornece

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{\beta\gamma u_i^2} - 1\right) \mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{\beta\gamma(1+\delta)(u_i-u)^2+\beta\gamma(1+1/\delta)u^2} - 1\right) \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{q\beta\gamma(1+\delta)\left(\|u_i-u\|_2^2+\|\nabla^m u_i-\nabla^m u\|_2^2\right)\frac{(u_i-u)^2}{\|u_i-u\|_2^2+\|\nabla^m u_i-\nabla^m u\|_2^2}} - 1\right) \mathrm{d}x \\
&\qquad + \frac{1}{q'}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{q'\beta\gamma(1+1/\delta)u^2} - 1\right) \mathrm{d}x \\
&\le \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{\beta\frac{(u_i-u)^2}{\|u_i-u\|_2^2+\|\nabla^m u_i-\nabla^m u\|_2^2}} - 1\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{q'}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{q'\beta\gamma(1+1/\delta)u^2} - 1\right) \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

para i suficientemente grande e $\delta > 0$, $q > 1$ suficientemente pequenos, onde $q' = q/(q-1)$. Portanto, pelo Teorema 3.1.2, o resultado segue. □

4.3 Propriedades das Sequências de Palais-Smale

Lema 4.3.1. *Seja $(u_i) \subset W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ uma sequência de Palais-Smale de J. Então, (u_i) é uma sequência limitada em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$. Mais ainda, considerando que $u_i \rightharpoonup u$ em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$, a menos de subsequência, temos que*

$$f(|x|,u_i) \to f(|x|,u) \qquad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^{2m}), \tag{4.3.1}$$

e

$$\lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u_i)u \, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u)u \, \mathrm{d}x. \tag{4.3.2}$$

Demonstração. Seja (u_i) uma sequência em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ satisfazendo

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u_i|^2 + u_i^2\right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|,u_i) \, \mathrm{d}x \to c \tag{4.3.3}$$

e

$$\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2m}} (\nabla^m u_i \nabla^m v + u_i v) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u_i)v \, \mathrm{d}x\right| \le \tau_i \|v\| \tag{4.3.4}$$

para todo $v \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$, onde $\tau_i \to 0$ com $i \to \infty$. De (4.3.3) e (4.3.4), com $v = u_i$, segue que

$$\|u_i\| - \tau_i\|u_i\| \le C + \int_{\mathbb{R}^{2m}} (\theta F(|x|,u_i) - f(|x|,u_i)u_i).$$

para $\theta > 2$. Esta desigualdade juntamente com (f_2) fornece que (u_i) é uma sequência limitada em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ e usando novamente (4.3.3) e (4.3.4) podemos obter $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} |f(|x|,u_i)u_i| \, \mathrm{d}x < C \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|,u_i) \, \mathrm{d}x < C, \tag{4.3.5}$$

para todo i. Assim, a menos de subsequência, podemos considerar que (u_i) satisfaz

$$u_i \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}),$$

e, por compacidade,

$$\begin{array}{llll} u_i \to u & \text{em} & L^q(\mathbb{R}^{2m}), & \text{para} \quad q > 2, \\ u_i(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em} & \mathbb{R}^{2m}. & \end{array} \tag{4.3.6}$$

Agora, na mesmas linhas de [13, Lema 2.1] e [20, Lema 3.7], podemos concluir que

$$f(|x|,u_i) \to f(|x|,u), \quad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^{2m}).$$

De fato, da imersão contínua de $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ no espaço de Orliczs dado por $\Phi(t) := e^{t^2} - 1$ (veja [3, Seção 8.29]) e de (4.1.2), temos que

$$f(|x|,u_i) \in L^1(\mathbb{R}^{2m}) \qquad \text{e} \qquad f(|x|,u) \in L^1(\mathbb{R}^{2m}).$$

Note que é suficiente mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} |f(|x|,u_i)| \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^{2m}} |f(|x|,u)| \, \mathrm{d}x.$$

Assim, de $f(|x|,u) \in L^1(\mathbb{R}^{2m})$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\lambda > 0$ tal que

$$\int_A |f(|x|,u)| \, \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4} \tag{4.3.7}$$

para todo subconjunto mensurável $A \subset \mathbb{R}^{2m}$ tal que $|A| \leq \delta$. Como $u \in L^2(\mathbb{R}^{2m})$, existe $\tilde{M} > 0$ tal que

$$|\{x \in \mathbb{R}^{2m} : |u(x)| \geq \tilde{M}\}| \leq \delta.$$

Assim, tomando $M = \max\{\tilde{M}, 4C/\varepsilon\}$, obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^{2m}} (|f(|x|,u_i)| - |f(|x|,u)|) \, \mathrm{d}x \right| \leq & \int_{\{|u_i(x)| \geq M\}} |f(|x|,u_i)| \, \mathrm{d}x + \int_{\{|u(x)| \geq M\}} |f(|x|,u)| \, \mathrm{d}x \\ & + \left| \int_{\{|u_i(x)| < M\}} |f(|x|,u_i)| \, \mathrm{d}x - \int_{\{|u(x)| < M\}} |f(|x|,u)| \, \mathrm{d}x \right|. \end{aligned}$$

De (4.3.5) e (4.3.7), temos que

$$\begin{aligned}\int_{\{|u_i(x)|\geq M\}} |f(|x|,u_i)|\,\mathrm{d}x + \int_{\{|u(x)|\geq M\}} |f(|x|,u)|\,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{M}\int_{\{|u_i(x)|\geq M\}} |f(|x|,u_i)u_i|\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{4}\\ &\leq \frac{C}{M} + \frac{\varepsilon}{4} \leq \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Vejamos agora que,

$$N_i := \left| \int_{\{|u_i(x)|<M\}} |f(|x|,u_i)|\,\mathrm{d}x - \int_{\{|u(x)|<M\}} |f(|x|,u)|\,\mathrm{d}x \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.3.8}$$

para i suficientemente grande. Primeiro, observe que

$$\begin{aligned}N_i \leq & \left| \int_{\mathbb{R}^{2m}} \chi_{\{|u_i(x)|<M\}} (|f(|x|,u_i)| - |f(|x|,u)|)\,\mathrm{d}x \right| \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(\chi_{\{|u_i(x)|<M\}} - \chi_{\{|u(x)|<M\}}\right) |f(|x|,u)|\,\mathrm{d}x \right|\end{aligned}$$

Assim, segue de (f_0) e (f_4) que existem constantes $\tilde{C} > 0$ e $q > 2$ de modo que

$$|f(|x|,s)| \leq \tilde{C}|s|^q \qquad \forall |s| < M.$$

Mais ainda, de (4.3.6), $\chi_{\{|u_i(x)|<M\}}(|f(|x|,u_i)| - |f(|x|,u)|) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^{2m}$ e existe $g \in L^q(\mathbb{R}^{2m})$, para algum $q > 2$, tal que $|u_i| \leq g$ q.t.p. em $\mathbb{R}^{2m}$ e assim

$$|\chi_{\{|u_i(x)|<M\}}(|f(|x|,u_i)| - |f(|x|,u)|)| \leq \tilde{C}\chi_{\{|u_i(x)|<M\}}\left(|u_i|^q + |f(|x|,u)|\right) \leq \left(g^q + |f(|x|,u)|\right),$$

q.t.p. em $\mathbb{R}^{2m}$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^{2m}} \chi_{\{|u_i(x)|<M\}} (|f(|x|,u_i)| - |f(|x|,u)|)\,\mathrm{d}x \right| \to 0.$$

Para finalizarmos, note que

$$\{x \in \mathbb{R}^{2m} : |u_i(x)| < M\} \setminus \{x \in \mathbb{R}^{2m} : |u(x)| < M\} \subset \{x \in \mathbb{R}^{2m} : |u(x)| \geq M\}$$

e assim

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(\chi_{\{|u_i(x)|<M\}} - \chi_{\{|u(x)|<M\}}\right) |f(|x|,u)| \,\mathrm{d}x\right| &\le \int_{\mathbb{R}^{2m}} \chi_{\{|u_i(x)|<M\}\setminus\{|u(x)|<M\}} |f(|x|,u)| \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{2m}} \chi_{\{|u(x)|<M\}\setminus\{|u_i(x)|<M\}} |f(|x|,u)| \,\mathrm{d}x \\
&\le \int_{\mathbb{R}^{2m}} \chi_{\{|u(x)|\ge M\}} |f(|x|,u)| \,\mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^{2m}} \chi_{\{|u(x)|<M\}\setminus\{|u_i(x)|<M\}} |f(|x|,u)| \,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

o que, de (4.3.7) e de $u_i \to u$ q.t.p. em $\mathbb{R}^{2m}$, garante (4.3.8). Portanto, dado $\varepsilon > 0$, temos

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} (|f(|x|,u_i)| - |f(|x|,u)|) \,\mathrm{d}x\right| \le \varepsilon
$$

para i suficientemente grande.

Provemos agora (4.3.2). Por densidade, dado $\varepsilon > 0$ existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ tal que $\|\varphi - u\| < \varepsilon$. Assim

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u_i)u \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u)u \,\mathrm{d}x\right| &\le \left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u_i)(u-\varphi) \,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u)(u-\varphi) \,\mathrm{d}x\right| \\
&\quad + \|\varphi\|_\infty \int_{\mathbb{R}^{2m}} |f(|x|,u_i) - f(|x|,u)| \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

De (4.3.4), tomando $v = u - \varphi$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u_i)(u-\varphi) \,\mathrm{d}x\right| &\le \int_{\mathbb{R}^{2m}} (\nabla^m u_i \nabla^m (u-\varphi) + u_i(u-\varphi)) \,\mathrm{d}x + \varepsilon_i \|u-\varphi\| \\
&\le \|u_i\|_p \|(u-\varphi)\| + \varepsilon_i \|(u-\varphi)\| \le C\varepsilon.
\end{aligned}
$$

De $f(|x|,u) \in L^q(\mathbb{R}^{2m})$, para todo $q \ge 1$, segue que

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u)(u-\varphi) \,\mathrm{d}x\right| \le \|f(|x|,u)\|_2 \|u-\varphi\|_2 \le C\|u-\varphi\| \le C\varepsilon.
$$

Por fim, como $f(|x|,u_i) \to f(|x|,u)$ em $L^1(\mathbb{R}^{2m})$, (4.3.2) fica provada, o que conclui o lema. $\square$

Proposição 4.3.2. *Suponha que f satisfaz $(\mathrm{f}_0) - (\mathrm{f}_3)$. Então, J satisfaz a condição de Palais-Smale para todo $c \in (-\infty, \frac{1}{2}\beta_0/\alpha_0)$, isto é, dado $(u_i) \subset E$, uma sequência satisfazendo*

$$
J(u_i) \to c \qquad \text{e} \qquad J'(u_i) \to 0 \quad \text{com} \quad i \to \infty
$$

então esta sequência admite uma subsequência convergente em $W^{m,p}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$.

Demonstração. Seja (u_i) uma sequência em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ satisfazendo

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u_i|^2 + u_i^2\right)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|,u_i)\,\mathrm{d}x \to c \tag{4.3.9}$$

e

$$\left|\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{2m}} (\nabla^m u_i \nabla^m v + u_i v)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u_i)v\,\mathrm{d}x\right| \le \tau_i\|v\| \tag{4.3.10}$$

para todo $v \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$, onde $\tau_i \to 0$ com $i \to \infty$. Do Lema 4.3.1, sabemos que (u_i) é uma sequência limitada em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ e, portanto, a menos de subsequência

$$\begin{array}{llll} u_i \rightharpoonup u & \text{em} & W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) & \\ u_i \to u & \text{em} & L^q(\mathbb{R}^{2m}), & \text{para} \quad q > 2, \\ u_i(x) \to u(x) & \text{q.t.p. em} & \mathbb{R}^{2m}. & \end{array}$$

Mais ainda, de (4.3.1), (f_1) e do Teorema de Convergência Dominada de Lebesgue Generalizado,

$$F(|x|,u_i) \to F(|x|,u) \qquad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^{2m}),$$

o que, juntamente com (4.3.9) e (4.3.10), implica que

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u_i)u_i\,\mathrm{d}x = p\left(c + \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|,u)\,\mathrm{d}x\right). \tag{4.3.11}$$

De (f_3) e (4.3.11) concluímos que $c \ge 0$. Agora, como $u_i \rightharpoonup u$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} (\nabla^m u \nabla^m \psi + u\psi)\,\mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u_i)\psi\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u)\psi\,\mathrm{d}x \qquad \forall \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m}).$$

Na verdade, usando (4.3.2) e (f_2), temos que

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u)u\,\mathrm{d}x \ge 2\int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|,u)\,\mathrm{d}x,$$

e portanto $J(u) \ge 0$. Como $F(|x|,u_i) \to F(|x|,u)$, apenas temos que mostrar que

$$J(u) = c.$$

Pela semi-continuidade inferior da norma sabemos que $J(u) \le c$. Para provarmos a igualdade separamos em três casos.

Caso 1. $c > 0$ e $u \not\equiv 0$. Suponha que $J(u) < c$. Então,

$$\|u\|^2 < 2\left(c + \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|, u)\, \mathrm{d}x\right).$$

Definindo

$$v_i = \frac{u_i}{\|u_i\|},$$

e

$$v = \frac{u}{\sqrt[2]{2(c + \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|, u)\, \mathrm{d}x)}},$$

temos que $v_i \rightharpoonup v$, $\|v_i\| = 1$, $v \not\equiv 0$ e $\|v\|_p^p < 1$. Então, segue do Proposição 4.2.1 que

$$\sup_i \int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{\gamma |v_i|^2}\, \mathrm{d}x < \infty, \qquad \text{para todo} \quad \gamma < \frac{\beta}{1 - \|v\|^2}, \tag{4.3.12}$$

qualquer que seja $\beta < \beta_0$. Note que, como $c < \frac{1}{2}\beta_0/\alpha_0$ podemos tomar $\alpha > \alpha_0$ e $\bar{\beta} < \beta_0$ tal que $c < \frac{1}{2}\beta/\alpha$, e assim, de $J(u) \geq 0$, temos

$$q\alpha \|u_i\|^2 < \bar{\beta}\left(\frac{c + \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|, u)\, \mathrm{d}x}{c - J(u)}\right) = \bar{\beta}\frac{1}{1 - \|v\|^2},$$

para i suficientemente grande e para algum $q > 1$. Assim, de (4.1.2),

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} |f(|x|, u_i)|^q\, \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{q\alpha \|u_i\|^2 |v_i|^2} - 1\right)\, \mathrm{d}x,$$

que, por (4.3.12), é uniformemente limitado para algum $q > 1$. Disto, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|, u_i)(u_i - u) \to 0,$$

e então, como

$$J'(u_i)(u_i - u) \to 0 \quad \text{e} \quad u_i \rightharpoonup u,$$

temos

$$\|u_i\| \to \|u\|.$$

Porém, isto implica que $J(u) = c$ o que é uma contradição. Portanto, temos a igualdade.
Caso 2. $c > 0$ e $u \equiv 0$. Como $F(|x|, u_i) \to 0$, segue de (4.3.9) que $\|u_i\|^2 \to c$. Assim, de $c < \frac{1}{2}\bar{\beta}/\alpha$, para algum $\alpha > \alpha_0$, e (4.1.2), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} |f(|x|, u_i)|^q \leq C \int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{q\alpha \|u_i\|^2 |v_i|^2} - 1\right)\, \mathrm{d}x,$$

onde $\alpha q \|u_i\|^2 < \bar{\beta}$ para i suficientemente grande e para algum $q > 1$. Então, $\int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|, u_i) u_i \to$

0 e assim $\|u_i\| \to 0$, o que conclui este caso.
Caso 3. $c = 0$. Assim,

$$0 \leq J(u) \leq \liminf J(u_i) = 0.$$

Como, $F(|x|,u_i) \to F(|x|,u)$ temos que $\|u_i\| \to \|u\|$ e então $u_i \to u$ em $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$, o que conclui este ultimo caso. □

4.4 Geometria do Funcional

Para garantir que o funcional J satisfaz a geometria do passo da montanha, fazemos uso dos seguintes lemas cujas provas seguem argumentos análogos usados na Seção 2.3.

Lema 4.4.1. *Suponha que f satisfaz* $(\mathrm{f}_0) - (\mathrm{f}_3)$. *Então,*

$$J(tu) \to -\infty \qquad \textit{quando} \qquad t \to +\infty,$$

para todo $u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) \setminus \{0\} \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m})$.

Demonstração. Por (f_1), existem $M > 0$ e $C > 0$ satisfazendo

$$F(|x|,s) \geq Ce^{M|s|} - C, \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Assim, dado um $u \in W^{m,p}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ e $K = \operatorname{supp} u$, existe $c > 0$ tal que,

$$F(|x|,u) \geq c|u|^q \qquad \Rightarrow \qquad J(tu) \leq \frac{t^2}{2}\|u\| - ct^q \int_{\mathbb{R}^{2m}} |u|^q \mathrm{d}x - C|K|,$$

para $q > 2$ e $t > 0$. Portanto $J(tu) \to -\infty$ com $t \to +\infty$. □

Lema 4.4.2. *Suponha que f satisfaz* $(\mathrm{f}_0) - (\mathrm{f}_3)$. *Então, existem $\delta, \rho > 0$ tais que*

$$J(u) \geq \delta \qquad \textit{se} \qquad \|u\|_2 = \rho.$$

onde $u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$.

Demonstração. Usando (f_0), (f_4) e (4.1.2), podemos escolher $\lambda < S_q^2$ tal que

$$F(|x|,s) \leq \frac{\lambda}{2}|s|^q + Ce^{\alpha_0|s|^2}|s|^q,$$

para todo $(x,s) \in \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}$ e para algum $q > 3$. Agora, pela desigualdade de Holder e (3.1.2) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} e^{\alpha_0 u^2}|u|^q \,\mathrm{d}x \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} |u|^{sq} \,\mathrm{d}x\right)^{1/s},$$

para

$$\|u\| \le \sigma \qquad \text{de tal modo que} \qquad \alpha_0 s' \sigma^{p'} < \beta_0.$$

Então, da hipótese (f_4) e da imersão contínua de Sobolev segue que

$$J(u) \ge \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|u\|_q^q - C\|u\|_{sq}^{1/s} \ge \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\|u\|^2 - \tilde{C}\|u\|^q.$$

Como $\lambda < S_q^2$ e $q > 2$ podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$J(u) \ge \delta,$$

sempre que $\|u\| = \rho$, para algum $\delta > 0$. □

Agora, mostraremos que, para $\lambda > 0$ em (f_4) satisfazendo

$$\lambda > \left(\frac{\alpha_0}{\bar{\beta}}\frac{p-2}{p}\right)^{(p-2)/2} S_p^p,$$

com

$$S_p := \inf_{u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})} \frac{\left[\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u|^2 + u^2\right)\, \mathrm{d}x\right]^{1/2}}{\left[\int_{\mathbb{R}^{2m}} |u|^p\, \mathrm{d}x\right]^{1/2}}, \tag{4.4.1}$$

para algum $0 < \bar{\beta} < \beta_0 = \frac{n 2^n \pi^n}{\omega_{n-1}}$, o nível do passo da montanha do funcional J é limitado.

Lema 4.4.3. *Suponha que f satisfaz* $(\mathrm{f}_0) - (\mathrm{f}_4)$. *Então*

$$c_M = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)) < \frac{1}{p}\left(\bar{\beta}/\alpha_0\right)^{p-1}$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\right) : \ \gamma(0) = 0 \text{ e } J(\gamma(1) < 0)\}$.

Demonstração. Primeiramente mostraremos que a constante S_p dada em (4.4.1) é atingida em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$. Seja $(u_i) \subset W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} |u_i|^p\, \mathrm{d}x = 1,$$

e

$$\|u_i\| \to S_p,$$

Assim (u_i) é limitado em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$, o que implica que existe $u_p \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ tal que

$$\begin{array}{lll} u_i \rightharpoonup u_p & \text{em} & W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) \\ u_i \to u_p & \text{em} & L^p(\mathbb{R}^{2m}) \\ u_i \to u_p & \text{q.t.p. em} & \mathbb{R}^{2m}. \end{array}$$

Pela imersão compacta de $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ em $L^p(\mathbb{R}^{2m})$

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} |u_p|^p \, \mathrm{d}x = \lim_{i\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2m}} |u_i|^p \, \mathrm{d}x = 1.$$

Por outro lado,

$$\|u_p\| \leq \liminf_{i\to\infty} \|u_i\| = S_p.$$

Assim $\|u_p\| = S_p$. Logo da definição de c_M temos

$$c_M \leq \max_{t\leq 0} \left(\frac{t^2}{2} S_p^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|, tu_p) \, \mathrm{d}x \right),$$

e, usando a hipótese (f_4), concluímos

$$c_M \leq \max_{t\leq 0} \left(\frac{t^2}{2} S_p^2 - t^p \frac{\lambda}{p} \right) = \frac{p-2}{2p} \frac{S_p^{2p/(p-2)}}{\lambda^{2/(p-2)}} < \frac{1}{2} \frac{\bar{\beta}}{\alpha_0},$$

o que conclui a prova do lema. □

4.5 Prova do Teorema 4.1.1

Tendo em vista a Proposição 4.3.2 e os Lemas 4.4.1, 4.4.2 e 4.4.3, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha para obter um ponto crítico para o funcional J e, assim, garantirmos a existência de uma solução $u_M \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ a qual satisfaz a seguinte condição

$$J(u_M) = c_M := \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in C\Big([0,1], W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\Big) : \ \gamma(0) = 0 \text{ e } J(\gamma(1) < 0)\}$. Agora, assumindo que para cada $x \in \mathbb{R}^{2m}$

$$\varphi(t) = \frac{f(|x|, ts)}{ts} \quad \text{é crescente para } t > 0 \text{ qualquer que seja} \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \tag{4.5.1}$$

mostraremos que u_M é uma solução radial de energia mínima. Dizemos que $v \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ é uma solução radial de energia mínima quando v é uma solução fraca da equação (4.1.1) e

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m v|^2 + v^2\right) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} F(|x|, v) \, \mathrm{d}x = \inf\{J(u) : u \in \mathscr{M}\},$$

onde

$$\mathscr{M} := \{u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) \setminus \{0\} : u \text{ é uma solução fraca de } (4.1.1)\}.$$

Assim, para provarmos que u_M é uma solução radial de energia mínima é suficiente mostrar que

$$c_M \leq \inf\{J(u) : u \in \mathscr{M}\}.$$

Dado $u \in \mathscr{M}$, tome $h(t) = J(tu)$ para $t > 0$. Assim h é diferenciável e

$$h'(t) = J'(tu)u = t\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u|^2 + u^2\right)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,tu)u\, \mathrm{d}x$$

e, como $J'(u) = 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u|^2 + u^2\right)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{2m}} f(|x|,u)u\, \mathrm{d}x,$$

de onde segue que

$$h'(t) = t\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(\frac{f(|x|,u)u^2}{u} - \frac{f(|x|,tu)u^2}{tu}\right)\, \mathrm{d}x,$$

para todo $t > 0$. Logo, de (4.5.1) juntamente o fato de $h'(1) = 0$, temos que $h'(t) > 0$ para $0 < t < 1$ e $h'(t) < 0$ para $t > 1$. Portanto,

$$J(u) = \max_{t>0} J(tu).$$

Agora, pelo Lema 4.4.1, podemos tomar $t_0 > 0$ de modo que $J(t_0u) < 0$ e assim a aplicação $\alpha : [0,1] \to W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ dado por $\alpha(t) = tt_0u$ pertence a Γ e

$$c_M \leq \max_{t\in[0,1]} J(\alpha(t)) \leq \max_{t>0} J(tu) = J(u).$$

Portanto,

$$c_M \leq \inf\{J(u) : u \in \mathscr{M}\},$$

o que finaliza a prova do teorema.

CAPÍTULO 5

Uma Desigualdade Singular do Tipo Adams

5.1 Introdução

Neste capítulo, estudaremos uma desigualdade do tipo Adams para o caso singular em domínios quaisquer. Mais precisamente, como no Capítulo 3, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio qualquer e $W_0^{m,p}(\Omega)$ o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma de Sobolev

$$\|u\|_{W^{m,p}} = \left(\sum_{j=0}^{m} \|\nabla^j u\|_p^p \right)^{1/p},$$

em $W^{m,p}(\Omega)$. Considerando $mp = n$, seja

$$\Phi(t) := e^t - \sum_{j=0}^{j_p-2} \frac{t^j}{j!},$$

onde $j_p := \min\{j \in \mathbb{N} : j \geq p\}$. Em [30] N. Lam e G. Lu apresentaram uma desigualdade do tipo Adams singular para domínios limitados para o espaço

$$W_{\mathcal{N}}^{m,p}(\Omega) := \{u \in W^{m,p}(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = \Delta^j u\big|_{\partial\Omega} = 0 \text{ no sentido do traço, } 1 \leq j < m/2\},$$

que é o seguinte:

Teorema H. *([30, Teorema 1.2]) Sejam $0 < m < n$ inteiros, $0 \leq \alpha < n$, um número real e Ω um domínio suave e limitado de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo $0 \leq \beta \leq \beta_{\alpha,n,m} = (1 - \frac{\alpha}{n})\beta_0$, existe uma constante $C_{\alpha,m,n} > 0$ tal que*

$$\sup_{\substack{u \in W_{\mathcal{N}}^{m,p}(\Omega) \\ \|\nabla^m u\|_p \leq 1}} \int_\Omega \frac{\Phi(\beta|u|^{p'})}{|x|^\alpha} \, \mathrm{d}x \leq C_{m,n}. \tag{5.1.1}$$

Usando a desigualdade (5.1.1), os autores provaram ainda uma desigualdade do tipo Adams singular para domínios quaisquer e m sendo par.

Teorema I. *([30, Teorema 1.3]) Sejam $0 < m < n$ inteiros, $m = 2k$, para algum k, $0 \leq \alpha < n$, um número real e Ω um domínio qualquer de $\mathbb{R}^n$. Então, para todo $0 \leq \beta \leq \beta_{\alpha,n,m} = (1 - \frac{\alpha}{n})\beta_0$,* *existe uma constante* $C_{\alpha,m,n} > 0$ *tal que*

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,p}(\Omega)\\ \|(-\Delta+I)^k u\|_p\leq 1}} \int_\Omega \frac{\Phi(\beta|u|^{p'})}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq C_{m,n}.$$

Além disse, o supremo é infinito se $\beta > \beta_{\alpha,n,m}$.

Provaram ainda uma versão mais geral para o caso em que $m = 2$ e $n = 4$.

Teorema J. *([30, Teorema 1.4]) Sejam* $0 \leq \alpha < 4$ e Ω *um domínio qualquer de* $\mathbb{R}^4$. *Suponha que* $\tau > 0$ e $\sigma > 0$ *são constantes positivas. Então, para todo* $0 \leq \beta \leq \beta_\alpha = (1-\frac{\alpha}{4})32\pi^2$, *existe uma constante* $C_{\alpha,\tau,\sigma} > 0$ *tal que*

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{2,2}(\Omega)\\ \|\Delta u\|_2^2+\tau\|\nabla u\|_2^2+\sigma\|u\|_2^2\leq 1}} \int_\Omega \frac{e^{\beta u^2}-1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x \leq C_{\alpha,\tau,\sigma}.$$

Além disso, o supremo acima tornar-se infinito se $\beta > \beta_\alpha$.

Inicialmente, usando ideias semelhantes às usadas para provar o Teorema G, provaremos uma versão do Teorema J para m inteiro.

Teorema 5.1.1. *Sejam* $m > 0$ *um número inteiro,* $0 \leq \alpha < 2m$, *um número real e* Ω *um domínio qualquer de* $\mathbb{R}^{2m}$. *Suponha ainda que* $\tau > 0$ *é uma constante positiva. Então, para todo* $0 \leq \beta \leq \beta_{\alpha,m} = (1-\frac{\alpha}{2m})\frac{n2^n\pi^n}{\omega_{n-1}}$, *existe uma constante* $C_{\alpha,m,\tau} > 0$ *tal que, se* $m = 2k+1$, *para algum* $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,2}(\Omega)\\ \|\nabla(-\Delta+\tau I)^k u\|_2^2+\tau\|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2^2\leq 1}} \int_\Omega \frac{e^{\beta u^2}-1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x \leq C_{\alpha,m,\tau}.$$

Se $m = 2k$, *para algum* $k \in \mathbb{N}$,

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,2}(\Omega)\\ \|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2\leq 1}} \int_\Omega \frac{e^{\beta u^2}-1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x \leq C_{\alpha,m,\tau}.$$

Além disso, se $\beta > \beta_{\alpha,m}$ *os supremos acima tornam-se infinito.*

Por fim, usaremos este Teorema para prova o seguinte resultado:

Teorema 5.1.2. *Sejam* $m > 0$, *um número inteiro,* $0 \leq \alpha < 2m$, *um número real e* Ω *um domínio qualquer de* $\mathbb{R}^{2m}$. *Então, para todo* $0 \leq \beta < \beta_{\alpha,m} = (1-\frac{\alpha}{2m})\frac{n2^n\pi^n}{\omega_{n-1}}$, *existe uma constante*

$C_{\alpha,m} > 0$ *tal que*

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,2}(\Omega) \\ \|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2 \leq 1}} \int_\Omega \frac{e^{\beta u^2} - 1}{|x|^\alpha} \, \mathrm{d}x \leq C_{\alpha,m}.$$

Além disso, se $\beta > \beta_{\alpha,m}$ *o supremo acima torna-se infinito.*

Note que, assim como no Teorema 3.1.2, não sabemos dizer nada sobre esta desigualdade quando $\beta = \beta_{\alpha,m}$.

5.2 Prova do Teorema 5.1.1 para m par

Inicialmente, note que para provar a primeira parte do Teorema 5.1.1 basta provarmos o teorema no caso em que $\Omega = \mathbb{R}^{2m}$. De fato, dado $u \in W_0^{m,2}(\Omega)$, para algum domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^{2m}$, podemos estender u , de forma natural, à uma função $\tilde{u} \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ tomando

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad x \in \Omega \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

o que fornece

$$\int_\Omega \frac{e^{\beta u^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta \tilde{u}^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x.$$

Portanto, para $m = 2k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, temos

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,2}(\Omega) \\ \|(-\Delta + \tau I)^k u\|_2 \leq 1}} \int_\Omega \frac{e^{\beta u^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq \sup_{\substack{u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}) \\ \|(-\Delta + \tau I)^k u\|_2 \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta u^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x.$$

Agora, dado $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$, sabemos que existe uma sequência $(u_i) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ tal que $u_i \to u$ em $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$, $\|(-\Delta + \tau I)^k u_i\|_2 \leq 1$ e $\mathrm{supp}(u_i) \subset B_{R_i}$ e ainda, pelo Lema de Fatou, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta u^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq \liminf_{i \to \infty} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta u_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x,$$

onde B_{R_i} é a bola de raio R_i e centro na origem. Assim, basta mostrar que existe $C_{\alpha,m,\tau}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta u_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq C_{\alpha,m,\tau},$$

para todo i. Para tanto, sendo $f_i = (\tau I - \Delta)^k u_i$, tome $v_i \in W^{m,2}_{\mathcal{N}}(B_{R_i})$ como a única solução forte de

$$\begin{cases} (\tau I - \Delta)^k v_i = f_i^* & \text{em} \quad B_{R_i} \\ v_i = \Delta^j v_i = 0 & \text{em} \quad \partial B_{R_i}, \quad 0 < j < k. \end{cases}$$

Assim,

$$\|(\tau I - \Delta)^k v_i\|_2 = \|(\tau I - \Delta)^k u_i\|_2 \leq 1,$$

e, pela Proposição 3.2.3,

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta u_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x = \int_{B_{R_i}} \frac{e^{\beta u_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq \int_{B_{R_i}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x.$$

Agora, tomando $R_0 > 0$, consideramos

$$\begin{aligned} \int_{B_{R_i}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x &= \int_{B_{R_0}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x + \int_{B_{R_i} \setminus B_{R_0}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \\ &= I_0 + I_1. \end{aligned}$$

No que se segue, mostramos que é possível escolher um $R_0 = R_0(\tau, m)$ fixo, de tal modo que I_0 e I_1 seja uniformemente limitada por algum constante $C_{\alpha,m,\tau}$.

Para estimarmos I_0, construiremos uma sequência $w_i \in W^{m,2}_{\mathcal{N}}(B_{R_0})$ de tal forma que $\|\nabla^m w_i\|_2 \leq 1$, para um R_0 grande, e assim usamos o Teorema H para limitarmos I_0. Para podermos construir tais funções, considere

$$g_l(|x|) := |x|^{2k-2l}, \qquad \forall x \in B_{R_0}, \tag{5.2.1}$$

para $l = 1, 2, \ldots, k-1$. Note que $g_l \in W^{m,2}_{rad}(B_{R_0})$ e, além disso,

$$\Delta^j g_l(|x|) = \begin{cases} c_l^j |x|^{2k-2(l+j)} & \text{para} \quad j = 1, 2, \ldots, k-l, \\ 0 & \text{para} \quad j = k-l+1, \ldots, k. \end{cases} \tag{5.2.2}$$

para todo $x \in B_{R_0}$, onde

$$c_l^j = \prod_{s=1}^{j} [n + 2k - 2(s+l)][2k - 2(l+s-1)],$$

para $j = 1, 2, \ldots, k-l$. Defina, agora,

$$z_i(|x|) := v_i(|x|) - \sum_{l=1}^{k-1} a_{l,i} g_l(|x|) - a_{k,i}, \tag{5.2.3}$$

onde
$$a_{l,i} := \frac{\Delta^{k-l} v_i(R_0) - \sum_{s=1}^{l-1} a_{s,i} \Delta^{k-l} g_s(R_0)}{\Delta^{k-l} g_l(R_0)}, \tag{5.2.4}$$
para $l = 1, 2, \ldots, k-1$ e
$$a_{k,i} := v_i(R_0) - \sum_{s=1}^{k-1} a_{s,i} g_s(R_0). \tag{5.2.5}$$

Note que, por (5.2.2), $\nabla^m v_i(x) = \Delta^k v_i = \Delta^k z_i = \nabla^m z_i(x)$ e ainda $z_i \in W^{m,2}_{\mathcal{N}}(B_{R_0})$. Deste modo, para $R_0 > n$, temos o seguinte lema:

Lema 5.2.1. *Exitem constantes c_m e $d(m,R_0)$, onde c_m depende apenas de m e $d(m,R_0)$ depende apenas de m e R_0, de modo que*
$$v_i(|x|)^2 \le z_i(|x|)^2 \left(1 + c_m \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{R_0^{4j-1}} \|\Delta^{k-j} v_i\|^2_{W^{1,2}} + \frac{c_m}{R_0^{2m-1}} \|v_i\|^2_{W^{1,2}}\right) + d(m,\tau,R_0),$$
para todo $x \in B_{R_0}$.

Demonstração. Fazendo $r = |x|$, de (5.2.3), temos que
$$\begin{aligned}
v_i(r)^2 &= \left(z_i(r) + \sum_{l=1}^{k-1} a_{l,i} g_l(r) + a_{k,i}\right)^2 \\
&= z_i(r)^2 + 2\sum_{l=1}^{k-1} z_i(r) a_{l,i} g_l(r) + 2 z_i(r) a_{k,i} + \left(\sum_{l=1}^{k-1} a_{l,i} g_l(r) + a_{k,i}\right)^2 \\
&\le z_i(r)^2 + \sum_{l=1}^{k-1} z_i(r)^2 a_{l,i}^2 g_l(r)^2 + z_i(r)^2 a_{k,i}^2 + \left(\sum_{l=1}^{k-1} a_{l,i} g_l(r) + a_{k,i}\right)^2 + 2(k-1) \\
&\le z_i(r)^2 + \left(1 + 4(k-1)^2\right) \sum_{l=1}^{k-1} z_i(r)^2 a_{l,i}^2 g_l(R_0)^2 + 4 z_i(r)^2 v_i(R_0)^2 + d(m,\tau,R_0),
\end{aligned}$$
onde usamos que $-(a-1)^2 \le 0$, qualquer que seja $a \in \mathbb{R}$, e o Lema Radial AII de H. Berestycki e P.-L. Lions em [8], desde que $\Delta^{k-l} v_i(|x|) \in W^{1,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ para $l = 1, \ldots, k$. Observando que $\Delta^{k-l} g_l(R_0) = c_l^{k-l}$, temos
$$a_{1,i}^2 \le \frac{1}{(c_1^{k-1})^2} \left(\Delta^{k-1} v_i(R_0)\right)^2 \le \frac{c_n^2}{(c_1^{k-1})^2 R_0^{n-1}} \|\Delta^{k-1} v_i\|^2_{W^{1,2}} = \frac{\tilde{c}_1}{R_0^{n-1}} \|\Delta^{k-1} v_i\|^2_{W^{1,2}}$$
e assumindo, por indução, que
$$a_{l,i}^2 \le \tilde{c}_l \sum_{s=1}^{l} \frac{1}{R_0^{n-1-4(l-s)}} \|\Delta^{k-s} v_i\|^2_{W^{1,2}},$$

onde $\tilde{c}_l$ depende apenas de m, temos

$$\begin{aligned}
a_{l+1,i}^2 &\le \frac{(l+1)^2}{(c_{l+1}^{k-l-1})^2}\left[\left(\Delta^{k-l-1}v_i(R_0)\right)^2+\sum_{s=1}^{l}a_{s,i}^2\left(\Delta^{k-l-1}g_s(R_0)\right)^2\right]\\
&\le \frac{(l+1)^2}{(c_{l+1}^{k-l-1})^2}\left[\frac{c_n^2}{R_0^{n-1}}\|\Delta^{k-l-1}v_i\|_{W^{1,2}}^2+\sum_{s=1}^{l}\tilde{c}_s\sum_{j=1}^{s}\frac{(c_s^{k-l-1})^2}{R_0^{n-1-4(s-j)-4k+4(k-l-1+s)}}\|\Delta^{k-j}v_i\|_{W^{1,2}}^2\right]\\
&\le \frac{(l+1)^2}{(c_{l+1}^{k-l-1})^2}\left[\frac{c_n^2}{R_0^{n-1}}\|\Delta^{k-l-1}v_i\|_{W^{1,2}}^2+\sum_{s=1}^{l}\frac{l\tilde{c}_s(c_s^{k-l-1})^2}{R_0^{n-1-4(l+1-s)}}\|\Delta^{k-s}v_i\|_{W^{1,2}}^2\right]\\
&\le \tilde{c}_{l+1}\sum_{s=1}^{l+1}\frac{1}{R_0^{n-1-4(l+1-s)}}\|\Delta^{k-s}v_i\|_{W^{1,2}}^2
\end{aligned}$$

Portanto, podemos tomar c_m dependendo apenas de m de modo que

$$v_i(r)^2\le z_i(r)^2\left(1+c_m\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{R_0^{4j-1}}\|\Delta^{k-j}v_i\|_{W^{1,2}}^2+\frac{c_m}{R_0^{2m-1}}\|v_i\|_{W^{1,2}}^2\right)+d(m,\tau,R_0),$$

$\square$

Deste modo, definimos

$$w_i(|x|):=z_i(|x|)\left(1+c_m\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{R_0^{4j-1}}\|\Delta^{k-j}v_i\|_{W^{1,2}}^2+\frac{c_m}{R_0^{2m-1}}\|v_i\|_{W^{1,2}}^2\right)^{1/2}.$$

Como $\nabla^m v_i(x)=\nabla^m z_i(x)$ em B_{R_0} e $z_i\in W_{\mathcal{N}}^{m,2}(B_{R_0})$ temos que

$$w_i\in W_{\mathcal{N}}^{m,2}(B_{R_0}),$$

e ainda

$$\|\nabla^m w_i\|_2=\|\nabla^m z_i\|_2\left(1+c_m\sum_{j=1}^{k-1}\frac{1}{R_0^{4j-1}}\|\Delta^{k-j}v_i\|_{W^{1,2}}^2+\frac{c_m}{R_0^{2m-1}}\|v_i\|_{W^{1,2}}^2\right)^{1/2}.$$

Agora, note que, de

$$(\tau I-\Delta)^k v_i=\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau^j\Delta^{k-j}v_i,$$

como em (3.3.2), obtemos

$$\|(\tau I-\Delta)^k v_i\|_2^2=\sum_{s=0}^{2k}\binom{2k}{s}\tau^s\|\nabla^{2k-s}v_i\|_2^2\le 1.$$

Assim, tomando $\lambda = \min\left\{\binom{2k}{s}\tau^s : s = 1,2,\dots,2k\right\}$ temos

$$\begin{aligned}\|\nabla^m z_i\|_2^2 = \|\nabla^m v_i\|_2^2 &\leq 1 - \lambda \sum_{s=1}^{2k} \|\nabla^{2k-s} v_i\|_2^2 \\ &= 1 - \lambda \sum_{s=1}^{k-1} \|\Delta^{k-s} v_i\|_{W^{1,2}}^2 - \lambda \|v_i\|_{W^{1,2}}^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\|\nabla^m w_i\|_2^2 &\leq \left(1 - \lambda \sum_{s=1}^{k-1} \|\Delta^{k-s} v_i\|_{W^{1,2}}^2 - \lambda \|v_i\|_{W^{1,2}}^2\right) \\ &\quad \times \left(1 + c_m \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{R_0^{4j-1}} \|\Delta^{k-j} v_i\|_{W^{1,2}}^2 + \frac{c_m}{R_0^{2m-1}} \|v_i\|_{W^{1,2}}^2\right), \\ &\leq 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{c_m}{R_0^{4j-1}} - \lambda\right) \|\Delta^{k-j} v_i\|_{W^{1,2}}^2 + \left(\frac{c_m}{R_0^{2m-1}} - \lambda\right) \|v_i\|_{W^{1,2}}^2,\end{aligned}$$

de forma que podemos tomar $R_0(\tau,m)$ suficientemente grande tal que

$$\|\nabla^m w_i\|_2 \leq 1.$$

Então, pela definição de w_i e pelo Lema 5.2.1, obtemos

$$I_0 = \int_{B_{R_0}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq e^{\beta_{\alpha,m} d(m,R_0)} \int_{B_{R_0}} \frac{e^{\beta w_i^2}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x, \tag{5.2.6}$$

e, aplicando o Teorema J, teremos a limitação de I_0.

Para estimar I_1, pelo Lema Radial 3.2.1 , basta tomarmos $R_0(\tau,m) > \frac{2^{2/(n-1)}}{\omega_n^{1/(n-1)} \lambda^{2/(n-1)}}$ que teremos

$$v_i(|x|) < 1 \qquad \text{para todo} \quad x \in B_{R_i} \setminus B_{R_0},$$

e assim

$$\begin{aligned}I_1 &= \int_{B_{R_i} \setminus B_{R_0}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{R_0^\alpha} \int_{B_{R_i} \setminus B_{R_0}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j v_i^{2j}}{j!} \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{R_0^\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j}{j!} \int_{B_{R_i} \setminus B_{R_0}} v_i^2 \mathrm{d}x \leq \frac{e^\beta}{R_0^\alpha}.\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Portanto, é possível tomar um $R(\tau,m)$, que somente dependa de m e τ, suficientemente grande de forma que (5.2.6) e (5.2.7) sejam válidas, o que conclui a prova do teorema para o caso em que m é par.

Quando $\beta > \beta_{\alpha,m}$, podemos mostrar que o supremo é infinito tomando a mesma sequência utilizada no final da Seção 3.3.

5.3 Prova do Teorema 5.1.1 para m ímpar

Seja m ímpar, isto é, $m = 2k+1$ para algum $k \in \mathbb{N}$. A prova deste caso é através de uma construção semelhante à do caso par. Inicialmente note que, como no caso par, é suficiente mostrar para o caso em que $\Omega = \mathbb{R}^{2m}$.

Assim, dado $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$, seja uma sequência $(u_i) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m})$ tal que $u_i \to u$ em $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$, $\|\nabla(-\Delta + \tau I)^k u_i\|_2 + \tau\|(-\Delta+\tau I)^k u_i\|_2 \leq 1$ e $\operatorname{supp}(u_i) \subset B_{R_i}$. Como antes basta mostrar que existe $C_{\alpha,m,\tau}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta u_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq C_{\alpha,m,\tau},$$

para todo i. Tome agora $v_i \in W_{\mathcal{N}}^{2k,2}(B_{R_i})$ como a única solução forte de

$$\begin{cases} (\tau I - \Delta)^k v_i = f_i^* & \text{em} \quad B_{R_i} \\ v_i = \Delta^j v_i = 0 & \text{em} \quad \partial B_{R_i}, \quad 0 < j < k. \end{cases}$$

onde f_i é dado por $f_i = (\tau I - \Delta)^k u_i$. Por regularidade, temos que $v_i \in W_{\mathcal{N}}^{m,2}(B_{R_i})$ e pela desigualdade de Pólya-Szegö,

$$\|\nabla(-\Delta + \tau I)^k v_i\|_2 \leq \|\nabla(-\Delta + \tau I)^k u_i\|_2$$

o que implica que

$$\|\nabla(-\Delta+\tau I)^k v_i\|_2 + \tau\|(-\Delta+\tau I)^k v_i\|_2 \leq \|\nabla(-\Delta+\tau I)^k u_i\|_2 + \tau\|(-\Delta+\tau I)^k u_i\|_2 \leq 1.$$

Deste modo, pela Proposição 3.2.3, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta u_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x = \int_{B_{R_i}} \frac{e^{\beta u_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq \int_{B_{R_i}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x.$$

Como antes, tomando $R_0 > 0$, consideramos

$$\int_{B_{R_i}} \frac{e^{\beta v_i^2}-1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x = \int_{B_{R_0}} \frac{e^{\beta v_i^2}-1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x + \int_{B_{R_i}\setminus B_{R_0}} \frac{e^{\beta v_i^2}-1}{|x|^\alpha}\mathrm{d}x$$
$$= I_0 + I_1.$$

Iremos agora garantir a existência de um $R_0 = R_0(\tau, m)$ fixo tal que I_0 e I_1 seja uniformemente limitada por alguma constante $C_{\alpha,m,\tau}$.

Como no caso anterior, construamos uma sequência $w_i \in W^{m,2}_{\mathscr{N}}(B_{R_0})$ tal que $\|\nabla^m u\|_2 \le 1$, para um R_0 grande. Sendo g_l como em (5.2.1), defina

$$z_i(|x|) := v_i(|x|) - \sum_{l=1}^{k-1} a_{l,i} g_l(|x|) - a_{k,i},$$

onde $a_{l,i}$ dado por (5.2.4), para $l = 1,2,\ldots,k-1$, e $a_{k,i}$ dado por (5.2.5), lembrando que $m = 2k+1$. Note que $\nabla^m v_i(x) = \nabla\Delta^k v_i = \nabla\Delta^k z_i = \nabla^m z_i(x)$ $z_i \in W^{m,2}_{\mathscr{N}}(B_{R_0})$ e, pelo Lema 5.2.1,

$$v_i(|x|)^2 \le z_i(|x|)^2 \left(1 + c_m \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{R_0^{4j-1}} \|\Delta^{k-j} v_i\|^2_{W^{1,2}} + \frac{c_m}{R_0^{2m-1}} \|v_i\|^2_{W^{1,2}}\right) + d(m, R_0),$$

Deste modo, definimos w_i por

$$w_i(|x|) := z_i(|x|) \left(1 + c_m \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{R_0^{4j-1}} \|\Delta^{k-j} v_i\|^2_{W^{1,2}} + \frac{c_m}{R_0^{2m-1}} \|v_i\|^2_{W^{1,2}}\right)^{1/2}.$$

Como $\nabla^m v_i(x) = \nabla^m z_i(x)$ em B_{R_0} e $z_i \in W^{m,2}_{\mathscr{N}}(B_{R_0})$ temos que

$$w_i \in W^{m,2}_{\mathscr{N}}(B_{R_0}),$$

e ainda

$$\|\nabla^m w_i\|_2 = \|\nabla^m z_i\|_2 \left(1 + c_m \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{R_0^{4j-1}} \|\Delta^{k-j} v_i\|^2_{W^{1,2}} + \frac{c_m}{R_0^{2m-1}} \|v_i\|^2_{W^{1,2}}\right)^{1/2}.$$

Analogamente à (3.3.3) temos que

$$\|\nabla(-\Delta+\tau I)^k v_i\|_2^2 + \tau\|(-\Delta+\tau I)^k v_i\|_2^2 = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} \tau^{m-j} \int_{\mathbb{R}^{2m}} |\nabla^j v_i|^2 \,\mathrm{d}x \le 1.$$

e assim, tomando $\lambda = \min\left\{\binom{m}{j}\tau^{m-j} : j = 0,1,\ldots,m\right\}$ temos

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^m z_i\|_2^2 = \|\nabla^m v_i\|_2^2 &\leq 1 - \lambda \sum_{j=0}^{m-1} \|\nabla^j v_i\|_2^2 \\
&= 1 - \lambda \|\Delta^k v_i\|_{W^{1,2}}^2 - \lambda \sum_{s=1}^{k-1} \|\Delta^s v_i\|_{W^{1,2}}^2 - \lambda \|v_i\|_{W^{1,2}}^2.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\|\nabla^m w_i\|_2^2 \leq &\left(1 - \lambda \sum_{s=1}^{k-1} \|\Delta^s v_i\|_{W^{1,2}}^2 - \lambda \|v_i\|_{W^{1,2}}^2\right) \\
&\times \left(1 + c_m \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{R_0^{4j-1}} \|\Delta^{k-j} v_i\|_{W^{1,2}}^2 + \frac{c_m}{R_0^{2m-1}} \|v_i\|_{W^{1,2}}^2\right), \\
\leq &\ 1 + \sum_{j=1}^{k-1} \left(\frac{c_m}{R_0^{4j-1}} - \lambda\right) \|\Delta^{k-j} v_i\|_{W^{1,2}}^2 + \left(\frac{c_m}{R_0^{2m-1}} - \lambda\right) \|v_i\|_{W^{1,2}}^2,
\end{aligned}
$$

de modo que podemos tomar $R_0(\tau,m)$ suficientemente grande tal que

$$
\|\nabla^m w_i\| \leq 1.
$$

Então, pela definição de w_i e pelo Lema 5.2.1, obtemos que

$$
I_0 = \int_{B_{R_0}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \leq e^{\beta_{\alpha,m} d(m,R_0)} \int_{B_{R_0}} \frac{e^{\beta w_i^2}}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x, \tag{5.3.1}
$$

e, aplicando o Teorema J, temos a limitação de I_0.

Para estimar I_1, pelo Lema Radial 3.2.1 , basta tomarmos $R_0(\tau,m) > \frac{2^{2/(n-1)}}{\omega_n^{1/(n-1)} \lambda^{2/(n-1)}}$ que teremos

$$
v_i(|x|) < 1 \qquad \text{para todo} \quad x \in B_{R_i} \setminus B_{R_0},
$$

e assim

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_{B_{R_i} \setminus B_{R_0}} \frac{e^{\beta v_i^2} - 1}{|x|^\alpha} \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{R_0^\alpha} \int_{B_{R_i} \setminus B_{R_0}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j v_i^{2j}}{j!} \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{R_0^\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\beta^j}{j!} \int_{B_{R_i} \setminus B_{R_0}} v_i^2 \mathrm{d}x \leq \frac{e^\beta}{R_0^\alpha}.
\end{aligned} \tag{5.3.2}
$$

Portanto, é possível tomar um $R(\tau,m)$, que somente dependa de m e τ, suficientemente grande de forma que (5.3.1) e (5.3.2) sejam válidas, o que conclui a prova do teorema para o caso em que m é ímpar.

Quando $\beta > \beta_{\alpha,m}$, podemos mostrar que o supremo é infinito, tomando novamente a mesma sequência utilizada no final da Seção 3.3.

5.4 Prova do Teorema 5.1.2

Provaremos o Teorema 5.1.2 usando o Teorema 5.1.1. Primeiramente, denotemos por

$$\|u\|^2_{\mu,\tau,2} = \begin{cases} \mu\|\nabla(-\Delta+\tau I)^k u\|_2^2 + \tau\mu\|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2^2, & \text{para} \quad m = 2k+1; \\ \\ \mu\|(-\Delta+\tau I)^k u\|_2^2, & \text{para} \quad m = 2k, \end{cases} \tag{5.4.1}$$

para $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$, $\mu > 0$ e $\tau > 0$. Temos, assim, o seguinte resultado:

Proposição 5.4.1. *Sejam m, um número inteiro, e $0 \leq \alpha < 2m$, um número real. Sejam ainda $\mu > 0$ e $\tau > 0$ constantes positivas. Então, existe uma constante $C_{\mu,\tau,\alpha} > 0$, que depende apenas de μ, τ e α, tal que*

$$\sup_{\substack{u\in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}) \\ \|u\|^2_{\mu,\tau,2}\leq 1}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\mu\beta_{\alpha,m}u^2}-1}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x \leq C_{\mu,\tau,\alpha},$$

onde $\beta_{\alpha,m} = (1-\frac{\alpha}{2m})\frac{n2^n\pi^n}{\omega_{n-1}}$.

Demonstração. A proposição é uma aplicação direta do Teorema 5.1.2. Dado $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ tal que $\|u\|^2_{\mu,\tau,2} \leq 1$, definimos $\tilde{u} = \mu^{1/2}u$ e assim

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\mu\beta_{\alpha,m}u^2}-1}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta_{\alpha,m}\tilde{u}^2}-1}{|x|^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

e $\|\tilde{u}\|^2_{1,\tau,2} \leq 1$. Então, aplicando o Teorema 5.1.2 o resultado segue. □

Dado $0 < \beta < \beta_0$, tome $0 < \mu < 1$ tal que $\beta < \mu\beta_0$. Assim, usando que

$$\|\nabla^j u\|_2^2 = \sum_{|\alpha|=j} \|D^\alpha u\|_2^2, \quad \text{para} \quad 0 \leq j \leq m,$$

juntamente com o Lema 5.4.1 e Lema 3.3.2, temos que

$$\|\nabla^j u\|_2^2 \leq K(\|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2) \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq m-1.$$

Então, tomando $\tau > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\tau^m + K \sum_{j=1}^{m-1} \binom{m}{s} \mu \tau^{m-j} + \mu \leq 1,$$

obtemos

$$\|u\|_{\mu,\tau} \leq \|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2, \qquad \forall\, u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}),$$

e, portanto,

$$\sup_{\substack{u \in W_0^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}) \\ \|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2 \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta|u|^2} - 1}{|x|^\alpha} \,\mathrm{d}x \leq \sup_{\substack{u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^{2m}), \\ \|u\|_{\mu,\tau} \leq 1}} \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\mu\beta_0|u|^2} - 1}{|x|^\alpha} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Por fim, quando $\beta > \beta_{\alpha,m}$, podemos mostrar que o supremo é infinito tomando novamente a mesma sequência utilizada no final da Seção 3.3.

CAPÍTULO 6

Uma Classe de Problemas Críticos e Singulares Envolvendo o Operador Poliharmônico

6.1 Introdução

Neste capítulo, como aplicação do Teorema 5.1.2, estudaremos a existência de solução para o seguinte problema:

$$(-\Delta)^m u(x) + u(x) = \frac{f(u)}{|x|^a} + h(x), \tag{6.1.1}$$

onde $h \in \left(W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\right)^*$ é uma pequena pertubação da equação e $0 \leq a < 2m$. Faremos o estudo para f possuindo crescimento crítico, isto é, existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to+\infty} f(s)e^{-\alpha s^2} = \begin{cases} 0, & \text{para todo} \quad \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \text{para todo} \quad \alpha < \alpha_0, \end{cases}$$

Para o estudo da equação (6.1.1), assumiremos que f satisfaz as seguintes condições:

($f_{0,\infty}$) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(0) = 0$.

($f_{1,\infty}$) Existem $R > 0$ e $M > 0$ de modo que, $\forall |t| \geq R$

$$0 < F(t) = \int_0^t f(\tau)\, \mathrm{d}\tau \leq M|f(t)|.$$

($f_{2,\infty}$) Existe $\theta > 2$ tal que

$$0 < \theta F(t) \leq f(t)t$$

para todo $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

($f_{3,\infty}$) Existe $q > 3$ tal que

$$\limsup_{t\to 0^+} \frac{2F(t)}{t^q} < S_q^2,$$

onde

$$S_q^2 = \inf\{\|u\|_2^2 + \|\nabla^m u\|_2^2 : u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}), \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|u|^q}{|x|^a}\, \mathrm{d}x = 1\}. \tag{6.1.2}$$

($f_{4,\infty}$) Existe $p > 2$ tal que

$$f(s) \geq \lambda |s|^{p-1},$$

qualquer que seja $s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, para algum $\lambda > 0$ suficientemente grande.

Note que, como f possui crescimento crítico, dado $\alpha > \alpha_0$ existe $C = C(\alpha) > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq C(e^{\alpha t^2} - 1), \qquad \forall t \in \mathbb{R}. \tag{6.1.3}$$

Nossa abordagem do problema será variacional. Estudaremos a existência de pontos críticos para o seguinte funcional

$$J(u) := \frac{1}{2}(\|\nabla^m u\|_2^2 + \|u\|_2^2) - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{F(u)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} h\, u\, \mathrm{d}x. \tag{6.1.4}$$

Garantiremos a existência de duas soluções radiais distintas para a equação (6.1.1), uma solução usando o princípio variacional de Ekeland e a outra usando o Teorema do Passo da Montanha. Como no Capítulo 4, devido a perda de compacidade, estudaremos o funcional J sobre o espaço $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ equipado com a seguinte norma

$$\|u\| := \left[\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(|\nabla^m u|^2 + u^2\right)\, \mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

Lembramos apenas que os pontos críticos de J sobre $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ também são pontos críticos sobre $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ devido ao princípio da criticalidade simétrica. Assim provaremos o seguinte resultado

Teorema 6.1.1. *Suponha que f tem crescimento crítico e* ($f_{0,\infty}$), ($f_{1,\infty}$), ($f_{2,\infty}$), ($f_{3,\infty}$) *são satisfeitas. Então, existe $\delta > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta$ a equação* (6.1.1) *possui duas soluções não triviais $u, v \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ distintas.*

Estudos de problemas elípticos e singulares envolvendo crescimento crítico também tem sido alvo de intensivo estudo. Adimurthi e K. Sandeep [5] mostraram uma desigualdade de tipo Trudinger-Moser com peso e como aplicação estudaram a existência de soluções para um problema elíptico e singular com não linearidade possuindo crescimento crítico dado por esta desigualdade. Motivados neste trabalhos, J. M. do Ó, e M. de Souza [20] e M. de Souza [15, 16] estudaram problemas elípticos e singulares com não linearidades possuindo crescimento crítico, como visto na Introdução. Recentemente, fomos informados que, isoladamente, os autores L. Zhao e Y. Chang [50] estudaram a multiplicidade de soluções para o seguinte problema elíptico e singular:

$$(-\Delta)^m u + (-1) \sum_{\gamma=0}^{m-1} \nabla^\gamma \cdot \left(a_\gamma(x) \nabla^\gamma u\right) = \frac{f(x,u)}{|x|^\beta} + \varepsilon h(x), \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^{2m},$$

para $0 \leq \beta < 2m$, $a_\gamma(x)$ satisfazendo $a_\gamma(x) > a_\gamma > 0$ para a_γ constantes positiva, $\gamma = 1,2,\ldots,m-1$ e f possuindo crescimento crítico exponencial. Salientamos que esta equação não contempla a equação (6.1.1).

6.2 Geometria do Funcional

Apresentamos, nos próximos dois lemas, resultados que fornecem informações sobre a geometria do funcional J.

Lema 6.2.1. *Suponha que f possui crescimento critico* e $(f_{0,\infty})$, $(f_{1,\infty})$ *são satisfeitas. Então,*

$$J(u) \to -\infty \qquad com \qquad t \to \infty,$$

para todo $u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) \setminus \{0\} \cap C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m})$.

Demonstração. A demonstração deste lema segue de modo análogo ao Lema 4.4.1. □

Lema 6.2.2. *Suponha que f tem crescimento crítico* e $(f_{0,\infty}) - (f_{3,\infty})$ *são satisfeitas. Então, existe $\delta > 0$ de modo que para cada $h \in \left(W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\right)^* \setminus \{0\}$, com $\|h\|_{W^{-m,2}} \leq \delta$, podemos tomar $0 < \rho < (\beta_0(1-a/2m)/\alpha_0)^{1/2}$ tal que*

$$J(u) > 0 \qquad \textit{sempre que} \qquad \|u\| = \rho. \tag{6.2.1}$$

Além disso, existem $\eta > 0$ e $C > 0$ tais que

$$-C\delta < \inf_{u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m});\ \|u\| < \eta} J(u) < 0. \tag{6.2.2}$$

Demonstração. Usando $(f_{0,\infty})$, $(f_{3,\infty})$ e (6.1.3), podemos escolher $\lambda < S_q^2$ tal que

$$F(s) \leq \frac{\lambda}{2}|s|^q + C_1(e^{\alpha|s|^2} - 1)|s|^q, \tag{6.2.3}$$

para algum $q > 3$ e $C_1 > 0$, qualquer que seja $s \in \mathbb{R}$. Note agora que, dado $M > 0$ tal que $\alpha M/\overline{\beta} + a/2m < 1$ para algum $0 < \overline{\beta} < \beta_0$, existe $C_2 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\alpha u^2} - 1}{|x|^a} |u|^q \, \mathrm{d}x \leq C_2 \|u\|^q, \tag{6.2.4}$$

para todo $u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ com $\|u\|^2 \leq M$. De fato, pela desigualdades de Hölder, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\alpha u^2}-1}{|x|^a}|u|^q \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{\left(e^{\alpha u^2}-1\right)^r}{|x|^{ra}} \,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} |u|^{r'q}\right)^{1/r'}$$
$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\xi\alpha u^2}-1}{|x|^a} \,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \|u\|^q_{r'q}.$$

para $\xi > r > 1$, onde na última desigualdade utilizamos que $(e^t-1)^r \leq e^{\xi t}-1$. Assim, usando que $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) \hookrightarrow L^{r'q}(\mathbb{R}^{2m})$ e o Teorema 5.1.2

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\alpha u^2}-1}{|x|^a}|u|^q \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\xi\alpha u^2}-1}{|x|^{ra}} \,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \|u\|^q_{r'q}$$
$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{M\xi\alpha\frac{u^2}{\|u\|^2}}-1}{|x|^{ra}} \,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \tilde{C}\|u\|^q < \infty,$$

para $r > 1$ suficientemente pequeno, o que fornece (6.2.4). Assim, de (6.2.3) e (6.2.4), temos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}\|u\| - \frac{\lambda}{2}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|u|^q}{|x|^a} \,\mathrm{d}x - C_3\|u\|^q - \|hu\|_1,$$

e, de (6.1.2),

$$J(u) \geq \|u\| \left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{S_q^2}\right)\|u\| - C_3\|u\|^{q-1} - \|h\|_{W^{-m,2}}\right). \tag{6.2.5}$$

Deste modo, de $\lambda < S_q^2$ e q>2, podemos tomar $\rho < \min\left\{M, \frac{\beta_0(1-a/2m)}{\alpha_0}\right\}$ de modo que, para $\|u\| = \rho$,

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)\rho - C_3\rho^{q-1} > 0.$$

Portanto existe $\delta > 0$ tal que, para $\|h\|_{W^{-m,2}} < \delta$,

$$J(u) > 0 \qquad \text{sempre que} \qquad \|u\| = \rho.$$

Agora, pelo Teorema da representação de Riesz para o espaço $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ temos que, para cada $h \in \left(W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\right)^* \setminus \{0\}$ existe $v_h \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) \setminus \{0\}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \nabla^m v_h \nabla^m \phi \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^{2m}} v_h \phi \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{2m}} h\phi \,\mathrm{d}x,$$

para todo $\phi \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$. Assim, v_h satisfaz

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} hv_h \,\mathrm{d}x = \|v_h\|^2 > 0.$$

Então, considerando a hipótese $(\mathrm{f}_{2,\infty})$, existe $\xi > 0$ tal que

$$\frac{d}{dt}J(tv_h) = t^2\|v_h\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(tv_h)v_h}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - t\int_{\mathbb{R}^{2m}} hv_h\,\mathrm{d}x < 0,$$

para todo $0 < t < \xi$. Disto e desde que $J(0) = 0$, obtemos

$$J(tv_h) < 0, \tag{6.2.6}$$

para todo $0 < t < \xi$. Portanto, tomando $\eta = \min\{\xi\delta, \rho, 1\}$, de (6.2.6) e (6.2.5), temos que

$$-C\delta < -C_3\eta^{q-1} - \delta \leq \inf_{\substack{u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m});\\ 0<\|u\|<\eta}} J(u) < 0,$$

para algum $C > 0$. □

6.3 Propriedades das Sequências de Palais-Smale

Primeiramente, observamos a seguinte propriedade, cuja prova segue de forma análoga ao Lema 4.3.1.

Lema 6.3.1. *Seja $(u_i) \subset W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ uma sequência de Palais-Smale de J. Então, (u_i) é uma sequência limitada em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$. Mais ainda, considerando que $u_i \rightharpoonup u$ em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$, a menos de subsequência, temos que*

$$\frac{f(u_i)}{|x|^a} \to \frac{f(u)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1(\mathbb{R}^{2m}) \tag{6.3.1}$$

e

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)u}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u)u}{|x|^a}\,\mathrm{d}x. \tag{6.3.2}$$

Note que, dos Lemas 6.2.2 e 6.2.1, temos que o funcional satisfaz a geometria do passo da montanha cujo nível denotaremos por

$$c_M := \inf_{\gamma\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]} J(\gamma(t)),$$

onde
$$\Gamma = \{\gamma \in C\left([0,1], W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\right) : \ \gamma(0) = 0 \text{ e } J(\gamma(1) < 0)\}.$$
Mais ainda, sendo $\eta > 0$ como no Lema 6.2.2, denotamos por

$$c_E := \inf_{\substack{u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}); \\ 0<\|u\|<\eta}} J(u).$$

Vejamos assim o seguinte resultado de compacidade para as sequências de Palais-Smale de J:

Lema 6.3.2. *Seja $(u_i) \subset W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ uma sequência de Palais-Smale de J tal que*

$$\liminf_{i\to\infty} \|u_i\|^2 < \frac{\beta_0(1-a/2m)}{\alpha_0}.$$

Então, (u_i) possui um subsequência fortemente convergente em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$.

Demonstração. Primeiramente, observe que, do Lema 6.3.1, podemos considerar que $u_i \rightharpoonup u$ em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$, que por compacidade, implica que $u_i \to u$ em $L^q(\mathbb{R}^{2m})$, para $q > 2$, e ainda

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)u}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u)u}{|x|^a}\, \mathrm{d}x.$$

Tomando agora $w_i = u_i - u$, sabemos que $w_i \rightharpoonup 0$ em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ e, por Brezis-Lieb,

$$\lim_{i\to\infty} \|u_i\|^2 = \|u\|^2 + \lim_{i\to\infty} \|w_i\|^2.$$

Mais ainda, por compacidade, $w_i \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^{2m})$, para $q > 2$. Assim, considerando que

$$J(u_i) \to c_M \qquad \text{e} \qquad \|J'(u_i)\|_{W^{-m,2}} \to 0,$$

temos que
$$J'(u)u = \lim_{i\to\infty} J'(u_i)u = 0$$
e

$$\begin{aligned}
\lim_{i\to\infty} J'(u_i)u_i &= \lim_{i\to\infty} \left(\|u_i\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)u}{|x|^a}\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)w_i}{|x|^a}\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} hu_i\, \mathrm{d}x \right) \\
&= \|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u)u}{|x|^a}\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} hu\, \mathrm{d}x + \lim_{i\to\infty} \left(\|w_i\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)w_i}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \right) \\
&= J'(u)u + \lim_{i\to\infty} \left(\|w_i\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)w_i}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \right) = 0.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\lim_{i\to\infty}\|w_i\|^2 = \lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)w_i}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.$$

Portanto, basta mostrar que

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)w_i}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = 0, \tag{6.3.3}$$

para provar que $u_i \to u$ em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$. Para verificarmos isso, observemos primeiro que, de $(\mathrm{f}_{0,\infty})$, $(\mathrm{f}_{3,\infty})$ e (6.1.3), podemos escolher $\lambda < S_q^2$ e $C_1 = C_1(\alpha)$ tal que

$$f(s) \le \frac{\lambda}{2}|s|^{q-1} + C_1(e^{\alpha s^2}-1),$$

para $\alpha > \alpha_0$ e algum $q > 3$. Assim, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|f(u_i)w_i|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x &\le \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|u_i|^{q-1}|w_i|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + C_1\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{(e^{\alpha u_i^2}-1)|w_i|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|u_i|^{(q-1)p}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|w_i|^{p'}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p'}\\
&\quad + C_1\left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{(e^{\alpha u_i^2}-1)^r}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|w_i|^{r'}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r'}\\
&\le \left(\int_{B_1} \frac{|u_i|^{(q-1)p}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + \|u_i\|_{(q-1)p}^{(q-1)p}\right)^{1/p}\left(\int_{B_1} \frac{|w_i|^{p'}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + \|w_i\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'}\\
&\quad + C_1\left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\xi\alpha(\|u_i\|^2)\frac{u_i}{\|u_i\|^2}{}^2}-1}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_{B_1} \frac{|w_i|^{r'}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + \|w_i\|_{r'}^{r'}\right)^{1/r'}
\end{aligned}$$

para $\xi > r > 1$, onde na última desigualdade utilizamos que $(e^t-1)^r \le e^{\xi t}-1$, e $1 < p < 2$. Assim, usando a desigualdade de Holder e observando que $\liminf_{i\to\infty}\|u_i\|^2 < \overline{\beta}(1-a/2m)/\alpha_0$ para algum $\overline{\beta} < \beta_0$, podemos encontrar uma constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|f(u_i)w_i|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \le \left(C\|u_i\|_{(q-1)ps}^{(q-1)p} + \|u_i\|_{(q-1)p}^{(q-1)p}\right)^{1/p}\left(C\|w_i\|_{p's}^{p'} + \|w_i\|_{p'}^{p'}\right)^{1/p'}\\
+ C_1C^{1/r}\left(C\|w_i\|_{r's}^{r'} + \|w_i\|_{r'}^{r'}\right)^{1/r'},
\end{aligned}$$

para $r > 1$ e $\alpha > \alpha_0$ suficientemente pequenos e i grande. Por fim, observando que $(q-1)p$, p'

e r' podem ser tomados estritamente maiores do que 2,

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2m}}\frac{|f(u_i)w_i|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x=0$$

pois $u_i \to u$ e $w_i \to 0$ em $L^q(\mathbb{R}^{2m})$, para $q>2$. Isto prova a proposição. $\square$

Agora mostraremos que, para uma pertubação h suficientemente pequena, a equação (6.1.1) possui pelo ao menos duas soluções distintas. Primeiramente, vejamos que, para $\lambda>0$ em $(\mathrm{f}_{4,\infty})$ satisfazendo

$$\lambda>\left(\frac{\alpha_0(p-2)}{\bar{\beta}p(1-a/2m)}\right)^{(p-2)/2}S_p^p,$$

e

$$S_p:=\inf_{u\in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})}\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^{2m}}u^2\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^{2m}}|\nabla^m u|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}}{\left(\int_{\mathbb{R}^{2m}}\frac{|u|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}},\tag{6.3.4}$$

para algum $0<\bar{\beta}<\beta_0=\frac{n2^n\pi^n}{\omega_{n-1}}$, podemos estabelecer uma relação entre os níveis c_M e c_E.

Lema 6.3.3. *Existe $\delta>0$ tal que, para $h\in\left(W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\right)^*\setminus\{0\}$ com $\|h\|_{W^{-m,2}}\leq\delta$, os níveis c_M e c_E satisfazem a desigualdade*

$$c_M<c_E+\frac{\bar{\beta}(1-a/2m)}{2\alpha_0}.$$

Demonstração. Primeiramente, observe que S_p, dado como em (6.3.4), é atingido. Para verificarmos isso, tome $(u_i)\subset W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ uma sequência minimizante para S_p tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}}\frac{|u_i|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x=1,$$

para todo i, isto é,

$$\lim_{i\to\infty}\|u_i\|=S_p.$$

Disto segue que (u_i) é uma sequência limitada em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ e, portanto, existe $u_p\in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ tal que

$$\begin{array}{llll} u_i\rightharpoonup u_p & \text{em} & W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) & \\ u_i\to u_p & \text{em} & L^q(\mathbb{R}^{2m}), & \text{para} \quad q>2, \\ u_i\to u_p & \text{q.t.p. em} & \mathbb{R}^{2m} & \end{array}$$

Assim,

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2m}}\frac{|u_i|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^{2m}}\frac{|u_p|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x=1,$$

e, pela semi-continuidade inferior da norma,

$$\|u_p\| \leq \liminf_{i\to\infty} \|u_i\| = \inf_{\substack{u\in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\\ \|u\|=1}} \|u_i\| = S_p.$$

Portanto $\|u_p\| = S_p$. Vejamos agora que

$$\max_{t\geq 0}\left(\frac{1}{2}\|tu_p\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{F(tu_p)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right) < \frac{\overline{\beta}(1-a/2m)}{2\alpha_0}. \tag{6.3.5}$$

De fato, por $(\mathrm{f}_{3,\infty})$,

$$\frac{1}{2}\|tu_p\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{F(tu_p)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq \frac{t^2}{2}\|u_p\|^2 - t^p\frac{\lambda}{p}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|u_p|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = \frac{t^2}{2}S_p^2 - t^p\frac{\lambda}{p}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\max_{t\geq 0}\left(\frac{1}{2}\|tu_p\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{F(tu_p)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right) &\leq \max_{t\geq 0}\left(\frac{t^2}{2}S_p^2 - t^p\frac{\lambda}{p}\right)\\ &= \frac{(p-2)}{2p}\frac{S_p^{2p/(p-2)}}{\lambda^{2/(p-2)}} < \frac{\overline{\beta}(1-a/2m)}{2\alpha_0}.\end{aligned}$$

Deste modo, de (6.3.5) e do Lema 6.2.1, temos que

$$c_M \leq \max_{t\geq 0} J(tu_p) \leq \max_{t\geq 0}\left(\frac{1}{2}\|tu_p\|^2 - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{F(tu_p)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right) + \|h\|_{W^{-m,2}}\|u_p\| < \frac{\overline{\beta}(1-a/2m)}{2\alpha_0}$$

para $\|h\|_{W^{-m,2}}$ suficientemente pequena e mais, de (6.2.2), podemos tomar $\|h\|_{W^{-m,2}}$ suficientemente pequena de modo que

$$c_M < c_E + \frac{\overline{\beta}(1-a/2m)}{2\alpha_0}.$$

□

6.4 Multiplicidade de Solução

Nesta seção, provaremos o Teorema 6.1.1. Suponha que $h \in \left(W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})\right)^* \setminus \{0\}$ seja de tal forma que $\|h\|_{W^{-m,2}} \leq \delta$, onde δ é tomado pequeno de forma que os Lemas 6.2.1 e 6.3.3 sejam satisfeitos. Assim, em vista dos Lemas 6.2.2 e 6.2.1, podemos usar o Teorema do Passo da Montanha, sem que o funcional J satisfaça a condição de Palais-Smale, para obter uma sequência $(u_i) \subset W^{m,2}_{rad}(\Omega)$ de Palais-Smale de J, isto é,

$$J(u_i) \to c_M \qquad \text{e} \qquad \|J'(u_i)\|_{W^{-m,2}} \to 0. \tag{6.4.1}$$

Assim, do Lema 6.3.1, temos que (u_i) é limitado e mais, a menos de subsequência,

$$u_i \rightharpoonup u_M \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_M)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x,$$

para algum $u_M \in W^{m,2}_{rad}(\Omega)$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} (\nabla^m u_M \nabla^m \varphi + u_M \varphi)\ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_M)}{|x|^a}\varphi\ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^{2m}} h\varphi\ \mathrm{d}x = 0, \qquad \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m}),$$

ou seja, u_M é uma solução fraca para o problema (6.1.1).

Agora seja $\rho \in \left(0, \left(\overline{\beta}(1-a/2m)/\alpha_0\right)^{1/2}\right)$ dado no Lema 6.2.2. Assim, como

$$\overline{B}_\rho = \{u \in W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}) : \|u\| \le \rho\},$$

é um espaço métrico completo com a métrica dada pela norma $\|\cdot\|$, J é C^1, semi-continuo inferiormente e inferiormente limitado em $\overline{B}_\rho$, pelo Princípio Variacional de Ekeland, dado uma sequência $v_i \in \overline{B}_\rho$ tal que

$$J(v_i) - \inf_{u \in \overline{B}_\rho} J(u) \le 1/i,$$

existe $z_i \in \overline{B}_\rho$ tal que

$$J(z_i) \le J(v_i),$$

e

$$J(z_i) - J(w) < \frac{1}{i}\|z_i - w\|, \quad \forall w \ne z_i \quad \text{em} \quad \overline{B}_\rho,$$

o que implica que

$$J(z_i) \to \inf_{u \in \overline{B}_\rho} J(u) \qquad \text{e} \qquad |J'(z_i)w| \le \frac{1}{i}\|w\|, \quad \forall\ w \in \overline{B}_\rho.$$

Logo, existe $(z_i) \subset W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ tal que $\|z_i\| \le \rho < \left(\overline{\beta}(1-a/2m)/\alpha_0\right)^{1/2}$,

$$J(z_i) \to c_E = \inf_{z \in \overline{B}_\rho} J(u) < 0 \qquad \text{e} \qquad \|J'(z_i)\|_{W^{-m,2}} \to 0.$$

Assim, pelo Lema 6.3.2, (z_i) possui uma subsequência a qual converge fortemente para algum u_E em $W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m})$ e mais ainda $J'(u_E) = 0$ e $J(u_E) = c_E < 0$.

Portanto, encontramos duas soluções, u_M e u_E, para a equação (6.1.1). Para garantirmos que estas soluções são distintas, faremos uso do seguinte resultado de concentração-compacidade.

Proposição 6.4.1. *Seja* $(u_i) \subset W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ *tal que* $u_i \rightharpoonup u$ *em* $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$*, para algum* $u \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ *com* $u \not\equiv 0$*. Então, dado* $0 < \beta < \beta_0 = \frac{n2^n\pi^n}{\omega_{n-1}}$*, temos que*

$$\sup_i \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\gamma u_i^2} - 1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x < \infty, \tag{6.4.2}$$

para todo $0 < \gamma < \beta(1 - a/2m)/(1 - \|u\|^2)$.

Demonstração. A prova para esta proposição segue de modo análogo à Proposição 4.2.1. Usando a estrutura de Hilbert de $L^2(\mathbb{R}^{2m})$ temos

$$\|u_i - u\|_2^2 + \|\nabla^m u_i - \nabla^m u\|_2^2 \to 1 - \|u\|_2^2 - \|\nabla^m u\|_2^2 < \frac{\beta(1 - a/2m)}{\gamma}.$$

Portanto, para i suficientemente grande

$$\frac{\gamma}{\beta(1 - a/2m)}(\|u_i - u\|_2^2 + \|\nabla^m u_i - \nabla^m u\|_2^2) < 1.$$

Assim temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta\gamma u_i^2} - 1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\beta\gamma(1+\delta)(u_i-u)^2 + \beta\gamma(1+1/\delta)u^2} - 1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{r\beta\gamma(1+\delta)(u_i-u)^2} - 1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{r'}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{r'\beta\gamma(1+1/\delta)u^2} - 1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \\
&\leq \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{\frac{\beta(1-a/2m)(u_i-u)^2}{\|u_i-u\|}} - 1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{r'}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{e^{r'\beta\gamma(1+1/\delta)u^2} - 1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

para i suficientemente grande e $\delta > 0$, $r > 1$ suficientemente pequenos, onde $r' = r/(r-1)$. Portanto, pelo Teorema 5.1.2, o resultado seque. $\square$

Suponhamos, agora, por contradição, que u_M seja igual a u_E. Daí segue que

$$u_i \rightharpoonup u_E \qquad \text{em} \qquad W^{m,2}_{rad}(\mathbb{R}^{2m}).$$

Mostraremos que u_i possui uma subsequência que converge fortemente para u_E e assim, como

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{F(u_i)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{F(u_E)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x,$$

teremos que $c_E = J(u_E) = \lim_{i\to\infty} J(u_i) = c_M \geq 0$, o que é uma contradição ao fato de $c_E < 0$.

Considerando uma subsequência de (u_i), a qual, por simplicidade, denotaremos também por (u_i), de tal forma que

$$\lim_{i\to\infty}\|u_i\| = \liminf_{i\to\infty}\|u_i\| \leq \|u_E\|,$$

pela semi-continuidade inferior fraca da norma. Suponha que

$$\lim_{i\to\infty}\|u_i\| < \|u_E\|.$$

Tomemos agora

$$w_i = \frac{u_i}{\|u_i\|} \qquad \text{e} \qquad w = \frac{u_E}{\lim_{i\to\infty}\|u_i\|}.$$

Observe que $w_i \rightharpoonup w$ e $0 < \|w\| < 1$. Do Lema 6.3.3, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$q\alpha < \frac{\overline{\beta}(1-a/2m)}{2(c_M - J(u_E))} - \varepsilon.$$

para $\alpha > \alpha_0$ suficientemente próximo de α_0 e $q > 1$ suficientemente próximo de 1. Por (6.4.1),

$$\frac{1}{2}\lim_{i\to\infty}\|u_i\|^2 = c_M + \int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{F(u_E)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^{2m}} hu_E\,\mathrm{d}x,$$

o que implica que

$$q\alpha\|u_i\|^2 < \frac{\overline{\beta}(1-a/2m)}{(\lim_{i\to\infty}\|u_i\|^2 - \|u_E\|^2)} - \varepsilon,$$

e assim

$$q\alpha\|u_i\|^2 < \overline{\beta}(1-a/2m)\frac{1}{(1-\|w\|^2)}, \tag{6.4.3}$$

para i suficientemente grande. Agora, observamos que, de

$$J'(u_i)(u_i - u) \to 0, \qquad\qquad u_i \rightharpoonup u,$$

e de (6.3.2), é suficiente mostrar que

$$\lim_{i\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{f(u_i)(u_i-u)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = 0,$$

para provarmos que $\|u_i\| \to \|u_E\|$. Para tanto, por $u_i \to u_E$ em $L^q(\mathbb{R}^{2m})$ para $q > 2$, basta mostrar que $f(u_i)/|x|^a$ é uniformemente limitado em $L^p(\mathbb{R}^{2m})$ para algum $p > 1$. Assim, de

(6.1.3), temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{|f(u_i)|^p}{|x|^{ap}}\,\mathrm{d}x &\leq C\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{(e^{\alpha|u_i|^2}-1)^p}{|x|^{ap}}\,\mathrm{d}x \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{(e^{\alpha r|u_i|^2}-1)}{|x|^{ap}}\,\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}^{2m}} \frac{(e^{\alpha r\|u_i\|^2|w_i|^2}-1)}{|x|^{ap}}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

que, por (6.4.3) juntamente com a desigualdade (6.4.2), é uniformemente limitado para $r > p > 1$ e $\alpha > \alpha_0$ suficientemente próximo de α_0.

Apêndice

Neste apêndice, veremos como podemos utilizar a desigualdade do tipo Adams para garantir que funcionais envolvendo crescimento crítico exponencial são de classe C^1. Também apresentaremos alguns resultados diversos.

Primeiro note que, usando a derivada de Gâteaux, nós apenas temos que mostrar que: dado $w_i \to w$ em $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$

$$J'(w_i)(v) \to J'(w)(v), \quad \text{qualquer que seja} \quad v \in W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m}).$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\left|J'(w_i)(v) - J'(w)(v)\right| &\le \left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} (\nabla^m w_i - \nabla^m w)\nabla^m v \mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} (w_i - w)v \mathrm{d}x\right| \\
&\quad + \left|\int_{\mathbb{R}^{2m}} (f(|x|, w_i) - f(|x|, w))v \mathrm{d}x\right| \\
&\le \left(\|w_i - w\|^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} (f(|x|, w_i) - f(|x|, w))^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2}\right)\|v\|.
\end{aligned}$$

Como a primeira parte converge para 0, nós apenas temos que mostrar que $\left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} (f(|x|, w_i) - f(|x|, w))^2 \mathrm{d}x\right)^{1/2} \to 0$. Usando a estimativa (4.1.2) temos

$$\begin{aligned}
(f(|x|, w_i) - f(|x|, w))^2 &\le C\left(e^{\alpha w_i^2} - 1\right)^2 + C\left(e^{\alpha w^2} - 1\right)^2 \\
&\le C\left(e^{3\alpha w_i^2} - 1\right) + C\left(e^{3\alpha w^2} - 1\right) \\
&\le C\left(e^{6\alpha (w_i - w)^2 + 6\alpha w^2} - 1\right) + C\left(e^{3\alpha w^2} - 1\right) \\
&\le \frac{C}{2}\left(e^{12\alpha (w_i - w)^2} - 1\right) + C'\left(e^{12\alpha w^2} - 1\right)
\end{aligned}$$

Assim, como $f(|x|, w_i) - f(|x|, w) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^{2m}$, pelo Teorema da Convergência Dominada Generalizado, é suficiente provar que $\left(e^{12\alpha(w_i - w)^2} - 1\right)$ converge em $L^1(\mathbb{R}^{2m})$. De fato,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{12\alpha(w_i-w)^2}-1\right) \mathrm{d}x &\leq \int_{\{|w_i-w|<1/2\}} \left(e^{12\alpha(w_i-w)^2}-1\right) \mathrm{d}x + \int_{\{|w_i-w|\geq 1/2\}} \left(e^{12\alpha(w_i-w)^2}-1\right) \mathrm{d}x \\
&\leq e^{12\alpha} \int_{\{|w_i-w|<1/2\}} (w_i-w)^2 \, \mathrm{d}x \\
&\quad + |\{|w_i-w|\geq 1/2\}|^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{36\alpha\|w_i-w\|^2\left(\frac{w_i-w}{\|w_i-w\|}\right)^2} - 1 \right) \mathrm{d}x \right)^{1/2}
\end{aligned}
$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $w_i \to w$ em $W^{m,2}(\mathbb{R}^{2m})$ e da desigualdade do tipo Adams (3.1.2), temos

$$
\int_{\mathbb{R}^{2m}} \left(e^{12\alpha(w_i-w)^2}-1\right) \mathrm{d}x \leq e^{12\alpha}\|w_i-w\|^2 + |\{|w_i-w|\geq 1/2\}|^{1/2} C < \varepsilon
$$

para i suficientemente grande. Portanto $\left(e^{12\alpha(w_i-w)^2}-1\right)$ converge para 0 em $L^1(\mathbb{R}^{2m})$, o que completa a prova.

Enunciamos agora o Lema de convergência citado em partes do trabalho [13, Lema 2.1]

Lema. *Seja (u_n) uma sequência de função em $L^1(\Omega)$ convergindo para u em $L^1(\Omega)$. Suponha que $f(x,u_n(x)), f(x,u(x)) \in L^1(\Omega)$. Se*

$$
\int_{\Omega} |f(x,u_n(x))| \, \mathrm{d}x \leq C_1,
$$

então $f(x,u_n)$ converge in $L^1(\Omega)$ para $f(x,u)$.

Por fim, provaremos a seguinte desigualdade elementar

$$
(a+b)^q \leq (1+\delta)^q a^q + (1+1/\delta)^q b^q,
$$

quaisquer que sejam os números reais $a,b \geq 0$ e $q \geq 1$. Dividiremos a prova da desigualdade em três casos. Para o caso $q=1$ é imediato.

Suponha então que $q=2$. Assim pela desigualdade de Yang temos

$$
(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \leq a^2+\delta a^2+\frac{1}{\delta}b^2+b^2 \leq (1+\delta)^2a^2+(1+1/\delta)^2b^2.
$$

Suponhamos agora que $1<q<2$, deste modo

$$
\begin{aligned}
(a+b)^q &= \left((a+b)^2\right)^{q/2} \\
&\leq \left((1+\delta)^2a^2+(1+1/\delta)^2b^2\right)^{q/2} \\
&\leq (1+\delta)^q a^q+(1+1/\delta)^q b^q,
\end{aligned}
$$

pois $q/2 < 1$.

Finalmente, suponha que $q > 2$, assim temos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $q = 2^n r$ onde $1 \leq r < 2$ de modo que, pelos dois casos anteriores,

$$\begin{aligned}
(a+b)^q &= \left((a+b)^{2^n}\right)^r \\
&\leq \left((1+\delta)^{2^n} a^2 + (1+1/\delta)^2 b^{2^n}\right)^r \\
&\leq (1+\delta)^q a^q + (1+1/\delta)^q b^q,
\end{aligned}$$

o que finaliza a prova da desigualdade.

Considerações Finais

Nestas considerações finais, apresentaremos os possíveis desdobramentos para os resultados apresentados neste trabalho, assim como as dificuldades que são enfrentadas para se estudar estes problemas, os quais são objetos de estudo em nossa pesquisa.

Primeiramente, na linha do resultado apresentado por Adimurthi e O. Druet [4, Theorem 1], o Teorema de concentração-compacidade para o funcional de Adams, Teorema 1.1.1, induz uma possível melhora para à constante β_0 de Adams (1.1.3), que seria,

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega),\\ \|\nabla^m u\|_{n/m}\leq 1}} \int_\Omega e^{\beta_0(1+\alpha\|u\|_{n/m}^{n/m})^{m/(n-m)}|u|^{n/(n-m)}}\mathrm{d}x \leq C_{m,n}\mathscr{L}_n(\Omega), \tag{AD}$$

para alguma constante $C_{m,n}\mathscr{L}_n(\Omega)>0$ e

$$0\leq \alpha < \lambda_{m,n}(\Omega) := \inf_{u\in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla^m u\|_{n/m}^{n/m}}{\|u\|_{n/m}^{n/m}}.$$

Mais ainda, este resultado de concentração-compacidade pode ser usado para estudar a existência de extremal para a desigualdade (AD). Para verificarmos isso, basta tomarmos uma sequência maximizante para a desigualdade (AD), a qual denotamos por (u_i). Como esta sequência é limitada, podemos considerar que $u_i \rightharpoonup u$ em $W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega)$. Supondo que $u\not\equiv 0$, temos

$$1+\alpha\|u\|_{n/m}^{n/m} < \gamma < 1+\|\nabla^m u\|_{n/m}^{n/m} \leq \frac{1}{1-\|\nabla^m u\|_{n/m}^{n/m}}$$

e, pelo item (iii) do Teorema 1.1.1,

$$\begin{aligned}\sup_{\substack{u\in W_0^{m,\frac{n}{m}}(\Omega),\\ \|\nabla^m u\|_{n/m}\leq 1}} \int_\Omega e^{\beta_0(1+\alpha\|u\|_{n/m}^{n/m})^{m/(n-m)}|u|^{n/(n-m)}}\mathrm{d}x &= \lim_{i\to\infty}\int_\Omega e^{\beta_0(1+\alpha\|u_i\|_{n/m}^{n/m})^{m/(n-m)}|u_i|^{n/(n-m)}}\mathrm{d}x\\ &= \int_\Omega e^{\beta_0(1+\alpha\|u\|_{n/m}^{n/m})^{m/(n-m)}|u|^{n/(n-m)}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

A grande dificuldade se encontra em garantirmos que este limite fraco seja diferente de 0.

Em [48], Y. Yang usando o princípio de concentração-compacidade de P.-L. Lions provou a validade a desigualdade (AD), no caso $m = 1$, garantindo também a existência de extremal, onde a dificuldade de garantir que o limite fraco era diferente de 0 foi superada com o uso de uma técnica conhecida como Análise de Blow-up. Esta técnica também foi usada por Adimurthi e O. Druet [4] para provar a validade da desigualdade (AD) para o caso $m = 1$ e $n = 2$.

Para o caso de domínio ilimitado, buscamos, com o uso do Teorema 3.1.2 juntamente com a técnica de Análise de Blow-up, estudar a validade da desigualdade

$$\sup_{\substack{u\in W_0^{m,2}(\Omega)\\ \|u\|_2^2+\|\nabla^m u\|_2^2\leq 1}} \int_\Omega \left(e^{\beta_0|u|^2}-1\right)\,\mathrm{d}x < \infty, \tag{D}$$

estendendo assim a desigualdade apresentada no Teorema 3.1.2 para o expoente crítico, isto é, $\beta = \beta_0$. Uma peça chave para este estudo, devido à não limitação do domínio, é garantir a existência de uma sequência radial maximizante para o supremo em (D).

Entre os problemas relacionados aos estudos acima citados destacamos os relacionados à regularidade de extremais da desigualdade (AD) no caso de expoente subcrítico. Destacamos também a necessidade de resultados relacionados ao problema

$$\Delta_p^m G(x,y) = \delta_x(y) \qquad \text{para} \quad y \in \Omega$$

com condição de bordo de Dirichlet, onde

$$\begin{cases} \Delta_p^m G = -\mathrm{div}\left\{\Delta^k\left(\left|\nabla\Delta^k G\right|^{p-2}\nabla\Delta^k G\right)\right\} & \text{para} \quad m = 2k+1 \\ \Delta_p^m G = \Delta^k\left(\left|\Delta^k G\right|^{p-2}\Delta^k G\right) & \text{para} \quad m = 2k. \end{cases}$$

Nos referimos, especialmente, a resultados de caracterização, resultados de representação ou resultados que estimem G e suas derivadas.

No caso do estudo da desigualdade (D), pelo fato de equação elíptica relacionada ser o poliharmônico, temos avançado bastante no sentido de garantir a validade da desigualdade e na obtenção de extremal, em especial, no caso $m = 2$.

Resultados relativos às desigualdades do tipo Trudinger-Moser-Adams tem sido objeto de estudo intenso, tanto no aspecto da otimalidade das desigualdades e existência de extremais, quanto no aspecto dos problemas elípticas envolvendo crescimento crítico. Por fim, observamos que desigualdades do tipo Trudinger-Moser-Adams possui diversas extensões e aplicações em Geometria Diferencial e Análise Geométrica.

Referências Bibliográficas

[1] Adachi, S.; Tanaka, K.: *Trudinger type inequalities in* $\mathbb{R}^N$ *and their best exponents*. Proc. Amer. Math. Soc. 128, 2051–2057 (2000).

[2] Adams, D. R.: *A sharp inequality of J. Moser for higher order derivatives*. Ann. Math. 128, 385–398 (1988).

[3] Adams, D. R.; Fournier, J. F.: *Sobolev spaces*. Second edition. Pure and Applied Mathematics, 140. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, (2003).

[4] Adimurthi; Druet, O.: *Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality*. Comm. Partial Differential Equations 29, 295–322 (2004).

[5] Adimurthi; Sandeep, K.: *A singular Moser-Trudinger embedding and its applications*. NoDEA , Nonlinear Differ. Equ. Appl. 13, 585–603 (2007).

[6] Adimurthi; Srikanth, P.N.; Yadava, S.L.: *Phenomena of Critical Exponent in* $\mathbb{R}^2$. Proc. Royal Soc. Edinb. 119A, 19–25 (1991).

[7] Alves, C.O.; do Ó, J. M.; Miyagaki, O. H.: *Nontrivial solutions for a class of semilinear biharmonic problems involving critical exponents.* Nonlinear Anal. 46, 121–133 (2001).

[8] Berestycki, H.; Lions, P.-L.: *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state.* Arch. Rational Mech. Anal. 82 , no. 4, 313–345 (1983).

[9] Brezis, H.; Nirenberg, L.: *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*. Comm. Pure Appl. Math. 36, 437–477 (1983).

[10] Cao, D. M.: *nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$. Comm. Partial Differential Equations 17, 407–435 (1992).

[11] Carleson, L.; Chang, A.: *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*. Bull. sci. Math. 110, 113–127 (1986).

[12] Černý, R.; Cianchi, A.; Hencl, S.: *Concentration-compactness principles for Moser-Trudinger inequalities: new results and proofs*. Ann. Mat. Pura Appl. (2011). doi: 10.1007/s10231-011-0220-3

[13] de Figueiredo, D. G.; Miyagaki, O. H.; Ruf, B.: *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range*. Calc. Var. Partial Differential Equations 4, 139–153 (1995).

[14] de Figueiredo, D. G.; do Ó, J. M.; Ruf, B.: *On an inequality by N. Trudinger and J. Moser and related elliptic equations*. Comm. Pure Appl. Math. 55, no. 2, 135–152 (2002).

[15] de Souza, M.: *On a singular elliptic problem involving critical growth in $\mathbb{R}^N$*. NoDEA , Nonlinear Differ. Equ. Appl. 18, no. 2, 199–215 (2011).

[16] de Souza, M.: *On a singular Hamiltonian elliptic systems involving critical growth in dimension two*. Commun. Pure Appl. Anal. 11, , no. 5, 1859–1874 (2012).

[17] de Morais Filho, D. C.; Souto, M. A. S.; do Ó, J. M.: *A compactness embedding lemma, a principle of symmetric criticality and applications to elliptic problems*. Proyecciones 19, no. 1, 1–17 (2000).

[18] do Ó, J. M.: *n-Laplacian equations in $\mathbb{R}^n$ with critical growth*. Abstr. Appl. Anal. 2, 301–315 (1997).

[19] do Ó, J. M.; Medeiros, E.; Severo, U. B.: *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*. J. Math. Anal. Appl. 345, 286–304 (2008).

[20] do Ó, J. M.; de Souza, M.: *On a class of singular Trudinger-Moser type inequalities and its applications*. Mathematische Nachrichten 284, 1754–1776 (2011).

[21] Edmunds, D. E.; Fortunato, D.; Jannelli, E.: *Fourth-order nonlinear elliptic equations with critical growth*. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. 83, 115–119 (1990).

[22] Edmunds, D. E.; Fortunato, D.; Jannelli, E.: *Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator*. Arch. Ration. Mech. Anal. 112, 269–289 (1990).

[23] Flucher, M.: *Extremal functions for the Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions*. Comment. Math. Helvetici 67, 471–497 (1992).

[24] Gruna, H. C.: *Positive solutions to semilinear polyharmonic Dirichlet problems involving critical Sobolev exponents*. Calc. Var. Partial Differential Equations 3, 243–252 (1995).

[25] Grunau, H.-C.; Sweers, G.: *Classical solutions for some higher order semilinear elliptic equations under weak growth conditions*. Nonlinear Anal. 28, no. 5, 799–807 (1997).

[26] Judovič, V. I.: *Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations*. Dokl. Akad. Nauk SSSR 138, 805–808 (1961).

[27] Lam, N.; Lu, G.: *Existence of nontrivial solutions to Polyharmonic equations with subcritical and critical exponential growth*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 32, no. 6, 2187–2205 (2012).

[28] Lam, N.; Lu, G.: *Sharp Adams type inequalities in Sobolev spaces $W^{m,n}(\mathbb{R}^n)$ for arbitrary integer m* . J. Differential Equations 253, 1143–1171 (2012).

[29] Lakkis, O.: *Existence of solutions for a class of polyharmonic equations with critical exponential growth* . Advances in Differential Equations 4, 877–906 (1999).

[30] Lam, N.; Lu, G.: *Sharp singular Adams inequalities in high order Sobolev spaces*. to appear in Methods and Applications of Analysis (2013).

[31] Li, Y.; Ruf, B.: *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^n$*. Ind. Univ. Math. J. 57, 451–480 (2008).

[32] Lin, K.: *Extremal functions for Moser's inequality*. Trans. Amer. Math. Soc. 348, 2663–2671 (1996).

[33] Lions, P.-L.: *The concentration compactness principle in the calculus of variation, the limit case, part I*. Rev. Mat. Iberoamericana 1, 145–201 (1985).

[34] Miyagaki, O.H.: *On a class of semilinear elliptic problem in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*. Nonlinear Anal. 29, 773–781 (1997).

[35] Peetre, J.: *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 16 279–317. Mathematics Section, Moscov. Energet. Inst., 158–170 (1966).

[36] Pohozaev, S. I.: *The Sobolev embedding in the case $pl = n$*. Proceedings of the Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research 1964–1965. Mathematics Section, Moscov. Energet. Inst., 158–170 (1965).

[37] Pucci, P.; Serrin, J.: *A general variational identity*. Indiana Univ. Math. J. 35, 681–703. (1986).

[38] Pucci, P.; Serrin, J.: *Critical exponents and critical dimensions for polyharmonic operators*. J. Math. Pures Appl. 69, 55–83 (1990).

[39] Moser, J.: *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*. Ind. Univ. Math. J. 20, 1077–1092 (1971).

[40] Rabinowitz, P. H.: *On a class of nonlinear Schrödinger equations*. Z. Angew. Math. Phys. 43, 270–291 (1992).

[41] Ruf, B; Sani, F.: *sharp Adams-Type Inequalities in* $\mathbb{R}^n$. to appear in Trans. Amer. Math. Soc.

[42] Sani, F.: *A biharmonic equation in* $\mathbb{R}^4$ *involving nonlinearities with critical exponential growth*. Commun. Pure Appl. Anal. 12, no. 1, 405–428 (2013).

[43] Struwe, M.: *Critical points of embeddings of* $H_0^{1,n}$ *into Orlicz spaces*. Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire 5, 425–464 (1988).

[44] Tarsi, C.: *Adams' inequality and limiting Sobolev embeddings into Zygmund spaces*. Potential Analysis (2011). doi: 10.1007/s11118-011-9259-4.

[45] Talenti, G.: *Elliptioc Equations and Rearrangements*. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 3, 697–718 (1976).

[46] Trombetti, G.; Vázquez, J. L.: *A symmetrization result for elliptic equations with lower-order terms*. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (5) 7 no. 2, 137–150 (1985).

[47] Trudinger, N. S.: *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*. J. Math. Mech. 17, 473–483 (1967).

[48] Yang, Y.: *A sharp form of Moser-Trudinger inequality in high dimension*. J. Funct. Anal. 239, 100–126 (2006).

[49] Yudovich, V. I.: *Some estimates connected with integral operators and with solutions of elliptic equations*. Dok. Akad. Nauk SSSR 138, 804–808 (1961) [English tranlation in Soviet Math. Doklady 2, 746–749 (1961)].

[50] Zhao, L.; Chang, Y.: *Min-max level estimate for a singular quasilinear polyharmonic equation in* $\mathbb{R}^{2m}$. J. Differential Equations 254, no. 6, 2434–2464 (2013).

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).