Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

Existência e multiplicidade de soluções para sistemas de equações de Schrödinger semilineares em $\mathbb{R}^n$

Paulo de Souza Rabelo

Tese de Doutorado

Recife
30 de outubro de 2008

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Paulo de Souza Rabelo

Existência e multiplicidade de soluções para sistemas de equações de Schrödinger semilineares em $\mathbb{R}^n$

Trabalho apresentado ao Programa de Doutorado em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *João Marcos Bezerra do Ó*

Recife
30 de outubro de 2008

Dedico a Izabel Alves de Souza Rabelo (in memorian)

Agradecimentos

É tanta gente, diferente gente! São muitos a agradecer. A cada fio de cabelo caído, uma lembrança, uma gratidão tomou seu lugar. Obrigado Solange Reis, pelo suporte familiar e sentimental. Obrigado João Marcos, pelo suporte intelectual e orientação. Para completar o triplé de estabilidade, agradeço ao Cnpq pelo suporte financeiro. Àqueles que encontrei pelo caminho e aqui estão anônimos, guardo-os todos em meu coração. Vocês são porretas. Obrigado.

E aprendi que se depende sempre de tanta, muita, diferente gente. Toda pessoa sempre é as marcas das lições diárias de outras tantas pessoas. E é tão bonito quando a gente entende que a gente é tanta gente onde quer que a gente vá. E é tão bonito quando a gente sente que nunca está sozinho, por mais que pense estar.

—GONZAGUINHA (Caminhos do Coração)

Resumo

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas à existência e multiplicidade de soluções do tipo estacionária para uma classe de sistemas de equações de Schrödinger com potenciais mudando de sinal e não-linearidades ilimitadas na variável x. Consideraremos diversos tipos de crescimento para o termo não-linear. Na obtenção de nossos resultados usamos métodos variacionais do tipo mini-max e teoria de regularidade de equações elípticas de segunda ordem.

Palavras-chave: Sistemas elípticos, métodos variacionais, teorema do passo da montanha, método de iteração de Moser, desigualdade de Trudinger-Moser, índice de Morse.

Abstract

In this work, we study questions related to existence and multiplicity of solutions of the type stationary for a class of systems of Schrödinger equations with sign-changing potential and nonlinearities unbounded in the variable x. To obtain our results, we use variational methods of the type minimax and regularity theory of elliptic equations of second order.

Keywords: Schrödinger equations, variational methods, mountain-pass theorem, Moser iteration method, Trudinger-Moser inequality, Morse index.

Sumário

Lista de Figuras

Neste trabalho faremos uso da seguinte simbologia:

- $C, C_0, C_1, C_2, \ldots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável, então $|\Omega|$ denota sua medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$;
- B_R denota a bola aberta centrada na origem e raio $R > 0$;
- X^* é o dual topológico do espaço de Banach X;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dual entre X^* e X;
- Denotemos a convergência fraca em X por " $\rightharpoonup$ " e a convergência forte por " $\to$ ";
- $\text{supp}(f)$ denota o suporte da função f;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o Laplaciano de u;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \displaystyle\int_\Omega |u|^p \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$ com $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto conexo, denota o espaço de Lebesgue com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;

- $C^{0,\sigma}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\sigma} < \infty \right\}$ com $0 < \sigma < 1$, e $C^{k,\sigma}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^{0,\sigma}(\overline{\Omega})$;

- Para $1 \leq p < +\infty$,

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_i \in L^p(\Omega); \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g_i \varphi \,\mathrm{d}x, \right.$$
$$\left. \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i \in \{1, \cdots, N\} \right\}$$

  com norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)\,\mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

  e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma acima. Quando $p = 2$, escrevemos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

- Para $1 \leq p < +\infty$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Introdução

Neste trabalho estudamos questões relacionadas à existência e multiplicidade de soluções para o sistema de equações elípticas semilineares

$$-\Delta u_i + a_i(x)u_i = f_i(x, u_1, \cdots, u_m) \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad i = 1, \cdots, m, \tag{0.1}$$

onde $N \geq 1$ e as funções $a_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são contínuas. Para este fim, utilizaremos métodos variacionais, ou seja, procuramos pontos críticos do funcional energia associado ao sistema (0.1). Estabeleceremos então um espaço de Banach conveniente aonde este funcional seja bem definido:

$$E = \left\{ U = (u_1, \cdots, u_m) \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \int_{\mathbb{R}^n} A(x)U \cdot U \, \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

onde $A(x) = \mathrm{diag}(a_1(x), \cdots, a_m(x))$.

Equações do tipo (0.1) modelam vários problemas da Física-Matemática e tem sido objeto de intensiva investigação nos últimos anos, especialmente em sistemas de comunicações ópticas ultra-rápidos e no estudo de condensados de Bose-Einstein (ver [4],[13],[15],[16],[35]). As soluções de (0.1) estão relacionadas com a existência de ondas estacionárias (solitons) para sistemas de equações de Schrödinger não-lineares da forma

$$i\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = -\Delta \psi_j + a_j(x)\psi_j - g(x, |\psi_j|)\psi_j, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{0.2}$$

onde $\psi_j : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ são as funções onda de Schrödinger com $j = 1, \cdots, m$. Soluções solitons são soluções da forma $\psi_j(x,t) = e^{i\mu_j t}u_j(x)$. Substituindo $\psi_j(x,t)$ no sistema (0.2) encontramos que as funções $u_j(x)$ satisfazem um sistema tipo (0.1). Desde que a equação de Schrödinger joga o papel das leis de Newton e conservação de energia na mecânica clássica, muita atenção tem sido dada para tais sistemas sob várias hipóteses sobre os potenciais e sobre as não-linearidades, ver por exemplo [12, 19, 36, 54] e referências neles.

Nosso trabalho está dividido em quatro capítulos e em todos eles assumiremos sobre os potenciais $a_i(x)$ as seguintes hipóteses:

(A_1) Existe $D > 0$ tal que $a_i(x) \geq -D$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i = 1, \cdots, m$.

Para assegurar o mergulho contínuo de E em $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ vamos supor a seguinte condição sobre o primeiro autovalor do operador $-\Delta + A(x)$:

(A_2) $\lambda_1 = \inf\limits_{U \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla U|^2 + A(x)U \cdot U \right] \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^n} |U|^2 \, \mathrm{d}x} > 0.$

Usaremos a seguinte notação: se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $2 \leq s < 2n/(n-2)$, colocamos

$$\nu_s(\Omega) = \inf_{U \in H_0^1(\Omega, \mathbb{R}^m) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega \left[|\nabla U|^2 + A(x) U \cdot U \right] \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |U|^s \, \mathrm{d}x \right)^{2/s}},$$

e fazemos $\nu_s(\emptyset) = +\infty$. Com o objetivo de obtermos um resultado de compacidade, também assumiremos as seguintes hipóteses:

(A_3) $\lim_{R \to +\infty} \nu_s(\mathbb{R}^N \setminus \overline{B}_R) = +\infty$;

(A_4) Existem uma função $K(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $K(x) \geq 1$, e constantes $\alpha > 1$, $c_0, R_0 > 0$ tais que

$$K(x) \leq c_0 \left[1 + \left(\min_{1 \leq i \leq m} a_i^+(x) \right)^{1/\alpha} \right] \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0.$$

Assim, além da dificuldade gerada ao trabalharmos em domínios ilimitados, devido à perda de compacidade, acrescentamos o fato do potencial poder mudar de sinal. Essas hipóteses foram introduzidas por Sirakov em [49].

No *Capítulo 1* estudamos os casos em que as funções $f_i(x, u_1, \cdots, u_m)$ são ou superquadráticas ou não-quadráticas no infinito. No primeiro caso supomos que as não-linearidades têm crescimento polinomial e satisfazem Ambrosetti-Rabinowitz, isto é,

(F_1) $|\nabla F(x,U)| \leq CK(x)(1 + |U|^p)$ para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, onde $C > 0$, $1 \leq p < p^\# \leq (n+2)/(n-2)$ se $n \geq 3$ ou $1 \leq p < +\infty$ se $n = 1,2$ (posteriormente determinaremos o que significa $p^\#$);

(F_2) $|\nabla F(x,U)|/K(x) = o(|U|)$ quando $U \to 0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$;

(F_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x,U) \leq U \cdot \nabla F(x,U) \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \setminus \{0\});$$

onde $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ é tal que $\nabla F(x,U) = (f_1(x,U), \cdots, f_m(x,U))$.

O primeiro resultado desse capítulo é o seguinte:

Teorema 0.0.1. *Suponhamos que (A_1)–(A_4) e (F_1)–(F_3) são satisfeitas, com $s = p+1$ em (A_3). Então (P) tem uma solução forte $U \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que decai no infinito. Se, em adição, $F(x,U)$ é par em U, então (P) tem infinitas soluções.*

Para provarmos o teorema, mostramos que o funcional associado ao problema (0.1) é bem definido e de classe C^1, contornando a dificuldade surgida pelo fato da não-linearidade ser ilimitada na variável x. Desde que o funcional satisfaz a geometria do passo da montanha e a condição de Palais-Smale, aplicamos o Teorema do Passo da Montanha para obtermos a existência de uma solução não-trivial. Para verificarmos a regularidade e o comportamento assintótico, usamos um argumento tipo bootstrap. A existência de múltiplas soluções segue diretamente do Teorema do Passo da Montanha Simétrico. Esse resultado é uma versão para sistemas do trabalho do Sirakov [49].

No segundo caso, consideramos a situação no qual a função $F(x,U)$ cruza o espectro do operador $-\Delta + A(x)$ quando $|U|$ varia de 0 a $+\infty$, e substituimos a condição (F_3) devido a Ambrosetti-Rabinowitz pela hipótese de não-quadraticidade no infinito introduzida por Costa-Magalhães em [20] que é uma condição suficiente para obtermos a condição de compacidade de Cerami. Mais precisamente,

(F_4) Existem $\theta > 0$ e $a > 0$ tais que

$$U \cdot \nabla F(x,U) - 2F(x,U) \geq a|U|^{\theta} > 0 \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \backslash \{0\}).$$

Neste caso, estabelecemos o seguinte resultado sobre a existência de uma solução não-nula para o problema (P).

Teorema 0.0.2. *Sob as hipóteses do Teorema 0.0.1, com (F_3) trocado por (F_4) e $2\theta > n(p-1)$ se $n \geq 2$ ou $\theta > p-1$ se $n = 1$, assumimos, em adição, que F satisfaz a condição de cruzamento*

(F_5) $\displaystyle\limsup_{|U|\to 0} \frac{2F(x,U)}{|U|^2} \leq \alpha < \lambda_k < \beta \leq \liminf_{|U|\to+\infty} \frac{2F(x,U)}{|U|^2}$ *uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$;*

(F_6) $F(x,U) \geq \frac{1}{2}\lambda_{k-1}|U|^2$ *para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*

Então valem as mesmas conclusões do Teorema 0.0.1.

Na prova deste teorema tomamos uma decomposição conveniente do espaço E através dos autovetores do operador $-\Delta + A(x)$ e verificamos que a geometria do passo da montanha é satisfeita. Sob essas hipóteses mostramos que o funcional associado ao problema (0.1) satisfaz a condição de compacidade de Cerami. Além disso, como mostrado em [2], um teorema de deformação pode ser provado com condição (C) ao invés de (PS) tal que o Teorema do Passo da Montanha Generalizado vale sob a condição (C) (ver [10] para detalhes) e podemos usá-lo para obtermos uma solução não-trivial. Para o resultado de multiplicidade usamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha Simétrico sob a condição de Cerami.

Esse resultado melhora o trabalho do Costa [19], no sentido em que utilizamos uma classe mais geral de potenciais e lidamos com não-linearidades que podem ser ilimitadas em x.

No *Capítulo 2* consideramos um sistema de equações elípticas semilineares da forma

$$-\Delta u_i + a_i(x)u_i = f_i(x,u_i,\cdots,u_m) + g_i(x)|u_i|^{p_i-1}u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1,\cdots,m, \tag{0.3}$$

tendo crescimento crítico ou supercrítico e estudamos a existência de soluções positivas. Assumimos que as funções f_i satisfazem as hipóteses (F_1)–(F_4) do capítulo 1, enquanto as funções $g_i(x)$ são não-negativas e têm crescimentos controlados pelo potencial $A(x)$, isto é,

(F_7) $|g_i(x)| \leq CK(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $i = 1,\cdots,m$ e algum $C > 0$.

Nosso principal resultado para o problema (0.3) é o seguinte:

Teorema 0.0.3. *Suponhamos que* (A_1)–(A_4) *e* (F_1)–(F_4) *são satisfeitas. Então* (0.3) *tem uma solução forte* $U \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ *que decai no infinito. Além disso, se*

(F_8) $\partial F/\partial u_i(x, u_1, \cdots, u_m) \geq 0$ *para todo* $u_i \geq 0$ *e* $i = 1, \cdots, m$,

então (0.3) *possui pelo menos uma solução positiva* $U = (u_1, \cdots, u_m)$ *com* $u_i(x) > 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}^n$ *e* $i = 1, \cdots, m$.

Em nosso próximo resultado, verificamos a existência de infinitas soluções para (0.3) sob a presença de simetria. Mais especificamente, suponhamos

(F_9) $F(x, U)$ é par com relação à variável $U \in \mathbb{R}^m$.

Sob esta condição, somos capazes de provar:

Teorema 0.0.4. *Suponhamos* (A_1)–(A_4) *válidas. Se* F *satisfaz* (F_1)–(F_4), (F_7) *e* (F_9), *então o problema* (0.3) *possui uma sequência ilimitada de valores críticos.*

Para provarmos esses teoremas consideramos um problema auxiliar (T_K) que envolve somente um expoente de Sobolev subcrítico. Recaimos então nas hipóteses do Teorema 0.0.1, donde obtemos existência de soluções não-triviais do problema auxiliar. Na sequência, verificamos a positividade dessas soluções sob a hipótese (F_8). Por fim, usamos a técnica de iteraçao de Moser para exibirmos uma cota apriori para soluções do problema auxiliar e, consequentemente, são soluções do problema original (0.3).

O estudo de problemas do tipo (0.3), no caso escalar, sobre domínios ilimitados tem recebido considerável atenção sob várias hipóteses sobre o potencial e sobre a não-linearidade. Rabinowitz em [44] mostrou a existência de solução não-trivial para a equação $-\Delta u + V(x)u = f(x,u)$ em $\mathbb{R}^N$ quando $f(x,u)$ tem crescimento subcrítico e o potencial $V(x)$ é limitado longe da origem e coercivo. Para esta classe de potenciais, Miyagaki em [37] estudou o problema crítico $-\Delta u + V(x)u = \lambda |u|^{q-1}u + |u|^{2^*-2}u$ em $\mathbb{R}^N$ com $\lambda > 0$. Quando o potencial $V(x)$ é constante ou uma função limitada, problemas do tipo (0.3) tem sido tratado entre outros por [11], [40], [41] e [18]. Chabrowski em [18] estabeleceu a existência de soluções positivas para o problema $-\Delta u + u = \lambda P(x)|u|^{q-1}u + Q(x)|u|^{p-1}u$ em $\mathbb{R}^N$ no caso supercrítico $1 < q < 2^* - 1 \leq p$. Em nosso trabalho, complementamos os resultados acima por considerarmos uma classe mais geral de potenciais e não-linearidades ilimitadas na variável x. Nosso trabalho também fornece uma resposta afirmativa para a questão formulada em Sirakov [49] quando este estabelece a existência de uma solução positiva para o problema

$$-\Delta u + |x|^a u = |x|^b u^{p-1} u \text{ em } \mathbb{R}^N,$$

onde $a > b \geq 0$, $N \geq 3$ e $1 < p < p^\# = 2^* - 1 - \frac{4b}{a(N-2)}$. Por outro lado, usando a identidade de Derrick-Pohozaev o autor mostrou que não existe solução para $p > \widetilde{p} = 2^* - 1 + \frac{2b}{a(N-2)}$. Então um "gap"$[p^\#, \widetilde{p}]$ permanece entre as regiões de existência e não-existência de soluções do espaço obtidas usando métodos clássicos. Independentemente, Schneider [47] e Sintzoff-Willem [48] investigaram o problema usando simetria para obter uma solução radial. Neste trabalho, obtemos soluções para $p \in [2^* - 1, \widetilde{p})$ quando o potencial não é necessariamente radial. Para nosso conhecimento, esta é a primeira vez que uma resposta afirmativa para esta questão, no caso não-radial, aparece na literatura.

No *Capítulo 3* estudamos uma classe de sistemas de equações de Schrödinger estacionárias da forma

$$-\Delta u_i + a_i(x)u_i = g_i(x)f_i(u_1,\cdots,u_m) + h_i(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \tag{0.4}$$

onde as funções $a_i, g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são contínuas com $f_i(0,\cdots,0) = 0$ e $h_i \in (H^1(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_*)^*$ para todo $i \in \{1,\cdots,m\}$. Com respeito as funções $g_i(x)$, assumimos que elas são contínuas, estritamente positivas e não são necessariamente limitadas em x proposto que seu crescimento seja controlado pelo crescimento de $A(x)$. Mais precisamente,

(F_1) Existem contantes $a_0, b_0 > 0$ tais que $a_0 \le g_i(x) \le b_0 K(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $i \in \{1,\cdots,m\}$.

Além disso, tomando $F(x,U)$ tal que $\nabla F(x,U) = (g_1(x)f_1(U),\cdots,g_m(x)f_m(U))$, suponhamos que os termos não-lineares satifazem as seguintes condições:

(F_2) $|f_i(U)| = o(|U|)$ quando $U \to 0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$ e $i \in \{1,\cdots,m\}$.

(F_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x,U) \le U \cdot \nabla F(x,U)$$

para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^m \backslash \{0\})$.

(F_4) Existem constantes $S_0, M_0 > 0$ tais que

$$0 < F(x,U) \le M_0 |\nabla F(x,U)|,$$

para todo $|U| \ge S_0$ uniformemente em $\mathbb{R}^2$.

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 0.0.5. *Suponhamos que as funções f_i tem crescimento subcrítico e as hipóteses (A_1)–(A_4), (F_1)–(F_3) são satisfeitas. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que (0.4) possui uma solução fraca não-trivial em E sempre que $0 \le \|H\|_* < \delta_1$. Além disso, se $0 < \|H\|_* < \delta_1$, então (0.4) possui uma segunda solução fraca em E.*

Teorema 0.0.6. *Suponhamos que as funções f_i tem crescimento crítico e satisfazem (A_1)–(A_4), (F_1)–(F_4). Se, para algum $i \in \{1,\cdots,m\}$,*

(F_5) *existe $\eta > 0$ tal que $\lim\limits_{|U| \to +\infty} u_i f_i(U) e^{-2^{m-1}\beta_0 |U|^2} \ge \eta$, com $U = (u_1,\cdots,u_m) \in \mathbb{R}^m$,*

então existe $\delta_1 > 0$ tal que (0.4) possui uma solução fraca não-trivial em E sempre que tivermos $0 \le \|H\|_* < \delta_1$. Além disso, se $0 < \|H\|_* < \delta_1$, então (0.4) possui uma segunda solução fraca em E.

Agora, se $H(x)$ tem sinal definido, no sentido que suas componentes são não-negativas ou não-positivas, vale o seguinte resultado.

Teorema 0.0.7. *Sob as hipóteses dos Teoremas 0.0.5 ou 0.0.6, se* $H(x) \geq 0$ $(H(x) \leq 0)$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$, *então o problema* (0.4) *possui duas soluções não-negativas (não-positivas), respectivamente.*

Existem muitos resultados no caso escalar para problemas envolvendo crescimento exponencial. Por exemplo, no caso homogêneo, Cao em [14] tratou o problema (0.4) quando o potencial e a não-linearidade são assintóticas a uma função constante, do Ó em [29] estudou o problema para o N-Laplaciano impondo uma condição de coercividade para o potencial, e de Figueiredo et al [24] trabalhou em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$. Para o caso não-homogêneo, do Ó et al [30] estudou o problema (0.4) com um potencial positivo e limitado longe da origem e que pode ser grande no infinito, e Tonkes [52] lidou com problemas elípticos quasilineares com crescimento crítico para o N-Laplaciano em domínios limitados. Por outro lado, para nosso conhecimento, muito pouco tem sido feito para sistemas. Nosso estudo é relacionado ao recente trabalho [30]. De fato, nós melhoramos e estendemos os resultados em [30] para sistemas, no sentido que usamos não-linearidades ilimitadas em x e potenciais que podem mudar de sinal.

No *Capítulo 4* estudamos a existência de soluções não-triviais para a equação de Schrödinger não-linear da forma

$$-\Delta u + V(x)u = a(x)f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{0.5}$$

onde $N \geq 2$, $a(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ muda de sinal sendo negativo no infinito e o termo não-linear $f \in C^1(\mathbb{R})$ tem um comportamento superlinear na origem e um crescimento tipo potência no infinito. Mais precisamente,

(F_1) $a \in C^1(\mathbb{R}^N)$ muda de sinal e 0 é um valor regular de $a(x)$, isto é, $\nabla a(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $a(x) = 0$ e

$$\limsup_{|x| \to +\infty} a(x) = a_\infty < 0.$$

(F_2) existem $a_0, b_0 > 0$ tais que $-a_0 K(x) \leq a(x) \leq b_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

(F_3) $f \in C^1(\mathbb{R})$, $f(0) = 0 = f'(0)$ e $\displaystyle\lim_{|s| \to +\infty} \frac{f'(s)}{p|s|^{p-1}} = \ell_\infty > 0$, com $p \in (1, 2^*)$.

(F_4) $sf(s) \geq 0$ para cada $s \in \mathbb{R}$ e existe $\mu > 2$ tal que $\mu F(s) \leq f(s)s$, para todo $|s| \in \mathbb{R}$, onde $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$.

Nosso principal resultado é o seguinte.

Teorema 0.0.8. *Suponhamos que as hipóteses* (A_1)–(A_4) *e* (F_1)–(F_4) *são válidas. Então a equação de Schrödinger não-linear* (0.5) *tem uma solução não-nula* $u \in E$.

Sob várias hipóteses sobre o potencial $V(x)$ e o termo $a(x)$, o problema (0.5) tem sido considerado por vários autores em anos recentes. Em domínios limitados Ω, sob as condições de fronteira de Dirichlet, ele foi discutido em [1, 2, 3], onde assumiu-se uma condição "thickness" sobre $a(x)$ com o objetivo de se verificar a condição de Palais-Smale, a saber, $\Omega^+ \cap \Omega^- = \emptyset$, onde $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$ e $\Omega^- = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) < 0\}$. A condição "thickness"foi removida em [45] no qual introduziu-se a idéia de truncar o termo não-linear associado a $a^-(x)$.

O problema em $\mathbb{R}^N$ foi investigado em [22, 23]. Os autores desses trabalhos consideraram o caso em que o operador linear possui um espectro discreto. Recentemente, em [21, 34] foi assumido que os operadores lineares têm um espectro essencial. Em todos os casos, verifica-se que as condições geométricas do teorema de linking local são satisfeitas. Isto implica a existência de uma solução não-trivial do problema modificado tendo índice de Morse finito. Usando um argumento blow-up, vemos que a solução do problema limitante relacionado também tem índice de Morse finito. Isto implica teoremas tipo Liouville para o problema limitante, isto é, as soluções limitadas do problema limitante com índice de Morse finito seriam as triviais. Então obtemos uma quota uniforme L^∞ por mostrar uma contradição no argumento blow-up. Usando o fato que o índice de Morse é finito, mostra-se que o limite fraco é não-trivial.

Em nosso caso, usamos uma classe diferente de potenciais, tendo espectro discreto, mudando de sinal e podendo ser ilimitado. Diferente dos casos anteriores, construímos nossa sequência de soluções do problema modificado através do Teorema do Passo da Montanha padrão do Teorema de Linking. Assim nossas soluções têm índice de Morse menor que ou igual a 1. A não trivialidade da solução do problema original seguirá do fato que os níveis do passo da montanha são limitados inferiormente por uma constante positiva.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos mais independentes, enunciaremos em cada capítulo, os resultados principais, bem como as hipóteses sobre as funções a_i e f_i.

CAPÍTULO 1

Sistemas elípticos superquadráticos e não-quadráticos

1.1 Introdução

Neste capítulo estudamos a existência de soluções não-triviais para uma classe de sistemas elípticos semilineares da forma

$$-\Delta u_i + a_i(x)u_i = f_i(x, u_1, \cdots, u_m) \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad i \in \{1, \cdots, m\}, \tag{P}$$

onde as funções $a_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são contínuas com $f_i(x, 0, \cdots, 0) = 0$. Consideramos a situação variacional em que $(f_1, \cdots, f_m) = \nabla F$ para alguma função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1, cuja notação ∇F é padrão para o gradiente de F nas variáveis $U = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathbb{R}^m$. Sobre $\mathbb{R}^m$ usaremos o produto escalar euclideano $\langle \cdot, \cdot \rangle$ com a norma associada $\|\cdot\| = \langle \cdot, \cdot \rangle^{1/2}$. Denotando $\Delta = \operatorname{diag}(\Delta, \cdots, \Delta)$ e $A(x) = \operatorname{diag}(a_1(x), \cdots, a_m(x))$, podemos reescrever o sistema acima na forma

$$-\Delta U + A(x)U = \nabla F(x, U).$$

Motivados pelo trabalho de Sirakov [49] que, no caso escalar, mostrou a existência de uma solução não-trivial quando os potenciais mudam de sinal e as não-linearidades são ilimitadas em $x \in \mathbb{R}^n$, estendemos esses resultados para sistemas elípticos tipo gradiente. Por outro lado, assumindo sobre a não-linearidade a hipótese de não-quadraticidade no infinito, introduzida por Costa-Magalhães em [20], melhoramos os resultados obtidos por Costa [19], no sentido que ampliamos a classe de potenciais e usamos não-linearidades mais gerais. Isso aumenta o grau de dificuldade no tratamento de tais tipos de sistemas, já complicados pela perda de compacidade devido à não limitação do domínio.

Com o objetivo de aplicarmos métodos variacionais, consideramos o seguinte subespaço de $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$E = \left\{ U \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \int_{\mathbb{R}^n} A(x)U \cdot U \, \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

o qual, sob as hipóteses (A_1) e (A_2) abaixo, é um espaço de Hilbert quando dotado com o produto escalar

$$\langle U, V \rangle_E = \int_{\mathbb{R}^n} [\nabla U \cdot \nabla V + A(x)U \cdot V] \, \mathrm{d}x$$

e norma correspondente $\|U\|_E = \langle U, U \rangle_E^{1/2}$. Aqui, como usual, $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ denota o espaço de

Sobolev modelado em $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ com norma

$$\|U\|^2_{H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} = \sum_{i=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla u_i|^2 + |u_i|^2)\,\mathrm{d}x.$$

Suponhamos que o potencial $A(x) \in C(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ satisfaz as seguintes hipóteses:

(A_1) Existe $D>0$ tal que $a_i(x) \geq -D$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i = 1,\cdots,m$.

Para assegurar o mergulho contínuo de E em $H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ assumimos a seguinte condição sobre o primeiro autovalor do operador $-\Delta + A(x)$:

(A_2) $\lambda_1 = \inf\limits_{U \in E\backslash\{0\}} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n} \left[|\nabla U|^2 + A(x)U \cdot U\right]}{}\mathrm{d}x \int_{\mathbb{R}^n} |U|^2\,\mathrm{d}x > 0.$

Usaremos a seguinte notação: Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e $2 \leq s < 2n/(n-2)$, colocamos

$$\nu_s(\Omega) = \inf_{U \in H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^m)\backslash\{0\}} \frac{\int_\Omega \left[|\nabla U|^2 + A(x)U\cdot U\right]\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |U|^s\,\mathrm{d}x\right)^{2/s}},$$

e fazemos $\nu_s(\emptyset) = +\infty$. Com o objetivo de obtermos um resultado de compacidade, também assumiremos as seguintes hipóteses:

(A_3) $\lim\limits_{R\to+\infty} \nu_s(\mathbb{R}^N\backslash\overline{B}_R) = +\infty;$

(A_4) Existem uma função $K(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $K(x) \geq 1$, e constantes $\alpha > 1$, c_0, $R_0 > 0$ tais que

$$K(x) \leq c_0 \left[1 + \left(\min_{1\leq i\leq m} a_i^+(x)\right)^{1/\alpha}\right] \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0.$$

Com relação às não-linearidades, assumimos que as funções $f_i \in C(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m,\mathbb{R})$ não precisam ser limitadas em x proposto que seus crescimentos sejam controlados pelo potencial $A(x)$. Mais precisamente,

(F_1) $|\nabla F(x,U)| \leq CK(x)(1+|U|^p)$ para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, onde $C>0$, $1 \leq p < p^\# \leq (n+2)/(n-2)$ se $n \geq 3$ ou $1 \leq p < \infty$ se $n = 1,2$ (posteriormente determinaremos o que significa $p^\#$);

(F_2) $|\nabla F(x,U)|/K(x) = o(|U|)$ quando $U \to 0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$.

Vamos considerar primeiro o caso superquadrático, isto é,

(F_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x,U) \leq U \cdot \nabla F(x,U) \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m\backslash\{0\}).$$

Estabelecemos então nosso primeiro resultado.

Teorema 1.1.1. *Suponhamos que (A_1)–(A_4) e (F_1)–(F_3) são satisfeitas, com $s = p+1$ em (A_3). Então (P) tem uma solução forte $U \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ que decai no infinito. Se, em adição, $F(x,U)$ é par em U, então (P) tem infinitas soluções.*

A seguir, consideramos o caso não-quadrático, isto é, quando substituimos a condição (F_3) devido a Ambrosetti-Rabinowitz pela hipótese de não-quadraticidade no infinito introduzida por Costa-Magalhães em [20] que é suficiente para obtermos a condição de compacidade de Cerami. Mais precisamente, assumiremos que

(F_4) Existem $\theta > 0$ e $a > 0$ tais que

$$U \cdot \nabla F(x,U) - 2F(x,U) \geq a|U|^{\theta} > 0 \quad \text{para todo} \quad (x,U) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m \backslash \{0\}).$$

Neste caso, estabelecemos o segundo resultado sobre a existência de uma solução não-nula para o problema (P).

Teorema 1.1.2. *Sob as hipóteses do Teorema 1.1.1, com (F_3) trocado por (F_4) e $2\theta > n\alpha(p-1)/(\alpha-1)$ se $n \geq 2$ ou $\theta > \alpha(p-1)/(\alpha-1)$ se $n = 1$, assumimos, em adição, que F satisfaz as condições de cruzamento*

(F_5) $\displaystyle\limsup_{|U|\to 0} \frac{2F(x,U)}{|U|^2} \leq \alpha < \lambda_k < \beta \leq \liminf_{|U|\to+\infty} \frac{2F(x,U)}{|U|^2}$ *uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$;*

(F_6) $F(x,U) \geq \frac{1}{2}\lambda_{k-1}|U|^2$ *para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.*

Então valem as mesmas conclusões do Teorema 1.1.1.

Observação 1.1.3. 1. *As hipóteses (A_1)-(A_4) foram introduzidas por Sirakov [49] com o objetivo de estudar o problema escalar $-\Delta u + V(x)u = f(x,u)$ em $\mathbb{R}^n$ com $N \geq 1$.*

2. *Seguindo a mesma idéia em [49], verificamos que uma condição suficiente para a hipótese (A_3) é que*

$$\lim_{R\to+\infty} \left|(\cap_{i=1}^m A_M^i) \backslash \overline{B}_R)\right| = 0 \quad \textit{para todo} \quad M > 0,$$

onde $A_M^i = \{x \in \mathbb{R}^n : a_i(x) \leq M\}$. Assim, potenciais satisfazendo $V(x) \geq 1$ e $1/V(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ou tais que, para cada $M > 0$, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : V(x) < M\}$ tem uma medida de Lebesgue finita, também satisfazem as condições (A_1) e (A_3). O potencial $V(x) = x_1^2 x_1^2 \ldots x_n^2 - C$, com qualquer contante $C > 0$ escolhida tal que $\lambda_1 > 0$, satisfaz as condições (A_1) e (A_3) mas não satisfaz as hipóteses acima.

3. *Um exemplo de uma não-linearidade $f(x,u)$ satisfazendo a hipótese (F_4) mas não (F_3) para o problema escalar é $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por*

$$F(x,u) = \frac{1}{\beta} g(x)|u|^{\beta} \ln|u|, \quad \text{se} \quad u \neq 0, \quad \text{e} \quad F(x,u) = 0, \quad \text{se} \quad u = 0,$$

onde $g(x)$ é uma função contínua positiva.

4. *Existe uma relação de dependência entre o potencial $A(x)$ e a não-linearidade $\nabla F(x,U)$ tal que o crescimento de $\nabla F(x,U)$ também impõe restrições sobre os potenciais. Por exemplo, a função*

$$\nabla F(x,U) = q\omega(x)(|u_1|^{q-1}u_1, \cdots, |u_m|^{q-1}u_m),$$

com $\omega(x) \geq \beta > 0$, satisfaz nossas hipóteses desde que $a_i(x) \geq [\omega(x)]^\alpha$, para $|x| > R_0$ e $i \in \{1, \cdots, m\}$.

1.2 A estrutura variacional

Nossa escolha do ambiente variacional E assegura que o mergulho em $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é continuo e que o funcional $\Phi : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\begin{aligned}\Phi(U) &= \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n} F(x,U)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - N(U),\end{aligned}$$

é bem definido e de classe C^1. Este é o conteúdo dos próximos dois lemas.

Lema 1.2.1. *Suponhamos que as hipóteses (A_1) e (A_2) são satisfeitas. Então E é um espaço de Hilbert continuamente mergulhado em $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.*

Demonstração. Afirmamos que existe uma constante $\zeta > 0$ tal que

$$\|U\|_E^2 \geq \zeta \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2\,\mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad U \in E. \tag{1.1}$$

De fato, se assumirmos por contradição que a afirmação é falsa, então obtemos uma sequência $(U_k) \subset E$ tal que

$$\|U_k\|_E^2 \leq \frac{1}{k}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U_k|^2\,\mathrm{d}x.$$

Fazendo $W_k = \|\nabla U_k\|_2^{-1} U_k$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla W_k|^2\,\mathrm{d}x = 1 \text{ e } \|W_k\|_E \leq \frac{1}{k}.$$

Por (A_2) segue que

$$\lambda_1\|W_k\|_2^2 \leq \|W_k\|_E^2 \leq \frac{1}{k}.$$

Desde que $\lambda_1 > 0$, concluímos que $\|W_k\|_2 \to 0$. Por outro lado, usando (A_1), encontramos

$$\begin{aligned}-D\int_{\mathbb{R}^n} |W_k|^2\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^n} A(x)W_k \cdot W_k\,\mathrm{d}x \\ &= \|W_k\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla W_k|^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{1}{k} - 1.\end{aligned}$$

Isto implica que $\|W_k\|_2^2 \geq 1/D > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Mas isto é uma contradição. Assim,

$$\begin{aligned} 2\|U\|_E^2 &\geq \zeta \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^2 \mathrm{d}x + \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^n} |U|^2 \, \mathrm{d}x \\ &\geq \min\{\zeta, \lambda_1\} \int_{\mathbb{R}^n} (|\nabla U|^2 + |U|^2) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

mostra que o mergulho de E em $H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ é contínuo.

Agora provaremos que E é completo. Suponhamos que (U_k) é uma sequência de Cauchy em E. Pela continuidade do mergulho de $E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m)$ temos que (U_k) é uma sequência de Cauchy em $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e daí existe $U \in H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\|U_k - U\|_{H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)} \to 0.$$

Logo, existe uma subsequência $\left(U_{k_j}\right)$ de (U_k) e $h \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$U_{k_j}(x) \to U(x) \text{ e } |U_{k_j}(x)| \leq h(x)$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$, para todo $j \in \mathbb{N}$. Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^n} A(x) U \cdot U \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^n} A^+(x) U \cdot U \, \mathrm{d}x,$$

onde $A^+(x) = (a_1^+(x), \cdots, a_m^+(x))$, podemos assumir que $a_i(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i = 1, \cdots, m$. Notemos que

$$\begin{aligned} \|A^{1/2}(U_{k_i} - U_{k_j})\|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} A(x)(U_{k_i} - U_{k_j}) \cdot (U_{k_i} - U_{k_j}) \, \mathrm{d}x \\ &\leq \|U_{k_i} - U_{k_j}\|_E^2 \end{aligned}$$

implica que $\left(A^{1/2} U_{k_j}\right)$ é uma sequência de Cauchy em $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, e então podemos extrair uma subsequência tal que

$$\|A^{1/2} U_{r+1} - A^{1/2} U_r\|_2 \leq \frac{1}{2^r}$$

para todo inteiro $r \geq 1$.

Agora, fazendo

$$g_k(x) = \sum_{r=1}^{k} \left| A^{1/2}(x)(U_{r+1}(x) - U_r(x)) \right|,$$

temos pela desigualdade de Minkowski que

$$\|g_k\|_2 \leq \sum_{r=1}^{k} \|A^{1/2}(U_{r+1} - U_r)\|_2 \leq 1.$$

Assim, usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, concluímos que $g_k(x)$ converge quase sempre em $\mathbb{R}^n$ para um limite finito $g(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Desde que, para cada $\ell \in \mathbb{N}$, temos

$$|A^{1/2}(x)(U_{r+\ell}(x) - U_r(x))| \leq g_{r+\ell-1}(x) - g_{r-1}(x)$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$, tomando o limite quando $\ell \to +\infty$, obtemos que

$$|A^{1/2}(x)(U(x) - U_r(x))| \leq g(x) - g_{r-1}(x) \leq g(x)$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Dessa forma,

$$|A^{1/2}(x)U(x)| \leq g(x) - |A^{1/2}(x)U_r(x)|$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$, e consequentemente, $A^{1/2}U \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Isto implica que $U \in E$.

Resta provarmos que $U_k \to U$ em E. Isto segue da convergência de (U_k) em $H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla(U_k - U)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0$$

e do fato que

$$\|A^{1/2}(U_k - U)\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^n} A(x)(U_k - U) \cdot (U_k - U) \,\mathrm{d}x \to 0.$$

$\square$

Lema 1.2.2. *Assuma que* (A_1)-(A_2), (A_4) *e* (F_1)-(F_2) *são satisfeitas. Então o funcional* Φ *é bem definido e de classe* C^1 *sobre* E. *Além disso, para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $C_\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)| \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \|U\|_E^2 + C_\varepsilon \|U\|_E^{p+1}. \tag{1.2}$$

Demonstração. Por (F_2), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\nabla F(x,U)| \leq \varepsilon K(x)|U|$ sempre que $|U| < \delta$. Agora, para $|U| \geq \delta$, segue por (F_1) que

$$\begin{aligned} |\nabla F(x,U)| &\leq c_0 K(x)(1 + |U|^p) \\ &= c_0 K(x)|U|^p \left(\frac{1}{|U|^p} + 1 \right) \\ &\leq c_0 K(x) \left(\frac{1}{\delta^p} + 1 \right) |U|^p. \end{aligned}$$

Assim,

$$|\nabla F(x,U)| \leq K(x) \left(\varepsilon |U| + C_\varepsilon |U|^p \right) \tag{1.3}$$

uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$, para todo $U \in \mathbb{R}^m$.

Seja $\xi(t) = F(x,tU)$ com $t \in [0,1]$. Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe um número $\theta \in (0,1)$ tal que $|\xi(1) - \xi(0)| = |\xi'(\theta)|$, isto é,

$$\begin{aligned} |F(x,U)| &= \left| \sum_{i=1}^m \frac{\partial F(x, tu_1, \cdots, \theta u_i, \cdots, tu_m)}{\partial u_i} u_i \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |f_i(x, tu_1, \cdots, \theta u_i, \cdots, tu_m)| \, |u_i|, \end{aligned}$$

que em combinação com (1.3) implica

$$
\begin{aligned}
|F(x,U)| \leq & K(x)\,(\varepsilon|U| + C_\varepsilon|U|^p)\,|U| \\
= & K(x)\left(\varepsilon|U|^2 + C_\varepsilon|U|^{p+1}\right).
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

Agora, usando (A_4) concluímos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K(x)|U|^s \,\mathrm{d}x &= \int_{|x|\leq R_0} K(x)|U|^s \,\mathrm{d}x + \int_{|x|>R_0} K(x)|U|^s \,\mathrm{d}x \\
&\leq \max_{|x|\leq R_0}\{K(x)\} \int_{|x|\leq R_0} |U|^s \,\mathrm{d}x + \int_{|x|>R_0} c_0 \left[1 + \left(\min_{1\leq i\leq m} a_i^+(x)\right)^{1/\alpha}\right] |U|^s \,\mathrm{d}x \\
&\leq C\left\{\|U\|_s^s + \sum_{i=1}^m \int_{|x|>R_0} a_i^+(x)^{1/\alpha}|u_i|^s \,\mathrm{d}x\right\}.
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$
\int_{|x|>R_0} a_i^+(x)^{1/\alpha}|u_i|^s \,\mathrm{d}x \leq \left[\int_{|x|>R_0} a_i^+(x)|u_i|^2 \,\mathrm{d}x\right]^{1/\alpha} \left[\int_{|x|>R_0} |u_i|^{(\alpha s-2)/(\alpha-1)} \,\mathrm{d}x\right]^{(\alpha-1)/\alpha} \tag{1.6}
$$

e por (A_1) temos

$$
\begin{aligned}
\int_{|x|>R_0} a_i^+(x)|u_i|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} a_i(x)|u_i|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{|x|\leq R_0} a_i(x)|u_i|^2 \,\mathrm{d}x - \int_{|x|>R_0} a_i^-(x)|u_i|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left[a_i(x)u_i^2 + Du_i^2\right] \mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

Substituindo (1.6), (1.7) em (1.5) e usando (A_3), encontramos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} K(x)|U|^s \,\mathrm{d}x &\leq C\left\{\|U\|_s^s + \left(\|U\|_E^2 + D\|U\|_2^2\right)^{1/\alpha} \|U\|_{(\alpha s-2)/(\alpha-1)}^{(\alpha s-2)/\alpha}\right\} \\
&\leq C\left\{\|U\|_s^s + \left(1 + \frac{D}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha} \|U\|_E^{2/\alpha} \|U\|_{(\alpha s-2)/(\alpha-1)}^{(\alpha s-2)/\alpha}\right\}.
\end{aligned} \tag{1.8}
$$

Assim, o espaço E pode ser mergulhado no espaço

$$
L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) := \left\{U : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ mensurável } : \int_{\mathbb{R}^n} K(x)|U|^s \,\mathrm{d}x < +\infty\right\}
$$

proposto que $(\alpha s-2)/(\alpha-1) < 2^*$. Em particular, para $s = p+1$, temos que

$$
p < p^\# = \frac{n+2}{n-2} - \frac{4}{\alpha(n-2)}. \tag{1.9}
$$

Portanto,

$$
\int_{\mathbb{R}^n} K(x)|U|^s \,\mathrm{d}x \leq c\|U\|_E^s
$$

para todo $2 \leq s < p^{\#}+1$ e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} K(x)|U|^2\,\mathrm{d}x + C_\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} K(x)|U|^{p+1}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \varepsilon\|U\|_E^2 + C_\varepsilon \|U\|_E^{p+1}.\end{aligned}$$

Esta expressão mostra que o funcional Φ é bem definido.

Nosso próximo objetivo é mostrar que Φ é de classe C^1 sobre E. Notemos que o primeiro termo de Φ é C^1 com derivada de Gáteaux $\langle U,V\rangle_E$. Agora, para verificarmos a diferenciabilidade no segundo termo definamos $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\gamma(\sigma) = F(x,U+t\sigma V)$, onde $V = (v_1,\cdots,v_m) \in E$. Então, pelo Teorema do Valor Médio, existe $\theta(x) \in (0,1)$ tal que $\gamma(1)-\gamma(0) = \gamma'(\theta(x))$, isto é,

$$\begin{aligned}F(x,U+tV)-F(x,U) &= \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F(x,U+\theta(x)tV)}{\partial u_i} t v_i \\ &= tV\cdot\nabla F(x,U+\theta(x)tV).\end{aligned}$$

Por (1.3) temos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{t}|F(x,U+tV)-F(x,U)| &\leq K(x)|V|(|U|+|V|) + K(x)C|V|(|U|^p+|V|^p) \\ &\leq CK(x)\left[|U|^2+|U|^{p+1}+|V|^2+|V|^{p+1}\right].\end{aligned}$$

Desde que o termo à direita é integrável, podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluirmos que

$$\begin{aligned}\langle N'(U),V\rangle &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[N(U+tV)-N(U)] \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} V\cdot\nabla F(x,U)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Como $N'(U)$ é linear e limitada, é suficiente provarmos que a derivada de Gáteaux de N é contínua. Seja $U_k \to U$ em E. Então $U_k \to U$ em $L^s(B_R,\mathbb{R}^m)$ para todo $2 \leq s \leq 2^*$ e $R>0$. Consequentemente, a menos de subsequência, existe $h(x) \in L^s(\mathbb{R}^n)$ tal que $|U_k(x)| \leq h(x)$ e $U_k(x) \to U(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Dado $W \in E$, definimos

$$G_k(x) = W(x)\cdot\nabla F(x,U_k(x)).$$

Então, por (1.3),

$$\begin{aligned}|G_k(x)| &\leq |W||\nabla F(x,U_k)| \\ &\leq K(x)(|U_k|+C_1|U_k|^p)|W| \\ &\leq K(x)\left[\frac{|W|^2}{2}+\frac{|h(x)|^2}{2}+C_1\left(|W|^{p+1}+|h(x)|^{p+1}\right)\right] \\ &= m(x),\end{aligned}$$

com $m(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue temos que $G_k(x) \to G(x) = W(x) \cdot \nabla F(x, U(x))$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$ e daí

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} W \cdot \nabla F(x, U_k)\, \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} W \cdot \nabla F(x, U)\, \mathrm{d}x.$$

Assim, para cada $W \in E$ com $\|W\|_E = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\|N'(U_k) - N'(U)\|_{E^*} &= \sup_{\|W\|_E=1} |\langle N'(U_k) - N'(U), W\rangle| \\ &= \sup_{\|W\|_E=1} \int_{\mathbb{R}^n} W \cdot [\nabla F(x, U_k) - \nabla F(x, U)]\, \mathrm{d}x \to 0,\end{aligned}$$

e a prova do Lema 1.2.2 está completa. □

Observação 1.2.3. Segue da expressão (1.9) que $p^\# \to 2^* - 1$ quando $\alpha \to +\infty$. Assim, nosso resultado estende o principal teorema em Costa [19], onde os potenciais são coercivos e podemos tomar $\alpha \to +\infty$ e $K(x)$ uma constante positiva.

Notemos que pontos críticos de Φ são soluções fracas do sistema (P) porque

$$0 = \langle \Phi'(U), V\rangle = \langle U, V\rangle_E - \int_{\mathbb{R}^n} V \cdot \nabla F(x, U) \mathrm{d}x$$

para todo $V \in E$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u_i \nabla \varphi_i + a_i(x) u_i \varphi_i - f_i(x, U)\varphi_i]\, \mathrm{d}x = 0$$

para todo $\varphi_i \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $i = 1, \cdots, m$.

Na sequência, estabelecemos a compacidade do mergulho $E \hookrightarrow L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Proposição 1.2.4. *Suponhamos que (A_1)-(A_4) e (F_1)-(F_2) valem. Então o mergulho de E em $L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ é compacto para todo $2 \le s < p^\# + 1$.*

Demonstração. O mergulho contínuo foi estabelecido na prova do Lema 1.2.1. Vamos mostrar que (A_3) é uma condição suficiente para que o mergulho seja compacto. Suponhamos que $U_k \rightharpoonup 0$ em E. Considerando os mergulhos

$$E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow H^1(B_R, \mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^s(B_R, \mathbb{R}^m),$$

temos que $U_k \to 0$ em $L^s(B_R, \mathbb{R}^m)$ para todo $2 \le s < 2^*$ e $R > 0$.

Seja $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $0 \le \phi \le 1$, $\phi \equiv 0$ sobre B_R e $\phi \equiv 1$ sobre $\mathbb{R}^n \backslash B_{R+1}$. Então

$$\begin{aligned}\|U_k\|_s^s &= C\,(\|(1-\phi)U_k\|_s^s + \|\phi U_k\|_s^s) \\ &= C\left[\int_{B_{R+1}} (1-\phi)^s |U_k|^s\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n \backslash B_R} \phi^s |U_k|^s\, \mathrm{d}x\right].\end{aligned}$$

O primeiro termo tende a zero quando $k \to +\infty$ e denotemos ele por β_k. Agora, fazendo

$$W_k = \|\phi U_k\|_s^{-1} \phi U_k,$$

temos que $W_k \in H_0^1(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_R}, \mathbb{R}^m)$ e $\|W_k\|_s = 1$. Pela definição de $\nu_s(\Omega)$ segue que

$$\nu_s(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_R)\|\phi U_k\|_s^2 \leq \int_{\mathbb{R}^n \backslash \overline{B_R}} \left[|\nabla(\phi U_k)|^2 + A(x)(\phi U_k)\cdot(\phi U_k)\right] \mathrm{d}x$$

e, em consequência,

$$\|U_k\|_s^s \leq \beta_k + \frac{1}{\nu_s(\mathbb{R}^n \backslash \overline{B}_R)^{s/2}} \|\phi U_k\|_E^s = \beta_k + \gamma_R,$$

onde $\gamma_R \to 0$ quando $R \to +\infty$ por (A_3). Logo, $U_k \to 0$ em $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para todo $2 \leq s < 2^*$.

Pela expressão (1.8) no Lema 1.2.2 temos que

$$\|U\|^s_{L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq C\left\{\|U\|_s^s + \left(1+\frac{D}{\lambda_1}\right)^{1/\alpha} \|U\|_E^{2/\alpha} \|U\|_{(\alpha s-2)/(\alpha-1)}^{(\alpha s-2)/\alpha}\right\}$$

para qualquer $U \in E$. Assim, concluímos que $U_k \to 0$ em $L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ com $2 \leq s < 2^* - 4(\alpha(n-2))^{-1}$. □

As próximas duas proposições mostram que Φ satisfaz uma condição de compacidade do tipo Palais-Smale. Recordemos que $(U_n) \subset E$ é uma sequência de Palais-Smale para Φ se é limitada e $\Phi'(U_n) \to 0$ no espaço dual E'.

Proposição 1.2.5. *Suponhamos que* (A_1)-(A_4) *e* (F_1)-(F_3) *valem. Então, com* $s = p+1$ *em* (A_3), *o funcional* Φ *satisfaz a condição de Palais-Smale sobre* E.

Demonstração. Primeiro provaremos que se $U_k \rightharpoonup U$ em E, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} (U_k - U)\cdot[\nabla F(x,U_k) - \nabla F(x,U)]\, \mathrm{d}x \to 0 \text{ quando } k \to +\infty.$$

Com efeito, segue da Proposição 1.2.4 que $U_k \to U$ em $L^{p+1}_{K(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ e assim, pelo Teorema de Lebesgue Inverso, podemos encontrar uma subsequência, ainda denotada por (U_k), e uma função $h \in L^{p+1}_{K(x)}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$|U_k(x)| \leq h(x) \text{ e } U_k(x) \to U(x)$$

quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Desde que (U_k) é limitada em $L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, tomando

$$H_k(x) = |U_k(x) - U(x)||\nabla F(x, U_k(x)) - \nabla F(x, U(x))|$$

temos que $H_k(x) \to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Pela desigualdade de Young e (1.3), obtemos que

$$\begin{aligned}
|H_k(x)| &\leq \varepsilon[K(x)(|U_k|^2 + |U|^2)] + C_\varepsilon[K(x)(|U_k|^{p+1} + |U|^{p+1}) + |U_k|^p|U| + |U|^p|U_k|] \\
&\leq C_1[K(x)(|U_k|^2 + |U|^2)] + C_2 K(x)|h(x)|^{p+1} \\
&= C_1\omega_k + C_2 g,
\end{aligned}$$

onde $\omega_k, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\|\omega_k\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq M$. Como g é integrável, para cada $\delta > 0$ existe $r_1 > 0$ tal que

$$\int_{|x|>r_1} g(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\delta}{2C_2}.$$

Analogamente, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $R_k > 0$ tal que

$$\int_{|x|>R_k} \omega_k(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\delta}{2C_1}.$$

Desde que $U_k \to U$ em $L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|U_k\|_{L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} \leq \|U\|_{L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)} + \frac{\delta}{4C_1}$$

para todo $k > k_0$. Assim, tomando $r_2 > 0$ tal que

$$\int_{|x|>r_2} K(x)|U|^2\,\mathrm{d}x < \frac{\delta}{8C_1},$$

segue que

$$\begin{aligned}\int_{|x|>r_2} \omega_k(x)\,\mathrm{d}x &\leq \int_{|x|>r_2} K(x)|U_k|^2\,\mathrm{d}x + \int_{|x|>r_2} K(x)|U|^2\,\mathrm{d}x \\ &\leq 2\int_{|x|>r_2} K(x)|U|^2\,\mathrm{d}x + \frac{\delta}{4C_1} \\ &\leq \frac{\delta}{2C_1}\end{aligned}$$

para todo $k > k_0$. Escolhendo $R = \max\{r_1, r_2, R_1, \ldots, R_{k_0}\}$ temos que

$$\int_{|x|>R} H_k(x)\,\mathrm{d}x = C_1\int_{|x|>R} \omega_k(x)\,\mathrm{d}x + C_2\int_{|x|>R} g(x)\,\mathrm{d}x < \delta$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Agora verificamos que para todo $\delta > 0$ podemos encontrar $r > 0$ tal que, para qualquer $S \subset \mathbb{R}^n$ com $|S| < r$, temos

$$\|H_k\|_{L^1(S)} < \delta \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Isto é, $\{H_k\}$ é uniformemente integrável. De fato, fazendo

$$r = \min\left\{\frac{\delta}{2MC_1}, \frac{\delta}{2C_2\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}}\right\},$$

segue que

$$\begin{aligned}\int_S H_k(x)\,\mathrm{d}x &\leq C_1\int_S \omega_k(x)\,\mathrm{d}x + C_2\int_S g(x)\,\mathrm{d}x \\ &\leq C_1 M|S| + C_2|S|\|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < \delta.\end{aligned}$$

Logo, podemos aplicar o Teorema de Convergência de Vitali para concluírmos que $H_k \to 0$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Agora se $(U_k) \subset E$ é tal que $|\Phi(U_k)| \leq K$ e $\|\Phi'(U_k)\|_{E^*} \to 0$, então

$$\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\mu}\right)\|U_k\|_E^2 \leq \Phi(U_k) - \frac{1}{\mu}\Phi'(U_k)U_k \leq K + C\|U_k\|_E.$$

Assim, $(U_k)_E$ é limitada em E e tem uma subsequência fracamente convergente. Desde que

$$\frac{1}{2}\|U_k - U\|_E^2 = \langle \Phi'(U_k) - \Phi'(U), U_k - U\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} (U_k - U)\cdot[\nabla F(x,U_k) - \nabla F(x,U)]\,\mathrm{d}x, \quad (1.10)$$

concluímos que (U_k) tem uma subsequência convergente. $\square$

À seguir, recordemos a condição de compacidade de Cerami.

Definição 1.2.6. *Um funcional $\Phi \in C^1(E,\mathbb{R})$ é dito satisfazer a condição de compacidade de Cerami se qualquer sequência $(U_k) \subset E$ tal que $\Phi(U_k) \to c$ e $(1+\|U_k\|)\|\Phi'(U_k)\| \to 0$, possui uma subsequência convergente.*

Proposição 1.2.7. *Sob as hipóteses da Proposição 1.2.5, com (F_3) trocado por (F_4) e $2\theta > n(p-1)$ se $n \geq 2$ ou $\theta > p-1$ se $n = 1$, Φ satisfaz a condição de compacidade de Cerami.*

Demonstração. Provaremos somente o caso $n \geq 3$, os casos $n = 1,2$ sendo similares. Seja $(U_k) \subset E$ uma sequência de Cerami com $|\Phi(U_k)| \leq K$. Afirmamos que (U_k) tem uma subsequência limitada em E. Suponhamos por contradição que $\|U_k\|_E \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. Usando (F_4) obtemos por um lado que

$$2\Phi(U_k) - \Phi'(U_k)U_k = \int_{\mathbb{R}^n} [U_k \cdot \nabla F(x,U_k) - 2F(x,U_k)]\,\mathrm{d}x \geq a\|U\|_\theta^\theta$$

e, por outro lado,

$$2\Phi(U_k) - \Phi'(U_k)U_k \leq 2|\Phi(U_k)| + \|\Phi'(U_k)\|_{E^*}\|U_k\|_E \leq K_1.$$

Assim, para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\|U_k\|_\theta \leq K_2. \quad (1.11)$$

Escrevendo $Q_k(x) = U_k(x)\cdot\nabla F(x,U_k(x)) - 2F(x,U_k(x))$ temos que

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} Q_k(x)\,\mathrm{d}x \leq K_1. \quad (1.12)$$

Agora, pela expressão (1.4) encontramos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U_k\|_E^2 - \Phi(U_k) &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x,U_k(x))\,\mathrm{d}x \\ \varepsilon &\leq \int_{\mathbb{R}^n} K(x)|U_k|^2\,\mathrm{d}x + C_1\int_{\mathbb{R}^n} K(x)|U_k|^{p+1}\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

e substituindo (1.8) vemos que

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\|U_k\|_E^2-\Phi(U_k) \leq \varepsilon&\left[\|U_k\|_2^2+(1+\frac{D}{\lambda_1})^{1/\alpha}\|U_k\|_E^2\right]\\ &+C\left[\|U_k\|_{p+1}^{p+1}+(1+\frac{D}{\lambda})^{1/\alpha}\|U_k\|_E^{2/\alpha}\|U_k\|_{\frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha-1}}^{\frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha}}\right].\end{aligned} \tag{1.13}$$

Sem perda de generalidade, assumimos que $\theta \leq \min\{p+1, \frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha-1}\} < 2^*$ (o caso $\theta > \max\{p+1, \frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha-1}\} > 2$ segue sem outra restrição sobre θ). Assim, pela desigualdade de interpolação ([8], Nota 2, pag. 57),

$$\|U\|_{p+1} \leq \|U\|_\theta^{1-t}\|U\|_{2^*}^t \text{ e } \|U\|_{\frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha-1}} \leq \|U\|_\theta^{1-s}\|U\|_{2^*}^s, \tag{1.14}$$

para todo $U \in L^\theta(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cap L^{2^*}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, com

$$\frac{1}{p+1}=\frac{1-t}{\theta}+\frac{t}{2^*} \text{ e } \frac{\alpha-1}{\alpha(p+1)-2}=\frac{1-s}{\theta}+\frac{s}{2^*}.$$

Assim, usando a continuidade do mergulho $E \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, a desigualdade (1.13) torna-se

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}-\varepsilon(1+\frac{D}{\lambda_1})\right)\|U_k\|_E^2-\Phi(U_k) &\leq \varepsilon\|U_k\|_2^2+C_2\|U_k\|_\theta^{(1-t)(p+1)}\|U_k\|_E^{t(p+1)}\\ &\quad+C_3\|U_k\|_\theta^{(1-s)\frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha}}\|U_k\|_E^{\frac{2}{\alpha}+s\frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha}},\end{aligned}$$

e daí, para ε suficientemente pequeno,

$$\|U_k\|_E^2 \leq K_1+K_2\|U_k\|_2^2+K_3\|U_k\|_E^{t(p+1)}+K_4\|U_k\|_E^{\frac{2}{\alpha}+s\frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha}}. \tag{1.15}$$

De acordo com as relações 1.14 deduzimos que $t(p+1)<2$ e $\frac{2}{\alpha}+s\frac{\alpha(p+1)-2}{\alpha}<2$ proposto que $2\theta > n\alpha(p-1)/(\alpha-1)$.

Fazendo $W_k = U_k/\|U_k\|_E$ e usando o mergulho compacto de E em $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ concluímos que existe $\widetilde{W} \in E$ tal que, a menos de uma subsequência, $W_k \rightharpoonup \widetilde{W}$ em E e $W_k \to \widetilde{W}$ em $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$. Assim, $W_k(x) \to \widetilde{W}(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$. Agora, dividindo (1.15) por $\|U_k\|_E^2$ e passando o limite, obtemos

$$1 \leq K_4\|\widetilde{W}\|_2^2.$$

Isto fornece $|\widetilde{W}| \neq 0$ e implica que o conjunto $S=\{x\in\mathbb{R}^n : |\widetilde{W}(x)|\neq 0\}$ tem uma medida positiva. Desde que $Q_k(x) \geq a|U_k(x)|^\theta > 0$ e $|U_k(x)| \to +\infty$ para $x \in S$, segue pelo Lema de Fatou que

$$\begin{aligned}\liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^n} Q_k(x)\,\mathrm{d}x &\geq \liminf_{k\to+\infty}\int_S Q_k(x)\,\mathrm{d}x\\ &\geq a\liminf_{k\to+\infty}\int_S |U_k(x)|^\theta\,\mathrm{d}x\\ &\geq a\int_S \liminf_{k\to+\infty}|U_k(x)|^\theta\,\mathrm{d}x \to +\infty.\end{aligned}$$

Isto contradiz (1.12). Portanto, usando a expressão (1.10) obtemos uma subsequência convergente. $\square$

O mergulho compacto de E em $L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ implica o seguinte resultado.

Lema 1.2.8. *O espectro do operador $\Delta + A(x)$ sobre E consiste de uma sequência (λ_k) de autovalores tais que $\lambda_k \to +\infty$ quando $k \to +\infty$.*

Demonstração. Para cada $U \in E$ definimos o funcional linear $S : E \to \mathbb{R}$ por

$$S(W) = \langle U,W\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}.$$

Então pelo Teorema de Representação de Riesz, existe $T(U) \in E$ tal que

$$\langle T(U),W\rangle_E = S(W) = \langle U,W\rangle_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)}.$$

Assim, o operador $T : E \to E$ é linear, limitado, simétrico e definido positivo. Pelo mergulho compacto de E em $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ segue que T é compacto. Escrevendo o problema de autovalores

$$\Delta U + A(x)U = \lambda U$$

como

$$\langle U,W\rangle_E = \lambda\langle T(U),W\rangle_E \text{ para todo } W \in E,$$

temos que $T(U) = \lambda^{-1}U$ e daí $\lambda_n \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. □

A próxima proposição é técnica e será usada na prova do Teorema 1.1.2.

Proposição 1.2.9. *Assuma que (A_1)-(A_4), (F_1)-(F_2) e (F_5) valem. Então para todo $\widehat{\beta} \in (\lambda_k,\beta)$ temos*

$$\liminf_{\|U\|_E \to +\infty} \frac{N(U) - \widehat{\beta}\|U\|_2^2}{\|U\|_E^2} \geq 0.$$

Demonstração. Por (F_5) existe $R > 0$ tal que $F(x,U) \geq \widehat{\beta}|U|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $|U| > R$. Tomando $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |U(x)| < R\}$, temos que

$$\begin{aligned}
N(U) &= \int_{\Omega_R} F(x,U)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega_R} F(x,U)\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\Omega_R} F(x,U)\,\mathrm{d}x + \widehat{\beta}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega_R} |U|^2\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega_R} \Big[F(x,U) - \widehat{\beta}|U|^2\Big]\,\mathrm{d}x + \widehat{\beta}\|U\|_2^2.
\end{aligned}$$

Assim, basta mostrarmos que

$$\liminf_{\|U\|_E \to +\infty} \frac{N_R(U)}{\|U\|_E^2} \geq 0,$$

onde $N_R(U) = \int_{\Omega_R} [F(x,U) - \widehat{\beta}|U|^2]\,\mathrm{d}x$. Afirmamos que $\lim_{\|U\|_E \to +\infty} \frac{N_R(U)}{\|U\|_E^2} = 0$. De fato, por contradição, suponhamos que existe $\delta_0 > 0$ e uma sequência (U_k) em E tal que $\|U_k\|_E \to +\infty$ e $|N_R(U_k)| \geq \delta_0\|U_k\|_E^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Assumimos que $N_R(U_k) \geq 0$ (o caso $N_R(U_k) < 0$ sendo similar). Seja $W_k = U_k/\|U_k\|_E$. Desde que $\|W_k\|_E = 1$ e o mergulho de E em $L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ é compacto, existe $\widetilde{W} \in E$ tal que

$$\begin{aligned} W_k &\rightharpoonup \widetilde{W} \text{ em } E \\ W_k &\to \widetilde{W} \text{ em } L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) \\ W_k(x) &\to \widetilde{W}(x) \text{ quase sempre em } \mathbb{R}^n \\ |W_k(x)| &\leq h(x) \in L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

Fazendo

$$Q_k(x) = \left[\frac{F(x,U_k(x))}{|U_k(x)|^2} - \widehat{\beta}\right]\chi_k(x)|W_k(x)|^2,$$

onde χ_k é a função característica do conjunto

$$\Omega(R,k) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 < |U_k(x)| < R\},$$

temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q_k(x)\mathrm{d}x = \int_{\Omega(R,k)} \left[\frac{F(x,U_k(x))}{|U_k(x)|^2} - \widehat{\beta}\right]\frac{|U_k|^2}{\|U_k\|_E^2}\mathrm{d}x \geq \delta_0 > 0 \tag{1.16}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Por outro lado, como $h \in L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} |Q_k(x)| &\leq |(\frac{F(x,U_k(x))}{|U_k(x)|^2} - \widehat{\beta})h^2(x)| \\ &\leq |(\varepsilon K(x) + C_\varepsilon K(x)|U_k(x)|^{p-1} - \widehat{\beta})h^2(x)| \\ &\leq |(\varepsilon K(x) + R^{p-1}C_\varepsilon K(x) - \widehat{\beta})h^2(x)| \end{aligned}$$

deduzimos que $Q_k \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Além disso, $Q_k \to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^n$ pois sobre o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^n : |\widetilde{W}(x)| = 0\}$ temos $|W_k(x)| \to 0$, enquanto, se $|\widetilde{W}(x)| > 0$, então $|U_k(x)| = \|U_k\|_E|W_k(x)| \to +\infty$. Logo, $\chi_k(x) = 0$ para k suficientemente grande. Portanto, pelo Teorema de Lebesgue, concluímos que $\int_{\mathbb{R}^n} Q_k(x)\,\mathrm{d}x \to 0$, o que contradiz a expressão (1.16). □

1.3 Prova dos Teoremas 1.1.1 e 1.1.2

Agora estamos em posição de provarmos os teoremas anunciados na introdução. A prova é dividida em vários passos.

1.3.1 Existência de pontos críticos sob hipóteses do Teorema 1.1.1

Suponhamos que $|U| \geq 1$. Faremos uso da representação em coordenadas polares esféricas

$$U = (\rho,\phi) = (\rho,\phi_1,\cdots,\phi_{m-1}),$$

onde $\rho \geq 1$, $-\pi \leq \phi_1 \leq \pi$, $0 \leq \phi_2, \cdots, \phi_{m-1} \leq \pi$ e

$$\begin{aligned}
u_1 &= \rho \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{m-1}),\\
u_2 &= \rho \cos(\phi_1)\sin(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{m-1}),\\
u_3 &= \rho \cos(\phi_2)\cdots\sin(\phi_{m-1}),\\
&\vdots\\
u_m &= \rho \cos(\phi_{m-1}).
\end{aligned}$$

Substituindo na hipótese (F_3), obtemos $\mu F(x,U) \leq \rho F_\rho(x,U)$ e assim

$$F(x,U) \geq \left(\min_{|V|=1} F(x,V)\right)|U|^\mu > 0 \tag{1.17}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $|U| \geq 1$. Logo, dado qualquer conjunto limitado $S \subset \mathbb{R}^n$, existe $C = C(S) > 0$ tal que

$$F(x,U) \geq C|U|^\mu \tag{1.18}$$

para todo $x \in S$ e $|U| \geq 1$. Dessa forma

$$\Phi(U) \leq \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - C\|U\|_{L^\mu(S)}^\mu.$$

Isto mostra que existem muitos $e \in E$ tais que $\Phi(e) < 0$. Agora, usando o mergulho de E em $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ para $2 \leq s < p^\# + 1$ temos que

$$\Phi(U) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\|U\|_E^2 - C_\varepsilon \|U\|_E^{p+1}$$

e tomando $\varepsilon = 1/4$ e escolhendo $r > 0$ tal que $1/4 - C_\varepsilon r^{p-1} > 1/8$, obtemos

$$\Phi(U) \geq \frac{1}{8}\|U\|_E^2$$

para todo $\|U\|_E \leq r$.

Portanto, a geometria do passo da montanha é válida e considerando que o funcional Φ é de classe C^1 e satisfaz a condição de Palais-Smale, podemos usar o Teorema do Passo da Montanha para concluirmos a existência de um ponto crítico $U \in E$ do funcional Φ com $\Phi(U) > 0$ (ver [6], [42]). Em outras palavras, o problema (P) tem uma solução fraca não-trivial, e a prova de existência do Teorema 1.1.1 está completa.

1.3.2 Existência de pontos críticos sob hipóteses do Teorema 1.1.2

Nossa prova inicia-se com uma decomposição conveniente do espaço E. Seja

$$N_{k-1} = \{\phi_1^{k-1}, \cdots, \phi_{j_{k-1}}^{k-1}\}$$

base ortonormal do autoespaço correspondendo ao autovalor λ_{k-1} do operador $-\Delta + A(x)$ e denotemos por $E^+_{\lambda_{k-1}}$, $E^0_{\lambda_{k-1}}$ e $E^-_{\lambda_{k-1}}$ os subespaços de E onde $I - \lambda_{k-1}T$ é definido positivo, zero e definido negativo, respectivamente. O operador T sendo definido no Lema 1.2.8. Assim,

$$E = (E^-_{\lambda_{k-1}} \oplus E^0_{\lambda_{k-1}}) \oplus E^+_{\lambda_{k-1}} = E^- \oplus E^+.$$

Notemos que, se $i \leq k-1$, então

$$0 = \|\phi^i_j\|^2_E - \lambda_i \|\phi^i_j\|^2_2 \geq \|\phi^i_j\|^2_E - \lambda_{k-1}\|\phi^i_j\|^2_2,$$

donde $\phi^i_j \in E^-$. Por outro lado, se $i > k-1$, temos que $\phi^i_j \in E^+$. Logo, $dim(E^-) < +\infty$.

Agora, escolhendo $\widehat{\alpha} > 0$ e $\widehat{\beta} > 0$ tal que

$$\limsup_{|U|\to 0} \frac{2F(x,U)}{|U|^2} \leq \alpha < \widehat{\alpha} < \lambda_k < \widehat{\beta} < \beta \leq \liminf_{|U|\to\infty} \frac{2F(x,U)}{|U|^2}, \tag{1.19}$$

temos que existe $\widehat{\delta} > 0$ tal que $F(x,U) \leq (\widehat{\alpha}/2)|U|^2$ sempre que $|U| < \widehat{\delta}$. Se $|U| \geq \widehat{\delta}$, então procedendo como na prova da expressão (1.3), verificamos que $F(x,U) \leq K(x)C_\varepsilon |U|^{p+1}$. Assim,

$$F(x,U) \leq \frac{\widehat{\alpha}}{2}|U|^2 + K(x)C_\varepsilon |U|^{p+1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $U \in \mathbb{R}^m$. Usando o mergulho de E em $L^{p+1}_{K(x)}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ obtemos que

$$\Phi(U) \geq \frac{1}{2}\left(\|U\|^2_E - \widehat{\alpha}\|U\|^2_2\right) - \widehat{M}\|U\|^{p+1}_E$$

para todo $U \in E$. Observamos que $E^+_{\widehat{\alpha}} = E^+_{\lambda_{k-1}}$. Com efeito, $E^+_{\widehat{\alpha}} \subset E^+_{\lambda_{k-1}}$ e se existir $U \in E^+_{\lambda_{k-1}} \backslash E^+_{\widehat{\alpha}}$ tal que $\|U\|^2_E - \widehat{\alpha}\|U\|^2_2 \leq 0$ então $U \perp \phi^i_j$ para todo $i \leq k-1$. Pela caracterização do autovalor λ_k segue que

$$\lambda_k \leq \frac{\|U\|^2_E}{\|U\|^2_2} \leq \widehat{\alpha},$$

o que contradiz (1.19). Assim, podemos tomar $\widehat{m} > 0$ tal que

$$\|U\|^2_E - \widehat{\alpha}\|U\|^2_2 \geq \widehat{m}\|U\|^2_E$$

para todo $U \in E^+$, pois do contrário, existe uma sequência (U_k) in E^+ tal que

$$\|U_k\|^2_E - \widehat{\alpha}\|U_k\|^2_2 \leq \frac{1}{n}\|U_k\|^2_E$$

e daí $\lambda_k \leq \widehat{\alpha}$. Mas isto contradiz a hipótese que $\widehat{\alpha} < \lambda_k$. Logo,

$$\Phi(U) \geq \left(\widehat{m} - \widehat{M}\|U\|^{p-1}_E\right)\|U\|^2_E$$

para todo $U \in E^+$, e assumindo $p > 1$ em (F_1), obtemos que $\|U\|_E = \rho < (\widehat{m}/\widehat{M})^{1/(p-1)}$ implica

$$\Phi(U) \geq \omega > 0 \tag{1.20}$$

para todo $U \in E^+$.

Por outro lado, por (f_6) vemos que

$$\Phi(U) \leq \frac{1}{2}\left(\|U\|_E^2 - \lambda_{k-1}\|U\|_2^2\right) \leq 0 \tag{1.21}$$

para todo $U \in E^-$. Agora, dado $\varepsilon > 0$, segue da proposição anterior que existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$N(U) \geq \frac{1}{2}\widehat{\beta}\|U\|_2^2 - \varepsilon\|U\|_E^2$$

para todo $U \in E$ com $\|U\|_E \geq R_\varepsilon$. Desde que

$$\|U\|_E^2 - \widehat{\beta}\|U\|_2^2 < \|U\|_E^2 - \lambda_{k-1}\|U\|_2^2 \leq 0,$$

temos que existe $m_{\widehat{\beta}} > 0$ tal que

$$\|U\|_E^2 - \widehat{\beta}\|U\|_2^2 \leq -m_{\widehat{\beta}}\|U\|_E^2,$$

e tomando $0 < \varepsilon < m_{\widehat{\beta}}$ obtemos que

$$\Phi(U) \leq \left(-m_{\widehat{\beta}} + \varepsilon\right)\|U\|_E^2 < 0 \tag{1.22}$$

para todo $U \in E^- \oplus E^0_{\lambda_k}$, with $\|U\|_E \geq R_\varepsilon$.

Portanto, as estimativas (1.20)–(1.22) mostram que o funcional Φ exibe a geometria requerida pelo Teorema do Passo da Montanha Generalizado [6, 43] e desde que este teorema continua válido quando trocamos a condição Palais-Smale pela condição de Cerami, podemos concluir que Φ possui um ponto crítico $\widehat{U} \in E$ com $\Phi(\widehat{U}) > \omega > 0$, e em particular, $\widehat{U} \neq 0$.

1.3.3 Regularidade e comportamento assintótico.

Usaremos um argumento tipo “bootstrap"para mostrarmos que U é uma solução forte do problema (P). Isto é, cada componente de U é duas vezes fracamente diferenciável em $\mathbb{R}^n$ e satisfaz (P) quase sempre em $\mathbb{R}^n$. De fato, seja $U \in W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ satisfazendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\nabla U \nabla \varphi + A(x)U \cdot \varphi]\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi \cdot \nabla F(x,U)\,\mathrm{d}x$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(B_2, \mathbb{R}^m)$, onde $B_2 = B(x_0, 2R)$ é uma bola de raio $2R$ centrada em x_0. Então, U é uma solução fraca da equação

$$-\Delta U = h(x) \text{ em } B_2, \tag{1.23}$$

onde $h(x) = \nabla F(x,U(x)) - A(x)U(x)$. Fazendo $1 < p_1 = 2^*/p < 2^*$, segue de (1.3) e hipóteses (A_1) e (A_4) que

$$|h(x)|^{p_1} \leq C\left(|U|^{p_1} + |U|^{2^*}\right).$$

Desde que

$$W^{1,2}(B_2,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{2^*}(B_2,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{p_1}(B_2,\mathbb{R}^m),$$

concluímos que $h \in L^{p_1}(B_2,\mathbb{R}^m)$ e

$$\|h\|_{L^{p_1}(B_2,\mathbb{R}^m)} \leq C\left(\|U\|_{L^{p_1}(B_2,\mathbb{R}^m)} + \|U\|^p_{L^{pp_1}(B_2,\mathbb{R}^m)}\right).$$

Agora, se w é o potencial Newtoniano de h, segue de [27, Teorema 9.9] que $w \in W^{2,p_1}(B_2,\mathbb{R}^m)$ e

$$\Delta w = h(x) \tag{1.24}$$

quase sempre em B_2. Combinando (1.23) e (1.24) temos que

$$\int_{B_2} \nabla(U-w)\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x = 0,$$

para todo $\varphi \in C_c^\infty(B_2,\mathbb{R}^m)$. Isto é, $U-w$ é uma solução fraca de $\Delta\vartheta = 0$ em B_2. Como $U-w \in W^{1,2}(B_2,\mathbb{R}^m)$, podemos aplicar o Lema de Weyl [31, Corolário 1.2.1] para concluirmos que $U-w \in C^\infty(B_2,\mathbb{R}^m)$. Logo, $U \in W^{2,q_1}(B_2,\mathbb{R}^m)$.

Desde que $1 < p < (n+2)/(n-2)$, existe $\delta > 0$ tal que $(n+2)/(n-2) = p(1+\delta)$. Assim,

$$p_1 = \frac{2n(1+\delta)}{(n+2)}.$$

Considerando que $W^{2,p_1}(B_2,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{r_1}(B_2,\mathbb{R}^m)$ com $r_1 = np_1/(n-2p_1)$, existe $p_2 \in (p_1,r_1)$ tal que $U \in W^{2,p_2}(B_2,\mathbb{R}^m)$. De fato, fazendo $p_2 = r_1/p$ temos que $r_1 > p_2$ e como

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{(n-2)(1+\delta)}{n-2-4\delta} > 1+\delta,$$

segue que $p_2 > p_1$. Usando o argumento anterior, temos que

$$W^{2,p_1}(B_2,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{r_1}(B_2,\mathbb{R}^m) \hookrightarrow L^{p_2}(B_2,\mathbb{R}^m)$$

e $|h(x)|^{p_2} \leq C(|U|^{p_2} + |U|^{r_1})$, donde $h \in L^{p_2}(B_2,\mathbb{R}^m)$ com

$$\|h\|_{L^{p_2}(B_2,\mathbb{R}^m)} \leq C\left(\|U\|_{L^{p_2}(B_2,\mathbb{R}^m)} + \|U\|^p_{L^{pp_2}(B_2,\mathbb{R}^m)}\right)$$

e $U \in W^{2,p_2}(B_2,\mathbb{R}^m)$.

Seguindo deste modo, obtemos uma sequência ilimitada

$$p_{k+1} = \frac{1}{p}\left(\frac{np_k}{n-2p_k}\right)$$

tal que $p_{k+1}/p_k > 1+\delta$ e

$$\|h\|_{L^{p_{k+1}}(B_2,\mathbb{R}^m)} \leq C\left(\|U\|_{L^{p_{k+1}}(B_2,\mathbb{R}^m)} + \|U\|^p_{L^{pp_{k+1}}(B_2,\mathbb{R}^m)}\right).$$

Assim, $U \in W^{2,s}_{loc}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ para todo $2 \leq s < +\infty$. Pelo Teorema de Mergulho de Sobolev, $U \in C^{1,\alpha}(B_2,\mathbb{R}^m)$ com $0 < \alpha < 1 - n/s$ e $s > n$. Notemos que se as não-linearidades fossem de classe C^1 ou Hölder contínuas, então U seria uma solução clássica do problema (T_K). Pela estimativa elíptica interior [27, Teorema 9.11] temos

$$\|U\|_{W^{2,s}(B_1,\mathbb{R}^m)} \leq C\left(\|U\|_{L^s(B_2,\mathbb{R}^m)} + \|h\|_{L^s(B_2,\mathbb{R}^m)}\right),$$

onde $B_1 = B(x_0,R)$. Logo,

$$\|U\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_1,\mathbb{R}^m)} \leq C\left(\|z\|_{L^s(B_2,\mathbb{R}^m)} + \|U\|^p_{L^{sp}(B_2,\mathbb{R}^m)}\right).$$

Se $s > n$, temos pelo mergulho de Sobolev

$$\|U\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B}_1,\mathbb{R}^m)} \leq C\left(\|U\|_{L^s(B_2,\mathbb{R}^m)} + \|U\|^p_{L^s(B_2,\mathbb{R}^m)}\right).$$

Fazendo $|x_0| \to +\infty$, concluímos que $\|U\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B_1},\mathbb{R}^m)} \to 0$.

1.3.4 Multiplicidade de soluções.

Como visto antes, na aplicação do Teorema do Passo da Montanha, as condições de crescimento (F_1)–(F_4) e hipóteses (A_1)–(A_4) sobre os potenciais implicam que o funcional Φ é de classe C^1, $\Phi(0) = 0$ e Φ satisfaz a condição de Palais-Smale. Além disso, como na prova do Teorema 1.1.1, a condição (F) implica que sobre qualquer subespaço de dimensão finita $W \subset E$, existe um $R = R(W) > 0$ tal que

$$\Phi(u)\mid_{u\in\partial B_R(0;W)} \leq C_1R^2 - C_2R^\mu + C_3 \to -\infty$$

quando $R \to +\infty$. Da mesma forma verificamos que existem $\rho,\alpha > 0$ tais que $\Phi\mid_{\partial B_\rho} > \alpha$. Desde que Φ é par, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha Simétrico para obtermos uma sequência ilimitada de valores críticos de Φ sob as hipóteses do Teorema 1.1.1.

Para provarmos a existência de múltiplas soluções no Teorema 1.1.2, usamos uma versão do Teorema do Passo da Montanha Simétrico onde a usual condição de compacidade de Palais-Smale é trocada pela condição de compacidade de Cerami. Para este fim, mostramos que o lema de deformação continua válido sob a condição $(C)_c$ conforme [32, Teorema 1.3].

CAPÍTULO 2

Sistemas elípticos com crescimento supercrítico

2.1 Introdução

Neste capítulo consideramos uma classe de sistemas de equações de Schrödinger estacionárias em $\mathbb{R}^n$ da forma

$$-\Delta u_i + a_i(x)u_i = f_i(x,u_i,\cdots,u_m) + g_i(x)|u_i|^{p_i-1}u_i, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{P}$$

onde $n \geq 3$, $p_i \geq (n+2)/(n-2)$ e as funções $a_i, g_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $f_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são contínuas com $f_i(x,0,\cdots,0) = 0$ para todo $i = 1,\cdots,m$. Estudaremos a situação variacional na qual $(f_i,\cdots,f_m) = \nabla F$ para alguma função $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1, onde ∇F denota o gradiente de F nas variáveis $U = (u_1,\cdots,u_m) \in \mathbb{R}^m$. Escreveremos o sistema acima na forma

$$-\Delta U + A(x)U = \nabla F(x,U) + \nabla G(x,U),$$

onde $\Delta = \operatorname{diag}(\Delta,\cdots,\Delta)$, $V(x) = \operatorname{diag}(a_1(x),\cdots,a_m(x))$ e

$$G(x,U) = \frac{g_1(x)}{p_1+1}|u_1|^{p_1+1} + \cdots + \frac{g_m(x)}{p_m+1}|u_m|^{p_m+1}.$$

Nosso principal objetivo neste capítulo é ilustrar como idéias introduzidas em [9, 10, 15, 43, 44, 49, 50, 51] podem ser aplicadas para manipular o problema de existência de "bound states" para sistemas elipticos com não-linearidade crítica ou supercrítica, isto é, soluções $U = (u_1,\cdots,u_m)$ satisfazendo (P) e as seguintes condições:

$$u_i > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^n, \qquad u_i(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to +\infty,$$

para todo $i = 1,\cdots.m$.

Utilizaremos o mesmo ambiente variacional do capítulo anterior, a saber,

$$E = \left\{ U \in H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) : \int_{\mathbb{R}^n} A(x)U\cdot U \,\mathrm{d}x < +\infty \right\}$$

com produto interno $\langle U,V\rangle_E = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} [\nabla U\cdot\nabla V + A(x)U\cdot V]\,\mathrm{d}x$. Também assumiremos as mesmas hipóteses sobre o potencial $A(x)$ e sobre a não-linearidade $F(x,U)$ no caso superquadrático. Resumidamente,

(A_1) Existe $D > 0$ tal que $a_i(x) \geq -D$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i = 1,\cdots,m$;

(A_2) $\lambda_1 = \inf\limits_{U\in E\setminus\{0\}} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n}\left[|\nabla U|^2 + A(x)U\cdot U\right]\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^n}|U|^2\,\mathrm{d}x} > 0;$

(A_3) $\lim\limits_{R\to+\infty} \nu_s(\mathbb{R}^n\setminus\overline{B}_R) = +\infty$, para $2 \le s < 2n/(n-2)$;

(A_4) Existem uma função $K(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n)$, com $K(x) \ge 1$, e constantes $\alpha > 1$, c_0, $R_0 > 0$ tais que

$$K(x) \le c_0\left[1 + \left(\min_{1\le i\le m}\{a_i^+(x)\}\right)^{1/\alpha}\right] \quad \text{para todo} \quad |x| \ge R_0;$$

(F_1) A função F satisfaz a condição de crescimento

$$|\nabla F(x,U)| \le cK(x)(1+|U|^q) \quad \text{para todo} \quad (x,U)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m,$$

onde $c > 0$, $1 < q < p^\# \le (n+2)/(n-2)$ e $n \ge 3$;

(F_2) $|\nabla F(x,U)|/K(x) = o(|U|)$ quando $U \to 0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^n$;

(F_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x,U) \le U\cdot\nabla F(x,U)$$

para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m\setminus\{0\})$.

Com respeito às funções $g_i(x)$ supomos que são não-negativas e têm crescimentos controlados pelo potencial $A(x)$, isto é,

(F_4) $g_i(x) \le CK(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e algum $C > 0$, $i = 1,\cdots,m$.

Nosso principal resultado para o problema (P) é o seguinte:

Teorema 2.1.1. *Suponhamos que (A_1)–(A_4) e (F_1)–(F_4) são satisfeitas, com $s = q+1$ em (A_3). Então (P) tem uma solução forte $U \in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)\cap W^{1,2}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ que decai no infinito. Além disso, se*

(F_5) $\partial F/\partial u_i(x,u_1,\cdots,u_m) \ge 0$ para todo $u_i \ge 0$ com $i = 1,\cdots,m$,

então (P) possui pelo menos uma solução positiva $U = (u_1,\cdots,u_m)$ com $u_i(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $i = 1,\cdots,m$.

Em nosso próximo resultado, verificamos a existência de infinitas soluções para (P) sob a presença de simetria. Mais especificamente, suponhamos

(F_6) $F(x,U)$ é par com relação à variável $U \in \mathbb{R}^m$,

Sob esta condição, somos capazes de provar:

Teorema 2.1.2. *Suponhamos (A_1)–(A_4) válidas. Se F satisfaz (F_1)–(F_4) e (F_6), então o problema (P) possui uma sequência ilimitada de valores críticos.*

2.2 Reformulação do problema e resultados preliminares

Nossa escolha do ambiente variacional E assegura o mergulho contínuo em $H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ (ver Lema 1.2.1) com

$$\|U\|_E^2 \geq \zeta\|\nabla U\|_2^2. \tag{2.1}$$

Além disso, $E \hookrightarrow L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ compactamente para todo $2 \leq s \leq p^\# + 1$ (ver Lema 1.2.4).

Desde que o crescimento da não-linearidade é crítica ou supercrítica, não podemos usar diretamente técnicas variacionais por causa da perda de compacidade do mergulho de Sobolev. Contornamos esta dificuldade construindo um truncamento adequado. Para este fim, introduzimos um problema auxiliar no espírito do argumento desenvolvido para o caso escalar por Chabrowski e Yang [15] quando o domínio é ilimitado e por Rabinowitz [43] no caso de domínio limitado. Assim, consideremos o sistema

$$-\Delta u_i + a_i(x)u_i = f_i(x,u_1,\cdots,u_m) + g_i(x)h_i(u_i), \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad i=1,\cdots,m, \tag{T_K}$$

onde

$$h_i(t) = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t\leq 0, \\ t^{p_i}, & \text{se} \quad 0\leq t\leq K, \\ K^{p_i-q}t^q, & \text{se} \quad t\geq K, \end{cases}$$

e a constante $K>0$ será determinada posteriormente.

Seja $H_i(s) = \displaystyle\int_0^s h_i(t)\,\mathrm{d}t$. Observemos que para $0\leq t\leq K$ temos $(t/K)^{p_i} \leq (t/K)^q$ e, consequentemente,

$$h_i(t) \leq K^{p_i-q}t^q, \text{para todo} t\in\mathbb{R} \tag{2.2}$$

e

$$H_i(s) \leq \frac{K^{p_i-q}}{q+1}s^{q+1}, \text{para todo} s\in\mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Agora, consideremos o funcional associado ao problema (T_K) dado por

$$I(U) = \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n}[F(x,U)+\widetilde{G}(x,U)]\,\mathrm{d}x$$

com $\widetilde{G}(x,U) = g_1(x)H_1(u_1)+\cdots+g_m(x)H_m(u_m)$.

Lema 2.2.1. *Assumimos que (A_1)–(A_2), (A_4), (F_1)–(F_2) e (F_4) são satisfeitas. Então o funcional I é bem definido e de classe C^1 sobre E. Além disso, para todo $\varepsilon>0$ existe $C_\varepsilon>0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(x,U)+\widetilde{G}(x,U)|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\|U\|_E^2 + C_\varepsilon\|U\|_E^{q+1}. \tag{2.4}$$

Demonstração. Mostramos no Capítulo 1, expressão (1.4), que

$$|F(x,U)| \leq K(x)\left(\varepsilon|U|^2 + C_\varepsilon|U|^{q+1}\right). \tag{2.5}$$

Agora, segue de (2.3) e (F_4) que

$$\widetilde{G}(x,U) \leq CK(x)|U|^{q+1} \tag{2.6}$$

para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Logo,

$$|F(x,U) + \widetilde{G}(x,U)| \leq K(x)\left(\varepsilon|U|^2 + C_\varepsilon|U|^{q+1}\right) \tag{2.7}$$

e isso revela que o funcional I é bem definido. Uma análise semelhante à realizada para provarmos a regularidade do funcional Φ no Capítulo 1, mostra que I é de classe C^1 sobre E com

$$\langle I'(U), W\rangle = \langle U, W\rangle_E - \int_{\mathbb{R}^n} W \cdot [\nabla F(x,U) + \nabla G(x,U)]\,\mathrm{d}x$$

para quaisquer $U = (u_1, \cdots, u_m), W = (w_1, \cdots, w_m) \in E$. □

Tomando $W = (0, \cdots, w_i, \cdots, 0)$ obtemos a formulação fraca de (T_K):

$$\int_{\mathbb{R}^n} [\nabla u_i \nabla w_i + a_i(x) u_i w_i]\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} [f_i(x,U) w_i + g_i(x) h_i(u_i) w_i]\,\mathrm{d}x.$$

Em outras palavras, pontos críticos de I são soluções fracas de (T_K).

A próxima proposição mostra que I satisfaz uma condição de compacidade do tipo Palais-Smale.

Proposição 2.2.2. *Suponhamos que (A_1)–(A_4) e (F_1)–(F_4) valem. Então, com $s = q+1$ em (A_3), o funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale sobre E.*

Demonstração. Seja $(U_k) \subset E$ tal que $|I(U_k)| \leq C$ e $\|I'(U_k)\|_{E'} \to 0$. Então, usando (F_3), vemos que

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\mu}\right)\|U_k\|_E^2 \leq I(U_k) - \frac{1}{\mu} I'(U_k) U_k \leq C + \varepsilon\|U_k\|_E.$$

Assim, $(U_k) \subset E$ é limitada e, a menos de uma subsequência, converge fracamente para um limite U em E. Vimos na Proposição 1.2.5 que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (U_k - U) \cdot [\nabla F(x,U_k) - \nabla F(x,U)]\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

De modo análogo, usando (2.2) e o Teorema de Convergência de Vitali verificamos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (U_k - U) \cdot \left[\nabla\widetilde{G}(x,U_k) - \nabla\widetilde{G}(x,U)\right]\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Desde que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\|U_k - U\|_E^2 =& \langle I'(U_k) - I'(U), U_k - U\rangle + \int_{\mathbb{R}^n} (U_k - U) \cdot [\nabla F(x,U_k) - \nabla F(x,U)]\,\mathrm{d}x + \\ & \int_{\mathbb{R}^n} (U_k - U) \cdot \left[\nabla\widetilde{G}(x,U_k) - \nabla\widetilde{G}(x,U)\right]\,\mathrm{d}x, \end{aligned} \tag{2.8}$$

concluímos que (U_k) tem uma subsequência que converge fortemente para U em E. □

2.3 Soluções do problema auxiliar

Iniciamos por provar a existência de soluções fortes não-triviais do problema truncado (T_K) usando o Teorema do Passo da Montanha.

Fazendo uso da representação em coordenadas polares encontramos que

$$F(x,U) \geq \left(\min_{|W|=1} F(x,W)\right)|U|^{\mu} > 0 \tag{2.9}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ e $|U| \geq 1$ (ver equação (1.17) e sua prova). Desde que $\widetilde{G}(x,U) \geq 0$ para todo $|U| \geq 1$, segue que

$$I(U) \leq \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - C\|U\|_{L^{\mu}(S)}^{\mu}$$

para todo $U \in E$ com suporte compacto S e tal que $|U| \geq 1$. Isto mostra que existem muitos $e \in E$ tais que $\Phi(e) < 0$. Agora, usando (2.4) obtemos

$$I(U) \geq (\frac{1}{2} - \varepsilon)\|U\|_E^2 - C_{\varepsilon}\|U\|_E^{q+1},$$

e assim, escolhendo $r > 0$ tal que

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) r - C_{\varepsilon} r^q > 0,$$

segue que

$$I(U) \geq \rho > 0$$

para todo $\|U\|_E = r$.

Portanto, o funcional I satisfaz a geometria do passo da montanha e, em consequência, as hipóteses do Teorema 1.1.1 do Capítulo 1 são satisfeitas. Logo, existe um ponto crítico $U \in E$ do funcional I com $I(U) > 0$. Em outras palavras, o problema (T_K) tem uma solução forte não-nula. Seja $c = I(U)$ o valor crítico de I em U. Assim, por (F_3) e (2.3) vemos que

$$\begin{aligned} c =& \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \left[F(x,U) + \widetilde{G}(x,U)\right] \mathrm{d}x \\ \geq& \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{\mu}\nabla F(x,U)\cdot U + \frac{1}{q+1}\nabla\widetilde{G}(x,U)\cdot U\right] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Desde que U é uma solução do sistema (T_K), temos que

$$\|U\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^N} U \cdot [\nabla F(x,U) + \nabla G(x,U)]\, \mathrm{d}x$$

e assim

$$c \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q+1}\right)\|U\|_E^2. \tag{2.10}$$

Com o objetivo de mostrarmos que o procedimento do passo da montanha fornece uma solução positiva, trocamos a não-linearidade $F(x,U)$ por

$$\widetilde{F}(x,U)=\begin{cases} F(x,u_1,\cdots,u_m), & \text{se} \quad \forall i, \quad u_i\geq 0,\\ F(x,u_1,\cdots,u_{i-1},0,u_{i+1},\cdots,u_m), & \text{se} \quad \exists i, \quad u_i\leq 0,\\ 0, & \text{se} \quad \forall i, \quad u_i\leq 0,\end{cases}$$

onde $i=1,\cdots,m$. Assim, $\widetilde{F}(x,U)$ satisfaz as mesmas hipóteses que $F(x,U)$ e pelo argumento anterior obtemos uma solução forte não-trivial do problema (T_K). Isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^n}[\nabla u_i\nabla\xi+a_i(x)u_i\xi]\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_i}(x,u_1,\cdots,u_m)\xi\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^n}g_i(x)h_i(u_i)\xi\,\mathrm{d}x,$$

para todo $\xi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Tomando $\xi=u_i^-$ nesta expressão, concluímos que $\|u_i^-\|_{E_1}=0$. Logo, $u_i\geq 0$ para todo $i=1,\cdots,m$. Desde que u_i satisfaz

$$-\Delta u_i+a_i^+(x)u_i=f_i(x,U)+g_i(x)h_i(u_i)+a_i^-(x)u_i\geq 0$$

e $f_i(x,U(x))+g_i(x)h_i(u_i(x))+a_i^-(x)u_i(x)\in L^s(B_R)$, para todo $s\geq 1$, porque $u_i\in C^{1,\alpha}(B_R)$, segue pelo princípio do máximo forte para soluções fortes [27, Teorema 9.6] que u_i não pode atingir um mínimo em B_R, para todo $R>0$, a menos que seja constante. Assim, $u_i>0$ em $\mathbb{R}^n$ para todo $i=1,\cdots,m$.

2.4 Prova do Teorema 2.1.1

Nesta seção, usamos a técnica de iteração de Moser para obtermos uma cota apriori para soluções do problema (T_K), isto é, mostramos que $\|U\|_\infty\leq K$ desde que K (uma constante no truncamento h_i) seja escolhida de forma conveniente. Isto obviamente implica que U resolve o problema (P). A prova é adaptada de [15, Proposição 2].

Proposição 2.4.1. *Existe uma constante $K_0>0$ tal que, para cada $K\geq K_0$ a solução do passo da montanha U do problema (T_K) satisfaz $\|U\|_\infty\leq K$.*

Demonstração. Seja $U=(u_1,\cdots,u_m)\in E$ uma solução do problema (T_K). Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u_i\geq 0$ para $i\in\{1,\cdots,m\}$. Caso contrário, argüimos com as partes positiva e negativa de u_i separadamente. Definamos uma função $\widetilde{U}_L=(\widetilde{u}_{1L},\cdots,\widetilde{u}_{mL})\in E$ por

$$\widetilde{u}_{iL}(x)=\begin{cases} u_i(x), & \text{para} \quad u_i(x)\leq L\\ L, & \text{para} \quad u_i(x)>L,\end{cases}$$

onde $L\geq K$. Seja $\Phi=(\phi_1,\cdots,\phi_m)\in E$ tal que $\phi_i=u_iu_{iL}^{2(\beta-1)}$ e $\beta>1$ é uma constante a ser determinada. Tomando ϕ_i como funções teste em cada i-ésima equação do problema (T_K), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n}[\nabla U\cdot\nabla\Phi+A(x)U\cdot\Phi]\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^n}\Phi\cdot\left[\nabla F(x,U)+\nabla\widetilde{G}(x,U)\right]\mathrm{d}x.$$

Desde que $\nabla\phi_i = u_{iL}^{2(\beta-1)}\nabla u_i + 2(\beta-1)u_i u_{iL}^{2\beta-3}\nabla u_{iL}$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} u_i u_{iL}^{2\beta-3}\nabla u_i\cdot\nabla u_{iL}\,\mathrm{d}x = \int_{u_i\le L} u_i^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2\,\mathrm{d}x \ge 0,$$

segue que

$$\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n}\left[u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2 + a_i(x)u_i^2 u_{iL}^{2(\beta-1)}\right]\mathrm{d}x \le \int_{\mathbb{R}^n}\Phi\cdot\left[\nabla F(x,U)+\nabla\widetilde{G}(x,U)\right]\mathrm{d}x.$$

Considerando $K>1$ suficientemente grande e usando as desigualdades (1.3) e (2.2) obtemos que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n}\left[u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2 + a_i^+(x)u_i^2 u_{iL}^{2(\beta-1)}\right]\mathrm{d}x\\ &\qquad\le CK^{p-q}\int_{\mathbb{R}^n}K(x)\left(|U|^2+|U|^{q+1}\right)|U_L|^{2(\beta-1)}\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}a_i^-(x)u_i^2u_{iL}^{2(\beta-1)}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

onde $p=\max\{p_1,\cdots,p_m\}$. Por (A_3), temos que $a_i^-(x)\le D$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$, e como $K(x)\ge 1$ concluímos que

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n}\left[u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2 + a_i^+(x)u_i^2 u_{iL}^{2(\beta-1)}\right]\mathrm{d}x\\ &\qquad\le CK^{p-q}\int_{\mathbb{R}^n}K(x)\left(|U|^2+|U|^{q+1}\right)|U_L|^{2(\beta-1)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.11}$$

A seguir façamos $\Psi=(\varphi_1,\cdots,\varphi_m)$, onde $\varphi_i = u_i u_{iL}^{\beta-1}$ para $i=1,\cdots,m$. Notamos que $\Psi\in E$ pois

$$\int_{\mathbb{R}^n}A(x)\Psi\cdot\Psi\,\mathrm{d}x \le L^{2(\beta-1)}\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}a_i^+(x)u_i^2\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

Pela desigualdade de Young temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\Psi|^2\,\mathrm{d}x \le& \sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\varphi_i|^2\,\mathrm{d}x\\ \le& 2\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}\left[u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2+(\beta-1)^2u_{iL}^{2(\beta-2)}u_i^2|\nabla u_{iL}|^2\right]\mathrm{d}x\\ =& 2\sum_{i=1}^m\left[\int_{\mathbb{R}^n}u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2\,\mathrm{d}x+(\beta-1)^2\int_{u_i\le L}u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2\,\mathrm{d}x\right]\\ \le& 2\sum_{i=1}^m\left[\int_{\mathbb{R}^n}u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2\,\mathrm{d}x+(\beta-1)^2\int_{\mathbb{R}^N}u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2\,\mathrm{d}x\right]\\ \le& 2\sum_{i=1}^m\beta^2\int_{\mathbb{R}^n}u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}\tag{2.12}$$

Assim, usando a desigualdade (2.1) e substituindo (2.11)–(2.12), encontramos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\Psi|^2\,\mathrm{d}x \leq & \frac{1}{\zeta}\|\Psi\|_E^2 \\ \leq & \frac{1}{\zeta}\int_{\mathbb{R}^n}\left(|\nabla\Psi|^2 + A(x)\Psi\cdot\Psi\right)\mathrm{d}x \\ \leq & 2\beta^2\sum_{i=1}^m\int_{\mathbb{R}^n}\left(u_{iL}^{2(\beta-1)}|\nabla u_i|^2 + a_i^+(x)u_i^2u_{iL}^{2(\beta-1)}\right)\mathrm{d}x \\ \leq & \beta^2CK^{p-q}\int_{\mathbb{R}^n}K(x)\left(|U|^2+|U|^{q+1}\right)|U_L|^{2(\beta-1)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.13}$$

Segue da desigualdade de Gagliardo-Nirenberg [8, Teorema IX.9] que

$$\begin{aligned}\|\Psi\|_{2^*}^2 \leq & C\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla\Psi|^2\,\mathrm{d}x \\ \leq & \beta^2CK^{p-q}\int_{\mathbb{R}^n}K(x)\left(|U|^2+|U|^{q+1}\right)|U_L|^{2(\beta-1)}\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{2.14}$$

Afirmamos que $K(x)|U|^s \in L^r(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq r < \alpha$ próximo a 1 e $2 \leq s < p^\#$. De fato, agindo como na prova do Lema 1.2.2, equação (1.8) fornece

$$\int_{\mathbb{R}^n}(K(x)|U|^s)^r\,\mathrm{d}x \leq C\left\{\|U\|_{rs}^{rs} + \|U\|_E^{2r/\alpha}\|U\|_{r(\alpha s-2)/(\alpha-r)}^{r(\alpha s-2)/\alpha}\right\}.$$

Notamos que $rs > 2$ e $rs < 2^*$ para $r > 1$ próximo a 1 desde que $s < p^\#$. Por outro lado, $r(\alpha s-2)/(\alpha-r) > 2$ para $r \in (1,\alpha)$ e $r(\alpha s-2)/(\alpha-r) < 2^*$ sempre que

$$r < \frac{\alpha 2^*}{\alpha s + 2^* - 2}.$$

Isto vale para $r > 1$ próximo a 1 porque

$$\frac{\alpha 2^*}{\alpha s + 2^* - 2} > \frac{\alpha 2^*}{\alpha[2^* - 1 - \frac{4}{\alpha(N-2)}] + \frac{4}{N-2}} > 1.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n}(K(x)|U|^s)^r\,\mathrm{d}x \leq C\|u\|_E^{rs}$$

para todo $2 \leq s < p^\#$ e $1 \leq r < \alpha$ próximo a 1.

Agora, aplicando a desigualdade de Hölder em (2.14) e usando (2.10) para $1 \leq r < \alpha$ próximo a 1 e $2 \leq s < p^\#$, concluímos que

$$\begin{aligned}\|\Psi\|_{2^*}^2 \leq & \beta^2CK^{p-q}\left[\int_{\mathbb{R}^n}K(x)^r\left(|U|^{2r}+|U|^{(q+1)r}\right)\mathrm{d}x\right]^{1/r}\left[\int_{\mathbb{R}^n}|U_L|^{2(\beta-1)r/(r-1)}\,\mathrm{d}x\right]^{(r-1)/r} \\ \leq & \beta^2CK^{p-q}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|U_L|^{2(\beta-1)r/(r-1)}\,\mathrm{d}x\right)^{(r-1)/r}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Assim, tomando
$$2-\frac{1}{r}<\beta<1+\frac{2^*}{2}\left(1-\frac{1}{r}\right)$$
e $\alpha^*>0$ tal que $\beta\alpha^*=2r(\beta-1)/(r-1)$, podemos expressar (2.15) como
$$\left[\int_{\mathbb{R}^N}\left(\sum_{i=1}^m u_i^2 u_{iL}^{2(\beta-1)}\right)^{2^*/2}\mathrm{d}x\right]^{2/2^*}\leq\beta^2 CK^{p-q}\|U\|_{\beta\alpha^*}^{2(\beta-1)}.$$
Usando o Lema de Fatou em L no primeiro termo, obtemos
$$\|U\|_{\beta 2^*}\leq\beta^{1/\beta}(CK^{p-q})^{1/2\beta}\|U\|_{\beta\alpha^*}^{(\beta-1)/\beta}. \tag{2.16}$$
Seja $\chi=2^*/\alpha^*$, isto é, $\beta\chi\alpha^*=\beta 2^*$. Então, para cada $m=0,1,2,\cdots$ definimos $\chi_{k+1}\alpha^*=\chi_k 2^*$, com $\chi_0=\chi$. Assim $\chi_k=\chi^{k+1}$. Agora, usamos a técnica de iteração de Moser [38] sobre a estimativa (2.16) para provar que cada solução do problema (T_K) é limitada. Com efeito, usando o argumento anterior para $\chi\beta$ e observando que
$$|U_L|^{\frac{2r(\chi\beta-1)}{r-1}}\leq M^{\frac{2r}{r-1}(\chi-1)}|U_L|^{\frac{2r\chi(\beta-1)}{r-1}},$$
pois $|U_L|\leq\sqrt{m}L=M$, segue que
$$\begin{aligned}\|U\|_{\chi\beta 2^*}\leq&(\chi\beta)^{\frac{1}{\chi\beta}}\left(CK^{p-q}\right)^{\frac{1}{2\chi\beta}}M^{\frac{\chi-1}{\chi\beta}}\|U\|_{\chi\beta\alpha^*}^{\gamma}\\ \leq&(\chi\beta)^{\frac{1}{\chi\beta}}\left(CK^{p-q}\right)^{\frac{1}{2\chi\beta}}M^{\frac{\chi-1}{\chi\beta}}\left[\beta^{\frac{1}{\beta}}\left(CK^{p-q}\right)^{\frac{1}{2\beta}}\|U\|_{\beta\alpha^*}^{\gamma}\right]^{\gamma}\\ \leq&\chi^{\frac{1}{\chi\beta}}\beta^{\frac{1}{\chi}+\gamma}\left(CK^{p-q}\right)^{\frac{1}{2\beta}\left(\frac{1}{\chi}+\gamma\right)}M^{\frac{\chi-1}{\chi\beta}}\|U\|_{\beta\alpha^*}^{\gamma^2},\end{aligned}$$
onde $\gamma=(\beta-1)/\beta$. Assim, para $k=n$ temos que
$$\|U\|_{\chi^{n+1}\beta\alpha^*}=\|U\|_{\chi^n\beta 2^*}\leq\chi^{\sigma_1}\beta^{\sigma_2}(CK^{p-q})^{\sigma_3}M^{\sigma_4}\|U\|_{\beta\alpha^*}^{\gamma^{n+1}},$$
onde
$$\begin{aligned}\sigma_1=&(1/\beta)\sum_{i=0}^{n-1}(n-i)\frac{\gamma^i}{\chi^{n-i}}, &\sigma_2=(1/\beta)\sum_{i=0}^{n}\frac{\gamma^i}{\chi^{n-i}},\\ \sigma_3=&(1/2\beta)\sum_{i=0}^{n}\frac{\gamma^i}{\chi^{n-i}}, &\sigma_4=(1/\beta)\sum_{i=0}^{n-1}\frac{\chi^{n-i}-1}{\chi^{n-i}}\gamma^i.\end{aligned}$$
Desde que $\gamma<1$ e $\chi>1$, as séries são convergentes e $\gamma^{n+1}\to 0$ quando $n\to+\infty$. Logo, podemos tomar o limite para concluirmos que $U\in L^\infty(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^m)$ com
$$\|U\|_\infty\leq\chi^{\sigma_1}\beta^{\sigma_2}(CK^{p-q})^{\sigma_3}M^{\sigma_4}.$$
Para escolhermos K_0, consideremos a desigualdade
$$\chi^{\sigma_1}\beta^{\sigma_2}[CK^{p-q}]^{\sigma_3}M^{\sigma_4}\leq K. \tag{2.17}$$
Desde que tomamos $\beta>1$ próximo a 1, o valor $\gamma=(\beta-1)/\beta$ pode ser feito arbitrariamente pequeno. Consequentemente, σ_3 pode ser feito suficientemente pequeno tal que $\sigma_3(p-q)<1$. Isto implica a existência de um $K_0>0$ tal que para todo $K>K_0$ temos (2.17) satisfeita. □

2.5 Prova do Teorema 2.1.2

Com o objetivo de provarmos o resultado de multiplicidade de soluções, estendemosa a função h como uma função impar de $[0,+\infty)$ em $(-\infty,0]$, isto é, $h(u)=-h(-u)$ para $u\leq 0$. Conforme visto antes na aplicação do Teorema do Passo da Montanha, as condições de crescimento (F_1)-(F_4) e hipóteses (A_1)-(A_4) sobre os potenciais implicam que o funcional I é de classe C^1, $I(0)=0$, satisfaz a condição de Palais-Smale e seus pontos críticos são soluções fracas de (P). Além disso, o argumento no Teorema 2.1.1 que mostrou que I satisfaz a geometria do passo da montanha permanece válido. Aplicando então o Teorema do Passo da Montanha Simétrico, obtemos uma sequência ilimitada de valores críticos de I.

CAPÍTULO 3

Sistemas elípticos em dimensão dois

3.1 Introdução

Neste capítulo consideramos uma classe de sistemas de equações de Schrödinger estacionárias da forma

$$-\Delta u_i + a_i(x)u_i = g_i(x)f_i(u_1,\cdots,u_m) + h_i(x), \quad x\in\mathbb{R}^2, \quad i=1,\cdots,m, \tag{P}$$

onde as funções $a_i, g_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ são contínuas com $f_i(0,\cdots,0) = 0$ e $h_i \in (H^1(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_*)^*$. Estamos interessados em encontrar soluções fracas não-triviais do problema (P) quando as não-linearidades f_i têm o crescimento máximo que permite tratar (P) variacionalmente no espaço de Sobolev $H_1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$. Consideramos a situação variacional em que

$$(g_1(x)f_1(U),\cdots,g_m(x)f_m(U)) = \nabla F(x,U)$$

para alguma função $F : \mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ de classe C^1, onde ∇F denota o gradiente de F nas variáveis $U = (u_1,\cdots,u_m) \in \mathbb{R}^m$. Objetivando uma analogia com o caso escalar, reescrevemos (P) na forma matricial como

$$-\Delta U + A(x)U = \nabla F(x,U) + H(x),$$

onde $\Delta = \operatorname{diag}(\Delta,\cdots,\Delta)$, $A(x) = \operatorname{diag}(a_1(x),\cdots,a_m(x))$ e $H(x) = (h_1(x),\cdots,h_m(x))$.

Mais uma vez, utilizaremos o mesmo ambiente variacional do capítulo anterior, a saber,

$$E = \left\{ U \in H^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m) : \int_{\mathbb{R}^n} A(x)U\cdot U\,\mathrm{d}x < +\infty \right\}.$$

As hipóteses básicas sobre os potenciais são listadas abaixo.

(A_1) Existe $D>0$ tal que $a_i(x) \geq -D$ para todo $x\in\mathbb{R}^2$ e $i=1,\cdots,m$.

Para assegurar o mergulho contínuo de E em $H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ assumimos a seguinte condição sobre o primeiro autovalor do operador $-\Delta + A(x)$:

(A_2) $\lambda_1 = \inf\limits_{U\in E\setminus\{0\}} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n}\left[|\nabla U|^2 + A(x)U\cdot U\right]\,\mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^n}|U|^2\,\mathrm{d}x} > 0.$

Agora, se $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ é aberto e $s\geq 2$, denotemos

$$\nu_s(\Omega) = \inf_{U\in H_0^1(\Omega,\mathbb{R}^m)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega\left[|\nabla U|^2 + A(x)U\cdot U\right]\,\mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |U|^s\,\mathrm{d}x\right)^{2/s}},$$

e colocamos $\nu_s(\emptyset) = +\infty$. Com o objetivo de obter um resultado de compacidade, consideraremos também as seguintes hipóteses:

(A_3) $\lim\limits_{R\to+\infty} \nu_s(\mathbb{R}^2\backslash\overline{B}_R) = +\infty.$

(A_4) Existem uma função $K(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$, com $K(x) \geq 1$, e constantes $\alpha > 1$, c_0, $R_0 > 0$ tais que

$$K(x) \leq c_0 \left[1 + \left(\min_{1\leq i\leq m}\{a_i^+(x)\}\right)^{1/\alpha}\right] \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0,$$

onde $a_i^+(x) = \max_{x\in\mathbb{R}^N}\{0, a_i(x)\}$ para $i = 1, \cdots, m$.

Com respeito as funções $g_i(x)$, assumimos que elas são contínuas, estritamente positivas e não são necessariamente limitadas em x proposto que seu crescimento seja controlado pelo crescimento de $A(x)$. Mais precisamente,

(F_1) Existem contantes $a_0, b_0 > 0$ tais que $a_0 \leq g_i(x) \leq b_0K(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $i = 1, \cdots, m$.

Além disso, suponhamos que as não-linearidades satifazem as seguintes condições:

(F_2) $|f_i(U)| = o(|U|)$ quando $U \to 0$ uniformemente em $x \in \mathbb{R}^2$ e $i = 1, \cdots, m$.

(F_3) Existe uma constante $\mu > 2$ tal que

$$0 < \mu F(x,U) \leq U \cdot \nabla F(x,U)$$

para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^m\backslash\{0\})$.

(F_4) Existem constantes $S_0, M_0 > 0$ tais que

$$0 < F(x,U) \leq M_0|\nabla F(x,U)|,$$

para todo $|U| \geq S_0$ uniformemente em $\mathbb{R}^2$.

Motivados por desigualdades tipo Trudinger–Moser (ver [39]), dizemos que uma função f tem *crescimento subcrítico* em $+\infty$ se para todo $\beta > 0$

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\beta s^2}} = 0 \tag{3.1}$$

e f tem *crescimento crítico* em $+\infty$ se existe $\beta_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{|f(s)|}{e^{\beta s^2}} = \begin{cases} 0 & \forall\, \beta > \beta_0, \\ +\infty & \forall\, \beta < \beta_0. \end{cases} \tag{3.2}$$

Agora estabeleceremos os principais resultados deste capítulo.

Teorema 3.1.1. *Suponhamos que as funções f_i têm crescimento subcrítico* e (A_1)–(A_4), (F_1)–(F_3) *são satisfeitas. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que (P) possui uma solução fraca não-trivial em E sempre que $0 \leq \|H\|_* < \delta_1$. Além disso, se $0 < \|H\|_* < \delta_1$, então (P) possui uma segunda solução fraca em E.*

Teorema 3.1.2. *Suponhamos que as funções f_i têm crescimento crítico e satisfazem (A_1)–(A_4), (F_1)–(F_4). Se, para algum $i \in \{1, \cdots, m\}$,*

(F_5) *existe $\eta > 0$ tal que $\lim\limits_{|U| \to +\infty} u_i f_i(U) e^{-2^{m-1}\beta_0 |U|^2} \geq \eta$, com $U = (u_1, \cdots, u_m) \in \mathbb{R}^m$,*

então existe $\delta_2 > 0$ tal que (P) possui uma solução fraca não-trivial em E sempre que $0 \leq \|H\|_* < \delta_2$. Além disso, se $0 < \|H\|_* < \delta_2$, então (P) possui uma segunda solução fraca em E.

Por outro lado, se $H(x)$ tem sinal definido no sentido que suas componentes são não-negativas ou não-positivas, então vale o seguinte resultado.

Teorema 3.1.3. *Sob as hipóteses dos Teoremas 3.1.1 ou 3.1.2, se $H(x) \geq 0$ $(H(x) \leq 0)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, então o problema (P) possui duas soluções não-negativas (não-positivas), respectivamente.*

Observação 3.1.4. *Precisamos assumir (F_3) em $\mathbb{R}^2 \times (\mathbb{R}^m \backslash \{0\})$ devido à não limitação em x da não-linearidade. Um exemplo típico de funções satisfazendo as hipóteses (F_1)–(F_4) é*

$$F(x,U) = \lambda g(x) |U|^2 e^{\gamma |U|^2},$$

com constantes $\lambda, \gamma > 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

3.2 Alguns resultados preliminares

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$. A desigualdade de Trudinger-Moser (ver [39], [53]) afirma que para todo $\beta > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega)$

$$e^{\beta u^2} \in L^1(\Omega).$$

Além disso, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|_{H_0^1(\Omega)} \leq 1} \int_\Omega e^{\beta u^2}\, dx \leq C|\Omega| \quad \text{se} \quad \beta < 4\pi.$$

Nesta seção usaremos a seguinte extensão desses resultados para todo o espaço $\mathbb{R}^2$ obtido por Cao [14] (ver também [29, 46]):

Lema 3.2.1. *Se $\beta > 0$ e $u \in H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta u^2} - 1)\, dx < +\infty. \tag{3.3}$$

Além disso, se $\|\nabla u\|_2^2 \leq 1$, $\|u\|_2 \leq M < +\infty$ e $\beta < 4\pi$, então existe uma constante $C = C(M,\beta) > 0$, que depende somente de M e β, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\beta u^2} - 1)\, dx \leq C(M,\beta). \tag{3.4}$$

Conforme visto no Capítulo 1 (ver Lema 1.2.1 e Proposição 1.2.4), nossa escolha do ambiente variacional E assegura o mergulho contínuo em $H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ com

$$\|U\|_E^2 \geq \zeta\|\nabla U\|_2^2, \tag{3.5}$$

e compacto em $L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ para todo $s \geq 2$.

Lema 3.2.2. *Seja $\beta > 0$ e $r \geq 1$. Então, para cada $\theta > r$, existe uma constante positiva $C = C(\theta)$ tal que, para todo $s \in \mathbb{R}$,*

$$(e^{\beta s^2}-1)^r \leq C(e^{\theta\beta s^2}-1). \tag{3.6}$$

Em particular, para $r \in [1,\alpha)$, temos que $K(x)(e^{\beta|U|^2}-1)$ pertence a $L^r(\mathbb{R}^2)$ para todo $U \in H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$.

Demonstração. Para a prova da desigualdade (3.6) ver [30, Lema 2.2]. A seguir, provamos a segunda afirmação do lema. Como $K(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^2)$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} K(x)^r \left(e^{\beta|U|^2}-1\right)^r \mathrm{d}x \leq & C_1 \int_{|x|\leq R} \left(e^{\beta|U|^2}-1\right)^r \mathrm{d}x + \int_{|x|>R} K(x)^r \left(e^{\beta|U|^2}-1\right)^r \mathrm{d}x \\ \leq & C_2 \int_{|x|\leq R} \left(e^{\theta\beta|U|^2}-1\right) \mathrm{d}x + C_3 \int_{|x|>R} K(x)^r \left(e^{\theta\beta|U|^2}-1\right) \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Desde que

$$(e^{\beta|U|^2}-1) \leq \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{i=1}^m \left(e^{2^{m-1}\beta u_i^2}-1\right), \tag{3.7}$$

segue do Lema 3.2.1 que o primeiro termo é integrável. Para estimar o outro termo, notemos que

$$\sum_{j=1}^\infty \frac{(\theta\beta)^j}{j!} \int_{|x|>R} K(x)^r|U|^{2j}\,\mathrm{d}x \leq \theta\beta \int_{|x|>R} K(x)^r|U|^2\,\mathrm{d}x + \sum_{j=2}^\infty \frac{(\theta\beta)^j}{j!} \int_{|x|>R} \left(K(x)^r|U|^2\right)^j \mathrm{d}x,$$

onde usamos o fato que $K(x) \geq 1$. Desde que $k(x) = K(x)^r|U(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^2)$, podemos usar a simetrização de Schwartz e o Lema Radial (ver [9, Lema A.IV]) para obtermos a seguinte estimativa:

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^\infty \frac{(\theta\beta)^j}{j!} \int_{|x|>R} K(x)^r|U|^{2j}\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \leq \theta\beta \int_{|x|>R} K(x)^r|U|^2\,\mathrm{d}x + \sum_{j=2}^\infty \frac{(\theta\beta)^j}{j!} \int_{|x|>R} |k^*(x)|^j\,\mathrm{d}x \\ &\qquad \leq \theta\beta \int_{|x|>R} K(x)^r|U|^2\,\mathrm{d}x + \sum_{j=2}^\infty \frac{1}{j!} \left(\frac{\theta\beta\|k(x)\|_1}{\pi^{1/2}}\right)^j \int_{|x|>R} |x|^{-2j}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Agora, usando mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\theta\beta)^j}{j!}\int_{|x|>R}K(x)^r|U|^{2j}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad\leq\theta\beta\int_{|x|>R}K(x)^r|U|^2\,\mathrm{d}x+2\pi\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{\theta\beta\|k(x)\|_1}{\pi^{1/2}}\right)^j\int_R^{\infty}s^{1-2j}\,\mathrm{d}s\\
&\qquad\leq\theta\beta\int_{|x|>R}K(x)^r|U|^2\,\mathrm{d}x+\pi R^2\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{\theta\beta\|k(x)\|_1}{\pi^{1/2}R^2}\right)^j.
\end{aligned}$$

Além disso, segue de (A_4) e desigualdade de Hölder que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}K(x)^r|U|^{2j}\,\mathrm{d}x\leq&C_4\|U\|_{2j}^{2j}+C_5\sum_{i=1}^{m}\int_{|x|>R_0}\left(a_i^+(x)\right)^{r/\alpha}|u_i|^{2j}\,\mathrm{d}x\\
\leq&C_4\|U\|_{2j}^{2j}+C_5\sum_{i=1}^{m}\left[\int_{|x|>R_0}a_i^+(x)|u_i|^2\,\mathrm{d}x\right]^{r/\alpha}\left[\int_{|x|>R_0}|u_i|^{\frac{2(j\alpha-r)}{\alpha-r}}\right]^{\frac{\alpha-r}{\alpha}}
\end{aligned}\tag{3.8}$$

para todo $j\geq 1$. A hipótese (A_1) agora mostra que

$$\int_{|x|>R}a_i^+(x)u_i^2\,\mathrm{d}x\leq\int_{\mathbb{R}^2}\left[a_i(x)u_i^2+Du_i^2\right]\,\mathrm{d}x.$$

Substituindo em (3.8) e usando (A_2) e mergulho contínuo $E\hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$, para todo $s\geq 2$, podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2}K(x)^r|U|^{2j}\,\mathrm{d}x\leq&C_6\|U\|_{2j}^{2j}+C_7\|U\|_E^{\frac{2r}{\alpha}}\|U\|_{\frac{2(j\alpha-r)}{\alpha-r}}^{\frac{2(j\alpha-r)}{\alpha}}\\
\leq&C_8\|U\|_E^{2j}.
\end{aligned}\tag{3.9}$$

Logo, o Teorema da Convergência Monótona implica que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2}K(x)^r\left(e^{\beta|U|^2}-1\right)^r\mathrm{d}x\\
&\quad\leq C_1\int_{|x|\leq R}\left(e^{\theta\beta|U|^2}-1\right)\mathrm{d}x+C_3\left[C\theta\beta\|U\|_E^2+\pi R^2\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{C\theta\beta\|U\|_E^2}{\pi^{1/2}R^2}\right)^j\right]\\
&\quad\leq C_1\int_{|x|\leq R}\left(e^{\theta\beta|U|^2}-1\right)\mathrm{d}x+C_3\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{C\theta\beta\|U\|_E^2}{\pi^{1/2}R^2}\right)^j\\
&\quad\leq C_1\int_{|x|\leq R}\left(e^{\theta\beta|U|^2}-1\right)\mathrm{d}x+C_3\left[e^{\left(\frac{C\theta\beta\|U\|_E^2}{\pi^{1/2}R^2}\right)}-1\right],
\end{aligned}\tag{3.10}$$

o que completa a prova. □

Corolário 3.2.3. *Se $U \in E$, $\beta > 0$, $q > 0$ e $\|U\|_E \leq M$ com $2^{m-1}\beta M^2 < 4\pi\zeta$, então existe $C = C(m,\beta,M,q,\zeta) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U|^q(e^{\beta|U|^2} - 1)\,\mathrm{d}x \leq C\|U\|_E^q.$$

Demonstração. Pela desigualdade de Hölder,

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U|^q \left(e^{\beta|U|^2} - 1\right) \mathrm{d}x \leq \|U\|_{qs}^q \left[\int_{\mathbb{R}^2} K(x)^r \left(e^{\beta|U|^2} - 1\right)^r \mathrm{d}x\right]^{1/r}, \tag{3.11}$$

onde tomamos $r > 1$ próximo a 1 e $s = r/(r-1)$. Agora, consideremos $\theta > r$ próximo a r tal que $2^{m-1}\theta\beta M^2 < 4\pi\zeta$. Por (3.7), (3.10) e Lema 3.2.1, temos que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U|^q \left(e^{\beta|U|^2} - 1\right) \mathrm{d}x \\
&\leq C_1 \left\{ \sum_{i=1}^m \int_{|x|\leq R} \left[e^{\frac{2^{m-1}\theta\beta M^2}{\zeta}\left(\frac{u_i}{\|\nabla U\|_2}\right)^2} - 1 \right] \mathrm{d}x + C_2 \left[e^{\left(\frac{C\theta\beta M^2}{\pi^{1/2}R^2}\right)} - 1 \right] \right\}^{1/r} \|U\|_{qs}^q \qquad (3.12) \\
&\leq C_3\|U\|_E^q.
\end{aligned}$$

□

O próximo resultado é uma extensão do Lema de Lion para todo $\mathbb{R}^2$. A demonstração é uma adaptação da prova dada em [30].

Lema 3.2.4. *Seja (W_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ com $\|W_n\|_{1,2} = 1$ e suponhamos que $W_n \rightharpoonup W_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ com $\|W_0\|_{1,2} < 1$. Então para todo $0 < p < \dfrac{4\pi}{2^{m-1}(1 - \|W_0\|_{1,2}^2)}$ temos*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{p|W_n|^2} - 1\right) dx < +\infty.$$

Demonstração. Desde que $W_n \rightharpoonup W_0$ e $\|W_n\|_{1,2} = 1$, concluímos que

$$\|W_n - W_0\|_{1,2}^2 = 1 - 2\langle W_n, W_0\rangle_E + \|W_0\|_{1,2}^2 \to 1 - \|W_0\|_{1,2}^2 < \frac{4\pi}{2^{m-1}p}.$$

Assim, para n suficientemente grande temos que $2^{m-1}p\|W_n - W_0\|_{1,2}^2 < \sigma < 4\pi$ para algum $\sigma > 0$. Agora, escolhendo $q > 1$ próximo a 1 e $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$2^{m-1}qp(1+\varepsilon^2)\|W_n - W_0\|_{1,2}^2 < \sigma,$$

segue por (3.7) e Lema 3.2.1 que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{qp(1+\varepsilon^2)|W_n - W_0|^2} - 1\right) \mathrm{d}x \leq \frac{1}{2^{m-1}} \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{2^{m-1}qp(1+\varepsilon^2)\|W_n - W_0\|_{1,2}^2\left(\frac{W_n^i - W_0^i}{\|W_n - W_0\|_{1,2}}\right)^2} - 1 \right) \mathrm{d}x \leq C.$$

Além disso, como $p|W_n|^2 \leq p(1+\varepsilon^2)|W_n - W_0|^2 + p(1+1/\varepsilon^2)|Z_0|^2$, temos que

$$\begin{aligned} e^{p|W_n|^2} - 1 \leq &\left(e^{p(1+\varepsilon^2)|W_n-W_0|^2} e^{p(1+1/\varepsilon^2)|W_0|^2} - 1\right) \\ \leq &\frac{1}{q}\left(e^{qp(1+\varepsilon^2)|W_n-W_0|^2} - 1\right) + \frac{1}{r}\left(e^{rp(1+1/\varepsilon^2)|W_0|^2} - 1\right), \end{aligned}$$

onde na última expressão usamos a desigualdade de Young

$$ab \leq \frac{a^q}{q} + \frac{b^r}{r},$$

com $a, b > 0$ e $1/q + 1/r = 1$. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{p|W_n|^2} - 1\right) \mathrm{d}x \leq \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{qp(1+\varepsilon^2)|W_n-W_0|^2} - 1\right) \mathrm{d}x + \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^2} \left(e^{rp(1+1/\varepsilon^2)|W_0|^2} - 1\right) \mathrm{d}x \leq C$$

para n suficientemente grande e o resultado está provado. □

O seguinte resultado, também provado em [30], fornece um tipo de recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Lema 3.2.5. *Seja (u_n) uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ fortemente convergente. Então existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $\ell \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $u_{n_k}(x) \to u(x)$ e $|u_{n_k}(x)| \leq \ell(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$.*

Com o objetivo de mostrarmos que o limite fraco de uma sequência em E é uma solução fraca de (P) usaremos o seguinte resultado, obtido em [25] por de Figueiredo et al.

Lema 3.2.6. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então para qualquer sequência $\{u_n\}$ em $L^1(\Omega)$ tal que $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$ com $f(u_n) \in L^1(\Omega)$ e $\int_\Omega |f(u_n)u_n| \,\mathrm{d}x \leq C$, temos $f(u_n) \to f(u)$ in $L^1(\Omega)$.*

3.3 A estrutura variacional

Agora consideramos o funcional associado ao problema (P) dado por

$$I(U) = \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,U)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot U\,\mathrm{d}x. \tag{3.13}$$

Sob nossas hipóteses temos que I é bem definido e de classe C^1 sobre E. De fato, por (F_1) e (F_2), dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $|\nabla F(x,U)| \leq \varepsilon K(x)|U|$ sempre que $|U| < \delta$. Por outro lado, para $\beta > 0$ (caso subcrítico) ou $\beta > \beta_0$ (caso crítico), temos que existe $C > 0$ tal que $|f_i(U)| \leq C(e^{\beta|U|^2} - 1)$ para todo $|U| \geq \delta$. Assim,

$$\begin{aligned} |\nabla F(x,U)| \leq &\sum_{i=1}^{m} g_i(x)|f_i(U)| \\ \leq &\varepsilon K(x)|U| + C_1 K(x)(e^{\beta|U|^2} - 1), \end{aligned} \tag{3.14}$$

para todo $(x,U) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^m$. Usando (F_3) e a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} |F(x,U)|\,\mathrm{d}x \leq& \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U|^2\,\mathrm{d}x + C_1 \int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U| \left(e^{\beta|U|^2}-1\right) \mathrm{d}x \\ \leq& \varepsilon \int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U|^2\,\mathrm{d}x + C_1\|U\|_s \left[\int_{\mathbb{R}^2} K(x)^r \left(e^{\beta|U|^2}-1\right)^r \mathrm{d}x\right]^{1/r},\end{aligned}$$

onde $r \in [1,\alpha)$ e $s = r/(r-1)$. Considerando o mergulho contínuo $E \hookrightarrow L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ para $s \geq 2$ e Lema 3.2.2, segue que $F(x,U) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ e, consequentemente, I está bem definido.

Na sequência, mostramos que o funcional I é de classe C^1 sobre E. Com efeito, fazendo $N(x,U) = \int_{\mathbb{R}^2} F(x,U)\,\mathrm{d}x$, temos pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\begin{aligned}\langle I'(U),V\rangle =& \langle U,V\rangle_E - \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[N(x,U+tV)-N(x,U)\right] - \int_{\mathbb{R}^2} H(x)\cdot V\,\mathrm{d}x \\ =& \langle U,V\rangle_E - \int_{\mathbb{R}^2} V\cdot\nabla F(x,U)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} H(x)\cdot V\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

para todo $V \in E$. Como $I'(U)$ é linear e limitada, basta mostrarmos que a derivada de Gáteaux de I é contínua. É claro que o primeiro e o último termo são C^1. Assim, resta provarmos que N é C^1. Seja $U_n \to U$ em E. Pelo Lema 3.2.5, existe uma subsequência U_{n_k} em E e $\ell(x) \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $U_{n_k}(x) \to U(x)$ e $|U_{n_k}(x)| \leq \ell(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Dado $V \in E$, definimos

$$G_{n_k}(x) = V(x)\cdot\nabla F(x,U_{n_k}(x)).$$

Então

$$G_{n_k}(x) \to G(x) = V(x)\cdot\nabla F(x,U(x))$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$ e desde que a expressão (3.14) fornece

$$|H_{n_k}| \leq K(x)|V|\ell(x) + K(x)|V|(e^{\beta\ell^2}-1),$$

segue que $H_{n_k}(x)$ é integrável. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mais uma vez, para concluirmos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} H_{n_k}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} H(x)\,\mathrm{d}x.$$

Logo, para cada $V \in E$ com $\|V\|_E = 1$, obtemos

$$\langle N'(U_{n_k}) - N'(U), V\rangle \leq \int_{\mathbb{R}^2} |V\cdot[\nabla F(x,U_{n_k}) - \nabla F(x,U)]\,\mathrm{d}x,$$

e daí

$$\lim_{k\to+\infty}\|N'(U_n) - N'(U)\|_{E'} = 0.$$

Isto completa a prova.

As condições geométricas do Teorema do Passo da Montanha para o funcional I são estabelecidas por nossos próximos dois lemas.

Lema 3.3.1. *Suponhamos que* (A_1)-(A_2), (A_4), (F_1)-(F_3) *valem e que as funções* f_i *tem crescimento subcrítico ou crítico para todo* $i = 1, \cdots, m$. *Então existe* $\delta_1 > 0$ *tal, que para cada* $H \in (H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m))^*$ *com* $\|H\|_* < \delta_1$, *existe* $\rho_H > 0$ *tal que*

$$I(U) > 0 \quad \textit{sempre que} \quad \|U\|_E = \rho_H.$$

Demonstração. Do mesmo modo que provamos (3.14) podemos ver que

$$|\nabla F(x,U)| \leq \varepsilon K(x)|U| + C_1 K(x)|U|^{q-1}(e^{\beta|U|^2} - 1) \tag{3.15}$$

com $q > 2$. Assim, usando (F_3) e o mergulho contínuo de E em $L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ temos que

$$I(U) \geq \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \|U\|_E^2 - C_1 \int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U|^q \left(e^{\beta|U|^2} - 1\right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot U \, \mathrm{d}x.$$

Desde que $2^{m-1}\beta\sigma^2 < 4\pi\zeta$ se $\|U\|_E < \sigma$ é suficientemente pequeno, aplicamos o Corolário 3.2.3 para concluirmos que existe $\rho_H > 0$ tal que $I(u) > 0$ sempre que $\|U\|_E = \rho_H$ e $\|H\|_*$ é suficientemente pequeno. De fato, ρ_H satisfaz a desigualdade

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right) \rho_H - C_1 \rho_H^{q-1} - \|H\|_* > 0$$

e notamos que podemos tomar ρ_H suficientemente pequeno quando $\|H\|_* \to 0$. □

Lema 3.3.2. *Suponhamos que* (F_1) e (F_3) *valem e as funções* f_i *satisfazem* (3.1) *(ou* (3.2)*). Então existe* $e \in E$ *com* $\|e\|_E > \rho_H$ *tal que*

$$I(e) < \inf_{\|U\| = \rho_H} I(U).$$

Demonstração. Como na prova do Teorema 1.1.1, fazemos uso da representação em coordenadas polares na hipótese (F_3) para encontrarmos que

$$F(x,U) \geq \left(\min_{|W|=1} F(x,W)\right) |U|^\mu > 0 \tag{3.16}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $|U| \geq 1$. Assim, para todo $U \in E \backslash \{0\}$ com suporte compacto e $|U| \geq 1$, temos que

$$F(x,U) \geq C|U|^\mu. \tag{3.17}$$

Logo, denotando $K = \mathrm{supp}(U)$ e usando (F_1), obtemos que

$$I(tU) \leq \frac{t^2}{2}\|U\|_E^2 - Ct^\mu \int_K |U|^\mu \, \mathrm{d}x - t \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot U \, \mathrm{d}x$$

para todo $t > 0$ e desde que $\mu > 2$, seque que $I(tU) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Portanto, $e = tU$ com t suficientemente grande satisfaz o lema. □

Com o objetivo de encontrar uma bola apropriada para usarmos argumentos de minimização, necessitamos do seguinte resultado cuja prova é dada em [30].

Lema 3.3.3. *Se as funções f_i satisfazem (3.1) (ou (3.2)), então existem $\gamma > 0$ e $V \in E$ com $\|V\|_E = 1$ tais que $I(tV) < 0$ para todo $0 < t < \gamma$. Em particular,*

$$\inf_{\|U\| \leq \gamma} I(U) < 0.$$

Lema 3.3.4. *Suponhamos que (F_3) vale e f_i satisfaz (3.1) (ou (3.2)) para todo $i = 1, \cdots, m$. Então, qualquer sequência de Palais-Smale para I é limitada em E.*

Demonstração. Seja $(U_n) \subset E$ uma sequência tal que $I(U_n) \to c$ e $I'(U_n) \to 0$, isto é, para qualquer $W \in E$,

$$\frac{1}{2}\|U_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} F(x, U_n)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot U_n\,\mathrm{d}x = c + \delta_n \tag{3.18}$$

e

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} [\nabla U_n \cdot \nabla W + A(x) U_n \cdot W]\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} W \cdot \nabla F(x, U_n)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot W\,\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon_n \|W\|_E, \tag{3.19}$$

onde $\delta_n \to 0$ e $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Tomando $W = -U_n$ em (3.19) e usando (F_3), obtemos que

$$\begin{aligned} \mu(c + \delta_n) + \varepsilon_n \|U_n\|_E + (\mu - 1) \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot U_n\,\mathrm{d}x & \\ \geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \|U_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} [\mu F(x, U_n) - U_n \cdot \nabla F(x, U_n)]\,\mathrm{d}x & \\ \geq \left(\frac{\mu}{2} - 1\right) \|U_n\|_E^2. & \end{aligned}$$

Assim, $\|U_n\|_E \leq C$. Agora, por (3.18) e (3.19) segue que

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x, U_n)\,\mathrm{d}x \leq C \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} U_n \cdot \nabla F(x, U_n)\,\mathrm{d}x \leq C.$$

□

Logo, a menos de subsequência, temos que $U_n \rightharpoonup U$ fracamente em E, $U_n \to U$ em $L^s(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ para todo $s \geq 2$ e $U_n(x) \to U(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. De acordo com o Lema 3.2.6, temos

$$f_i(U_n) \to f_i(U) \quad \text{em} \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

para todo $i = 1, \cdots, m$. Passando o limite em (3.19), vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla U \cdot \nabla W + A(x) U \cdot W]\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} W \cdot \nabla F(x, U)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot W\,\mathrm{d}x,$$

para todo $W \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$. Como $C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ é denso em E, concluímos que U é uma solução fraca de (P). É imediato ver que se $H \not\equiv 0$ então U é não-trivial.

Lema 3.3.5. *Suponhamos que as funções f_i têm crescimento crítico e satisfazem (F_4). Se $(U_n) \subset E$ é uma sequência de Palais-Smale para I e U_0 é seu limite fraco, então*

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |F(x,U_n) - F(x,U_0)| \, \mathrm{d}x = 0.$$

Demonstração. Pelo Lema 3.2.6 temos que $f_i(U_n) \to f_i(U_0)$ em $L^1(B_R)$, para todo $R > 0$ e cada $i \in \{1, \cdots, m\}$. Assim, pelo recíproco do Teorema de Lebesgue, existe $p_i(x) \in L^1(B_R)$ tal que $f_i(U_n(x)) \leq p_i(x)$ quase sempre em B_R. Seja

$$\Omega = \{x \in B_R : |U_n(x)| \leq S_0, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\}.$$

Então, (F_1) e (F_4) mostram que

$$\begin{aligned} F(x,U_n(x)) &\leq \sup_{\Omega} F(x,U_n(x)) + M_0 |\nabla F(x,U)| \\ &\leq \sup_{\Omega} F(x,U_n(x)) + CM_0 \sum_{i=1}^{m} p_i(x) \end{aligned}$$

quase sempre em B_R. Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue obtemos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{B_R} |F(x,U_n) - F(x,U_0)| \, \mathrm{d}x = 0.$$

Para estimar a convergência em $\mathbb{R}^2 \backslash B_R$, notemos que (3.14) e (F_3) implicam que

$$\int_{|x|>R} |F(x,U_n)| \, \mathrm{d}x = C_1 \int_{|x|>R} K(x)|U_n|^2 \, \mathrm{d}x + C_2 \int_{|x|>R} K(x)|U_n| \left(e^{\beta|U_n|^2} - 1\right) \mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e usando a equação (3.10) sobre $\mathbb{R}^2 \backslash B_R$, temos que

$$\begin{aligned} \int_{|x|>R} K(x)|U_n| \left(e^{\beta|U_n|^2} - 1\right) \mathrm{d}x &\leq C_2 \|U_n\|_s \left[\int_{|x|>R} K(x)^r \left(e^{\beta|U_n|^2} - 1\right)^r \mathrm{d}x\right]^{1/r} \\ &\leq C_3 \|U_n\|_s \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{C\theta\beta\|U_n\|_E^2}{\pi^{1/2}R^2}\right)^j, \end{aligned}$$

onde $r \in [1, \alpha)$ e $s = r/(r-1)$. Do Lema 3.3.4, vemos que (U_n) é limitada em E, e assim

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{C\theta\beta\|U_n\|_E^2}{\pi^{1/2}R^2}\right)^j \leq C.$$

Logo, pelo Lema de Brezis-Lieb (ver [55], Lema 1.32) e a compacidade do mergulho $E \hookrightarrow L^p_{K(x)}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ para $p \geq 2$, dado $\delta > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$\int_{|x|>R} K(x)|U_n|^p \, \mathrm{d}x < \delta.$$

Por (3.20) concluímos que

$$\int_{|x|>R} |F(x,U_n)|\,\mathrm{d}x \leq C\delta \quad \text{and} \quad \int_{|x|>R} |F(x,U_0)|\infty\,\mathrm{d}x \leq C\delta.$$

Desde que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} [F(x,U_n)-F(x,U_0)]\,\mathrm{d}x\right| \leq & \left|\int_{B_R} [F(x,U_n)-F(x,U_0)]\,\mathrm{d}x\right| \\ & + \int_{|x|>R} |F(x,U_n)|\,\mathrm{d}x + \int_{|x|>R} |F(x,U_0)|\,\mathrm{d}x \\ \leq & C\delta,\end{aligned}$$

e δ é arbitrário, o lema está provado. □

3.4 Prova do Teorema 3.1.1

Usaremos o Teorema do Passo da Montanha para obtermos uma solução não-trivial do problema (P). Seja $(U_n) \subset E$ tal que $I(U_n) \to c_M$ e $I'(U_n) \to 0$ em E'. Desde que

$$\|U_n - U\|_E^2 = \langle I'(U_n) - I'(U), U_n - U\rangle + \int_{\mathbb{R}^2} (U_n - U)\cdot[\nabla F(x,U_n) - \nabla F(x,U)]\,\mathrm{d}x,$$

temos que a condição de Palais-Smale é satisfeita se

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (U_n - U)\cdot[\nabla F(x,U_n) - \nabla F(x,U)]\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por (3.14) e desigualdade de Hölder, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} & |\nabla F(x,U_n) - \nabla F(x,U_0)|\,|U_n - U|\,\mathrm{d}x \\ \leq & C_1 \int_{\mathbb{R}^2} K(x)(|U_n|+|U|)|U_n - U|\,\mathrm{d}x \\ & + C_2 \int_{\mathbb{R}^2} K(x)\left[\left(e^{\beta|U_n|^2}-1\right)+\left(e^{\beta|U|^2}-1\right)\right]|U_n - U|\,\mathrm{d}x \\ \leq & C_1 \int_{\mathbb{R}^2} K(x)(|U_n|+|U|)|U_n - U|\,\mathrm{d}x \\ & + C_3\|U_n - U\|_s \left\{\int_{\mathbb{R}^2} K(x)^r\left[\left(e^{\beta|U_n|^2}-1\right)^r+\left(e^{\beta|U|^2}-1\right)^r\right]\mathrm{d}x\right\}^{1/r},\end{aligned}$$

com $r > 1$ próximo a 1 e $s = r/(r-1)$. Desde que cada função f_i tem crescimento subcrítico e $E \hookrightarrow L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^2)$ é compacto para $s \geq 2$, o segundo termo na desigualdade acima converge para zero.

Agora, para estimarmos o outro termo usamos a desigualdade de Höder e a equação (1.8) no Lema 1.2.2, de forma que

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2} K(x)(|U_n|+|U|)|U_n-U|\,\mathrm{d}x\\
&\qquad \leq \left[\left(\int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}+\left(\int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\right]\left(\int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U_n-U|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\
&\qquad \leq C_1\left\{\|U_n-U\|_2^2+C_2\|U_n-U\|_E^{2/\alpha}\|U_n-U\|_2^{2(\alpha-1)/\alpha}\right\}^{1/2},
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que (U_n) é limitada em E (ver Lema 3.3.4). Assim, segue do mergulho compacto de E em $L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ que

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x)(|U_n|+|U|)|U_n-U|\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to+\infty.$$

Logo, as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha são satisfeitas e, em consequência, o funcional I tem um ponto crítico U_M no nível minimax

$$\begin{aligned}
c_M &= \inf_{\varphi\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} I(\varphi(t)) \quad \text{e}\\
\Gamma &= \{\varphi\in C([0,1],\mathbb{R}^m) : \varphi(0)=0,\ I(\varphi(1))<0\}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $H\not\equiv 0$, então obtemos uma segunda solução de (P) com energia negativa. Com efeito, seja ρ_H como no Lema 3.3.1. Desde que $\overline{B}_{\rho_H}$ é um espaço métrico completo e convexo com a métrica dada pela norma de E e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente sobre $\overline{B}_{\rho_H}$, segue pelo Princípio Variacional de Ekeland que existe uma sequência (U_n) em $\overline{B}_{\rho_H}$ tal que

$$I(U_n)\to c_0=\inf_{\|U\|\leq\rho_h} I(U) \ \text{ e } \ \|I'(U_n)\|_{E'}\to 0. \tag{3.21}$$

Agora aplicamos o argumento acima outra vez para concluirmos que o problema (P) possui uma solução U_0 tal que $I(U_0)=c_0<0$.

3.5 Prova do Teorema 3.1.2

Nesta seção assumimos que as funções f_i têm crescimento crítico. Para obtermos uma informação mais precisa sobre o nível minimax obtido pelo Teorema do Passo da Montanha, vamos considerar a seguinte sequência de funções, também consideradas por Moser (ver [39]):

$$\widetilde{M}_n(x,r)=(2\pi)^{-\frac{1}{2}}\begin{cases}(\log(n))^{1/2}, & \text{se} \quad |x|\leq r/n\\ \dfrac{\log\left(\frac{r}{|x|}\right)}{(\log(n))^{1/2}}, & \text{se} \quad r/n\leq|x|\leq r\\ 0, & \text{se} \quad |x|\geq r.\end{cases}$$

Notemos que $\widetilde{M}_n(\cdot,r) \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $supp(\widetilde{M}_n(x,r)) = \overline{B}_r$,

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \widetilde{M}_n(x,r)|^2\, dx = 1 \quad \text{e} \\ &\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} |\widetilde{M}_n(x,r)|^2\, dx = 0. \end{aligned} \tag{3.22}$$

Além disso, considerando $M_n(x,r) = (\widetilde{M}_n(x,r),0,\cdots,0)/\|(\widetilde{M}_n(x,r),0,\cdots,0)\|_E$, podemos escrever

$$\begin{aligned} |M_n(x,r)|^2 =& \frac{\log(n)}{2\pi} + \frac{\log(n)}{2\pi}\left(\frac{1}{\|(\widetilde{M}_n(x,r),0,\cdots,0)\|_E} - 1\right) \\ =& \frac{\log(n)}{2\pi} + d_n \end{aligned}$$

para todo $|x| \leq r/n$. Usando (3.22), concluímos que

$$\frac{d_n}{\log(n)} \to 0 \ \text{ quando } \ n \to +\infty. \tag{3.23}$$

Assumiremos o seguinte resultado que será provado posteriormente.

Lema 3.5.1. *Suponhamos que* (A_1)-(A_4) *e* (F_1)-(F_3) *valem. Então*

$$\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,tM_n)\,\mathrm{d}x\right\} < \frac{2\pi}{2^{m-1}\beta_0}.$$

Observação 3.5.2. *Segue imediatamente que se* $\|H\|_*$ *é suficientemente pequena, então*

$$\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2} - \int_{\mathbb{R}^2} F(x,tM_n)\,\mathrm{d}x - t\int_{\mathbb{R}^2} H(x)\cdot M_n\,\mathrm{d}x\right\} < \frac{2\pi}{2^{m-1}\beta_0}.$$

Em vista dos lemas 3.3.1 e 3.3.3 podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale para obtermos uma sequência $(U_n) \subset E$ tal que $I(U_n) \to c_M > 0$ e $I'(U_n) \to 0$ onde c_M é o nível do passo da montanha. Pelo Lema 3.3.4, (U_n) é limitada e converge fracamente em E para uma solução fraca U_M do problema (P). Vamos mostrar que U_M é não-trivial também no caso $H \equiv 0$. Suponhamos, por contradição, que $U_M \equiv 0$. Desde que o Lema 3.3.5 fornece

$$\int_{\mathbb{R}^2} F(x,U_n)\,\mathrm{d}x \to 0$$

quando $n \to +\infty$, concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \|U_n\|_E^2 = \lim_{n\to+\infty} 2\left(c_M + \int_{\mathbb{R}^2} F(x,U_n)\,\mathrm{d}x\right) = 2c_M. \tag{3.24}$$

Agora, como $U_n \to 0$ em $L^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ temos por (A_1) que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\|\nabla U_n\|_2^2 \leq &\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\mathbb{R}^2}[|\nabla U_n|^2 + A^+(x)U_n\cdot U_n]\,\mathrm{d}x - D\|U_n\|_2^2\right)\\ \leq &\lim_{n\to+\infty}\|U_n\|_E^2\\ =&2c_M.\end{aligned}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, temos $\|\nabla U_n\|_2^2 \leq 2c_M + \varepsilon$ para n suficientemente grande. Pelo Lema 3.5.1, o nível c_M é menor que $2\pi/2^{m-1}\beta_0$ e podemos tomar $\beta > \beta_0$ tal que $c_M < 2\pi/2^{m-1}\beta$. Consequentemente,

$$2^{m-1}\beta\|\nabla U_n\|_2^2 < 4\pi$$

para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e n grande. Afirmamos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}U_n\cdot\nabla F(x,U_n)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Com efeito, usando a expressão (3.14), hipótese (F_1) e a desigualdade de Hölder temos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}U_n\cdot\nabla F(x,U_n)\,\mathrm{d}x \leq &C\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}K(x)|U_n|^q\left(e^{\beta|U_n|^2}-1\right)\mathrm{d}x\\ \leq &C\lim_{n\to+\infty}\|U_n\|_{qs}^q\left[\int_{\mathbb{R}^2}K(x)^r\left(e^{\beta|U_n|^2}-1\right)^r\mathrm{d}x\right]^{1/r}\end{aligned}$$

com $r > 1$ próximo a 1 e $s = r/(r-1)$. Seja $\theta > r$ próximo a r tal que

$$2^{m-1}\theta\beta\|\nabla U_n\|_2^2 < 4\pi.$$

Assim, usando a mesma argumentação da prova do Lema 3.2.2 vemos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}K(x)^r\left(e^{\beta|U_n|^2}-1\right)^r\mathrm{d}x\\ &\leq C_1\sum_{i=1}^m\int_{|x|\leq R}\left(e^{2^{m-1}\theta\beta\|\nabla U_n\|_2^2\left(\frac{u_n^i}{\|\nabla U_n\|_2}\right)^2}-1\right)\mathrm{d}x + C_2\left[\left(\frac{C\theta\beta\|U_n\|_E^2}{\pi^{1/2}R^2}\right)-1\right]\\ &\leq C_3.\end{aligned}\tag{3.25}$$

Logo,

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}U_n\cdot\nabla F(x,U_n)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Mas, como $I'(U_n)\to 0$, obtemos que $\|U_n\|_E \to 0$, o que contradiz (3.24) pois $c_M > 0$. Assim, U_M é não-trivial e a prova está completa.

Agora, provaremos que para cada $H \in (H^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m))^*$ com $0 < \|H\|_* < \delta_1$, podemos encontrar uma segunda solução tipo mínimo U_0 de (P) com $I(U_0) = c_0 < 0$, onde c_0 é definido em (3.21). Com efeito, tomando ρ_H como no Lema 3.3.1, podemos escolher $\delta_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$\rho_H < (\pi\zeta/2^{m-3}\beta_0)^{1/2},$$

onde ζ é dado por (3.5). Desde que $\overline{B}_{\rho_H}$ é um espaço métrico completo convexo com métrica dada pela norma de E e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente sobre $\overline{B}_{\rho_H}$, segue pelo Pricípio Variacional de Ekeland que existe uma sequência (U_n) em $\overline{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(U_n) \to c_0 = \inf_{\|U\| \leq \rho_H} I(U) \ \text{ e } \ \|I'(U_n)\|_{E'} \to 0.$$

Como

$$\|U_n\|_E^2 \leq \rho_H^2 < \pi\zeta/2^{m-3}\beta_0,$$

o lema abaixo implica que existe uma subsequência de (U_n) que converge fortemente para uma solução U_0 de (P). Portanto, $I(U_0) = c_0 < 0$.

Lema 3.5.3. *Se (U_n) é uma sequência de Palais-Smale para I em qualquer nível com*

$$\liminf_{n\to+\infty} \|U_n\|_E^2 < \frac{\pi}{2^{m-3}\beta_0}\zeta,$$

então (U_n) possui uma subsequência que converge fortemente para uma solução U_0 de (P).

Demonstração. Desde que $\|U_n\|_E$ é limitada, a menos de subsequência, podemos assumir que

$$\liminf_{n\to+\infty} \|U_n\|_E = \lim_{n\to+\infty} \|U_n\|_E.$$

Pelo Lema 3.3.4 temos que $U_n \rightharpoonup U_0$ fracamente em E, onde U_0 é uma solução de (P). Escrevendo $U_n = U_0 + W_n$, segue que $W_n \rightharpoonup 0$ em E e

$$\|U_n\|_E^2 = \|U_0\|_E^2 + \|W_n\|_E^2 + o_n(1). \tag{3.26}$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} U_0 \cdot \nabla F(x, U_n)\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^2} U_0 \cdot \nabla F(U_0)\,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to +\infty. \tag{3.27}$$

De fato, desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ é denso em E, para todo $\tau > 0$ existe $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ tal que $\|V - U_0\|_E < \tau$. Observando que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} U_0 \cdot [\nabla F(x, U_n) - \nabla F(x, U_0)]\,\mathrm{d}x\right| \leq & \left|\int_{\mathbb{R}^2} (U_0 - V) \cdot \nabla F(x, U_n)\,\mathrm{d}x\right| \\ & + \|V\|_\infty \int_{\mathrm{supp}(V)} |\nabla F(x, U_n) - \nabla F(x, U_0)|\,\mathrm{d}x \\ & + \left|\int_{\mathbb{R}^2} (U_0 - V) \cdot \nabla F(x, U_0)\,\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

e usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz e o fato que $|\langle I'(U_n), U_0 - V\rangle| \leq \varepsilon_n \|U_0 - V\|_E$ com $\|\varepsilon_n\| \to 0$, concluímos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2} (U_0 - V) \cdot \nabla F(x, U_n)\,\mathrm{d}x\right| & \leq \varepsilon_n \|U_0 - V\|_E + \|U_n\|_E \|U_0 - V\|_E + \|H\|_* \|U_0 - V\|_E \\ & \leq C\|U_0 - V\|_E < C\tau,\end{aligned}$$

onde C é independente de n e τ. Analogamente, usando que $\langle I'(U_0), U_0 - V\rangle = 0$, temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} (U_0 - V)\cdot\nabla F(x,U_0)\,\mathrm{d}x\right| < C\tau.$$

Desde que $f_i(U_n) \to f_i(U_0)$ em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^m)$, segue por (F_1) que

$$\int_{\mathrm{supp}(V)} |\nabla F(x,U_n) - \nabla F(x,U_0)|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq C\sum_{i=1}^{m}\int_{\mathrm{supp}(V)} |f_i(U_n) - f_i(U_0)|\,\mathrm{d}x \to 0$$

quando $n \to +\infty$. Assim,

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^2} U_0\cdot[\nabla F(x,U_n) - \nabla F(x,U_0)]\,\mathrm{d}x\right| < 2C\tau$$

o que implica (3.27) porque τ é arbitrário.

De (3.26) e (3.27), podemos escrever

$$\langle I'(U_n), U_n\rangle = \langle I'(U_0), U_0\rangle + \|W_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} W_n\cdot\nabla F(x,U_n)\,\mathrm{d}x + o_n(1),$$

isto é,

$$\|W_n\|_E^2 = \int_{\mathbb{R}^2} W_n\cdot\nabla F(x,U_n)\,\mathrm{d}x + o_n(1). \tag{3.28}$$

Por (3.14), temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2} W_n\cdot\nabla F(x,U_n)\,\mathrm{d}x\right| \leq C_1\int_{\mathbb{R}^2} K(x)|U_n||W_n|\,\mathrm{d}x + C_2\int_{\mathbb{R}^2} K(x)(e^{\beta|U_n|^2} - 1)|W_n|\,\mathrm{d}x.$$

Como na prova do caso subcrítico, verificamos que a primeira integral converge para zero em $L^1(\mathbb{R}^2)$. Para estimar a segunda integral, usamos a desigualdade de Hölder tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} K(x)\left(e^{\beta|U_n|^2} - 1\right)|W_n|\,\mathrm{d}x$$
$$\leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} K(x)^r\left(e^{\beta|U_n|^2} - 1\right)^r\mathrm{d}x\right]^{1/r}\|W_n\|_s$$
$$\leq C_1\left\{\sum_{i=1}^{m}\int_{|x|\leq R}\left[e^{\frac{2^{m-1}\theta\beta\|U_n\|_E^2}{\zeta}\left(\frac{\zeta^{1/2}u_n^i}{\|U_n\|_E}\right)^2} - 1\right]\mathrm{d}x\right.$$
$$\left.+\, C_2\left[\int_{|x|>R} K(x)^r\left(e^{\beta_0|U_n|^2} - 1\right)^r\mathrm{d}x\right]\right\}^{1/r}\|W_n\|_s,$$

onde $r > 1$ próximo a 1, $s = r/(r-1)$ e escolhemos $\theta > r$ próximo a r tal que $2^{m-1}\theta\beta\|U_n\|_E^2 < 4\pi\zeta$. Pelo mergulho compacto $E \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ para $t \geq 2$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} W_n\cdot\nabla F(x,U_n)\,dx \to 0.$$

Isto, junto com (3.28), implica que $\|W_n\|_E \to 0$ e o resultado segue. □

Agora, mostraremos que as soluções U_0 e U_M são distintas.

Proposição 3.5.4. *As soluções U_0 e U_M do problema (P) obtidas anteriormente são distintas.*

Demonstração. Suponhamos por contradição que $U_0 \equiv U_M$. Provamos anteriormente que existem subsequências (U_n) e (V_n) em E tais que

$$U_n \to U_0, \quad I(U_n) \to c_0 < 0, \quad \langle I'(U_n), U_n \rangle \to 0, \tag{3.29}$$

e

$$V_n \rightharpoonup U_M, \quad I(V_n) \to c_M > 0, \quad \langle I'(V_n), V_n \rangle \to 0. \tag{3.30}$$

Fazendo

$$W_n = \frac{V_n}{\|V_n\|_{1,2}} \quad \text{e} \quad W_0 = \frac{U_0}{\lim_{n\to+\infty} \|V_n\|_{1,2}},$$

obtemos $\|W_n\|_{1,2} = 1$ e $W_n \rightharpoonup W_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$. Desde que a norma é uma função semicontínua inferiormente com respeito à convergência fraca, segue que $\lim_{n\to+\infty} \|V_n\|_{1,2} \geq \|U_0\|_{1.2} > 0$. Assim, temos duas possibilidades:

$$(i) \|W_0\|_{1,2} = 1 \quad \text{ou} \quad (ii) \|W_0\|_{1,2} < 1.$$

Se (i) acontece, então $\lim\limits_{n\to+\infty} \|V_n\|_{1,2} = \|U_0\|_{1,2}$ e, consequentemente, $V_n \to U_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$. Pelo Lema 3.2.5, existe $\ell \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $|V_n(x)| \leq \ell(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Por (3.14) temos que

$$|V_n \cdot \nabla F(x, V_n)| \leq C_1 K(x) |\ell|^2 + C_2 K(x) |\ell| (e^{\beta \ell^2} - 1)$$

quase sempre em $\mathbb{R}^2$ o qual é integrável. Então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} V_n \cdot \nabla F(x, V_n)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} U_0 \cdot \nabla F(x, U_0)\, \mathrm{d}x.$$

Analogamente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} U_n \cdot \nabla F(x, U_n)\, dx \to \int_{\mathbb{R}^2} U_0 \cdot \nabla F(x, U_0)\, \mathrm{d}x,$$

proposto que $U_n \to U_0$ em E. Desde que

$$\langle I'(U_n), U_n \rangle = \|U_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} U_n \cdot \nabla F(x, U_n)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot U_n\, \mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\langle I'(V_n), V_n \rangle = \|V_n\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2} V_n \cdot \nabla F(x, V_n)\, dx - \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot V_n\, dx \to 0,$$

concluímos que

$$\lim_{n\to+\infty} \|V_n\|_E^2 = \lim_{n\to+\infty} \|U_n\|_E^2 = \|U_0\|_E^2.$$

Logo, $I(V_n) \to I(U_0) = c_0$ e isto é uma contradição com (3.29)–(3.30).

Agora, suponhamos que (ii) acontece. Desde que podemos tomar $\rho_H \to 0$ quando $\|H\|_* \to 0$, temos que $c_0 \to 0$ quando $\|H\|_* \to 0$. Assim, existe $\delta_2 > 0$ tal que, se $0 < \|H\|_* < \delta_2$, então

$$\max_{t \geq 0} I(tM_n) < c_0 + \frac{\pi}{2^{m-2}\beta_0}.$$

Portanto,

$$2^{m-1}\beta_0 < \frac{2\pi}{c_M - I(U_0)}$$

e podemos escolher $q > 1$ suficientemente próximo a 1 tal que

$$2^{m-1}q\beta_0\|V_n\|_{1,2}^2 \leq \frac{2\pi}{c_M - I(U_0)}\|V_n\|_{1,2}^2 - \widetilde{\delta} \tag{3.31}$$

para algum $\widetilde{\delta} > 0$. Desde que $V_n \rightharpoonup U_0$, segue do Lema 3.3.5 e do mergulho compacto $E \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}\|V_n\|_{1,2}^2(1 - \|W_0\|_{1,2}^2) =& \frac{1}{2}\lim_{n\to+\infty}(\|V_n\|_{1,2}^2 - \|U_0\|_{1,2}^2) \\
\leq& c_M - I(U_0) - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}[A(x)V_n \cdot V_n - A(x)U_0 \cdot U_0]\,\mathrm{d}x \\
\leq& c_M - I(U_0),
\end{aligned}$$

onde usamos o fato que

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2} A(x)V_n \cdot V_n\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2} A^+(x)V_n \cdot V_n\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} A^-(x)V_n \cdot V_n\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^2} A^+(x)U_0 \cdot U_0\,\mathrm{d}x \\
&\geq \int_{\mathbb{R}^2} A(x)U_0 \cdot U_0\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

segundo o Lema de Fatou. Assim, para n suficientemente grande temos

$$2^{m-1}q\beta_0\|V_n\|_{1,2}^2 \leq \frac{4\pi}{1 - \|W_0\|_{1,2}^2} - \delta$$

para algum $\delta > 0$. Logo, tomando $p = (q+\varepsilon)\beta_0\|V_n\|_{1,2}^2$ no Lema 3.2.4, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}(e^{(q+\varepsilon)\beta_0\|V_n\|_{1,2}^2|W_n|^2} - 1)dx \leq C \tag{3.32}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Agora, usando (3.14) e a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2}(V_n-U_0)\cdot\nabla F(x,V_n)\,dx\right| \leq & C_1\int_{\mathbb{R}^2}K(x)|V_n||V_n-U_0|\,\mathrm{d}x\\ & +C_2\int_{\mathbb{R}^2}K(x)|V_n-U_0|(e^{\beta_0\|V_n\|_{1,2}^2|W_n|^2}-1)\,\mathrm{d}x\\ \leq & C_1\left(\int_{\mathbb{R}^2}K(x)|V_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{\mathbb{R}^2}K(x)|V_n-U_0|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\ & +C_2\|V_n-U_0\|_{q'}\left[\int_{\mathbb{R}^2}K(x)^q\left(e^{\beta_0\|V_n\|_{1,2}^2|W_n|^2}-1\right)^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}.\end{aligned}$$

Por (3.32) e (3.9) obtemos

$$\begin{aligned}&\left|\int_{\mathbb{R}^2}(V_n-U_0)\cdot\ \nabla F(x,V_n)\,dx\right|\\ &\leq C_3\|V_n-U_0\|_2^2+C_4\|V_n-U_0\|_E^{\frac{2r}{\alpha}}\|V_n-U_0\|_2^{\frac{2(\alpha-r)}{\alpha}}+C_5\|V_n-U_0\|_{q'}\end{aligned}$$

Assim, o mergulho compacto $E\hookrightarrow L^2_{K(x)}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^m)$ fornece

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}(V_n-U_0)\cdot\nabla F(x,V_n)\,dx\right|\to 0$$

quando $n\to+\infty$. Esta convergência junto com o fato que $I'(V_n)(V_n-U_0)\to 0$ mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla V_n\cdot[\nabla(V_n-U_0)]\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}A(x)V_n\cdot(V_n-U_0)\,\mathrm{d}x\to 0.$$

Desde que $V_n\rightharpoonup U_0$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla U_0\cdot[\nabla(V_n-U_0)]\,dx+\int_{\mathbb{R}^2}A(x)U_0\cdot(V_n-U_0)\,dx\to 0.$$

Consequentemente, $V_n\to U_0$ em E e $I(V_n)\to I(U_0)=c_0$, mas isso contradiz (3.29)–(3.30). Portanto, $U_0\neq U_M$. □

3.5.1 Sobre o nível mínimo - Prova do Lema 3.5.1

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos assumir $a_0=1$ em (F_1). Suponhamos por contradição que

$$\max_{t\geq 0}\Psi_n(t)\geq\frac{2\pi}{2^{m-1}\beta_0},$$

onde

$$\Psi_n(t)=\frac{t^2}{2}-\int_{\mathbb{R}^2}F(x,tM_n)\,\mathrm{d}x.$$

Pelos lemas 3.3.1 e 3.3.3 temos que $\Psi_n(t) > 0$ para t pequeno e $\Psi_n(t) < 0$ para t grande. Além disso, $\Psi_n(0) = 0$. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n > 0$ tal que

$$\Psi_n(t_n) = \max_{t \geq 0} \Psi_n(t).$$

Usando o fato que $F(x, t_n M_n) > 0$, obtemos $t_n^2 \geq (4\pi/2^{m-1}\beta_0)$. Desde que $\Psi_n'(t_n) = 0$, segue por (F_3) que

$$\begin{aligned} t_n^2 &= \int_{\mathbb{R}^2} t_n M_n \cdot \nabla F(x, t_n M_n)\,\mathrm{d}x \\ &\geq \int_{|x| \leq r} t_n \widetilde{M}_n g_1(x) f_1(t_n M_n)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.33}$$

Agora, pela hipótese (F_5), temos que para cada $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$u_1 f_1(U) \geq (\eta - \varepsilon) e^{2^{m-1}\beta_0 |U|^2}$$

para todo $|U| \geq R_\varepsilon$ e $|x| \leq r$. Vamos fixar $r > 0$ tal que

$$\eta > \frac{4}{2^{m-1} r^2 \beta_0}. \tag{3.34}$$

Tomamos n suficientemente grande e considerando (F_1), (3.33) agora torna-se

$$\begin{aligned} t_n^2 \geq & (\eta - \varepsilon) \int_{|x| \leq r/n} e^{2^{m-1}\beta_0 t_n^2 |M_n|^2}\,\mathrm{d}x \\ = & (\eta - \varepsilon) \int_{|x| \leq r/n} e^{\left(\frac{2^{m-1}\beta_0}{2\pi} t_n^2 \log(n) + 2^{m-1}\beta_0 d_n t_n^2\right)}\,\mathrm{d}x \\ = & \pi(\eta - \varepsilon) \left(\frac{r}{n}\right)^2 e^{\left(\frac{2^{m-1}\beta_0}{2\pi} t_n^2 \log(n) + 2^{m-1}\beta_0 d_n t_n^2\right)}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Daí,

$$1 \geq \pi r^2 (\eta - \varepsilon) e^{\left[t_n^2 \left(\log(n) \left(\frac{2^{m-1}\beta_0}{2\pi} - \frac{2}{t_n^2} + 2^{m-1}\beta_0 \frac{d_n}{\log(n)}\right) - \frac{\log(t_n^2)}{t_n^2}\right)\right]}. \tag{3.36}$$

Assim, $\{t_n\}$ é limitado. Caso contrário teríamos

$$\lim_{n \to +\infty} t_n^2 \left[\log(n) \left(\frac{2^{m-1}\beta_0}{2\pi} - \frac{2}{t_n^2} + 2^{m-1}\beta_0 \frac{d_n}{\log(n)}\right) - \frac{\log(t_n^2)}{t_n^2}\right] = +\infty,$$

o que contradiz (3.36). Afirmamos que $t_n^2 \to (4\pi/2^{m-1}\beta_0)$. De fato, suponhamos que $t_n \to t_0$, a menos de subsequência, e $t_0^2 > (4\pi/2^{m-1}\beta_0)$. Então passando o limite em (3.35), obtemos

$$t_0^2 \geq \pi r^2 (\eta - \varepsilon) e^{\left[\lim_{n \to +\infty} t_n^2 \log(n) \left(\frac{2^{m-1}\beta_0}{2\pi} - \frac{1}{t_n^2} + 2^{m-1}\beta_0 \frac{d_n}{\log(n)}\right)\right]}$$

o que leva a uma contradição.

Agora, com o objetivo de estimar (3.33) mais precisamente, consideremos os conjuntos

$$A_n = \{x \in B_r : t_n M_n(x,r) \geq R_\varepsilon\} \quad \text{and} \quad C_n = B_r \setminus A_n.$$

Então podemos escrever t_n^2 da seguinte forma:

$$\begin{aligned} t_n^2 \geq &(\eta - \varepsilon) \int_{B_r} e^{2^{m-1}\beta_0 t_n^2 |M_n|^2} \, \mathrm{d}x + \int_{C_n} t_n M_n \cdot \nabla F(x, t_n M_n) \, \mathrm{d}x \\ &- (\eta - \varepsilon) \int_{C_n} e^{2^{m-1}\beta_0 t_n^2 |M_n|^2} \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Desde que $M_n(x,r) \to 0$ e as funções características $\chi_{C_n} \to 1$ quase sempre em B_r quando $n \to +\infty$ e, além disso,

$$\chi_{C_n} \nabla F(x, t_n M_n) t_n M_n \leq R_\varepsilon e^{\beta R_\varepsilon^2}$$

e

$$\chi_{C_n} e^{2^{m-1}\beta_0 t_n^2 M_n^2} \leq e^{2^{m-1}\beta_0 R_\varepsilon^2},$$

segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\int_{C_n} t_n M_n(x) \nabla F(x, t_n M_n(x)) \, \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{as} \quad n \to \infty$$

e

$$\int_{C_n} e^{2^{m-1}\beta_0 t_n^2 M_n} \, \mathrm{d}x \to \pi r^2 \quad \text{as} \quad n \to \infty.$$

Resta a primeira integral em (3.37). Desde que $t_n^2 \geq (4\pi/\beta_0)\gamma$, temos

$$\begin{aligned} \int_{|x|\leq r} e^{2^{m-1}\beta_0 t_n^2 |M_n|^2} \, \mathrm{d}x &\geq \int_{|x|\leq r} e^{4\pi |M_n|^2} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{|x|\leq r/n} e^{4\pi |M_n|^2} \, \mathrm{d}x + \int_{r/n \leq |x| \leq r} e^{4\pi |M_n|^2} \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.38}$$

Para o primeiro termo em (4.4.4) temos que

$$\int_{|x|\leq r/n} e^{4\pi |M_n|^2} \, \mathrm{d}x = \int_{|x|\leq r/n} e^{2\log(n) + 4\pi d_n} \, \mathrm{d}x \to \pi r^2,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, enquanto para o segundo termo temos

$$\int_{r/n \leq |x| \leq r} e^{4\pi |M_n|^2} \, \mathrm{d}x = 2\pi \int_{r/n}^{r} s e^{\left(\frac{2(\log(r/s))^2}{\log(n)\|\widetilde{M}_n\|_E^2}\right)} \, \mathrm{d}s.$$

Agora, usando a mudança de variáveis $t = \log(r/s)/\zeta_n \log(n)$ with $\zeta_n = \|\widetilde{M}_n\|_E > 1$, obtemos que

$$\begin{aligned} \int_{r/n \leq |x| \leq r} e^{4\pi |M_n|^2} \, \mathrm{d}x = &2\pi r^2 \zeta_n \log(n) \int_0^{1/\zeta_n} e^{\left(2\log(n)(t^2 - \zeta_n t)\right)} \, \mathrm{d}t \\ = &4\pi r^2 \zeta_n \log(n) \int_0^{1/2\zeta_n} e^{\left(2\log(n)(t^2 - \zeta_n t)\right)} \, \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Estimamos a integral acima pela área sob a reta tangente à curva $\phi_n(t) = e^{2\log(n)(t^2-\zeta_n t)}$ no ponto $(0,1)$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_{r/n\leq|x|\leq r} e^{4\pi|M_n|^2}\,\mathrm{d}x \geq & 4\pi r^2\zeta_n\log(n)\int_0^{1/2\zeta_n\log(n)}[1-2\zeta_n\log(n)t]\,\mathrm{d}t\\ =&\pi r^2.\end{aligned}$$

Logo, passando o limite em (3.37) obtemos $\eta \leq 4/2^{m-1}\beta_0 r^2$, o que contradiz (3.34). Isto termina a prova. $\square$

3.6 Prova do Teorema 3.1.2

A idéia básica da prova é redefinir $F(x,U)$ de dois modos. Primeiramente, se $H(x) \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, então definimos

$$\widetilde{F}(x,U) = \begin{cases} F(x,u_1,\cdots,u_m), & \text{if } \forall i,\ u_i \geq 0,\\ F(x,u_1,\cdots,u_{i-1},0,u_{i+1},\cdots,u_m), & \text{if } \exists i \text{ with } u_i \leq 0,\\ 0, & \text{if } \forall i,\ u_i \leq 0\end{cases}$$

onde $i = 1,\cdots,m$. Neste caso, $\widetilde{F}$ satisfaz as mesmas hipóteses que F e assim, o problema (P) possui duas soluções fracas não-negativas. De fato, se $U = (u_1,\cdots,u_m)$ é uma solução fraca de (P), então

$$\int_{\mathbb{R}^2}[\nabla u_i\nabla\xi_i + a_i(x)u_i\xi_i]\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_i}(x,u_1,\cdots,u_m)\xi_i\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2}h_i(x)\xi_i\,\mathrm{d}x,$$

para todo $(\xi_1,\cdots,\xi_m) \in E$ e $i = 1,\cdots,m$. Então fazendo $\xi_i = u_i^-$ obtemos

$$\|u_i^-\|_{E_i} \leq -\int_{\mathbb{R}^2}h_i(x)u_i^-\,\mathrm{d}x \leq 0$$

o que implica $u_i = u_i^+ \geq 0$ para todo $i = 1,\cdots,m$.

Agora, se $H(x) \leq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$ redefinimos $F(x,U)$ tomando

$$\widetilde{F}(x,U) = \begin{cases} -F(x,-u_1,\cdots,-u_m), & \text{if } \forall i,\ u_i \geq 0,\\ -F(x,-u_1,\cdots,-u_{i-1},0,-u_{i+1},\cdots,-u_m), & \text{if } \exists i \text{ with } u_i \leq 0,\\ 0, & \text{if } \forall i,\ u_i \leq 0,\end{cases}$$

onde $i = 1,\cdots,m$. Assim, considerando o funcional

$$\widetilde{I}(U) = \frac{1}{2}\|U\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{F}(x,U)\,dx - \int_{\mathbb{R}^2}(-H(x))\cdot U\,dx,$$

temos que o problema (P) tem duas soluções fracas não-positivas. Com efeito, como $-H(x) \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, vimos que $\widetilde{I}(U)$ tem dois pontos críticos não-triviais não-negativos. Seja U um tal ponto crítico, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2}[\nabla U\cdot\nabla V + A(x)U\cdot V]\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2}V\cdot\nabla\widetilde{F}(x,U)\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2}H(x)\cdot V\,\mathrm{d}x = 0,$$

para todo $V = (\xi, \eta) \in E$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla(-U) \cdot \nabla V + A(x)(-U) \cdot V] \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} V \cdot \nabla F(x, -U) \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} H(x) \cdot V \,\mathrm{d}x = 0,$$

para todo $V \in E$, o que implica que $-U$ é uma solução não-positiva de (P).

CAPÍTULO 4

Equações de Schrödinger com não-linearidades indefinidas

Neste capítulo estudamos a existência de soluções não-triviais para a equação de Schrödinger não-linear da forma

$$-\Delta u + V(x)u = a(x)f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{P}$$

onde $N \geq 2$, $a(x) \in C^1(\mathbb{R}^N)$ muda de sinal e é negativa no infinito, e o termo não-linear $f \in C^1(\mathbb{R})$ tem um comportamento superlinear na origem e um crescimento tipo potência no infinito. Nosso espaço de trabalho continua sendo o subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u^2 \, \mathrm{d}x < +\infty \right\},$$

o qual, sob as hipóteses (A_1) e (A_2) abaixo, é um espaço de Hilbert quando munido com o produto escalar

$$\langle u, v \rangle_E = \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv] \, \mathrm{d}x,$$

para o qual corresponde a norma $\|u\|_E = \langle u, u \rangle_E^{1/2}$. Aqui, como usual, $H^1(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço de Sobolev modelado em $L^2(\mathbb{R}^N)$ com norma

$$\|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + |u|^2) \, \mathrm{d}x.$$

Suponhamos que o potencial $V(x) \in C(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz as seguintes hipóteses:

(A_1) Existe $D > 0$ tal que $V(x) \geq -D$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Para assegurar o mergulho contínuo de E em $H^1(\mathbb{R}^N)$ assumimos a seguinte condição sobre o primeiro autovalor do operador $-\Delta + V(x)$:

(A_2) $\lambda_1 = \inf\limits_{u \in E \setminus \{0\}} \dfrac{\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) \, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^N} u^2 \, \mathrm{d}x} > 0.$

Usaremos a seguinte notação: Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e $2 \leq s < 2N/(N-2)$, colocamos

$$\nu_s(\Omega) = \inf_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_\Omega \left[|\nabla u|^2 + V(x)u^2 \right] \, \mathrm{d}x}{\left(\int_\Omega |u|^s \, \mathrm{d}x \right)^{2/s}},$$

e fazemos $\nu_s(\emptyset) = +\infty$. Com o objetivo de obtermos um resultado de compacidade, assumiremos também as seguintes hipóteses:

(A_3) $\lim_{R\to+\infty} \nu_s(\mathbb{R}^N\backslash\overline{B}_R) = +\infty$;

(A_4) Existem uma função $K(x) \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$, com $K(x) \geq 1$, e constantes $\alpha > 1$, c_0, $R_0 > 0$ tais que

$$K(x) \leq c_0 \left[1 + V^+(x)^{1/\alpha}\right] \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0.$$

Quanto às funções $a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assumiremos que são de classe C^1 e gozam das seguintes propriedades:

(F_1) existem $a_0, b_0 > 0$ tais que $-a_0K(x) \leq a(x) \leq b_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

(F_2) a é uma função mudando de sinal e 0 é um valor regular de $a(x)$, isto é, $\nabla a(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $a(x) = 0$ e

$$\limsup_{|x|\to+\infty} a(x) = a_\infty < 0.$$

(F_3) $|f(s)| = o(|s|)$ quando $s \to 0$ e $f'(s) = p\ell_\infty|s|^{p-1} + O(|s|^{\tau-1})$ quando $|s| \to +\infty$, para algum $\ell_\infty > 0$, $0 \leq \tau < 1$ e $1 \leq p < p^\#$ se $N \geq 3$, $1 \leq p < +\infty$ se $N = 2$.

(F_4) $sf(s) > 0$ para cada $s \in \mathbb{R}$ e existe $\mu > 2$ tal que $\mu F(s) \leq f(s)s$, para todo $|s| \in \mathbb{R}$, onde $F(s) = \int_0^s f(t)\mathrm{d}t$.

Nosso principal resultado é o seguinte.

Teorema 4.0.1. *Suponhamos que as hipóteses (A_1)–(A_4) e (F_1)–(F_4) são válidas. Então a equação de Schrödinger não-linear (P) tem uma solução não-nula $u \in E$.*

A idéia básica para a prova do Teorema 4.0.1 é obtermos uma solução de (P) como limite de soluções (u_n) de uma equação em (P) considerada nos espaços $E_n = E|_{H^1_0(B_{R_n}(0))}$, com $R_n \to +\infty$, cujo espaço $H^1(B_{R_n}(0))$ é visto como um subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$ por estender as funções por zero fora de $B_{R_n}(0)$. Usamos o Teorema do Passo da Montanha padrão para obtemos uma sequência de soluções (u_n) de um problema modificado (P_n) cujos índices de Morse são finitos. O método blow-up permite mostrarmos uma quota uniforme $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para essas soluções. Por fim, usando os níveis do passo da montanha, verificamos que a solução limitante é não-trivial.

Observação 4.0.2. *Segue da hipótese (F_2) que existem $r_0, \eta_0 > 0$ tais que $a^-(x) \geq \eta_0$ para todo $|x| > r_0$. Além disso, (F_3) e (F_4) implicam que, dado $1 < \theta < p+1$, existem $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e $C > 0$ tais que, para todo $s \in \mathbb{R}$,*

$$sf(s) - \theta F(s) \geq \varepsilon|s|^{p+1} - C. \tag{4.1}$$

Com efeito, pela regra de L'Hospital temos que

$$\lim_{|s|\to+\infty} \frac{|f(s)|}{|s|^p} = \ell_\infty, \tag{4.2}$$

e assim, dado $\delta > 0$, existe $R > 0$ tal que

$$(\ell_\infty - \delta)|s|^p \leq |f(s)| \leq (\ell_\infty + \delta)|s|^p$$

para todo $|s| > R$. A expressão (4.2) segue da combinação dessas desigualdades com a definição de F e a condição de sinal em (F_4). De agora em diante, assumiremos $\ell_\infty = 1$.

4.1 Reformulação do problema

Recordamos que nosso espaço ambiente E é continuamente mergulhado em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e compactamente em $L^s(\mathbb{R}^N)$ para $2 \leq s < p^{\#}+1$ conforme Lema 1.2.1 e Proposição 1.2.4 no Capítulo 1. Da hipótese de controle (F_1) deduzimos que o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)F(u)\,\mathrm{d}x$$

associado ao problema (P) é bem definido e de classe C^1 sobre E (ver Lema 1.2.2). As dificuldades se originam quando queremos mostrar que sequências Palais-Smale são limitadas em E. Para contornarmos essas dificuldades usamos um argumento de truncamento. Assim, consideremos o problema modificado

$$-\Delta u + V(x)u = a^+(x)f(u) - a^-(x)f_n(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{P_n}$$

onde

$$f_n(u) = \begin{cases} \widetilde{A}_n|u|^{q-1}t + \widetilde{B}_n, & \text{para } u \leq -a_n, \\ f(u), & \text{para } |u| \leq a_n, \\ A_n|u|^{q-1}t + B_n, & \text{para } u \geq a_n, \end{cases}$$

$1 < q < p$, $3q - p > 2$, $a_n \to +\infty$ e os coeficientes $\widetilde{A}_n, \widetilde{B}_n, A_n, B_n$ são escolhidos de tal forma que f_n seja $C^1(\mathbb{R})$. De fato, para o caso $u \geq a_n$ (o caso $u \leq -a_n$ sendo semelhante) temos $f_n(a_n) = A_n a_n^q + B_n$ e $f_n'(a_n) = qA_n a_n^{q-1}$. Pela hipótese (F_3), dado $\varepsilon > 0$, existe $R > 0$ (que pode ser tomado $R < a_n$) tal que

$$p(1-\varepsilon)u^{p-1} \leq f'(u) \leq p(1+\varepsilon)u^{p-1}$$

para todo $u > R$. Assim, encontramos que

$$A_n = \frac{p}{q}a_n^{p-q} + o(1). \tag{4.3}$$

De forma semelhante, considerando (4.2), verificamos que

$$B_n = \frac{q-p}{q}a_n^p + o(1). \tag{4.4}$$

Agora, seja $B_R(0) \subset \mathbb{R}^N$ contendo $\Omega^+ = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) > 0\}$. Então, o funcional energia associado ao problema (P_n) dado por

$$\Phi_n(u) = \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \int_{B_R} a^+(x)F(u)\,\mathrm{d}x + \int_{B_R} a^-(x)F_n(u)\,\mathrm{d}x.$$

onde F_n é a primitiva de f_n e tal que $\Phi_n \in C^2(E,\mathbb{R})$, com

$$\Phi_n'(u)v = \int_{B_R} (\nabla u \cdot \nabla v + V(x)uv)\,\mathrm{d}x - \int_{B_R} a^+(x)f(u)v\,\mathrm{d}x + \int_{B_R} a^-(x)f_n(u)v\,\mathrm{d}x$$

e

$$\langle \Phi_n''(u)v, w\rangle = \int_{B_R} (\nabla v \cdot \nabla w + V(x)vw)\,\mathrm{d}x - \int_{B_R} a^+(x)f'(u)vw\,\mathrm{d}x + \int_{B_R} a^-(x)f_n'(u)vw\,\mathrm{d}x.$$

Observação 4.1.1. *Segue da definição de f_n a seguinte desigualdade: dado $\theta > q+1$, existe $\varepsilon > 0$ arbitrariamente pequeno e constante $C > 0$ tal que, para todo $u \in \mathbb{R}$,*

$$\theta F_n(u) - u f_n(u) \geq \varepsilon |u|^{q+1} - C. \tag{4.5}$$

Lema 4.1.2. *Suponhamos (A_1)–(A_3) e (F_2)–(F_4). Então Φ_n satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração. Seja $(u_k) \subset E$ tal que $|\Phi_n(u_k)| \leq K$ e $\|\Phi_n'(u_k)\|_{E^*} \to 0$, ou seja,

$$\frac{1}{2}\|u_k\|_E^2 - \int_{B_R} a^+(x) F(u_k)\,\mathrm{d}x + \int_{B_R} a^-(x) F_n(u_k)\,\mathrm{d}x \leq K$$

e

$$\int_{B_R} \nabla u_k \nabla \phi + V(x) u_k \phi\,\mathrm{d}x - \int_{B_R} a^+(x) f(u_k)\phi\,\mathrm{d}x + \int_{B_R} a^-(x) f_n(u_k)\phi\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon \|\phi\|_E.$$

Vamos mostrar que (u_k) é limitada em E. Suponhamos por contradição que $t_k = \|u_k\|_E \to +\infty$ e defina $v_k = u_k/t_k$. Então, a menos de subsequência, $v_k \rightharpoonup v_0$ em E e $v_k \to v_0$ em $L^s_{K(x)}(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in [2, p^\#)$.

Usando as desigualdades (4.1) e (4.5), com $\theta \in (q+1, p+1)$, obtemos que

$$\begin{aligned}
K + \varepsilon\|u_k\|_E \geq & \theta \Phi_n(u_k) - \Phi_n'(u_k) u_k \\
= & \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \|u_k\|_E^2 + \int_{B_R} a^+(x) \left[u_k f(u_k) - \theta F(u_k)\right] \mathrm{d}x \\
& + \int_{B_R} a^-(x) \left[\theta F_n(u_k) - u_k f_n(u_k)\right] \mathrm{d}x \\
\geq & \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) t_k^2 + \int_{B_R} a^+(x) \left[\varepsilon |u_k|^{p+1} - C_1\right] \mathrm{d}x + \int_{B_R} a^-(x) \left[\varepsilon |u_k|^{q+1} - C_2\right] \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \int_{B_R} u_k^2\,\mathrm{d}x + C_1 + C_2 t_k \geq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) t_k^2 + \varepsilon \int_{B_R} a^+(x) |u_k|^{p+1}\,\mathrm{d}x + \varepsilon \int_{B_R} a^-(x) |u_k|^{q+1}\,\mathrm{d}x. \tag{4.6}$$

Considerando que $t_k \to +\infty$, obtemos, em particular, que

$$\begin{aligned}
\int_{B_R} |a(x)| |u_k|^{q+1}\,\mathrm{d}x \leq & \int_{B_R} a^+(x) |u_k|^{q+1}\,\mathrm{d}x + \int_{B_R} a^-(x) |u_k|^{q+1}\,\mathrm{d}x \\
\leq & \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \int_{B_R} u_k^2\,\mathrm{d}x + C_1 t_k + C_2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$t_k^{q-1} \int_{B_R} |a(x)| |v_k|^{q+1}\,\mathrm{d}x \leq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \int_{B_R} v_k^2\,\mathrm{d}x + o(1) \leq M.$$

Desde que $q > 1$ e $v_k \to v_0$ em $L^{q+1}(B_R)$, concluímos que

$$\int_{B_R} |a(x)||v_0|^{q+1}\,\mathrm{d}x = 0.$$

Por hipótese, $a(x) \neq 0$ quase sempre em B_R, donde $v_0 \equiv 0$. Em particular,

$$\int_{B_R} v_k^2\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Mas (4.6) implica que

$$\left(\frac{\theta}{2} - 1\right) t_k^2 \leq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \int_{B_R} u_k^2\,\mathrm{d}x + C_1 t_k + C_2,$$

donde

$$1 \leq \int_{B_R} v_k^2\,\mathrm{d}x + o(1),$$

uma contradição.

Desde que

$$\begin{aligned} \|u_k - u\|_E^2 =& \langle \Phi_n'(u_k) - \Phi_n'(u), u_k - u\rangle + \int_{B_R} a^+(x)\,[f(u_k) - f(u)]\,(u_k - u)\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{B_R} a^-(x)\,[f_n(u_k) - f_n(u)]\,(u_k - u)\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

o lema estará provado se mostrarmos que as duas integrais acima convergem para zero. Mas isso decorre da desigualdade (4.7) abaixo e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. □

4.1.1 Condições geométricas

Primeiro notemos que por (F_3) e o fato que $f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ tem-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|f(s)| \leq \varepsilon|s|$ sempre que $|s| \leq \delta$ e $|f(s)| \leq C$ para todo $s \in [\delta, R]$. Assim, se $|s| \geq \delta$, temos que

$$|f(s)| \leq C_1 + C_2|s|^p \leq \left(\frac{C_1}{\delta^p} + C_2\right)|s|^p.$$

Logo, para todo $s \in \mathbb{R}$, temos

$$|f(s)| \leq \varepsilon|s| + C_\varepsilon|s|^p, \tag{4.7}$$

e

$$F(s) \leq \varepsilon|s|^2 + C_\varepsilon|s|^{p+1}. \tag{4.8}$$

Usando esta última desigualdade e o mergulho de E em $L^p(B_R)$ para $1 < p < p^\# + 1$, concluímos que

$$\begin{aligned}\Phi_n(u) =& \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \int_{B_R} a^+(x)F(u)\,\mathrm{d}x + \int_{B_R} a^-(x)F_n(u)\,\mathrm{d}x \\ \geq& \frac{1}{2}\|u\|_E^2 - \int_{B_R} a^+(x)(\varepsilon|u|^2 + C_\varepsilon|u|^{p+1})\,\mathrm{d}x \\ \geq& \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\|u\|_E^2 - C_2\|u\|_E^{p+1}.\end{aligned}$$

Assim, $\Phi_n(u) \geq \rho > 0$ sempre que $\|u\|_E = \sigma$, onde $\sigma > 0$ é tal que

$$\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\sigma - C_2\sigma^{p-1} > 0.$$

Desde que os coeficientes dessa expressão não dependem do raio R da bola $B_R(0)$, podemos tomar o mesmo σ e, consequentemente, o mesmo ρ para $R > 0$.

Por outro lado, por (F_3), (F_4) e continuidade de F, verificamos que existem constantes C_1, C_2 positivas tais que

$$F(s) \geq C_1|s|^{p+1} - C_2,$$

para todo $s \in \mathbb{R}$. Assim, tomando $u \in E$, com $\mathrm{supp}(u) \subset \{x \in B_R : a^+(x) \geq \beta > 0\}$, temos que

$$\Phi_n(tu) \leq \frac{t^2}{2}\|u\|_E^2 - \beta C_1 t^{p+1}\int_{\mathrm{supp}(u)} |u|^{p+1}\,\mathrm{d}x + C_3|\mathrm{supp}(u)|.$$

Portanto, $\Phi_n(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$.

Logo, Φ_n satisfaz as hipóteses do Teorema do Passo da Montanha e, em consequência, Φ_n admite um ponto crítico não-nulo u. Nossas hipóteses de regularidade implicam que $u \in C^2(B_R) \cap C(\overline{B_R})$.

Observamos que Φ também satisfaz a geometria do passo da montanha, de forma que $\sigma > 0$ pode ser tomado de maneira única, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.2 Limitação da sequência de soluções

Para cada bola B_{R_n} temos uma solução u_n de (P_n) no subespaço E_n. A prova a seguir é uma adaptação dos argumentos utilizados em [45]. Denotemos por $m(u_n)$ o índice de Morse de u_n com respeito a Φ_n, isto é, o supremo das dimensões dos subespaços lineares de E sobre os quais a forma quadrática $\Phi_n''(u_n)$ é definida negativa. Estimativa padrão sobre o índice de Morse para pontos críticos do passo da montanha mostra que $m(u_n) \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$ (ver [5], Teorema 12.31). Usamos um argumento blow-up para mostrarmos que a sequência (u_n) é uniformemente limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Suponhamos por contradição que

$$M_n = \|u_n\|_\infty = \max_{B_{R_n}}(u_n) = u_n(x_n) \to +\infty$$

quando $n \to +\infty$, para algum $x_n \in B_{R_n}$ (o caso onde $\|u_n\|_\infty = \max_{B_{R_n}}(-u_n)$ é manipulado de forma semelhante). Desde que $\Delta u_n(x_n) \le 0$, deduz-se da equação em (P_n) que

$$a^+(x_n)f(M_n) - a^-(x_n)f_n(M_n) - V(x_n)M_n \ge 0.$$

Assim, para n suficientemente grande, temos que

$$a^-(x_n)M_n^{q-1} \le a^+(x_n)M_n^{p-1} + D,$$

onde usamos as hipóteses (A_1), (F_3) e a definição de f_n. A hipótese (F_2) implica que a sequência (x_n) é limitada, donde, a menos de subsequência, podemos assumir que $x_n \to x_0 \in \mathbb{R}^N$ e $a(x_0) \ge 0$.

Agora definamos uma sequência de funções blow-up por

$$v_n(x) = \frac{1}{M_n} u_n(\lambda_n x + x_n),$$

onde $\lambda_n^2 = M_n^{1-p}$ ou $\lambda_n^3 = M_n^{1-p}$, dependendo de quando $a(x_0) > 0$ ou $a(x_0) = 0$, respectivamente. Vamos mostrar que em ambos os casos (v_n) converge uniformemente para 0 sobre conjuntos compactos. Isto contradiz o fato que $v_n(0) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por definição. Consequentemente, a família de soluções (u_n) será limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

4.2.1 Caso 1: $a(x_0) > 0$

Desde que

$$-\Delta v_n(x) + \lambda_n^2 V(\lambda_n x + x_n) v_n(x) = \varphi_n(x), \tag{4.9}$$

onde

$$\varphi_n(x) = a^+(\lambda_n x + x_n)\frac{f(M_n v_n)}{M_n^p} - a^-(\lambda_n x + x_n)\frac{f_n(M_n v_n)}{M_n^p},$$

e φ_n é uniformemente limitada sobre qualquer bola $B_R(0)$ contendo x_0, estimativas elípticas implicam que, a menos de subsequência, $v_n \to v$ em $W^{2,r}(B_R(0)) \cap C^{1,\beta}(B_R(0))$ com $r > N$ e $0 < \beta < 1$ (ver [26]). Agora, como $a(x_0) > 0$, vemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x) =& a^+(\lambda_n x + x_n) \lim_{n\to+\infty} \frac{f(M_n v_n)}{M_n^p} - a^-(\lambda_n x + x_n) \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(M_n v_n)}{M_n^p} \\ =& a^+(x_0)|v|^{p-1}v,\end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}^N$. Assim, pelos argumentos em [26], v é definido em todo $\mathbb{R}^N$, é de classe C^2 e satisfaz

$$\Delta v + a(x_0)|v|^{p-1}v = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.10}$$

Denotando por I funcional associado ao problema (4.10), obtemos que

$$\langle I''(v)\phi, \phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 \, \mathrm{d}x - a(x_0)p\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p-1}\phi^2 \, \mathrm{d}x,$$

para cada $\phi \in E$.

Nosso próximo resultado estabelece que v tem índice finito, no sentido que existe $r_0 > 0$ tal que $\langle I''(v)\phi, \phi\rangle \ge 0$, para todo $\phi \in H_0^1(\mathbb{R}^N \backslash B_{r_0}(0))$.

Lema 4.2.1. *A solução v do problema* (4.10) *tem índice finito*

Demonstração. Suponhamos por contradição que para qualquer $R > 0$ existe $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \backslash B_R(0))$ tal que $\langle I''(v)\phi, \phi\rangle < 0$. A convergência uniforme de v_n para v sobre conjuntos compactos implica que o funcional associado ao problema (4.9), dado por

$$\begin{aligned} J_n(v) =& \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla v|^2 + \lambda_n^2 V(\lambda_n x + x_n) v^2\right] \mathrm{d}x \\ & - \lambda_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[a^+(\lambda_n x + x_n)F(v) - a^-(\lambda_n x + x_n)F_n(v)\right] \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

satisfaz $\langle J_n''(v_n)\phi, \phi\rangle \to \langle I''(v)\phi, \phi\rangle$ quando $n \to +\infty$, onde

$$\begin{aligned} \langle J_n''(v_n)\phi, \phi\rangle =& \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^2 \mathrm{d}x + \lambda_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} V(\lambda_n x + x_n)\phi^2 \mathrm{d}x \\ & - \lambda_n^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left[a^+(\lambda_n x + x_n) f'(M_n v_n) - a^-(\lambda_n x + x_n) f_n'(M_n v_n)\right] \phi^2 \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Então para n suficientemente grande temos que $\langle J_n''(v_n)\phi, \phi\rangle < 0$. Definindo

$$\chi_n(x) = \phi\left(\frac{x - x_n}{\lambda_n}\right),$$

vemos que $\chi_n \in C_c^\infty(B_R(0))$ pois $x_n + \lambda_n \mathrm{supp}(\phi) \subset B_R$ para n grande. Além disso,

$$\begin{aligned} \langle \Phi_n''(u_n)\chi_n, \chi_n\rangle =& \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla \chi_n|^2 + V(x)\chi_n^2\right] \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} a^+(x) f'(u_n)\chi_n^2 \mathrm{d}x \\ =& \lambda_n^{N-2} \langle J_n''(v_n)\phi, \phi\rangle < 0. \end{aligned}$$

Desde que podemos escolher $n \neq m$ tais que χ_n e χ_m tenham suportes disjuntos, e portanto, sejam linearmente independentes, isto contradiz o fato que $m(u_n) \leq 1$. □

Segue da Proposição 4.4.1 adiante que $v \equiv 0$. Mas isto é uma contradição pois v é contínua e $v(0) = 1$. Isso termina a prova no caso 1.

4.2.2 Caso 2: $a(x_0) = 0$

Seja

$$\delta_n = \mathrm{dist}(x_n, \Omega^0) = |x_n - z_n| \to 0$$

para algum $z_n \in \Omega^0 = \{x \in \mathbb{R}^N : a(x) = 0\}$.

Lema 4.2.2. *Se $a(x_n) \leq 0$ então* $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\delta_n}{\lambda_n} = 0$.

Demonstração. Desde que $a(x_n) \leq 0$ e $\nabla a(z_n) \neq 0$, segue pelo Teorema do Valor Médio ao longo do segmento $[z_n, x_n]$ que $a^-(x_n) \geq \varepsilon\delta_n$ para algum $\varepsilon > 0$ e n suficientemente grande. Como $\Delta u_n(x_n) \leq 0$, temos por (A_1) que

$$a^+(x_n) f(M_n) - a^-(x_n) f_n(M_n) \geq V(x_n) M_n \geq -DM_n$$

e, em consequência,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\delta_n}{\lambda_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{DM_n}{\lambda_n\varepsilon(A_nM_n^q+B_n)}=0$$

proposto que $3q-p>2$, conforme definição de f_n. $\square$

Agora, para um dado $\beta_n>0$ a ser escolhido de forme conveniente, definamos

$$v_n(x)=\frac{1}{M_n}u_n(\lambda_n\beta_nx+x_n). \tag{4.11}$$

Então v_n satisfaz

$$-\Delta v_n+\lambda_n^2\beta_n^2V(\lambda_n\beta_nx+x_n)v_n=\varphi_n(x),$$

onde

$$\varphi_n(x)=-\lambda_n^2\beta_n^2a^-(\lambda_n\beta_nx+x_n)\frac{f_n(M_nv_n)}{M_n}+\lambda_n^2\beta_n^2a^+(\lambda_n\beta_nx+x_n)\frac{f(M_nv_n)}{M_n}.$$

Para n suficientemente grande temos que

$$\delta_n=\pm\frac{\nabla a(z_n)\cdot(x_n-z_n)}{|\nabla a(z_n)|},$$

onde os sinais $+$ ou $-$ ocorrem conforme $x_n\in\Omega^+$ ou $x_n\in\Omega^-$. A fórmula de Taylor para $a(\lambda_n\beta_nx+x_n)$ em torno do ponto z_n então expressa que

$$a(\lambda_n\beta_nx+x_n)=\pm|\nabla a(z_n)|\delta_n+\lambda_n\beta_n\nabla a(z_n)\cdot x+O(\lambda_n^2\beta_n^2|x|^2+\delta_n^2). \tag{4.12}$$

Suponhamos que $\delta_n/\lambda_n\to+\infty$. Então pelo Lemma 4.2.2, $x_n\in\Omega^+$. Escolhendo $\beta_n^2=\lambda_n/\delta_n$, vemos de (4.12) que

$$\frac{\beta_n^2}{\lambda_n}a(\lambda_n\beta_nx+x_n)=\pm|\nabla a(z_n)|+\left(\frac{\lambda_n}{\delta_n}\right)^{3/2}\nabla a(z_n)\cdot x$$

é uniformemente limitada e positivo desde que x seja limitado e n suficientemente grande. Procedendo como no primeiro caso, deduzimos que (v_n) converge uniformemente sobre conjuntos compactos para uma função v tal que

$$\Delta v+|\nabla a(x_0)||v|^{p-1}v=0,\quad x\in\mathbb{R}^N.$$

Usando a Proposição 4.4.1 (e uma leve mudança no Lema 4.2.1) concluímos que $v\equiv0$ e isto contradiz $v(0)=1$.

De agora em diante assumiremos que, a menos de subsequência, $\delta_n/\lambda_n\to\delta_0\in[0,+\infty)$ e tomaremos $\beta_n=1$ em (4.11). Desde que $\varphi_n(x)$ é uniformemente limitado sobre conjuntos compactos, temos que, sobre cada bola $B_R(0)$, a sequência (v_n) tem um limite v. Definamos

$$\ell=\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{M_n}\in[0,1]$$

e $g \in C^1([-1,1],\mathbb{R})$ por

$$g(s) = \begin{cases} \frac{p}{q}\ell^{p-q}|s|^{q-1}s + \frac{q-p}{q}\ell^p, & \text{para } s \geq \ell, \\ |s|^{p-1}s, & \text{para } |s| \leq \ell, \\ \frac{p}{q}\ell^{p-q}|s|^{q-1}s - \frac{q-p}{q}\ell^p, & \text{para } s \leq -\ell. \end{cases}$$

Usando as fórmulas assintóticas (4.3) e (4.4) vemos que, para cada $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(M_n v_n)}{M_n^p} &= \lim_{n\to+\infty} \left(A_n M_n^{q-p}|v_n|^{q-1}v_n + B_n M_n^{-p}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left\{ \frac{p}{q}\left(\frac{a_n}{M_n}\right)^{p-q}|v_n|^q v_n + \frac{q-p}{q-1}\left(\frac{a_n}{M_n}\right)^p \right\} \\ &= g(v_n). \end{aligned} \tag{4.13}$$

Pelo Lema 4.2.2 segue que $x_n \in \Omega^+$. Assim, denotando $\beta(x) = \delta_0|\nabla a(x_0)| + \nabla a(x_0)\cdot x$, concluímos por (4.12) e (4.13) que, uniformemente sobre conjuntos compactos, (v_n) tem uma função limite não-nula v satisfazendo

$$\Delta v + \beta^+(x)|v|^{p-1}v - \beta^-(x)g(v) = 0. \tag{4.14}$$

Usando uma mudança afim de coordenadas podemos assumir β como a projeção linear $\beta(x) = x_N$, onde $x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}$, tal que (4.14) torna-se

$$\Delta v + x_N^+|v|^{p-1}v - x_N^- g(v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Recorde também que pelo Lema 4.2.1 existe $R_0 > 0$ tal que $\langle I''(v)\varphi,\varphi\rangle \geq 0$ para toda $\varphi \in H_0^1(\mathbb{R}^N\backslash B_R(0))$, onde agora $I''(v)$ é dado por

$$\langle I''(v)\varphi,\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x - p\int_{\mathbb{R}^N} x_N^+|v|^{p-1}\varphi^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} x_N^- g(v)\varphi^2\,\mathrm{d}x.$$

Observemos que se $\ell = 0$ então $g \equiv 0$. Por outro lado, se $\ell \neq 0$, então existe $C > 0$ ($C = \ell^{(p-1)/3}$) tal que, para $s \in [-1,1]$, temos:

(B_1) $(q+1)G(s) \leq g(s)s \leq (p+1)G(s)$;

(B_2) $C|s|^{p+1} \leq g(s)s \leq |s|^{p+1}$;

(B_3) $g'(s)s^2 - (p+1)g(s)s \leq 0$.

Usando a Proposição 4.4.3 ou 4.4.4, conforme $\ell \neq 0$ ou $\ell = 0$, concluímos que $v \equiv 0$. Contudo, por construção, $v \neq 0$. Isto termina a prova.

4.3 Prova do Teorema 4.0.1

Para qualquer sequência $R_n \to +\infty$, seja (u_n) uma sequência de soluções do problema modificado (P_n) à qual é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Mostraremos primeiro que (u_n) também é limitada em E. Suponhamos por contradição que $t_n = \|u_n\|_E \to +\infty$. Fazendo $v_n = u_n/t_n$, temos que $\|v_n\|_E = 1$ e, a menos de subsequência,

$$\begin{aligned} v_n &\rightharpoonup v \quad \text{em} \quad E, \\ v_n &\to v \quad \text{em} \quad L^s(\mathbb{R}^N) \quad \text{com} \quad 2 \le s < p^\# + 1 \\ v_n(x) &\to v(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^N \\ |v_n(x)| &\le w(x) \quad \text{para alguma} \quad w \in L^s(\mathbb{R}^N). \end{aligned} \tag{4.15}$$

Fixe qualquer função $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Desde que u_n satisfaz a equação (P_n), é limitada em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e φ tem suporte compacto, segue que

$$C \ge \int_{B_{R_n}} (\nabla v_n \nabla \varphi + V(x) v_n \varphi)\, \mathrm{d}x = \int_{B_{R_n}} a(x) \frac{f(t_n v_n)}{t_n} \varphi \, \mathrm{d}x = t_n^{p-1} \int_{B_{R_n}} h_n(x)\, \mathrm{d}x,$$

onde $C > 0$ depende somente de φ. Sobre o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : v(x) \neq 0\}$ temos $|t_n v_n(x)| \to +\infty$ e assim, (F_3) implica

$$h_n(x) = a(x)|v_n(x)|^{p-1} v_n(x) \frac{f(t_n v_n(x))}{|t_n v_n(x)|^{p-1} t_n v_n(x)} \varphi(x) \to a(x)|v(x)|^{p-1} v(x) \varphi(x).$$

Sobre o conjunto $\{x \in \mathbb{R}^N : v(x) = 0\}$ temos $v_n(x) \to 0$ e daí

$$|h_n(x)| \le \frac{C(1 + t_n^p |v_n(x)|^p)}{t_n^p} \to 0,$$

pois $|f(s)| \le C(1 + |s|^p)$ por (4.2). Como $|h_n(x)| \le C(1 + |w(x)|^p) \in L^1(\mathrm{supp}(\varphi))$ conforme (4.15), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para concluirmos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|v|^{p-1} v \varphi \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to +\infty} \int_{B_{R_n}} a(x)|v_n|^{p-1} v_n \varphi \, \mathrm{d}x = 0.$$

Desde que φ é arbitrária e $a(x)$ se anula somente sobre um conjunto de medida nula, obtemos que $v(x) = 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v_n^2 \, \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Afirmamos que $c_n/t_n^2 \to 0$. De fato, como u_n satisfaz (P_n), temos que

$$\|u_n\|_E^2 = \int_{B_n} a(x) f(u_n) u_n \, \mathrm{d}x,$$

e consequentemente,

$$
\begin{aligned}
c_n =& \Phi_n(u_n) - \frac{1}{2}\Phi_n'(u_n)u_n \\
=& \int_{B_{R_n}} a^+(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n) - F(u_n)\right]\mathrm{d}x - \int_{B_{R_n}} a^-(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n) - F(u_n)\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{4.16}
$$

Considerando que $\|u_n\|_\infty \leq C$ e Ω^+ é limitado, segue por (F_3) que

$$
\frac{1}{t_n^2}\left|\int_{B_{R_n}} a^+(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n) - F(u_n)\right]\mathrm{d}x\right| \leq C\int_{\Omega^+} v_n^2\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{4.17}
$$

Agora, tomando $R_n > R > 0$, com R fixado tal que $a^-(x) \geq \eta_0$ se $|x| \geq R$, podemos escrever (4.16) como

$$
\begin{aligned}
c_n + \int_{B_R} a^-(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n) - F(u_n)\right]\mathrm{d}x + \int_{B_{R_n}\setminus B_R} a^-(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n) - F(u_n)\right]\mathrm{d}x& \\
\leq C\int_{\Omega^+} u_n^2\,\mathrm{d}x.&
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Desde que $\|u_n\|_\infty \leq C$, segue que

$$
\frac{1}{t_n^2}\left|\int_{B_R} a^-(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n) - F(u_n)\right]\mathrm{d}x\right| \leq C\int_{B_R} v_n^2\,\mathrm{d}x \to 0. \tag{4.19}
$$

Por (F_3) obtemos

$$
\begin{aligned}
ct^2 \leq& F(t) \quad \text{e} \quad ct^2 \leq tf(t), \quad \text{se} \quad |t| \leq \delta, \\
ct^{p+1} \leq& F(t) \quad \text{e} \quad ct^{p+1} \leq tf(t), \quad \text{se} \quad |t| \geq \delta.
\end{aligned}
$$

Logo, (F_4) implica que

$$
\begin{aligned}
\int_{B_{R_n}\setminus B_R} a^-(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n) - F(u_n)\right]\mathrm{d}x =& \int_{B_{R_n}\setminus B_R} a^-(x)\left[\mu u_n f(u_n) - F(u_n)\right]\mathrm{d}x \\
&+ \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\int_{B_{R_n}\setminus B_R} a^-(x) u_n f(u_n)\,\mathrm{d}x \\
\geq& C\int_{B_{R_n}\setminus B_R} a^-(x) u_n f(u_n)\,\mathrm{d}x \\
\geq& C\int_{|u_n|\leq\delta} u_n^2\,\mathrm{d}x + C_\delta\int_{|u_n|\geq\delta} |u_n|^{p+1}\,\mathrm{d}x \\
\geq& C\int_{|u_n|\leq\delta} u_n^2\,\mathrm{d}x + \delta^{p-1}C_\delta\int_{|u_n|\geq\delta} u_n^2\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Usando (4.18) concluímos que

$$\begin{aligned}\frac{C}{t_n^2}\int_{\Omega^+} u_n^2\,\mathrm{d}x \geq & \frac{c_n}{t_n^2}+\frac{1}{t_n^2}\int_{B_R} a^-(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n)-F(u_n)\right]\mathrm{d}x\\ &+\frac{1}{t_n^2}\int_{B_{R_n}\setminus B_R} a^-(x)\left[\frac{1}{2}u_n f(u_n)-F(u_n)\right]\mathrm{d}x\\ \geq & \frac{c_n}{t_n^2}+\frac{C}{t_n^2}\int_{B_{R_n}\setminus B_R} u_n^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\Omega^+} v_n^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{c_n}{t_n^2}+\int_{B_{R_n}\setminus B_R} v_n^2\,\mathrm{d}x$$

implica que

$$\frac{c_n}{t_n^2}\to 0.$$

Logo, tomando o limite em $c_n=\Phi_n(u_n)$ obtemos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_{R_n}} a(x)\frac{F(t_n v_n)}{t_n^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}. \tag{4.20}$$

Agora, considerando $\varphi=\xi v_n$ com $\xi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ como uma função teste em (P), deduzimos que

$$\int_{B_{R_n}}\left(|\nabla v_n|^2+V(x)v_n^2\right)\xi\,\mathrm{d}x-\int_{B_{R_n}} a(x)\frac{u_n f(u_n)}{t_n^2}\xi\,\mathrm{d}x=o(1). \tag{4.21}$$

Desde que $|(p+1)F(s)-f(s)s|\leq C$ para $|s|\leq R$, com R suficientemente grande, e $t_n\to+\infty$, temos que

$$\int_{|u_n|\leq R}|a(x)|\frac{|(p+1)F(u_n)-f(u_n)u_n|}{t_n^2}|\xi|\,\mathrm{d}x=o(1).$$

Também como $|(p+1)F(s)-f(s)s|=O(|s|^\alpha)$ quando $|s|\to+\infty$, temos

$$\int_{|u_n|\geq R}|a(x)|\frac{|(p+1)F(u_n)-f(u_n)u_n|}{t_n^2}|\xi|\,\mathrm{d}x\leq C\int_{\mathrm{supp}(\xi)}\frac{|u_n|^\alpha}{t_n^2}\,\mathrm{d}x=o(1).$$

Usando a hipótese (F_3), derivamos que

$$\frac{p+1}{t_n^2}\int_{B_{R_n}} a(x)F(u_n)\xi\,\mathrm{d}x=\int_{B_{R_n}} a(x)\frac{u_n f(u_n)}{t_n^2}\xi\,\mathrm{d}x+o(1). \tag{4.22}$$

Escolha ξ tal que $0\leq\xi(x)\leq 1$ para todo $x\in\mathbb{R}^N$ e $\xi\equiv 1$ sobre B_R. Então, por (4.20)–(4.22) concluímos que

$$
\begin{aligned}
0 \geq & \liminf_{n\to+\infty} \int_{B_{R_n}} a(x)\frac{F(u_n)}{t_n^2}(1-\xi)\,\mathrm{d}x \\
\geq & \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \limsup_{n\to+\infty} \int_{B_{R_n}} a(x)\frac{u_n f(u_n)}{t_n^2}(1-\xi)\,\mathrm{d}x \\
\geq & \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} \limsup_{n\to+\infty} \int_{B_{R_n}} \left(|\nabla v_n|^2 + V(x)v_n^2\right)\xi\,\mathrm{d}x \\
\geq & \frac{1}{2} - \frac{1}{p+1} > 0,
\end{aligned}
$$

uma contradição. Logo, (u_n) é limitada em E.

Agora, seja $\gamma = \liminf_{n\to+\infty} \|u_n\|_E^2$. Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em E e a norma é semicontínua inferiormente com respeito à convergência fraca, temos que $\gamma \geq \|u\|_E^2$. Por passar a uma subsequência, podemos assumir que $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \|u_n\|_E^2$. Da equação em (P) segue que

$$
\begin{aligned}
\|u_n\|_E^2 + \int_{\mathbb{R}^N} a^-(x)f(u_n)u_n\,\mathrm{d}x = & \int_{\mathbb{R}^N} a^+(x)f(u_n)u_n\,\mathrm{d}x \\
= & \int_{\mathbb{R}^N} a^+(x)f(u)u\,\mathrm{d}x + o(1) \\
= & \|u\|_E^2 + \int_{\mathbb{R}^N} a^-(x)f(u)u\,\mathrm{d}x + o(1).
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\gamma + \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} a^-(x)f(u_n)u_n\,\mathrm{d}x \leq \|u\|_E^2 + \int_{\mathbb{R}^N} a^-(x)f(u)u\,\mathrm{d}x.
$$

Pelo Lema de Fatou segue que

$$
\gamma \leq \|u\|_E^2 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} a^-(x)f(u_n)u_n\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} a^-(x)f(u)u\,\mathrm{d}x.
$$

Em particular, $u_n \to u$ em E. Desde que Φ é de classe C^1 sobre E, segue que $\Phi(u_n) \to \Phi(u) = c > 0$, pois $\Phi = \lim_{n\to+\infty} \Phi_n \geq \sigma > 0$. Portanto, u é não-trivial.

4.4 Alguns teoremas tipo Liouville não-linear

Proposição 4.4.1. *Seja $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ limitada e satisfazendo, para algum $\ell > 0$ e $1 < p < 2^*$,*

$$
\Delta v + \ell |v|^{p-1} v = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{4.23}
$$

Se v tem índice finito, então $v \equiv 0$.

Demonstração. Podemos assumir $\ell = 1$. Primeiro vamos mostrar que $\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x < +\infty$. Tomemos R suficientemente grande e $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi \equiv 1$ sobre $\mathbb{R}^N \backslash B_{2R}(0)$, $\varphi \equiv 0$ sobre $B_{R_0} \cup B_{2R}^c$ e $|\nabla \varphi(x)| \leq CR^{-1}$ para cada $x \in B_R^c$, onde C depende somente da dimensão N. Provaremos que $v \in L^{p+1}(\mathbb{R}^N)$.

Multiplicamos a equação (4.23) por $v\varphi^2$ para obtermos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\varphi^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2|\nabla v|^2 + 2\int_{\mathbb{R}^N} \varphi v\nabla\varphi\nabla v\,\mathrm{d}x. \tag{4.24}$$

Por hipótese, existe $R_0 > 0$ tal que $\langle I''(v)v\varphi, v\varphi\rangle \geq 0$, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^N} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^N} v\varphi\nabla v\nabla\varphi\,\mathrm{d}x \geq p\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\varphi^2\,\mathrm{d}x. \tag{4.25}$$

Substituindo (4.24) em (4.25) obtemos que

$$p\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\varphi^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\varphi^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x$$

e como $p > 1$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\varphi^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x.$$

Em particular,

$$\begin{aligned}\int_{B_R\setminus B_{2R_0}} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq& C\left(\int_{B_{2R_0}\setminus B_{R_0}} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x + \int_{B_{2R}\setminus B_R} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x\right)\\ \leq& C\left(1 + \int_{B_{2R}\setminus B_R} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

donde, para cada $R > 2R_0$, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq& C\left(1 + \int_{B_{2R}\setminus B_R} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x\right) + \int_{B_{2R_0}} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x\\ \leq& C\left(1 + R^{-2}\int_{B_{2R}} v^2\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned} \tag{4.26}$$

Desde que v é limitada, $\int_{B_R} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x = O(R^N)$. Assim, se $N = 2$, a desigualdade acima mostra que $\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x$ é finita.

Agora seja $N > 2$ e suponha por contradição que $\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x$ não é finita. Então, para cada R grande,

$$\int_{B_R} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq CR^{-2}\int_{B_{2R}} v^2\,\mathrm{d}x. \tag{4.27}$$

A desigualdade de Hölder implica

$$R^{-2}\int_{B_{2R}} v^2\,\mathrm{d}x \leq C\left(\int_{B_{2R}} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{2}{p+1}} R^{-\gamma}, \tag{4.28}$$

onde

$$\gamma = 2 - N\frac{p-1}{p+1} = 2N\left(\frac{1}{p+1} - \frac{1}{2^*}\right) > 0.$$

Se iterarmos o argumento, concluímos após um número finito k de passos que existe $C > 0$, dependendo de k, tal que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq & CR^{-\gamma}\left(\int_{B_{2R}} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x\right)^{(\frac{2}{p+1})^k}\\ \leq & CR^{N(\frac{2}{p+1})^k - (1+\frac{2(k-1)}{p+1})\gamma}.\end{aligned}$$

Assim, tomando k suficientemente grande, podemos assumir que a potência é negativa. Fazendo $R \to +\infty$ temos que $v \equiv 0$, uma contradição. Logo, $\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p\,\mathrm{d}x$ é finita.

Agora, para qualquer $R > 0$ escolhamos $\varphi \equiv 1$ sobre B_R e $\varphi \equiv 0$ sobre B_{2R}^c com $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq CR^{-1}$. Segue de (4.25) que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \leq & C\left(\int_{B_{2R}} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x + R^{-2}\int_{B_{2R}} v^2\,\mathrm{d}x\right)\\ \leq & C\left(\|v\|_{p+1} + R^{-2}\int_{B_{2R}} v^2\,\mathrm{d}x\right)\end{aligned}$$

Usando a argumentação anterior verificamos que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x$ é finita. Por outro lado, pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} v\varphi\nabla v\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\right| \leq & \left(\int_{\mathbb{R}^N} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq & C\left(R^{-2}\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} v^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leq & C\left(R^{-2}\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathrm{supp}(\varphi)} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}}\\ = & o(1),\end{aligned}$$

donde, passando o limite em (4.22) concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x. \tag{4.29}$$

Desde que ambos $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x$ e $\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x$ são finitas, podemos escrever a identidade de Pohozaev (VER okavian, willem) como

$$\frac{2^*}{p+1}\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x.$$

Isto, juntamente com (4.28), implicam que $v \equiv 0$. $\square$

Para o próximo resultado, consideremos uma função $g \in C^1([-1,1],\mathbb{R})$ satisfazendo, para algumas constantes positivas c_1, c_2, c_3, c_4 e cada $s \in [-1,1]$, as seguintes condições:

(B_1) $c_1 G(s) \leq g(s)s \leq c_2 G(s)$;

(B_2) $c_3|s|^{p+1} \leq g(s)s \leq c_4|s|^{p+1}$;

(B_3) $g'(s)s^2 - pg(s)s \leq 0$,

onde $G(s) = \int_0^s g(t)\,\mathrm{d}t$. Denotemos $h(s) = |s|^{p-1}s$ e $H(s) = |s|^{p+1}/(p+1)$.

Lema 4.4.2. *Seja $c \in C^2(\mathbb{R}^N)$ uma solução da equação*

$$\Delta v + x_N^+|v|^{p-1}v - x_N^- g(v) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.30}$$

com g satisfazendo (B_1)–(B_2). Então existe $C > 0$ tal que, para cada $R > 0$,

(C_1) $\int_{B_R} x_N^2|v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq C\int_{B_{2R}}|x_N||\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + C\left(\int_{B_{2R}} v^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{B_{2R}}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}$;

(C_2) $\int_{B_R}|x_N||v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq CR^{-1}\int_{B_{2R}} x_N^2|v|^{p+1}\,\mathrm{d}x + C\int_{B_{2R}}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x$;

(C_3) $\int_{B_R}|v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq CR^{-1}\left(\int_{B_R}|x_N||v|^{p+1}\,\mathrm{d}x + \int_{B_R}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)$.

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $|\nabla\varphi(x)| \leq CR^{-1}$ e $0 \leq \varphi(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $\varphi \equiv 1$ sobre B_R e $\varphi \equiv 0$ sobre $\mathbb{R}^N \backslash B_{2R}$. Multiplicando a equação (4.30) por $x_N v\varphi^2$ e integrando sobre $\mathbb{R}^N$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[x_N^+ x_N|v|^{p+1} - x_N^- x_N v g(v)\right]\varphi^2\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{\partial v}{\partial x_N}v\varphi^2 + x_N\varphi^2|\nabla v|^2 + 2x_N v\varphi\nabla v\cdot\nabla\varphi\right]\mathrm{d}x.$$

Usando (B_1)-(B_2) e desigualdade de Hölder, concluímos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} x_N^2|v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq& C\int_{B_{2R}}\left[x_N^+ x_N|v|^{p+1} - x_N^- x_N v g(v)\right]\varphi^2\,\mathrm{d}x\\ \leq& C\int_{B_{2R}}|x_N||\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + C\left(\int_{B_{2R}} v^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\left(\int_{B_{2R}}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Para provarmos (C_3), denotamos $e_N = (0,0,\cdots,1)$ e consideramos o Teorema de Stokes, de forma que

$$\begin{aligned}div(U) =& div\left(\varphi\frac{\partial v}{\partial x_N}\nabla v - \varphi\frac{|\nabla v|^2}{2}e_N\right)\\ =&\varphi\frac{\partial v}{\partial x_N}\Delta v + \frac{\partial v}{\partial x_N}\nabla\varphi\cdot\nabla v - \frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\frac{|\nabla v|^2}{2}\end{aligned}$$

implica

$$\int_{\mathbb{R}^N}\varphi\frac{\partial v}{\partial x_N}\Delta v\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial\varphi}{\partial x_N}\frac{|\nabla v|^2}{2}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{\partial v}{\partial x_N}\nabla\varphi\cdot\nabla v. \tag{4.31}$$

Desde que

$$\begin{aligned} div(V) =& div\,(x_n H(v)\varphi e_N) \\ =& H(v)\varphi + x_N h(v)\frac{\partial v}{\partial x_N}\varphi + x_N H(v)\frac{\partial \varphi}{\partial x_N} \end{aligned}$$

e V se anula sobre $\{x_N = 0\}$, usamos mais uma vez o Teorema de Stokes para concluirmos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} x_N^+ h(v)\frac{\partial v}{\partial x_N}\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_{\{x_N\geq 0\}} H(v)\varphi\,\mathrm{d}x - \int_{\{x_N\geq 0\}} x_N H(v)\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x. \tag{4.32}$$

De maneira análoga, obtemos

$$-\int_{\mathbb{R}^N} x_N^- g(v)\frac{\partial v}{\partial x_N}\varphi\,\mathrm{d}x = -\int_{\{x_N\leq 0\}} G(v)\varphi\,\mathrm{d}x - \int_{\{x_N\leq 0\}} x_N G(v)\frac{\partial \varphi}{\partial x_N}\,\mathrm{d}x. \tag{4.33}$$

Somando (4.31), (4.32) e (4.33), e observando que o termo à esquerda do resultado é simplesmente a equação (4.30) multiplicada por $\varphi\frac{\partial v}{\partial x_N}$, concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\{x_N\geq 0\}} H(v)\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\{x_N\leq 0\}} G(v)\varphi\,\mathrm{d}x \leq& C\Big\{\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla v|^2|\nabla\varphi|\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} x_N^+ H(v)|\nabla\varphi|\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} x_N^- G(v)|\nabla\varphi|\,\mathrm{d}x.\Big\} \end{aligned}$$

Usando (B_2) obtemos (C_3):

$$\int_{B_R}|v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq CR^{-1}\left(\int_{B_R}|x_N||v|^{p+1}\,\mathrm{d}x + \int_{B_R}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x\right).$$

Para obtermos (C_2), multiplicamos a equação (4.30) por $\varphi x_N\frac{\partial v}{\partial x_N}$ e integramos $div(x_N U)$ e $div(x_N V)$ sobre $x_N \geq 0$. Procedemos de modo semelhante sobre $\{x_N \leq 0\}$ e adicionando as identidades obtidas encontramos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} x_N^+ H(v)\varphi\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} x_N^- G(v)\varphi\,\mathrm{d}x \leq& C\Big\{\int_{\mathbb{R}^N}|x_N||\nabla v|^2|\nabla\varphi|\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}\varphi|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N}(x_N^+)^2 H(v)|\nabla\varphi|\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N}(x_N^-)^2 G(v)|\nabla\varphi|\,\mathrm{d}x\Big\}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{B_R}|x_N||v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq CR^{-1}\int_{B_{2R}} x_N^2|v|^{p+1}\,\mathrm{d}x + C\int_{B_{2R}}|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x.$$

□

Proposição 4.4.3. *Seja $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ limitada com $\|v\|_\infty \leq 1$ e satisfazendo*

$$\Delta v + x_N^+|v|^{p-1}v - x_N^- g(v) = 0, \quad \text{em} \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.34}$$

onde $1 < p \leq 2^*$ e $g \in C^1([-1,1],\mathbb{R})$ satisfaz (B_1)–(B_2). Se v tem índice finito, então $v \equiv 0$.

Demonstração. Seja $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ sobre $B_R \backslash B_{2R_0}$ e $\varphi \equiv 0$ sobre $B_{R_0} \cup B_{2R}^c$. Multiplicando a equação (4.34) por $v\varphi^2$ e integrando sobre $\mathbb{R}^N$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [x_N^+ h(v)v - x_N^- g(v)v]\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 \varphi^2\,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^N} \varphi v \nabla v \nabla \varphi\,\mathrm{d}x. \tag{4.35}$$

Considerando que v tem índice finito, temos que

$$\begin{aligned}\langle E''(v)v\varphi, v\varphi\rangle = &\int_{\mathbb{R}^N} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^N} v\varphi\nabla v\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{\mathbb{R}^N} \left[x_N^+ h'(v)v^2 - x_N^- g'(v)v^2\right] \varphi^2\,\mathrm{d}x \geq 0,\end{aligned}$$

donde, por (B_3), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^2|\nabla v|^2\,\mathrm{d}x + 2\int_{\mathbb{R}^N} v\varphi\nabla v\cdot\nabla\varphi\,\mathrm{d}x \geq p\int_{\mathbb{R}^N} \left[x_N^+ h(v)v - x_N^- g(v)v\right] \varphi^2\,\mathrm{d}x.$$

Assim, por (4.35) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\varphi^2\,\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}^N} v^2|\nabla\varphi|^2\,\mathrm{d}x.$$

Seguindo a mesma argumentação na prova da Proposição 4.4.1 quando deduzimos a equação 4.26, segue que

$$\int_{B_{R/2}} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \leq C\left(1 + R^{-2}\int_{B_R} v^2\,\mathrm{d}x\right), \tag{4.36}$$

para R suficientemente grande.

Vamos supor primeiramente que $N \geq 3$. Então

$$\int_{B_R} v^2\,\mathrm{d}x \leq CR^N \tag{4.37}$$

e por (4.36)

$$\int_{B_{R/2}} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x \leq CR^{N-2}. \tag{4.38}$$

Agora, usando as desigualdades (C_1)–(C_3), obtemos que

$$\int_{B_{R/4}} x_N^2|v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq CR^{N-1}, \tag{4.39}$$

$$\int_{B_{R/8}} |x_N||v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq CR^{N-2} \tag{4.40}$$

e

$$\int_{B_{R/16}} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x \leq CR^{N-3}. \tag{4.41}$$

Pela desigualdade de Hölder e expressão (4.41), temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_{R/16}} |v|^2\,\mathrm{d}x \leq& C\left(\int_{B_{R/16}} |v|^{p+1}\,\mathrm{d}x\right) R^{N\frac{p-1}{p+1}}\\ \leq& CR^{2\frac{N-3}{p+1}}.R^{2-2N\left(\frac{1}{p+1}-\frac{1}{2^*}\right)}.\end{aligned}$$

Assim, para R grande, a equação (4.37) implica que

$$\int_{B_R} |v|^2\,\mathrm{d}x \leq CR^{2\frac{N-3}{p+1}+2}. \tag{4.42}$$

Mais uma vez, iterando o argumento por reinserir (4.42) em (4.36), concluímos que, após um número finito k de passos,

$$\begin{aligned}\int_{B_R} |v|^2\,\mathrm{d}x \leq& CR^{\left(\frac{2}{p+1}\right)^{k-1}(N-3)-\left(\frac{2}{p+1}\right)^{k-2}-\left(\frac{2}{p+1}\right)+2}\\ \leq& CR^2,\end{aligned} \tag{4.43}$$

onde C depende de k. Observamos que (4.43) também é válida para $N=2$.

Combinando (4.43) e (4.36) vemos que $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2\,\mathrm{d}x$ é finita. Logo, usando as desigualdades (C_1) e (C_2) deduzimos que $\int_{\mathbb{R}^N} |x_N||v|^{p+1}\,\mathrm{d}x$ também é finita. Portanto, (C_3) mostra que $v \equiv 0$, como queríamos. □

Proposição 4.4.4. *Seja $v \in C^2(\mathbb{R}^N)$ limitada e satisfazendo*

$$\Delta + x_N^+|v|^{p-1}v = 0, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.44}$$

onde $1 < p < 2^*$. Se v tem índice finito, então $v \equiv 0$.

Demonstração. Para uma prova ver [45, Proposition 16]. □

Referências Bibliográficas

[1] S. Alama e M. Del Pino, *Solutions of elliptic equations with indefinite nonlinearities via Morse theory and linking*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **13** (1996), 95–115.

[2] S. Alama e G. Tarantello, *On semilinear elliptic equations with indefinite nonlinearities*, Calc. Var. Partial Differential Equations **1** (1993), 439–475.

[3] S. Alama e G. Tarantello, *Elliptic problems with nonlinearities indefinite in sign*, J. Funct. Anal. **141** (1996), 159–215.

[4] A. Ambrosetti e E. Colorado, *Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations*, J. London Math. Soc. **75** (2007), 67–82.

[5] A. Ambrosetti e A. Malchiodi, *Nonlinear analysis and semilinear elliptic problems*, Cambridge University Press (2007).

[6] A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis **14** (1973), 349–381.

[7] T. Bartsch and Z.G. Wang, *Existence and multiplicity results for some superlinear elliptic problems on $\mathbb{R}^n$*, Comm. Part. Diff. Eq., **20** (1995), 1725–1741.

[8] H. Brezis, *Analyse Fonctionnelle - Théorie et applications*, Masson (1983).

[9] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I.*, Arch. Ration. Mech. Analysis **82** (1983) 313–345.

[10] H. Berestycki, P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. II.*, Arch. Ration. Mech. Analysis **82** (1983) 347–375.

[11] V. Benci and G. Cerami, *Existence of positive solutions of the equation $-\Delta u + a(x)u = u^{(n+2)/(n-2)}$ in $\mathbb{R}^N$*, J. funct. Analysis, **80** (1990) 90–117.

[12] L. Boccardo, D. G. de Figueiredo, *Some remarks on a system of quasilinear elliptic equations*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **9** (2002) 309–323

[13] H. Buljan, T. Schwartz, M. Segev, M. Soljacic and D. Christoudoulides, *Polychromatic partially spatially incoherent solitons in a non-instantaneous Kerr nonlinear medium*, J. Opt. Soc. Am. B. **21** (2004), 397–404.

[14] D. M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Diff. Eq. **17** (1992), 407–435.

[15] J. Chabrowski and J. Yang, *Existence theorems for elliptic equations involving supercritical Sobolev exponent*, Advances in Differential Equations **2** (1997), 231–256.

[16] S. M. Chang, C. S. Lin, T. C. Lin and W. W. Lin, *Segregated nodal domains of two-dimensional multispecies Bose-Einstein condesates* , Physica D: Nonlinear Phenomena, **196** (2004), 341–361.

[17] D. Christodoulides, E. Eugenieva, T. Coskun, M. Mitchell and M. Segev, *Equivalence of three approaches describing partially incoherent wave propagation in inertial nonlinear media*, Phys. Rev. E **63** (2001), 035601.

[18] J. Chabrowski and J. Yang, *Existence theorems for elliptic equations involving supercritical Sobolev exponent*, Advances in Differential Equations **2** (1997), 231–256.

[19] D. G. Costa, *On a class of elliptic systems in* $\mathbb{R}^n$, Eletronic J. Diff. Eq. **7** (1994), 1-14.

[20] D. G. Costa and C. A. Magalhães, *A variational approach to noncooperative elliptic systems*, Nonlinear Anal. **25** (1995), 699–715.

[21] D. G. Costa, M. Ramos e H. Tehani, *Nonzero solutions for a Schrödinger equation with indefinite linear and nonlinear parts*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **134** (2004), 249–258.

[22] D. G. Costa e H. Tehani, *Existence and multiplicity results for a class of Schrödinger equations with indefinite nonlinearities*, Adv. Differential Equations **8** (2003), 1319–1340.

[23] D. G. Costa, Y. Guo e M. Ramos, *Existence and multiplicity results for nonlinear elliptic problem in* $\mathbb{R}^N$, Calc. Var. Partial Differential Equations **13** (2002), 149–161.

[24] D. G. Figueiredo, O. H. Miyagaki and B. Ruf, *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calc. Var. **3** (1995), 139–153.

[25] D. G. Figueiredo, J. M do Ó and B. Ruf, *Critical and subcritical elliptic systems in dimension two*,Ind. Univ. Math. J. **53** (2004), 1037–1054.

[26] B. Gidas e J. Spruck, *A priori bounds for positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Partial Differential Equations **6** (1981), 883–901.

[27] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer (1983), (2nd. ed).

[28] J. V. Gonçalves e O. H. Miyagaki, *Existence of nontrivial solutions for semilinear elliptic equations at resonance*, Houston J. of Math. **16** (1990), 583–595.

[29] J. M. do Ó, *N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Abstr. Appl. Anal. **2** (1997), 301–315.

[30] J. M. do Ó, E. S. Medeiros and U. B. Severo, *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008), 286–304.

[31] J. Jost, *Partial Differential Equations*, (Graduated Text in Mathematics 214), Springer (2002).

[32] G. Li and H. Zhou, *Multiple solutions to p-Laplacian problems with asymptotic nonlinearity as u^{p-1} at infinity*, J. London Math. Soc. **65** (2002), 123–138.

[33] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations - Part I*, Rev. Mat. Iberoamericana (1985), 145–201.

[34] F. Liu e J. Yang, *Nontrivial solutions of Schrödinger equations with indefinite nonlinearities*, J. Math. Anal. Appl. **334** (2007), 627–645.

[35] L. A. Maia, E. Montefusco e B. Pellaci, *Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system*, Journal of Differential Equations, **15** (2006), 743–767.

[36] L. A. Maia and E. A. B. Silva, *On a class of coupled elliptic systems in $\mathbb{R}^N$*, NODEA Nonlinear Differential Equations Appl., **14** (2007), 303–313.

[37] O. H. Miyagaki, *On a class of semilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Nonlinear Analysis, **29** (1997), 773–781.

[38] J. Moser, *A new proof de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Comm. Pure Apll. Math. **13** (1960) 457–468.

[39] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J. **20** (1971), 1077–1092.

[40] E. S. Noussair, C. A. Swanson and Y. Jianfu, *Positive finite energy solutions of critical semilinear elliptic problems*, Can. J. Math., **44** (1992), 1014–1029.

[41] X. Pan, *Positive solutions of the elliptic equation $\Delta u + u^{(n+2)/(n-2)} + K(x)u^q = 0$ in $\mathbb{R}^N$ and in balls*, J. funct. Analysis, **172** (1993), 323–338.

[42] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **65**, AMS, Providence, RI (1986).

[43] P. H. Rabinowitz, *Variational methods for nonlinear elliptc eigenvalue problems*, Indiana Univ. J. Maths. **23** (1974), 729–754.

[44] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew Math. Phys., **43** (1992), 272–291.

[45] M. Ramos, S. Terracini e C. Troestler, *Superlinear indefinite elliptic problems and Pohozaev type identities*, J. Funct. Anal. **159** (1998), 596–628.

[46] B. Ruf, *A sharp Trudinger–Moser type inequality for unbounded domains in* $\mathbb{R}^2$, J. Funct. Anal. **219** (2005), no. 2, 340–367.

[47] M. Schneider, *Entire solutions of semilinear elliptic problems with indefinite nonlinearities*, Dissertation Dr. Naturwiss, Shaker Verlag, Aachen (2001).

[48] P. Sintzoff and M. Willem, *A semilinear elliptic equation on* $\mathbb{R}^N$ *with unbounded coefficients* Variational and topological methods in the study of nonlinear phenomena, PNLDE **49**, Birkhauser, Boston, (2001), 107–115.

[49] B. Sirakov, *Existence and multiplicity of solutions of semi-linear elliptic equations in* $\mathbf{R}^N$, Calc. Var. Partial Differential Equations **11** (2000), 119–142.

[50] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149–162.

[51] W. A. Strauss, *Mathematical aspects of classical nonlinear field equations*, No. **98** in Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin-New York, 1979.

[52] E. Tonkes, *Solutions to a perturbed critical semilinear equation concerning the N-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$, Comment. Math. Univ. Carolin. **40** (1999), 679–699.

[53] N. S. Trudinger, *On the embedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–484.

[54] J. Vélin and F. de Thélin, *Existence and nonexistence of nontrivial solutions for some nonlinear elliptic system*, Rev. Math. Univ. Complutenese Madrid **6** (1993), 153–194.

[55] M. Willem, *Minimax Theorems*, Birkhäuser (1996).

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).