Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Doutorado em Matemática

Multiplicidade de soluções para problemas elípticos singulares envolvendo crescimento crítico

Manassés Xavier de Souza

Tese de Doutorado

Recife
22 de junho de 2010

Universidade Federal de Pernambuco
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Manassés Xavier de Souza

Multiplicidade de soluções para problemas elípticos singulares envolvendo crescimento crítico

Trabalho apresentado ao Programa de Doutorado em Matemática do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como requisito parcial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: *Prof. João Marcos Bezerra do Ó*

Recife
22 de junho de 2010

Souza, Manassés Xavier de

Multiplicidade de soluções para problemas elípticos singulares envolvendo crescimento crítico / Manassés Xavier de Souza. - Recife: O Autor, 2010.

xvi, 153 p. : il., fig.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco. CCEN. Matemática, 2010.

Inclui bibliografia.

1. Análise. 2. Equações diferenciais parciais. I. Título.

515 CDD (22. ed.) MEI2010 – 0116

Tese submetida ao Corpo Docente do Programa de Pós-graduação do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Pernambuco como parte dos requisitos necessários para a obtenção do Grau de Doutorado em Matemática.

Aprovado: ______________________________

João Marcos Bezerra do Ó, UFPE

Orientador

____

Miguel Fidencio Loayza Lozano, UFPE

____

Everaldo Souto de Medeiros, UFPB

____

Daniel Cordeiro de Morais Filho, UFCG

____

David Goldstein Costa, University of Nevada Las Vegas

MULTIPLICIDADE DE SOLUÇÕES PARA PROBLEMAS ELÍPTICOS SINGULARES ENVOLVENDO CRESCIMENTO CRÍTICO

Por

Manassés Xavier de Souza

UNIVERSIDADE FEDERAL DE PERNAMBUCO
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Cidade Universitária – Tels. (081) 2126.8415– Fax: (081) 2126.8410
RECIFE – BRASIL

Junho – 2010

A minha família

Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, a Deus por ter me fornecido saúde e paz. Sem Ele esta conquista não teria se concretizado.

Ao meu orientador, Professor João Marcos Bezerra do Ó, pela dedicação, atenção e e pela excelente orientação.

A professora Flávia Jerônimo Barbosa pelo o apoio e incentivo.

A minha família que sempre apoiou as minhas decisões.

Aos professores Miguel Fidencio Loayza lozano, Everaldo Souto de Medeiros, Daniel Cordeiro de Morais Filho e David Goldstein Costa, por terem aceitado a participar da banca examinadora.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE.

Aos amigos e colegas do Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFPE.

Enfim, a CNPq pelo suporte financeiro.

Resumo

Usando métodos variacionais e o método de sub e super soluções, neste trabalho estudamos existência e multiplicidade de soluções para algumas classes de problemas elípticos singulares envolvendo crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser.

Tratamos também de uma generalização para desigualdade de Trudinger-Moser e a existência de uma função extremal. A prova deste resultado é baseada na análise de blow-up.

Palavras-chave: Equações elípticas de segunda ordem, equação de Schrödinger, métodos variacionais, expoente crítico, desigualdade de Trudinger-Moser, análise de blow-up.

Abstract

Using variational methods and the method of sub and super solutions, in this thesis we studied existence and multiplicity of solutions for some classes of singular elliptic problems involving growth of the Trudinger-Moser type.

Also treat a generalization for the Trudinger-Moser inequality and the existence of an extremal function. The proof of this result is based on the blow-up analysis.

Keywords: Second order elliptic equations, Schrödinger equation, variational methods, critical exponents, Trudinger-Moser inequality, blow-up analysis.

Sumário

Lista de Figuras

Neste trabalho faremos uso da seguinte simbologia:

- $C, C_0, C_1, C_2, \ldots$ denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto mensurável, então $|\Omega|$ denota sua medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^N$;
- B_R denota a bola aberta centrada na origem e raio $R > 0$;
- X^* é o dual topológico do espaço de Banach X;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dual entre X^* e X;
- Denotemos a convergência fraca em X por " $\rightharpoonup$ " e a convergência forte por " $\to$ ";
- $\operatorname{supp}(f)$ denota o suporte da função f;
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N} \right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ denota o Laplaciano de u;
- $\Delta_N u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2} \nabla u)$ denota o $N-$Laplaciano de u;
- $L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \displaystyle\int_\Omega |u|^p \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$ com $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto conexo, denota o espaço de Lebesgue com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

- $L^\infty(\Omega)$ denota o espaço das funções mensuráveis que são limitadas quase sempre em Ω com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ denota o espaço das funções infinitamente diferenciáveis com suporte compacto;

- $C^{0,\sigma}(\overline{\Omega}) = \left\{ u \in C(\Omega) : \sup\limits_{x,y\in\Omega} \dfrac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\sigma} < \infty \right\}$ com $0 < \sigma < 1$, e $C^{k,\sigma}(\overline{\Omega})$ são as funções em $C^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais até a ordem k estão em $C^{0,\sigma}(\overline{\Omega})$;

- Para $1 \leq p < +\infty$,

  $$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_i \in L^p(\Omega); \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = -\int_\Omega g_i \varphi \,\mathrm{d}x, \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \text{ e } i = 1, \cdots, N \right\}$$

  com norma dada por
  $$\|u\|_{1,p} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p)\,\mathrm{d}x \right)^{1/p}$$
  e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $C_0^\infty(\Omega)$ com respeito à norma acima. Quando $p = 2$, escrevemos $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

- Para $1 \leq p < +\infty$, $p^* = \frac{Np}{N-p}$ é o expoente crítico de Sobolev.

Introdução

Neste trabalho estudamos problemas envolvendo equações elípticas de segunda ordem que envolvem questões de perda de compacidade devido a imersão de Sobolev no caso Trudinger-Moser.

As técnicas aqui utilizadas são: métodos variacionais, mais precisamente, teoria dos pontos críticos, passo da montanha e minimização. Usamos também o método de sub e super soluções e análise de blow-up.

As classes de problemas que foram abordadas no presente trabalho têm várias aplicações, por exemplo: em glaciologia; em mecânica dos fluidos no estudo dos fluidos não newtonianos; em elasticidade não linear; em algumas reações de difusão, e na extração de petróleo. Estudamos também problemas relacionados a existência de ondas estacionárias para a equação de Schrödinger. Citamos por exemplo [31, 45] e suas referências para o desenvolvimento dos aspectos físicos para os tipos de problemas citados acima.

Este trabalho está dividido em quatro capítulos.

No *Capítulo 1* estudamos a existência e multiplicidade de soluções fracas para a classe de problemas singular da forma:

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{f(x,u)}{|x|^a} + h(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{0.1}$$

onde $\Delta_N u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é o operador $N-$Laplaciano, Ω é um domínio limitado contendo a origem em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$, $a \in [0,N)$, $h \in (W_0^{1,N}(\Omega))^* = W^{-1,N'}$ é uma pequena pertubação com $N' = N/(N-1)$, $h \not\equiv 0$ e a não-linearidade $f(x,s)$ tem *crescimento subcrítico* ou *crítico* do tipo Trudinger-Moser, os quais definimos a seguir: Dizemos que $f(x,s)$ tem *crescimento subcrítico* em $+\infty$ se

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\alpha|s|^{N/(N-1)}}} = 0, \ \text{ uniformemente em } \ x \in \Omega, \ \text{ para todo } \ \alpha > 0 \tag{0.2}$$

e $f(x,s)$ tem *crescimento crítico* em $+\infty$ se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\alpha|s|^{N/(N-1)}}} = \begin{cases} 0, & \text{uniformemente em } \ x \in \Omega, \ \text{ para todo } \ \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \text{uniformemente em } \ x \in \Omega, \ \text{ para todo } \ \alpha < \alpha_0. \end{cases} \tag{0.3}$$

Similarmente definimos crescimento subcrítico e crítico em $-\infty$. Esta noção de criticalidade em $W_0^{1,N}(\Omega)$ é motivada pela desigualdade de Trudinger-Moser [53, 66].

Assumimos também as seguintes condições sob a não-linearidade $f(x,s)$:

(f_0) $f(x,s) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$;

(f_1) existem $\theta > N$ e $s_1 > 0$ tais que para todo $|s| \geq s_1$ e $x \in \Omega$,

$$0 < \theta F(x,s) := \theta \int_0^s f(x,t)\, \mathrm{d}t \leq s f(x,s);$$

(f_2) existem constantes $R, M > 0$ tais que para todo $|s| \geq R$ e $x \in \Omega$

$$0 < F(x,s) \leq M|f(x,s)|;$$

(f_3) $\limsup_{s\to 0} \dfrac{NF(x,s)}{|s|^N} < \lambda_1$,

onde λ_1 é o primeiro autovalor do seguinte problema não-linear:

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right) = \frac{\lambda |u|^{N-2}u}{|x|^a}, \;\; u \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Os principais resultados deste capítulo são enunciados como segue:

Teorema 1. *Suponha que $f(x,s)$ tem crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$, e satisfaz as condições (f_0), (f_1) (ou (f_2)) e (f_3). Então existe $\delta_1 > 0$ tal que o problema (0.1) possui pelo menos duas soluções fracas em $W_0^{1,N}(\Omega)$ sempre que $0 < \|h\|_* < \delta_1$. Uma com energia positiva e outra com energia negativa.*

Teorema 2. *Suponha que $f(x,s)$ tem crescimento crítico em $+\infty$ e $-\infty$, e satisfaz as condições (f_0), (f_2) e (f_3). Então existe $\delta_1 > 0$ tal que o problema (0.1) possui pelo menos uma solução fraca em $W_0^{1,N}(\Omega)$ com energia negativa sempre que $0 < \|h\|_* < \delta_1$.*

Denotemos por r o raio da maior bola centrada na origem e contida em Ω.

Teorema 3. *Assumindo as condições do Teorema 2 e se*

(f_4^+) *existe β_0 tal que*

$$\liminf_{s\to+\infty} s f(x,s) e^{-\alpha_0 |s|^{N/(N-1)}} \geq \beta_0 > \frac{N-a}{r^{N-a} e^{1+1/2+\cdots+1/(N-1)}} \left(\frac{N-a}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Então existe $\delta_2 > 0$ tal que o problema (0.1) possui uma segunda solução sempre que $0 < \|h\|_* < \delta_2$.

A prova dos nossos resultados segue por minimização local em combinação com teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale. Mostramos que no caso subcrítico o funcional associado ao problema satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, e como consequência podemos distinguir uma solução que é um mínimo local de uma solução do tipo passo da montanha. Porém, no caso crítico a condição de Palais-Smale não é satisfeita em geral, assim para provar que as soluções são distintas o argumento é mais delicado, requerendo um refinamento para os níveis de energia do funcional associado ao problema. A condição (f_4^+) no Teorema 3 é crucial para estimar o nível do passo da montanha.

Observações.

1. Problemas elípticos envolvendo o operador Laplaciano e crescimento crítico em termos da desigualdade de Trudinger-Moser em domínios limitados de $\mathbb{R}^2$ foram abordados em [6, 7, 30] para o caso não-singular e homogêneo, isto é, $a = 0$ e $h \equiv 0$. Já os problemas quase-lineares para o $N-$Laplaciano e com crescimento crítico em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$, com $N \geq 2$, foram estudados em [3, 32], considerando o caso não-singular e homogêneo. O caso não-homogêneo foi focado em [64]. Nestes trabalhos, entre outras condições, assume-se no lugar de (f_4^+) que:
$$\liminf_{s\to+\infty} sf(x,s)e^{-\alpha_0|s|^{N/(N-1)}} \geq \beta_0 > \frac{1}{d^N}\left(\frac{N}{\alpha_0}\right)^{N-1}, \tag{0.4}$$
onde d é o raio da maior bola contida em Ω.

2. O estudo dos resultados deste capítulo foi motivado pelos trabalhos [3, 32, 64] e por um recente artigo de Adimurthi e Sandeep [5] onde eles provaram uma versão singular da desigualdade de Trudinger-Moser e estudaram a existência de soluções fracas para o seguinte problema quase-linear e homogêneo
$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{f(u)u^{N-2}}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

3. Os resultados deste capítulo generalizam os resultados principais em [3, 5, 30, 32, 64], no sentido em que consideramos o caso singular e não-homogêneo. Além disso, para problemas com crescimento crítico e não-singular, a condição (0.4) é mais restritiva que a hipótese (f_4^+) no Teorema 3, pois no caso não-singular podemos tomar $r = d$.

No *Capítulo 2* estudamos a existência e multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas singular da forma:
$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{\lambda f(u)}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P$_\lambda$}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ contendo a origem com $N \geq 2$, λ é um parâmetro positivo, $a \in [0,N)$ e a não-linearidade $f(s)$ envolve uma combinação de termos côncavos e convexos e satisfaz as seguintes condições:

(f_1) f é uma função contínua e de classe $C^1((0,+\infty))$, com $f(s)=0$ para todo $s \leq 0$ e $f(s)>0$ para todo $s>0$;

(f_2) f tem *crescimento crítico* em $+\infty$ do tipo Trudinger-Moser com expoente $\alpha_0 > 0$;

(f_3) existe $\gamma \in (0,N-1)$ tal que

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s^\gamma} > 0$$

e a função $s \mapsto f(s)/s^{N-1}$ não-cresce em $(0,t_*)$ para algum $t_* \in (0,1)$ e a aplicação $t \mapsto f(t)$ não-decresce no intervalo $(0,t_*) \cup (1/t_*, \infty)$;

(f_4) existem $R>0$ e $M>0$ tais que para todo $s \geq R$

$$F(s) := \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t \leq Mf(s).$$

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 4. *Suponha que $a \in [0,N)$, $N \geq 2$ e $f(s)$ satisfaz as condições $(f_1)-(f_4)$. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in (0,\lambda_0)$, o problema (P_λ) possui uma única solução, digamos u_λ, com a propriedade $\|u_\lambda\|_\infty \leq t_*$.*

Teorema 5. *Suponha que $a \in [0,N)$, $N \geq 2$ e $f(s)$ satisfaz as condições $(f_1)-(f_4)$. Então existe $\Lambda \in (0,+\infty)$ tal que (P_λ) possui pelo menos uma solução para todo $\lambda \in (0,\Lambda]$ e não possui solução para $\lambda > \Lambda$.*

Teorema 6. *Suponha que $a \in [0,1)$, $N = 2$ e $f(s)$ satisfaz as condições $(f_1)-(f_4)$ e vale a seguinte hipótese adicional:*

(f_5) *Existe uma função $h : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ tal que*

$$\liminf_{s\to+\infty} sh(s)e^{\varepsilon s} = +\infty \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0$$

e existe $R_0 > 0$ tal que para todo $s \geq R_0$

$$f(s) \geq h(s)e^{\alpha_0 s^2}.$$

Então existe $\Lambda \in (0,+\infty)$ tal que (P_λ) possui pelo menos duas soluções para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$, não existe solução para $\lambda > \Lambda$ e pelo menos uma solução quando $\lambda = \Lambda$.

Os ingredientes principais para provarmos os resultados deste capítulo são o método de sub e super soluções e a minimização de funcionais. Para utilizarmos o método de sub e super soluções provamos um teorema de comparação para problemas singulares. No caso $N = 2$ um argumento de minimização local na topologia de $C_0^1(\Omega)$ foi usado para mostrarmos que uma determinada solução é um mínimo local para o funcional associado ao problema em estudo. Em seguida mostramos a existência de uma segunda solução via passo da montanha. Para tanto, foi necessário estudarmos os níveis de energia e a convergência das sequências de Palais-Smale.

Observação.

1. Os teoremas deste capítulo generalizam alguns resultados obtidos em [40] pois consideramos o caso singular e uma classe mais geral de não-linearidades.

No *Capítulo 3* estudamos a existência e multiplicidade de soluções fracas para seguinte classe de problemas singulares:

$$-\Delta u + V(x)u = \frac{f(u)}{|x|^a} + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2 \tag{0.5}$$

onde $a \in [0,2)$, $h \in (H^1(\mathbb{R}^2))^* = H^{-1}$ é uma pequena pertubação com $h \not\equiv 0$ e $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguinte condições:

(V_1) existe uma constante positiva V_0 tal que

$$V(x) \geq V_0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^2;$$

(V_2) a função $[V(x)]^{-1}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Considera-se novamente o caso em que a não-linearidade $f(s)$ tem o máximo crescimento sobre s que permite estudar o problema (0.5) variacionalmente num espaço de funções adequado, ou seja, o crescimento subcrítico e o crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser [53, 66]. Além disso, assumimos as seguintes condições:

(f_0) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $f(0) = 0$;

(f_1) existem $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tal que para todo $|s| \geq s_1$,

$$0 < \theta F(s) := \theta \int_0^s f(t)\, \mathrm{d}t \leq sf(s);$$

(f_2) existem $R_0 > 0$ e $M_0 > 0$ tais que para todo $|s| \geq R_0$

$$0 < F(s) \leq M_0|f(s)|.$$

Para aplicar métodos variacionais, considera-se o seguinte subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

O qual é um espaço de Hilbert dotado do produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv) \, \mathrm{d}x, \quad u, v \in E, \tag{0.6}$$

e a norma $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$.

Assumimos também a seguinte condição sob a não-linearidade na origem:

(f_3) $\limsup_{s \to 0} \dfrac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1$,

onde

$$\lambda_1 := \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) \, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2/|x|^a \, \mathrm{d}x}. \tag{0.7}$$

Os principais resultados deste capítulo são os seguintes:

Teorema 7. *Suponha que $f(s)$ tem crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$, e que $(V_1)-(V_2)$, (f_0), (f_1) (ou (f_2)), (f_3) são satisfeitas, então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_1$, o problema (*0.5*)* tem pelo menos duas soluções fracas. Uma com energia positiva, enquanto outra com energia positiva.

Teorema 8. *Suponha que $f(s)$ tem crescimento crítico em $+\infty$ e $-\infty$, e que $(V_1)-(V_2)$, (f_0), (f_2), (f_3) são satisfeitas. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_1$, o problema (*0.5) tem uma solução fraca com energia negativa.

Teorema 9. *Assumindo as mesmas condições do Teorema 8 e se adicionarmos que*

(f_4^+) existem constantes $p > 2$ e C_p tais que

$$f(s) \geq C_p s^{p-1} \quad \textit{para todo} \quad s \geq 0,$$

onde

$$C_p > \left[\frac{\alpha_0(p-2)}{2p(2-a)\pi} \right]^{(p-2)/2} S_p^p,$$

e

$$S_p = \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2}}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^p}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}}.$$

*Então existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_2$, o problema (*0.5) tem uma segunda solução fraca.

A prova destes resultados segue por argumentos similares aos do Capítulo 1. Mais precisamente, por minimização local em combinação com o teorema do passo da montanha. No entanto, como o domínio do problema é não-limitado surgem novas dificuldades, por exemplo: precisamos provar uma desigualdade singular do tipo Trudinger-Moser para domínios quaisquer de $\mathbb{R}^2$. Além disso, precisamos estabelecer uma versão singular de um resultado muito conhecido de Lions.

Observações.

1. O problema (0.5) foi abordado em [17] considerando $a = 0$, $h \equiv 0$ e com o potencial V convergindo para uma constante quando $|x| \to +\infty$. Em [34] foi estudado a existência e multiplicidade de soluções fracas para o problema (0.5) para o caso não-singular e não-homogêneo. Porém para o problema com crescimento crítico foi assumido no lugar de (f_4^+) no Teorema 9 a seguinte condição:
$$\liminf_{s\to+\infty} s f(s) e^{-\alpha_0 s^2} \geq \beta_0 > 0. \tag{0.8}$$

2. O Teorema 9 generaliza o resultado principal contido em [34], pois considera o caso singular e a hipótese (f_4^+) é menos restritiva que condição (0.8).

Finalmente, no *Capítulo 4* considerando o espaço de funções
$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} (1+|x|^q)|u|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \quad \text{com} \quad q > 0 \right\}$$
munido do produto interno
$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + (1+|x|^q)uv) \, \mathrm{d}x, \quad u, v \in E, \tag{0.9}$$
e a norma $\|u\| = \langle u, u\rangle^{1/2}$. Provamos os seguintes resultados.

Teorema 10. *Seja*
$$\ell(\alpha) = \sup_{\{u\in E,\ \|u\|=1\}} \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 \right] \mathrm{d}x. \tag{0.10}$$

Então

(1) Para todo $\alpha \in [0, \lambda_1)$ temos que $\ell(\alpha) < \infty$.

(2) Para todo $\alpha \in [\lambda_1, +\infty)$ temos que $\ell(\alpha) = +\infty$,

onde
$$\lambda_1 := \inf_{u \in E\setminus\{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + (1+|x|^q)|u|^2) \, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 \, \mathrm{d}x}. \tag{0.11}$$

Teorema 11. *Para qualquer $\alpha \in [0, \lambda_1)$, existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ e*

$$\ell(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 \right] \, \mathrm{d}x.$$

As provas dos Teoremas 10 e 11 são baseadas na análise de blow-up de uma sequência de soluções de um determinado problema elíptico com crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$ e num cálculo de funções testes. O método de análise de blow-up é bem conhecido e foi utilizado em vários trabalhos como por exemplo [46, 47, 52, 69].

Observações.

1. O Teorema 10 generaliza os resultados obtidos nos trabalhos [2, 17, 32], no sentido em que mesmo no caso para $\alpha = 0$ atingimos o expoente 4π, o que não era válido nos resultados citados acima. Já no caso que $\alpha \in (0, \lambda_1)$ o Teorema 10 generaliza um resultado obtido em [59].

2. O Teorema 11 é um resultado de existência de função extremal.

Com o intuito de não ficarmos recorrendo à Introdução e de tornar os capítulos independentes, enunciaremos novamente, em cada capítulo, os resultados principais, bem como, as hipóteses sobre as funções com mais detalhes.

CAPÍTULO 1

Sobre uma classe não-homogênea de problemas quase-lineares singulares e críticos

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas singular da forma

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{f(x,u)}{|x|^a} + h(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Delta_N u = \text{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é o operador $N-$Laplaciano, Ω é um domínio limitado contendo a origem em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$, $a \in [0,N)$, $h \in (W_0^{1,N}(\Omega))^* = W^{-1,N'}$ é uma pequena pertubação com $N' = N/(N-1)$, $h \not\equiv 0$, e a não-linearidade $f(x,s)$ tem o máximo crescimento sobre s que permite tratar o problema (1.1) variacionalmente no espaço de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)$. Aqui, $W_0^{1,N}(\Omega)$ denota o espaço de Sobolev modelado em $L^N(\Omega)$ com a norma $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N dx\right)^{1/N}$ e $W^{-1,N'}$ o espaço dual de $W_0^{1,N}(\Omega)$ com a norma usual $\|\cdot\|_*$.

Problemas elípticos envolvendo o operador $N-$Laplaciano em domínios limitados de $\mathbb{R}^N$ têm sido estudado no caso não-singular por vários autores, veja os importantes trabalhos de Adimurthi [3], J. M. do Ó [32], Tonkes [64] e suas referências. Motivado por um recente artigo de Adimurthi-Sandeep [5], onde eles provaram uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser com um peso singular num domínio limitado contendo a origem, estudaremos esta classe de problemas considerando o caso singular. Trataremos esta classe de problemas considerando não-linearidades com crescimento subcrítico e crescimento crítico, os quais definimos a seguir.

Dizemos que $f(x,s)$ tem *crescimento subcrítico* em $+\infty$ se

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\alpha|s|^{N/(N-1)}}} = 0, \ \text{ uniformemente em } \ x \in \Omega, \ \text{ para todo } \ \alpha > 0 \tag{1.2}$$

e $f(x,s)$ tem *crescimento crítico* em $+\infty$ se existe $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{s\to+\infty} \frac{|f(x,s)|}{e^{\alpha|s|^{N/(N-1)}}} = \begin{cases} 0, & \text{uniformemente em } \ x \in \Omega, \ \text{ para todo } \ \alpha > \alpha_0, \\ +\infty, & \text{uniformemente em } \ x \in \Omega, \ \text{ para todo } \ \alpha < \alpha_0. \end{cases} \tag{1.3}$$

Similarmente definimos crescimento subcrítico e crítico em $-\infty$. Esta noção de criticalidade em $W_0^{1,N}(\Omega)$ é motivada pela desigualdade de Trudinger-Moser [53, 66], a qual diz que se

$u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ então $e^{\alpha|u|^{N/(N-1)}} \in L^1(\Omega)$, para todo $\alpha > 0$. Além disso, existe uma constante $C = C(N) > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega e^{\alpha|u|^{N/(N-1)}}\, \mathrm{d}x \leq C|\Omega| \quad \text{se} \quad \alpha \leq \alpha_N, \tag{1.4}$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{1/(N-1)}$ e ω_{N-1} é a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.

Observação 1.1.1. *As definições* (1.2) *e* (1.3) *foram introduzidas por Adimurthi em [3] (ver também de Figueiredo-Miyagaki-Ruf [30] e J. M. do Ó [32]).*

A seguir enunciamos as principais condições sobre o qual o nosso problema será estudado:

(f_0) $f(x,s) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$;

(f_1) existem constantes $\theta > N$ e $s_1 > 0$ tais que para todo $|s| \geq s_1$ e $x \in \Omega$,

$$0 < \theta F(x,s) := \theta \int_0^s f(x,t)\, \mathrm{d}t \leq s f(x,s);$$

(f_2) existem constantes $R, M > 0$ tais que para todo $|s| \geq R$ e $x \in \Omega$,

$$0 < F(x,s) \leq M|f(x,s)|;$$

(f_3) $\limsup_{s\to 0} \dfrac{NF(x,s)}{|s|^N} < \lambda_1$,

onde λ_1 é o primeiro autovalor do seguinte problema não-linear:

$$-\mathrm{div}\left(|\nabla u|^{N-2}\nabla u\right) = \frac{\lambda |u|^{N-2}u}{|x|^a}, \;\; u \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{1.5}$$

Como $|x|^{-a} \in L^s(\Omega)$ para algum $s > 1$, é conhecido (cf. [8, 24]) que existem um menor autovalor positivo, o qual denotamos por λ_1, e uma autofunção positiva ψ_1 associada λ_1 que resolve (1.5). Além disso, λ_1 é autovalor simples, isto é, qualquer duas soluções u, v de (1.5) satisfaz $u = cv$ para alguma constante c. E λ_1 é caracterizado variacionalmente como

$$\lambda_1 = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^N \mathrm{d}x : \int_\Omega \frac{|u|^N}{|x|^a}\, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Observe que para a classe de problemas considerada neste capítulo não podemos utilizar a desigualdade de Trudinger-Moser devido a presença da singularidade $|x|^{-a}$. Para superar esta dificuldade usamos a versão da desigualdade de Trudinger-Moser devido a Adimurthi-Sandeep [5] com um peso singular, mais precisamente:

Proposição 1.1.1. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ contendo a origem e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Então, para todo $\alpha > 0$ e $a \in [0,N)$,*

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha|u|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Além disso,

$$\sup_{\|u\|\leq 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha|u|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}\, \mathrm{d}x < \infty,$$

se, e somente se, $\alpha/\alpha_N + a/N \leq 1$.

Aqui, estamos interessados em soluções fracas de (1.1), isto é, funções $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla v\, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u)}{|x|^a} v\, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x) v\, \mathrm{d}x = 0, \quad \forall\, v \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{1.6}$$

Observe que se $f(x,s)$ tem crescimento subcrítico ou crítico, utilizando a Proposição 1.1.1, a expressão em (1.6) está bem definida e além disso, soluções fracas de (1.1) são pontos críticos de um determinado funcional I, para mais detalhes confira a Seção 1.2. As principais dificuldades desta classe de problemas são a presença da singularidade $|x|^{-a}$, o crescimento crítico e o operador não-linear $\Delta_N u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$.

Vejamos agora os principais resultados deste capítulo, os quais para uma fácil referência dividiremos em dois casos:

1.1.1 Caso subcrítico

Teorema 1.1.1. *Suponha que $f(x,s)$ tem crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$ e satisfaz as condições (f_0), (f_1) (ou (f_2)) e (f_3). Então existe $\delta_1 > 0$ tal que (1.1) possui pelo menos duas soluções fracas em $W_0^{1,N}(\Omega)$ sempre que $0 < \|h\|_* < \delta_1$. Uma com energia positiva e outra com energia negativa.*

Além disso, se $h(x)$ possui sinal definido, o seguinte resultado vale:

Teorema 1.1.2. *Assumindo as mesmas condições do Teorema 1.1.1, se $h(x) \geq 0$ $(h(x) \leq 0)$ quase sempre em Ω. Então as soluções obtidas no Teorema 1.1.1 são não-negativas (não-positivas), respectivamente.*

1.1.2 Caso crítico

Teorema 1.1.3. *Suponha que $f(x,s)$ tem crescimento crítico em $+\infty$ e $-\infty$, e satisfaz as condições (f_0), (f_2) e (f_3). Então existe $\delta_1 > 0$ tal que (1.1) possui pelo menos uma solução fraca em $W_0^{1,N}(\Omega)$ com energia negativa sempre que $0 < \|h\|_* < \delta_1$.*

Agora denotemos por r o raio da maior bola centrada na origem e contida em Ω.

Teorema 1.1.4. *Assumindo as condições do Teorema 1.1.3 e se*

(f_4^+) *existe* β_0 *tal que*

$$\liminf_{s\to+\infty} sf(x,s)e^{-\alpha_0|s|^{N/(N-1)}} \geq \beta_0 > \frac{N-a}{r^{N-a}e^{1+1/2+\cdots+1/(N-1)}}\left(\frac{N-a}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

então existe $\delta_2 > 0$ *tal que* (1.1) possui uma segunda solução sempre que $0 < \|h\|_* < \delta_2$.

Além disso, se $h(x)$ possui sinal definido, o seguinte resultado vale:

Teorema 1.1.5. *Assumindo as mesmas condições do Teorema 1.1.4, se* $h(x) \geq 0$ *quase sempre em* Ω*, então as soluções obtidas nos Teoremas 1.1.3 e 1.1.4 são não-negativas. Além disso se* $h(x) \leq 0$ *quase sempre em* Ω *e*

(f_4^-) *existe* β_0 *tal que*

$$\liminf_{s\to-\infty} sf(x,s)e^{-\alpha_0|s|^{N/(N-1)}} \geq \beta_0 > \frac{N-a}{r^{N-a}e^{1+1/2+\cdots+1/(N-1)}}\left(\frac{N-a}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

então estas soluções são não-positivas.

Neste capítulo generalizamos os resultados principais em [3, 5, 30, 32, 64], pois estamos considerando o caso singular e não-homogêneo. Além disso, para problemas com crescimento crítico e não-singulares a condição

$$\liminf_{s\to+\infty} sf(x,s)e^{-\alpha_0|s|^{N/(N-1)}} \geq \beta_0 > \frac{1}{d^N}\left(\frac{N}{\alpha_0}\right)^{N-1}, \tag{1.7}$$

onde d é raio da maior bola contida em Ω, considerada nos trabalhos [3, 5, 32, 64], é mais restritiva que a condição (f_4^+) no Teorema 1.1.4, pois no caso não-singular podemos considerar r como sendo o raio da maior bola contida em Ω.

Observação 1.1.2. *Notemos que se* $N = 2, \alpha_0 = 4\pi$ *e* $a = 0$*, a condição* (f_4^+) *diz que*

$$\liminf_{s\to+\infty} sf(x,s)e^{-4\pi s^2} \geq \beta_0 > \frac{1}{e\pi r^2}.$$

Em [30] (veja também [3, 5, 32, 64], para problemas quase-lineares) foi usada a mesma condição acima com 2π *em vez de* $e\pi$*. Para assumir esta condição eles usaram a sequência de Moser. Para obtermos este melhoramento sobre o crescimento da não-linearidade* $f(x,s)$ *em* $+\infty$*, será crucial em nosso argumento usarmos uma nova sequência introduzida em [28].*

Observação 1.1.3. *A não-linearidade* $f(x,s)$ *será ligeiramente modificada nos Teoremas 1.1.2 e 1.1.5 para obtermos soluções não-negativas e não-positivas. Essencialmente impomos condições de simetria sobre* $f(x,s)$*.*

Vejamos exemplos de funções que satisfazem as condições dos teoremas acima.

Exemplo 1.1.1. *Quando $N = 2$ um exemplo típico de função contínua com crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$, e satisfazendo as condições (f_1) e (f_3) é*

$$f(x,s) = g(x)(2s\cos(s^2) + 2se^s + s^2e^s),$$

onde $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $0 < g(x) < \lambda_1/4$ em $\overline{\Omega}$.

Com efeito, notemos que $F(x,s) = g(x)(\operatorname{sen}(s^2) + s^2e^s)$. Para verificarmos (f_1) é suficiente notarmos que

$$\lim_{|s|\to\infty} \frac{F(x,s)}{sf(x,s)} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(s^2) + s^2e^s}{s(2s\cos(s^2) + 2se^s + s^2e^s)} = \lim_{|s|\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(s^2)s^{-2}e^{-s} + 1}{2\cos(s^2)e^{-s} + 2 + s} = 0.$$

Além disso, (f_3) vale, pois

$$\limsup_{s\to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} = 2g(x)\lim_{s\to 0} \frac{\operatorname{sen}(s^2) + s^2e^s}{s^2} = 4g(x) < \lambda_1.$$

Exemplo 1.1.2. *Quando $N = 2$ um exemplo típico de função satisfazendo as condições $(f_2), (f_3)$ e (f_4^+) com crescimento crítico é a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,s) = 2g(x)se^{s^2},$$

onde $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $0 < g(x) < \lambda_1/2$ em $\overline{\Omega}$.

Com efeito, $f(x,s)$ tem crescimento crítico com expoente $\alpha_0 = 1$. Agora mostraremos que (f_2), (f_3) e (f_4^+) são válidas. Por definição, temos que

$$F(x,s) = \int_0^s f(x,t)dt,$$

logo, como $f(x,s) = 2g(x)se^{s^2}$, temos

$$F(x,s) = \int_0^s 2g(x)te^{t^2}dt = g(x)(e^{s^2} - 1).$$

Consequentemente,

$$\lim_{s\to\infty} \frac{F(x,s)}{f(x,s)} = \lim_{s\to\infty} \frac{(e^{s^2} - 1)}{2se^{s^2}} = 0.$$

O que prova a condição (f_2). Agora, para mostrarmos (f_3), notemos que

$$\lim_{s\to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} = \lim_{s\to 0} 2g(x)\frac{(e^{s^2} - 1)}{s^2}.$$

Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{s\to 0} \frac{2F(x,s)}{s^2} = \lim_{s\to 0} 2g(x)e^{s^2} = 2g(x) < \lambda_1.$$

Portanto f satisfaz a a condição (f_3).

Além disso, temos

$$\lim_{s\to\infty} sf(x,s)e^{-\alpha_0 s^2} = \lim_{s\to\infty} 2g(x)s^2e^{s^2}e^{-s^2} = \lim_{s\to\infty} 2g(x)s^2 = +\infty,$$

o que prova (f_4^+).

Observação 1.1.4. *A condição (f_3) é essencial para obtermos soluções não-triviais.*

De fato, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e consideremos a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,s) = \lambda_1 s + s^2 e^{s^2}.$$

Note $f(x,s)$ tem crescimento crítico com expoente $\alpha_0 = 1$ e não satisfaz a condição (f_3).

Agora, consideremos o seguinte problema:

$$-\Delta u = \frac{\lambda_1 u + u^2 e^{u^2}}{|x|^a}, \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Multiplicando esta equação por ψ_1 (onde ψ_1 é a primeira autofunção do problema (1.5)) e integrando, obtemos

$$-\int_\Omega \Delta u \psi_1 \, \mathrm{d}x = \lambda_1 \int_\Omega \frac{u\psi_1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{u^2 e^{u^2}\psi_1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x. \tag{1.8}$$

Usando integração por partes, temos que

$$-\int_\Omega \Delta u \psi_1 \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u \nabla \psi_1 \, \mathrm{d}x = -\int_\Omega u \Delta \psi_1 \, \mathrm{d}x.$$

Logo, a equação (1.8), pode ser escrita da seguinte forma

$$-\int_\Omega u \Delta \psi_1 \, \mathrm{d}x = \lambda_1 \int_\Omega \frac{u\psi_1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{u^2 e^{u^2}\psi_1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x.$$

No entanto, temos que

$$-\Delta \psi_1 = \lambda_1 \frac{\psi_1}{|x|^a} \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \psi_1 = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Assim,

$$\lambda_1 \int_\Omega \frac{u\psi_1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x = \lambda_1 \int_\Omega \frac{u\psi_1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x + \int_\Omega \frac{u^2 e^{u^2}\psi_1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega \frac{u^2 e^{u^2}\psi_1}{|x|^a} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Donde, obtemos que $u = 0$.

Portanto, a condição (f_3) é fundamental para obtermos o resultado de existência de soluções não-triviais.

Observação 1.1.5. *A condição (f_2) é mais forte que (f_1), no sentido em que (f_2) implica (f_1). É imediato verificar que integrando a condição (f_1) existem constantes positivas C_1, C_2 tais que*

$$F(x,s) \geq C_1|s|^{\theta} - C_2, \ \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Por outro lado, segue por (f_2) que existem constantes positivas C_1, C_2 tais que

$$F(x,s) \geq C_1 e^{|s|/M} - C_2, \ \forall (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.10}$$

A prova dos nossos resultados seguirá por minimização local em combinação com o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. Mostraremos que no caso subcrítico o funcional associado ao problema satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, e como consequência podemos distinguir uma solução de mínimo local de uma solução do tipo passo da montanha. Entretanto, no caso crítico a condição de Palais-Smale não é satisfeita em geral, assim para provar que as soluções são distintas o argumento é mais delicado, requerendo um refinamento para os níveis de energia do funcional associado ao problema. Assim a condição (f_4^+) no Teorema 1.1.4 será crucial para estimar o nível do passo da montanha.

1.2 Formulação variacional

Sob as condições que a função $f(x,s)$ é contínua e possui crescimento subcrítico (ou crítico) em $+\infty$ e $-\infty$, como definido em (1.2) e (1.3), temos que dado $\alpha > 0$ (ou $\alpha > \alpha_0$), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq C e^{\alpha |u|^{N/(N-1)}} \ \text{ para todo } \ (x,s) \in \Omega \times \mathbb{R}. \tag{1.11}$$

De fato, para todo $\alpha > 0$ (ou $\alpha > \alpha_0$), dado $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que

$$|f(x,s)| < \varepsilon e^{\alpha |s|^{N/N-1}} \quad \text{sempre que} \quad (x,s) \in \Omega \times [R_\varepsilon, +\infty). \tag{1.12}$$

Agora, consideremos a restrição de $f(x,s)$ ao conjunto compacto $\overline{\Omega} \times [0, R_\varepsilon]$. Sendo $f(x,s)$ uma função contínua, existe uma constante $M > 0$ tal que

$$|f(x,s)| \leq M \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \overline{\Omega} \times [0, R_\varepsilon].$$

Por outro lado, desde que $e^{\alpha |s|^{N/N-1}}$ é uma função crescente, podemos escolher uma constante $C > 0$ de forma que

$$|f(x,s)| \leq C e^{\alpha |s|^{N/N-1}} \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \overline{\Omega} \times [0, R_\varepsilon]. \tag{1.13}$$

Consequentemente, usando (1.12) e (1.13), obtemos que

$$|f(x,s)| \leq C e^{\alpha |s|^{N/N-1}} \quad \text{para todo} \quad (x,s) \in \Omega \times [0, +\infty). \tag{1.14}$$

Similarmente usando que $f(x,s)$ tem crescimento subcrítico (ou crítico) em $-\infty$, obtemos uma estimativa como (1.14) em $\Omega \times (-\infty, 0]$. Assim, concluímos (1.11).

Agora, usando a condição (f_3), existem $\varepsilon, \delta > 0$ tais que

$$|F(x,s)| \leq \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{N}|s|^N \quad \text{sempre que} \quad |s| \leq \delta. \tag{1.15}$$

Usando a estimativa (1.11), temos que para cada $q > N$ existe uma constante $C = C(q,\delta) > 0$ tal que

$$|F(x,s)| \leq C|s|^q e^{\alpha |s|^{N/(N-1)}} \quad \text{sempre que} \quad |s| \geq \delta. \tag{1.16}$$

Por (1.15) e (1.16), obtemos

$$|F(x,s)| \leq \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{N}|s|^N + C|s|^q e^{\alpha |s|^{N/(N-1)}} \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad q > N. \tag{1.17}$$

Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, então pela Proposição 1.1.1 e a desigualdade de Hölder, temos que se $\alpha > 0$ e $q > 0$

$$\frac{e^{\alpha |u|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}|u|^q \in L^1(\Omega) \;\; \text{para todo} \;\; u \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{1.18}$$

Consequentemente, por (1.17) e (1.18) obtemos que $\dfrac{F(x,u)}{|x|^a} \in L^1(\Omega)$. Logo, o funcional $I : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{\|u\|^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,u)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)u\,\mathrm{d}x$$

está bem definido. Além disso, usando argumentos padrões mostraremos que $I \in C^1(W_0^{1,N}(\Omega), \mathbb{R})$ com

$$\langle I'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u)}{|x|^a} v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)v\,\mathrm{d}x, \tag{1.19}$$

para todo $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$. Consequentemente, os pontos críticos do funcional I são soluções fracas do problema (1.1).

Para prova das afirmações acima precisamos da próxima Proposição, a qual é uma recíproca do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue para o espaço $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Proposição 1.2.1. *Seja (u_n) uma sequência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ que converge fortemente. Então existem uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) e $g \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que $|u_{n_k}(x)| \leq g(x)$ quase sempre em Ω.*

Prova: Veja [35, Proposição 1]. ■

É bem conhecido as derivadas de Fréchet da primeira e terceira parcelas do funcional I, assim para provarmos (1.19), é suficiente mostrarmos o seguinte lema:

Lema 1.2.1. *O funcional* $\mathscr{F} : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definido por*

$$\mathscr{F}(u) = \int_\Omega \frac{F(x,u)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x$$

é de classe $C^1(W_0^{1,N}(\Omega), \mathbb{R})$ *e*

$$\langle \mathscr{F}'(u), v\rangle = \int_\Omega \frac{f(x,u)}{|x|^a} v\, \mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Prova: Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ fixada. Para cada $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ consideremos

$$r(v) = \mathscr{F}(u+v) - \mathscr{F}(u) - \int_\Omega \frac{f(x,u)}{|x|^a} v\, \mathrm{d}x. \tag{1.20}$$

Afirmamos que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{\|v_n\|\to 0} \frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} = 0. \tag{1.21}$$

De fato, consideremos a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \frac{F(x,u+tv_n)}{|x|^a} \quad \text{com} \quad x \neq 0.$$

Notemos que g é contínua e

$$g'(t) = \frac{f(x,u+tv_n)v_n}{|x|^a}.$$

Assim pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\frac{F(x,u+v_n) - F(x,u)}{|x|^a} = \int_0^1 \frac{f(x,u+tv_n)v_n}{|x|^a}\, \mathrm{d}t.$$

Consequentemente,

$$r(v_n) = \int_\Omega \left(\int_0^1 \frac{f(x,u+tv_n)v_n}{|x|^a}\, \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u)v_n}{|x|^a}\, \mathrm{d}x.$$

Donde obtemos

$$r(v_n) = \int_\Omega \int_0^1 \frac{(f(x,u+tv_n) - f(x,u))}{|x|^a} v_n\, \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Logo,

$$|r(v_n)| \leq \int_\Omega \int_0^1 \frac{|f(x,u+tv_n) - f(x,u)|}{|x|^a} |v_n|\, \mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \int_\Omega \frac{|f(x,u+tv_n)-f(x,u)|}{|x|^a}|v_n| \,\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Pela desigualdade de Hölder para $r>1$ tal que $ar<N$ e $1/r+1/s=1$, obtemos

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \left(\int_\Omega \frac{|f(x,u+tv_n)-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \|v_n\|_s \,\mathrm{d}t.$$

Usando a imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ para todo $s \in [1,\infty)$, obtemos

$$\frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} \leq C\int_0^1 \left(\int_\Omega \frac{|f(x,u+tv_n)-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \mathrm{d}t.$$

Agora notemos que

$$\frac{|f(x,u+tv_n)-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}} \leq \frac{[Ce^{\alpha|u+tv_n|^{N/(N-1)}}+Ce^{\alpha|u|^{N/(N-1)}}]^r}{|x|^{ar}}.$$

Assim, para $t\in[0,1]$ temos

$$\frac{|f(x,u+tv_n)-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}} \leq C\left(\frac{e^{\alpha r|u+v_n|^{N/(N-1)}}}{|x|^{ar}}+\frac{e^{\alpha r|u|^{N/(N-1)}}}{|x|^{ar}}\right).$$

Como (v_n) converge fortemente para zero em $W_0^{1,N}(\Omega)$, pela Proposição 1.2.1 existem uma subsequência $(v_{n_k}) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\widehat{h} \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que $|v_{n_k}(x)| \leq |\widehat{h}(x)|$ quase sempre em Ω, consequentemente

$$\frac{|f(x,u+tv_{n_k})-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}} \leq C\left(\frac{e^{\alpha r|u+\widehat{h}|^{N/(N-1)}}}{|x|^{ar}}+\frac{e^{\alpha r|u|^{N/(N-1)}}}{|x|^{ar}}\right),$$

quase sempre em Ω. Logo, pela Proposição 1.1.1, temos

$$\frac{|f(x,u+tv_{n_k})-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}} \leq \widetilde{g} \in L^1(\Omega),$$

e pelas imersões de Sobolev, obtemos $u(x)+tv_{n_k}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω. Sendo f contínua, obtemos

$$\frac{|f(x,u(x)+tv_{n_k}(x))-f(x,u(x))|^r}{|x|^{ar}} \to 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Assim, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\left(\int_\Omega \frac{|f(x,u+tv_{n_k})-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \to 0.$$

Por outro lado, usando que

$$\frac{r(v_{n_k})}{\|v_{n_k}\|} \leq C\int_0^1 \left(\int_\Omega \frac{|f(x,u+tv_{n_k})-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r}\,\mathrm{d}t.$$

Obtemos

$$\lim_{\|v_{n_k}\|\to 0} \frac{r(v_{n_k})}{\|v_{n_k}\|} = 0.$$

O que prova a afirmação (1.21).

Agora notemos que $\mathscr{F}'(u) : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é linear e limitado, pois

$$|\langle \mathscr{F}'(u), v\rangle| \leq \int_\Omega \frac{|f(x,u)v|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega \frac{|f(x,u)|^q}{|x|^{aq}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q} \|v\|_{p},$$

onde $q > 1$ e tal que $1/q + 1/q' = 1$ e $aq < N$. Pela imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^s(\Omega)$ para todo $s \in [1,\infty)$ e usando a Proposição 1.1.1, obtemos

$$|\langle \mathscr{F}'(u), v\rangle| \leq C\|v\|.$$

Para provarmos que $\mathscr{F}'$ é contínuo, seja $u_n \to u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Então,

$$\begin{aligned} \|\mathscr{F}'(u_n) - \mathscr{F}'(u)\|_* &= \sup_{\|\varphi\|\leq 1} \left|\int_\Omega \frac{(f(x,u_n)-f(x,u))}{|x|^a}\varphi\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left(\int_\Omega \frac{|f(x,u_n)-f(x,u)|^r}{|x|^{ar}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \|\varphi\|_s, \end{aligned}$$

onde usamos a desigualdade de Hölder para $r > 1$ tal que $ar < N$ e $1/r + 1/s = 1$. Usando as imersões de Sobolev, a Proposição 1.1.1 e argumentando como acima, obtemos

$$\|\mathscr{F}'(u_n) - \mathscr{F}'(u)\|_* \to 0.$$

O que prova que $\mathscr{F}'$ é contínuo.

■

1.3 Resultados de existência via métodos variacionais

Inicialmente relembremos a definição da condição de Palais-Smale.

Definição 1.3.1. *Seja E um espaço de Banach real. Dizemos que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale se toda sequência (u_n) em E tal que $|I(u_n)| \leq C$ e $I'(u_n) \to 0$ em E^*, possui uma subsequência que converge fortemente.*

Nossos resultados de existência serão obtidos aplicando-se a seguinte versão do Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, o qual é uma consequência do Princípio Variacional de Ekeland como abordado em [27].

Teorema 1.3.1 (Teorema 5.1, [27]). *Seja E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Suponha que existe uma vizinhança U de 0 em E e $\delta > 0$ que satisfazem as seguinte condições:*

(i) $I(0) = 0$,

(ii) $I(u) \geq \delta$ *na fronteira de* U,

(iii) *Existe* $e \notin U$ *tal que* $I(e) < \delta$.

Então, para o número c definido por:

$$c = \inf_{g\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} I(g(t)) \geq \delta,$$

existe uma seqüência (u_n) em E tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad I'(u_n) \to 0 \quad \text{em} \quad E^*,$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1],E) : g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Outra consequência do Princípio Variacional de Ekeland abordada em [27], que usaremos é o seguinte teorema.

Teorema 1.3.2 (Teorema 4.4, [27]). *Seja E um espaço de Banach real e $I : E \to \mathbb{R}$ uma funcional semicontínuo inferiormente o qual é limitado inferiormente. Além disso, suponha $I \in C^1(E,\mathbb{R})$. Então, para cada $\varepsilon > 0$ existe $u_\varepsilon \in E$ tal que*

$$I(u_\varepsilon) \leq \inf_E I + \varepsilon \quad \text{e} \quad \|I'(u_\varepsilon)\|_{E^*} \leq \varepsilon.$$

1.4 Geometria do Funcional

Nos próximos lemas estudaremos a geometria do funcional I.

Lema 1.4.1. *Se $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $\beta > 0$, $q > 0$ e $\|v\| \leq M$ com $\beta M^{N/(N-1)}/\alpha_N + a/N < 1$, então existe $C > 0$ tal que*

$$\int_\Omega \frac{e^{\beta|v|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}|v|^q \,\mathrm{d}x \leq C\|v\|^q.$$

Prova: Consideremos $r > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que $r\beta M^{N/(N-1)}/\alpha_N + ar/N < 1$ e $sq \geq 1$, onde $s = r/(r-1)$. Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega \frac{e^{\beta|v|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}|v|^q \,\mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega \frac{e^{(r\beta\|v\|^{N/(N-1)}(\frac{|v|}{\|v\|})^{N/(N-1)})}}{|x|^{ar}} \,\mathrm{d}x\right)^{1/r} \|v\|_{qs}^q.$$

Agora, usando a imersão contínua $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{sq}(\Omega)$ para todo $sq \geq 1$ e a Proposição 1.1.1, concluímos o resultado. ∎

Lema 1.4.2. *Suponha as condições (f_0), (f_1) (ou (f_2)), (f_3) e que $f(x,s)$ possui crescimento subcrítico (ou crítico) em $+\infty$ e $-\infty$. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $h \in W^{-1,N'}$ com $\|h\|_* < \delta_1$, existe $\rho_h > 0$ tal que*

$$I(u) > 0 \quad se \quad \|u\| = \rho_h.$$

Prova: Vimos no início da formulação variacional que

$$|F(x,s)| \leq \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{N}|s|^N + C|s|^q e^{\alpha |s|^{N/(N-1)}}, \tag{1.22}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $q > N$. Agora, seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $\alpha \|u\|^{N/(N-1)}/\alpha_N + a/N < 1$, pelo Lema 1.4.1 e pela definição de λ_1, obtemos que

$$\begin{aligned} I(u) \geq \; & \frac{1}{N}\|u\|^N - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{N}\int_\Omega \frac{|u|^N}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - C\|u\|^q - \|h\|_*\|u\| \\ \geq \; & \frac{1}{N}\left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right]\|u\|^N - C\|u\|^q - \|h\|_*\|u\|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$I(u) \geq \|u\| \left[\frac{1}{N}\left(1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|u\|^{N-1} - C\|u\|^{q-1} - \|h\|_*\right]. \tag{1.23}$$

Desde que $\varepsilon > 0$ e $q > N$, podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$\frac{1}{N}\left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right]\rho^{N-1} - C\rho^{q-1} > 0.$$

Logo, para $\|h\|_*$ suficientemente pequeno existe $\rho_h > 0$ tal que $I(u) > 0$ se $\|u\| = \rho_h$. ∎

Observação 1.4.1. *Notemos que se $h \equiv 0$, então pela demonstração anterior para ρ suficientemente pequeno, temos $I(u) \geq 0$ sempre que $\|u\| \leq \rho$ e $I(u) > 0$ quando $\|u\| = \rho$.*

Lema 1.4.3. *Suponha que $f(x,s)$ satisfaz (f_1) (ou (f_2)). Então existe $e \in W_0^{1,N}(\Omega)$ com $\|e\| > \rho_h$ e tal que*

$$I(e) < \inf_{\|u\| = \rho_h} I(u).$$

Prova: Por (f_1) (ou (f_2)) para $\theta > N$, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que

$$F(x,s) \geq C_1 s^\theta - C_2 \quad \text{para todo} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$ e não-negativa. Então

$$\begin{aligned} I(tu) \; & \leq \frac{t^N}{N}\|u\|^N - C_1 t^\theta \int_\Omega \frac{u^\theta}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + C_2 \int_\Omega \frac{\mathrm{d}x}{|x|^a} - t\int_\Omega h(x)u\,\mathrm{d}x, \\ & \leq \frac{t^N}{N}\|u\|^N - C_1 t^\theta \int_\Omega \frac{u^\theta}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + t\|h\|_*\|u\| + C_3. \end{aligned}$$

Como $\theta > N$, obtemos que $I(tu) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Para concluímos a prova do Lema basta escolher $e = tu$ com t suficientemente grande. ∎

Para encontrarmos uma solução de mínimo local precisamos determinar uma bola apropriada para aplicarmos minimização, a qual será uma consequência do seguinte lema.

Lema 1.4.4. *Suponha que $f(x,s)$ possui crescimento subcrítico (ou crítico) em $+\infty$ e $-\infty$, então existem $\eta > 0$ e $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ com $\|v\| = 1$ tais que $I(tv) < 0$ para todo $0 < t < \eta$. Em particular,*

$$\inf_{\|u\| \leq \eta} I(u) < 0.$$

Prova: Para cada $h \in W^{-1,N'}$, seja $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ a única solução do problema

$$-\Delta_N v = h(x) \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad v = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Então, $\displaystyle\int_\Omega h(x)v \, \mathrm{d}x = \|v\|^N > 0$ para cada $h \not\equiv 0$. Lembremos que para $t > 0$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(tv) = t^{N-1}\|v\|^N - \int_\Omega \frac{f(x,tv)}{|x|^a} v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)v \, \mathrm{d}x.$$

Logo, como $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$, existe $\eta > 0$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(tv) = t^{N-1}\|v\|^N - \int_\Omega \frac{f(x,tv)}{|x|^a} v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)v \, \mathrm{d}x < 0,$$

para todo $0 < t < \eta$. Como $I(0) = 0$ e I é contínuo, então $I(tv) < 0$ para todo $0 < t < \eta$. ∎

Portanto, pelos Lemas 1.4.2 e 1.4.3 existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\|h\|_* \leq \delta_1$ o nível

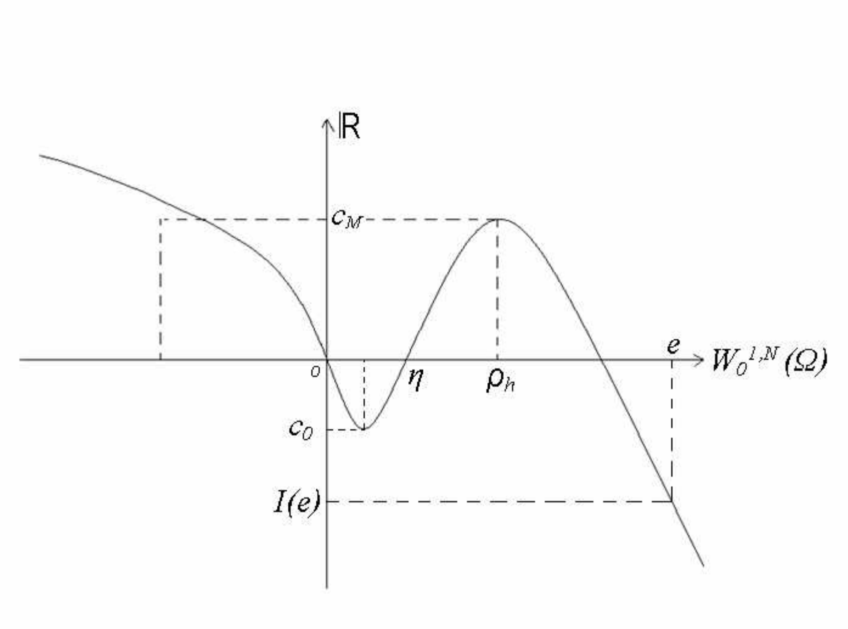
$$c_M = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) > 0,$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], W_0^{1,N}(\Omega)) : g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Temos também pelo Lema 1.4.4 que existe $\eta > 0$ tal que

$$-\infty < c_0 \equiv \inf_{\|u\| \leq \eta} I(u) < 0.$$

A figura a seguir ilustra uma idéia da geometria satisfeita pelo funcional I.



Pelos Lemas 1.4.2 e 1.4.3 podemos aplicar o Teorema 1.3.1 para obter uma sequência $(v_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$I(v_n) \to c_M \quad \text{e} \quad \|I(v_n)\|_* \to 0. \tag{1.24}$$

Seja ρ_h como no Lema 1.4.2. Desde que $\overline{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma de $W_0^{1,N}(\Omega)$ e convexo, e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente sobre $\overline{B}_{\rho_h}$, segue pelo Teorema 1.3.2 que existe uma sequência (u_n) em $\overline{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(u_n) \to c_0 \;\; \text{e} \;\; \|I'(u_n)\|_* \to 0. \tag{1.25}$$

Desta forma precisamos estudar as propriedades das sequências (v_n) e (u_n). O que será o foco da próxima seção.

1.5 Propriedades das sequências de Palais-Smale

Para mostrarmos que o limite fraco em $W_0^{1,N}(\Omega)$ é uma solução de (1.1) usaremos o seguinte resultado de convergência provado por de Figueiredo-J. M. do Ó-Ruf [29], veja também [30] para o caso não-singular.

Lema 1.5.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado e $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então para qualquer sequência (u_n) em $L^1(\Omega)$ tal que*

$$u_n \to u \text{ em } L^1(\Omega), \ \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} \in L^1(\Omega) \ \text{ e } \ \int_\Omega \frac{|f(x,u_n)u_n|}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \le C,$$

a menos de subsequência, temos que

$$\frac{f(x,u_n)}{|x|^a} \to \frac{f(x,u)}{|x|^a} \ \text{ em } \ L^1(\Omega).$$

Para provar que uma sequência de Palais-Smale converge para uma solução do problema (1.1), adaptando os argumentos em [32] para o caso singular, estabelecemos o seguinte lema:

Lema 1.5.2. *Seja (u_n) uma sequência de Palais-Smale para o funcional I em qualquer nível. Então (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, existe uma subsequência de (u_n) que denotaremos novamente por (u_n) e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que*

$$\frac{f(x,u_n)}{|x|^a} \to \frac{f(x,u)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1(\Omega) \tag{1.26}$$

$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2}\nabla u \quad \text{fracamente em} \quad (L^{N/(N-1)}(\Omega))^N. \tag{1.27}$$

Prova: Seja $(u_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale no nível c, isto é,

$$\frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_n|^N \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{F(x,u_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)u_n \, \mathrm{d}x \to c \tag{1.28}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} v \, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)v \, \mathrm{d}x \to 0 \tag{1.29}$$

para todo $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$.

Passo 1: (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$.

De fato, por (1.28) e (1.29), temos que

$$\left| \left(\frac{\theta}{N} - 1\right) \|u_n\|^N - \int_\Omega \frac{(\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x - (\theta - 1)\int_\Omega h(x)u_n \, \mathrm{d}x \right| \le C + \varepsilon_n \|u_n\|$$

onde $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to +\infty$. Assim,

$$\left| \left[\left(\frac{\theta}{N} - 1\right) \|u_n\|^{N-1} - (\theta - 1)\|h\|_* \right] \|u_n\| - \int_\Omega \frac{(\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \right| \le C + \varepsilon_n \|u_n\|.$$

Esta estimativa junto com as condições (f_0) e (f_1), implicam que (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Desta forma, a menos de subsequência, temos

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W_0^{1,N}(\Omega), \\ u_n &\to u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega) \quad \text{para todo} \quad q \in [1,\infty), \\ u_n(x) &\to u(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Então usando que (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}()\Omega$ e o Lema 1.5.1 junto com (1.29), obtemos que (u_n) possui uma subsequência tal que (1.26) vale.

Com efeito, como $\|u_n\| \le C$, temos que

$$-C_1\|h\|_* \le \int_\Omega h(x)u_n dx \le C_1\|h\|_*.$$

Esta estimativa em conjunto com (1.29), implicam que

$$\int_\Omega \frac{|f(x,u_n)|}{|x|^a}|u_n|\mathrm{d}x \le C.$$

Como $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$ a afirmação segue.

Passo 2: (u_n) possui uma subsequência tal que (1.27) vale.

Desde que $(|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n)$ é limitada em $(L^{N/(N-1)}(\Omega))^N$, sem perda de generalidade podemos assumir que

$$|\nabla u_n|^N \to \mu \;\text{ em }\; \mathscr{D}'(\Omega) \;\text{ e}$$

$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup \nu \;\text{ fracamente em }\; (L^{N/(N-1)}(\Omega))^N,$$

onde μ é uma medida regular não-negativa e $\mathscr{D}'(\Omega)$ é o espaço das distribuições sobre Ω.

Seja $\sigma > 0$ e $\mathscr{A}_\sigma = \{x \in \overline{\Omega} : \forall r > 0,\ \mu(B_r(x) \cap \overline{\Omega}) \ge \sigma\}$. Afirmamos que $\mathscr{A}_\sigma$ é um conjunto finito.

Com efeito, temos que

$$\mu(\mathscr{A}_\sigma) = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathscr{A}_\sigma} |\nabla u_n|^N \mathrm{d}x \le C.$$

Suponha por contradição que existe uma sequência de pontos distintos (x_k) em $\mathscr{A}_\sigma$. Desde que para todo $r > 0$, $\mu(B_r(x) \cap \overline{\Omega}) \ge \sigma$, obtemos que $\mu(\{x_k\}) \ge \sigma$, o que implica que $\mu(\mathscr{A}_\sigma) = +\infty$, o que é uma contradição. Assim, $\mathscr{A}_\sigma = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Seja $u \in W^{1,N}(\mathscr{O})$, onde $\mathscr{O}$ é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$. É bem conhecido (cf. [14]) que existem constantes positivas r_1 e C_1 dependendo somente de N tais que

$$\int_{\mathscr{O}} e^{r_1\left(\frac{|u|}{\|\nabla u\|_{L^N(\mathscr{O})}}\right)^{N/(N-1)}} \mathrm{d}x \le C_1.$$

Consequentemente, existem constantes positivas r_2 e C_2 tais que

$$\int_{\mathscr{O}} \frac{e^{r_2\left(|u|/\|\nabla u\|_{L^N(\mathscr{O})}\right)^{N/(N-1)}}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq C_2. \tag{1.31}$$

De fato, seja $0 < r_2 < r_1$ e $t > 1$ tais que $r_2/r_1 + at/N = 1$. Usando a desigualdade de Hölder, obtemos que

$$\int_{\mathscr{O}} \frac{e^{r_2\left(|u|/\|\nabla u\|_{L^N(\mathscr{O})}\right)^{N/(N-1)}}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq \left(\int_{\mathscr{O}} e^{r_1\left(\frac{|u|}{\|\nabla u\|_{L^N(\mathscr{O})}}\right)^{N/(N-1)}}\,\mathrm{d}x\right)^{r_2/r_1}\left(\int_{\mathscr{O}} \frac{1}{|x|^{N/t}}\,\mathrm{d}x\right)^{at/N} \leq C_2.$$

Afirmação 1.5.1. *Para todo subconjunto relativamente compacto K de $\overline{\Omega}\setminus\mathscr{A}_\sigma$ e $\sigma > 0$ tal que*

$$\alpha\sigma^{1/(N-1)}/r_2 + a/N < 1,$$

temos

$$\lim_{n\to\infty}\int_K \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}u_n\,\mathrm{d}x = \int_K \frac{f(x,u)}{|x|^a}u\,\mathrm{d}x.$$

De fato, seja $x_0 \in K$ e $r_0 > 0$ tais que $\mu(B_{r_0}(x_0)\cap\Omega) < \sigma$. Consideremos uma função $\varphi \in C_0^\infty(\Omega,[0,1])$ tal que $\varphi \equiv 1$ em $B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}$ e $\varphi \equiv 0$ em $\overline{\Omega}\setminus B_{r_0}(x_0)$. Assim

$$\lim_{n\to\infty}\int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |\nabla u_n|^N\varphi\,\mathrm{d}x = \int_{B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \varphi\,\mathrm{d}\mu \leq \mu(B_{r_0}(x_0)\cap\overline{\Omega}) < \sigma.$$

Logo, para $n\in\mathbb{N}$ suficientemente grande e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos

$$\int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |\nabla u_n|^N\mathrm{d}x \leq \int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} |\nabla u_n|^N\varphi\,\mathrm{d}\mu \leq (1-\varepsilon)\sigma.$$

Esta estimativa junto com (1.31), implicam que

$$\int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \left(\frac{|f(x,u_n)|}{|x|^a}\right)^q\mathrm{d}x \leq C \tag{1.32}$$

para $q > 1$ suficientemente próximo de 1 de forma que $q\alpha\sigma^{1/(N-1)}/r_2 + aq/N < 1$.

Agora, notemos que

$$\int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq I_1 + I_2$$

onde

$$I_1 = \int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n)-f(x,u)|}{|x|^a}|u|\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n)|}{|x|^a}|u_n-u|\,\mathrm{d}x$$

Note que, pela desigualdade de Hölder, (1.32) e a imersão de Sobolev,

$$I_2 = \int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}|u_n - u|\,\mathrm{d}x \le C\left(\int_\Omega |u_n - u|^{q'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q'} \to 0.$$

Afirmamos que $I_1 \to 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, por densidade podemos tomar $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|u-\varphi\|_{q'} < \varepsilon$ e assim

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n)u - f(x,u)u|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x &\le \int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n)|}{|x|^a}|u-\varphi|\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n) - f(x,u)|}{|x|^a}|\varphi|\,\mathrm{d}x \\ &+ \int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u)|}{|x|^a}|\varphi - u|\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Aplicando a desigualdade de Hölder e usando (1.32), obtemos que

$$\int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n)|}{|x|^a}|u-\varphi|\,\mathrm{d}x \le \left(\int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \left(\frac{|f(x,u_n)|}{|x|^a}\right)^q \mathrm{d}x\right)^{1/q} \|u-\varphi\|_{q'} < \varepsilon.$$

Usando o Lema 1.5.1,

$$\int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n) - f(x,u)|}{|x|^a}|\varphi|\,\mathrm{d}x \le \|\varphi\|_\infty \int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u_n) - f(x,u)|}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Pela Proposição 1.1.1, temos

$$\int_{B_{\frac{r_0}{2}}(x_0)\cap\overline{\Omega}} \frac{|f(x,u)|}{|x|^a}|\varphi - u|\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Para concluir a afirmação basta usar que K é compacto e repetir o mesmo argumento sobre uma cobertura finita de bolas.

Para completar a prova de (1.27), estabelecemos a seguinte afirmação:

Afirmação 1.5.2. *Seja $\varepsilon_0 > 0$ fixo e suficientemente pequeno tal que $B_{\varepsilon_0}(x_i) \cap B_{\varepsilon_0}(x_j) = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\Omega_{\varepsilon_0} = \{x \in \overline{\Omega} : \|x - x_j\| \ge \varepsilon_0, j = 1,2,\ldots,m\}$. Então*

$$\int_{\Omega_{\varepsilon_0}} (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\,\mathrm{d}x \to 0.$$

De fato, seja $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tais que $\varphi \equiv 1$ em $B_{1/2}(0)$ e $\varphi \equiv 0$ em $\overline{\Omega} \setminus B_1(0)$. Tomando

$$\psi_\varepsilon(x) = 1 - \sum_{j=1}^m \varphi\left(\frac{x - x_j}{\varepsilon}\right)$$

temos $0 \leq \psi_\varepsilon \leq 1$, $\psi_\varepsilon \equiv 1$ em $\overline{\Omega}_\varepsilon = \overline{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^m B(x_j, \varepsilon)$, $\psi_\varepsilon \equiv 0$ em $\cup_{j=1}^m B(x_j, \frac{\varepsilon}{2})$ e $\psi_\varepsilon u_n$ é um sequência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Usando (1.29) com $v = \psi_\varepsilon u_n$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla(\psi_\varepsilon u_n)\, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} \psi_\varepsilon u_n\, \mathrm{d}x - \int_\Omega h \psi_\varepsilon u_n\, \mathrm{d}x \leq \varepsilon_n \|\psi_\varepsilon u_n\|,$$

a qual implica

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n [u_n \nabla \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon \nabla u_n]\, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} \psi_\varepsilon u_n\, \mathrm{d}x - \int_\Omega h \psi_\varepsilon u_n\, \mathrm{d}x \leq \varepsilon_n \|\psi_\varepsilon u_n\|.$$

Então,

$$\int_\Omega \left[|\nabla u_n|^N \psi_\varepsilon + u_n |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u_n \right] \mathrm{d}x - \int_\Omega h \psi_\varepsilon u_n\, \mathrm{d}x \leq \varepsilon_n \|\psi_\varepsilon u_n\|. \quad (1.33)$$

Agora, usando (1.29) com $v = -\psi_\varepsilon u$, temos

$$\int_\Omega \left[-|\nabla u_n|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u_n|^{N-2} u \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u \right] \mathrm{d}x + \int_\Omega h \psi_\varepsilon u \mathrm{d}x \leq \varepsilon_n \|\psi_\varepsilon u\|. \quad (1.34)$$

Usando que a função $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $g(v) = |v|^N$ é estritamente convexa temos que

$$0 \leq (|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n - |\nabla u|^{N-2} \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u).$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_{\overline{\Omega}_{\varepsilon_0}} (|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n) - |\nabla u|^{N-2} \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\, \mathrm{d}x \\ \leq & \int_\Omega (|\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n) - |\nabla u|^{N-2} \nabla u)(\nabla u_n - \nabla u) \psi_\varepsilon\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Esta estimativa pode ser escrita como

$$0 \leq \int_\Omega [|\nabla u_n|^N \psi_\varepsilon - |\nabla u_n|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u \nabla u_n + |\nabla u|^N \psi_\varepsilon]\, \mathrm{d}x. \quad (1.35)$$

Por (1.33), (1.34) e (1.35), obtemos

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_\Omega \left[-|\nabla u_n|^{N-2} \psi_\varepsilon + u_n |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon + \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u_n + \psi_\varepsilon h u_n \right] \mathrm{d}x + \varepsilon_n \|\psi_\varepsilon u_n\| \\ + & \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^N \psi_\varepsilon \nabla u_n \nabla u - u |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon - \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u - \psi_\varepsilon h u \right] \mathrm{d}x + \varepsilon_n \|\psi_\varepsilon u\| \\ + & \int_\Omega \left[|\nabla u_n|^N \psi_\varepsilon - |\nabla u_n|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u|^{N-2} \psi_\varepsilon \nabla u \nabla u_n + |\nabla u|^N \psi_\varepsilon \right] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq & \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon (u_n - u)\, \mathrm{d}x + \int_\Omega \psi_\varepsilon |\nabla u|^{N-2} \nabla u (\nabla u - \nabla u_n)\, \mathrm{d}x \\ + & \int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} (u_n - u)\, \mathrm{d}x + \int_\Omega \psi_\varepsilon h (u_n - u)\, \mathrm{d}x + \varepsilon_n \|\psi_\varepsilon u\| + \varepsilon_n \|\psi_\varepsilon u_n\|. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Vamos estimar cada integral em (1.36) separadamente. Note que para $\delta > 0$ arbitrário, usando a desigualdade de interpolação $ab \leq \delta a^{N/(N-1)} + C_\delta b^N$, com $C_\delta = \delta^{1-N}$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon (u-u_n)\ \mathrm{d}x &\leq \delta \int_\Omega |\nabla u_n|^N \mathrm{d}x + C_\delta \int_\Omega |\nabla \psi_\varepsilon|^N |u-u_n|^N\ \mathrm{d}x \\ &\leq \delta C + C_\delta \left(\int_\Omega |\nabla \psi_\varepsilon|^{rN}\ \mathrm{d}x\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u-u_n|^{sN}\ \mathrm{d}x\right)^{1/s},\end{aligned}$$

onde $1/r + 1/s = 1$. Assim, desde que $u_n \to u$ em $L^{sN}(\Omega)$ e δ é arbitrário, obtemos que

$$\limsup_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla \psi_\varepsilon (u-u_n)\ \mathrm{d}x \leq 0. \tag{1.37}$$

Usando que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, obtemos que

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon |\nabla u|^{N-2}\nabla u (\nabla u - \nabla u_n)\ \mathrm{d}x \to 0. \tag{1.38}$$

Agora, afirmamos que

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}(u_n - u)\ \mathrm{d}x \to 0. \tag{1.39}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}(u_n-u)\ \mathrm{d}x = &\int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u_n\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u)}{|x|^a} u\ \mathrm{d}x \\ + &\int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u)}{|x|^a} u\ \mathrm{d}x - \int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u\ \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Aplicando a afirmação 1.5.1 com $g(x,u) = \psi_\varepsilon(x)\dfrac{f(x,u)}{|x|^a}$ e $K = \overline{\Omega}_{\varepsilon/2}$, temos que

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u_n\ \mathrm{d}x = \int_{\overline{\Omega}_{\varepsilon/2}} \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u_n\ \mathrm{d}x \to \int_{\overline{\Omega}_{\varepsilon/2}} \psi_\varepsilon \frac{f(x,u)}{|x|^a} u\ \mathrm{d}x = \int_{\overline{\Omega}} \psi_\varepsilon \frac{f(x,u)}{|x|^a} u\ \mathrm{d}x.$$

Usando o Lema 1.5.1, obtemos

$$\int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u\ \mathrm{d}x \to \int_\Omega \psi_\varepsilon \frac{f(x,u)}{|x|^a} u\ \mathrm{d}x.$$

Assim, por (1.36) e usando (1.37), (1.38) e (1.39), concluimos que a afirmação 1.5.2 vale.

Finalmente pela a afirmação 1.5.2, desde que ε_0 é arbitrário, obtemos

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

O que junto com o fato da sequência $(|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n)$ ser limitada em $(L^{N/(N-1)}(\Omega))^N$, implicam que

$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2}\nabla u \quad \text{em} \quad (L^{N/(N-1)}(\Omega))^N,$$

a menos de subsequência. Assim, concluímos a prova do Lema. ∎

Deste Lema segue o seguinte resultado.

Corolário 1.5.1. *Seja* (u_n) *uma sequência de Palais-Smale para* I. *Então existe uma subsequência que denotaremos novamente por* (u_n) *que converge fracamente para uma solução não-trivial do problema* (1.1).

Prova: Usando o Lema 1.5.2, a menos de subsequência, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Agora, por (1.29), tomando o limite e usando novamente o Lema 1.5.2, temos que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u)}{|x|^a}\varphi \, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)\varphi \, \mathrm{d}x = 0, \text{ para todo } \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Desde que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,N}(\Omega)$, concluímos que u é solução fraca de (1.1). Como $h \not\equiv 0$, concluímos que $u \not\equiv 0$. ∎

1.6 Prova dos resultados principais

Para as sequências (v_n) e (u_n) obtidas em (1.24) e (1.25), seque pelo Corolário 1.5.1 os seguintes fatos:

$$v_n \rightharpoonup u_M \quad \text{em} \quad W_0^{1,N}(\Omega) \quad \text{e} \quad I(v_n) \to c_M$$

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad W_0^{1,N}(\Omega) \quad \text{e} \quad I(u_n) \to c_0,$$

onde $u_M \neq 0$ e $u_0 \neq 0$ são soluções fracas do problema (1.1).

Como as convergências são apenas fracas não podemos concluir que u_M e u_0 são distintas de imediato. Então para provarmos que de fato estas soluções são diferentes vamos considerar os casos subcrítico e crítico. O que será o objetivo das próximas seções.

1.6.1 Caso subcrítico

Nesta subseção daremos a prova do Teorema 1.1.1. Portanto, assumiremos que $f(x,s)$ possui crescimento subcrítico e satisfaz (f_0), (f_1) (ou (f_2)) e (f_3). A demonstração do Teorema 1.1.1 será consequência do seguinte lema.

Lema 1.6.1. *O funcional* I *satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja (u_n) uma sequência de Palais-Smale. Pelo Lema 1.5.2 (u_n) é limitada, logo a menos de subsequência, podemos assumir que $u_n = u_0 + w_n$, onde $w_n \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e $w_n \to 0$ em $L^q(\Omega)$, $q \in [1,\infty)$. Pelo Lema de Brezis-Lieb (cf. [15]), temos que

$$\|u_n\|^N = \|u_0\|^N + \|w_n\|^N + o(1).$$

Afirmamos que

$$\int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}u_0 \, \mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{f(x,u_0)}{|x|^a}u_0 \, \mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.40}$$

Com efeito, desde que $C_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,N}(\Omega)$, então para todo $\tau > 0$ existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\|\varphi - u_0\| < \tau$. Notemos que

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u_0 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u_0)}{|x|^a} u_0 \, \mathrm{d}x \right| &\leq \left| \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x \right| \\ &+ \left| \int_\Omega \frac{f(x,u_0)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x \right| \\ &+ \|\varphi\|_\infty \int_\Omega \frac{|f(x,u_n) - f(x,u_0)|}{|x|^a} \, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{1.41}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} |\langle I'(u_n), u_0 - \varphi \rangle| &= \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x) \varphi \, \mathrm{d}x \right| \\ &\geq \left| \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x \right| - \left| \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2} \nabla u_n \nabla (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x - \int_\Omega h(x) \varphi \, \mathrm{d}x \right| \\ &\geq \left| \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x \right| - \|u_n\|^{N-1} \|u_0 - \varphi\| + \|h\|_* \|u_0 - \varphi\|. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x \right| &\leq |I'(u_n), u_0 - \varphi \rangle| + \|u_n\|^{N-1} \|u_0 - \varphi\| + \|h\|_* \|u_0 - \varphi\| \\ &\leq C \|u_0 - \varphi\| < C\tau, \end{aligned}$$

onde C é independente de n. Similarmente, usando que $\langle I'(u_0), u_0 - \varphi \rangle = 0$, temos que

$$\left| \int_\Omega \frac{f(x,u_0)}{|x|^a} (u_0 - \varphi) \, \mathrm{d}x \right| < C\tau.$$

Para estimar o último termo em (1.41) usamos o fato que $\dfrac{f(x,u_n)}{|x|^a} \to \dfrac{f(x,u_0)}{|x|^a}$ em $L^1(\Omega)$. E consequentemente destas estimativas, obtemos que

$$\lim_{n \to \infty} \left| \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} u_0 \, \mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u_0)}{|x|^a} u_0 \, \mathrm{d}x \right| < 2C\tau;$$

Esta estimativa implica que

$$\langle I'(u_n), u_n \rangle = \langle I'(u_0), u_0 \rangle + \|w_n\|^N - \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} w_n \, \mathrm{d}x + o(1).$$

Donde obtemos

$$\|w_n\|^N = \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} w_n \, \mathrm{d}x + o(1).$$

Como $\|u_n\| \leq C$, podemos escolher $q > 1$ suficiente próximo de 1 e $\alpha > 0$ pequeno tal que $\alpha q\|u_n\|^{N/(N-1)}/\alpha_N + qa/N < 1$, pois $f(x,s)$ tem crescimento subcrítico. Então,

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x,u_n)|}{|x|^a}\right)^q \mathrm{d}x \leq C\int_\Omega \frac{e^{q\alpha\|u_n\|^{N/(N-1)}|\frac{u_n}{\|u_n\|}|^{N/(N-1)}}}{|x|^{aq}} \mathrm{d}x \leq C.$$

Logo,

$$\int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} w_n \,\mathrm{d}x \leq C\|w_n\|_{q'} \to 0.$$

Consequentemente $\|w_n\| \to 0$ e o resultado segue. ∎

Prova do Teorema 1.1.1: Pelo Lema 1.6.1 temos que I satisfaz a condição de Palais-Smale, consequentemente,

$$I(v_n) \to I(u_M) = c_M \quad \text{e} \quad I(u_n) \to I(u_0) = c_0.$$

Donde segue que $u_M \neq u_0$. O que prova o Teorema 1.1.1.

1.6.2 Caso crítico

Nesta subseção daremos as provas dos Teoremas Teoremas 1.1.3 e 1.1.4. Portanto, assumiremos que $f(x,s)$ possui crescimento crítico e satisfaz (f_0), (f_1) (ou (f_2)), (f_3) e (f_4^+). A principal de dificuldade deste caso é que em geral o funcional I não satisfaz a condição de Palais-Smale. Só em determinadas situações.

O próximo lema nos fornece uma condição para o funcional I satisfazer a condição de Palais-Smale.

Lema 1.6.2. *Seja (υ_n) uma sequência de Palais-Smale para o funcional I em qualquer nível com*

$$\liminf_{n\to\infty} \|\upsilon_n\|^N < \left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

então (υ_n) possui uma subsequência que converge fortemente.

Prova: Pelo Lema 1.5.2, podemos assumir que $\upsilon_n \rightharpoonup \upsilon$ fracamente em $W_0^{1,N}(\Omega)$, onde υ é uma solução fraca do problema (1.1). Pelas imersões de Sobolev temos que $\upsilon_n \to \upsilon$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,+\infty)$, e $\upsilon_n(x) \to \upsilon(x)$ quase sempre em Ω.

Afirmamos que $\upsilon_n \to \upsilon$.

De fato, escrevendo $\upsilon_n = \upsilon + w_n$, segue que $w_n \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Logo $w_n \to 0$ em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$. Pelo Lema de Brezis-Lieb (cf. [15]), temos que

$$\|\upsilon_n\|^N = \|\upsilon\|^N + \|w_n\|^N + o(1). \tag{1.42}$$

Pelo mesmo argumento da prova do Lema 3.6.1, temos que

$$\int_\Omega \frac{f(x,\upsilon_n)}{|x|^a}\upsilon \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{f(x,\upsilon)}{|x|^a}\upsilon \,\mathrm{d}x. \tag{1.43}$$

Assim, por (1.42) e (1.43), podemos escrever

$$\langle I'(\upsilon_n), \upsilon_n\rangle = \langle I'(\upsilon), \upsilon\rangle + \|w_n\|^N - \int_\Omega \frac{f(x,\upsilon_n)}{|x|^a} w_n \, \mathrm{d}x + o(1),$$

isto é,

$$\|w_n\|^N = \int_\Omega \frac{f(x,\upsilon_n)}{|x|^a} w_n \, \mathrm{d}x + o(1). \tag{1.44}$$

Desde que

$$\|\upsilon_n\| < \left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

para n suficientemente grande, podemos escolher $q > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que

$$\alpha_0 q \|\upsilon_n\|^{N/(N-1)}/\alpha_N + qa/N < 1.$$

Então,

$$\int_\Omega \left(\frac{|f(x,\upsilon_n)|}{|x|^a}\right)^q \mathrm{d}x \le C \int_\Omega \frac{e^{q\alpha_0\|\upsilon_n\|^{N/(N-1)}|\frac{\upsilon_n}{\|\upsilon_n\|}|^{N/(N-1)}}}{|x|^a} \mathrm{d}x \le C.$$

Logo,

$$\int_\Omega \frac{f(x,\upsilon_n)}{|x|^a} w_n \mathrm{d}x \le C\|w_n\|_{q'} \to 0.$$

Consequentemente $\|w_n\| \to 0$ e o Lema segue.

■

Agora, como consequência do lema anterior provaremos o Teorema 1.1.3. Isto a existência de uma solução com energia no nível c_0.

Lema 1.6.3. *Para cada $h \in W^{-1,N'}$ com $0 < \|h\|_* < \delta_1$, a equação (1.1)* possui uma solução tipo mínimo u_0 com $I(u_0) = c_0 < 0$.

Prova: Seja ρ_h como no Lema 1.4.2. Podemos escolher $\|h\|_*$ suficientemente pequena tal que

$$\rho_h < \left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{(N-1)/N}.$$

Desde que $\overline{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico complete com a métrica induzida pela norma de $W_0^{1,N}(\Omega)$ e convexo, e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente sobre $\overline{B}_{\rho_h}$, segue pelo Teorema 1.3.2 existe uma sequência (u_n) em $\overline{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(u_n) \to c_0 = \inf_{\|u\|\le\rho_h} I(u) \text{ and } \|I'(u_n)\|_* \to 0.$$

Observemos que

$$\|u_n\|^N \le \rho_h^N < \left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1},$$

pelo Lema 1.6.2, existe uma subsequência de (u_n) a qual converge fortemente para uma solução u_0 de (1.1). Portanto, $I(u_0) = c_0 < 0$.

■

Assim resumindo temos para as sequências (v_n) e (u_n) obtidas em (1.24) e (1.25) que

$$v_n \rightharpoonup u_M \quad \text{em} \quad W_0^{1,N}(\Omega) \quad \text{e} \quad I(v_n) \to c_M$$

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad W_0^{1,N}(\Omega) \quad \text{e} \quad I(u_n) \to c_0,$$

onde $u_M \neq 0$ e $u_0 \neq 0$ são soluções fracas do problema (1.1).

Como a primeira convergência é apenas fraca não podemos concluir que u_M e u_0 são distintas de imediato. Então para provarmos que de fato estas soluções são diferentes precisamos de mais informações sobre o nível minimax c_M, o que será o objetivos dos próximos lemas.

Inicialmente vamos considerar a seguinte sequência, a qual foi construída em [28]. Para $n \in \mathbb{N}$ defina $\delta_n = \frac{2\log n}{n}$ e seja

$$y_n(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{n^{1/N}}(1-\delta_n)^{(N-1)/N} & \text{se} \quad 0 \le t \le n \\ \dfrac{N-1}{(n(1-\delta_n))^{1/N}} \log \dfrac{A_n+1}{A_n + e^{-(t-n)/(N-1)}} + (n(1-\delta_n)^{(N-1)/N}) & \text{se} \quad n \le t, \end{cases}$$

onde A_n é definido por

$$A_n = \frac{1}{n^2}\frac{1}{e^{1+1/2+\cdots+1/(N-1)}} + \begin{cases} O(1/n^4) & \text{se} \quad N = 2 \\ O(\log^2(n)/n^3) & \text{se} \quad N \ge 3. \end{cases}$$

A sequência (y_n) tem as seguintes propriedades:

- $(y_n) \subset C([0,+\infty))$, diferenciável quase sempre, com $y_n(0) = 0$ e $y_n'(t) \ge 0$;
- $\int_0^{+\infty} |y_n'(t)|^N \, \mathrm{d}t = 1$;
- $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t} \mathrm{d}t = 1 + e^{1+1/2+\cdots 1/(N-1)}$.

Para mais detalhes a respeito desta sequência veja [28].

Agora seja $y_n(t) = N^{(N-1)/N}\omega_{N-1}^{1/N} V_n(e^{-t/N})$, com $|x|^N = e^{-t}$. Desta forma definimos uma função $V_n(x) = V_n(|x|)$ sobre $\overline{B_1(0)}$, a qual é não-negativa e radialmente simétrica. Além disso, temos que

$$\int_{B_1(0)} |\nabla V_n(x)|^N \, \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} |y_n'(t)|^N \, \mathrm{d}t = 1.$$

Agora seja $\beta = \frac{N-a}{N}$, então para cada V_n definimos uma outra função não-negativa e radialmente simétrica $\widetilde{M_n}$ da seguinte maneira:

$$V_n(\rho) = \beta^{(N-1)/N}\widetilde{M_n}(\rho^{1/\beta}),$$

para $\rho \in [0,1]$. Logo

$$\int_0^1 |V_n'(\rho)|^N \rho^{N-1} \mathrm{d}\rho = \int_0^1 |\widetilde{M_n}'(\rho)|^N \rho^{N-1} \mathrm{d}\rho,$$

consequentemente, $\|V_n\| = \|\widetilde{M_n}\| = 1$.

Para o próximo Lema definimos $M_n(x,r) = \widetilde{M}_n(x/r)$. Assim $M_n(x/r) \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $\mathrm{supp}(M_n(x,r)) = \overline{B_r(0)}$ e $\|M_n(\cdot,r)\| = 1$.

Lema 1.6.4. *Suponha que* (f_2), (f_3) *e* (f_4^+) *são satisfeitas. Então existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,tM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right\} < \frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Prova: Suponhamos por contradição que para todo n

$$\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,tM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right\} \geq \frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Pelo Lema 1.4.3 e a observação 1.4.1, temos que

$$\frac{t^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,tM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x < 0,$$

para t suficientemente grande. Por outro lado, pelo Lema 1.4.2 existe $\overline{\delta} > 0$ e $t > 0$ tal que

$$\frac{t^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,tM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \geq \overline{\delta}.$$

Assim se considerarmos a função $g : [0,\xi_n] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \frac{t^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,tM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x,$$

onde $[0,\xi_n]$ é escolhido de forma que $g(t) \geq 0$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$, g é uma função contínua, existe $t_n \in [0,\xi_n]$ tal que

$$g(t_n) = \max_{t\in[0,\xi_n]} g(t).$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que

$$\frac{t_n^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,t_nM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,tM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right\}.$$

Afirmação 1: A menos de subsequência (t_n) é tal que

$$t_n^N \to \left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

De fato, temos que
$$\frac{t_n^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,t_nM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \geq \frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$
Mas como $F(x,t_nM_n) \geq 0$ em Ω para n suficientemente grande, temos
$$t_n^N \geq \left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}. \tag{1.45}$$
Desde que
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{t^N}{N} - \int_\Omega \frac{F(x,tM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right) = 0,$$
para $t = t_n$, segue que
$$t_n^N = \int_\Omega \frac{f(x,t_nM_n)}{|x|^a} t_nM_n\,\mathrm{d}x \geq \int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \frac{f(x,t_nM_n)}{|x|^a} t_nM_n\,\mathrm{d}x. \tag{1.46}$$
Por outro lado, segue de (f_4^+) que dado $\varepsilon > 0$ existe $R_\varepsilon > 0$ tal que
$$uf(x,u) \geq (\beta_0 - \varepsilon)e^{\alpha_0|u|^{N/(N-1)}} \quad \text{para todo} \quad u \geq R_\varepsilon. \tag{1.47}$$
Agora notemos que $t_nM_n \geq R_\varepsilon$ em $B_{\frac{r}{n}}(0)$ para n suficientemente grande. Assim por (1.46) e (1.47), obtemos que
$$\begin{aligned}
t_n^N &\geq (\beta_0 - \varepsilon)\int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \frac{e^{\alpha_0|t_nM_n|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \\
&= (\beta_0 - \varepsilon)\left(\frac{r}{n}\right)^{N-a}\int_{B_1(0)} \frac{e^{\alpha_0|t_n\widetilde{M}_n|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \\
&= (\beta_0 - \varepsilon)\omega_{N-1}\left(\frac{r}{n}\right)^{N-a}\int_0^1 e^{\alpha_0|t_n\widetilde{M}_n(\rho)|^{N/(N-1)}}\rho^{N-1-a}\,\mathrm{d}\rho.
\end{aligned}$$
Tomando $\rho = \tau^{1/\beta}$, obtemos
$$t_n^N \geq (\beta_0 - \varepsilon)\omega_{N-1}\frac{N}{N-a}\left(\frac{r}{n}\right)^{N-a}\int_0^1 e^{\frac{\alpha_0 N}{N-a}|t_nV_n(\tau)|^{N/(N-1)}}\tau^{N-1}\,\mathrm{d}\tau.$$
Fazendo $\tau = e^{-t/N}$, temos que
$$t_n^N \geq (\beta_0 - \varepsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N-a}\left(\frac{r}{n}\right)^{N-a}\int_0^{+\infty} e^{\frac{\alpha_0 N}{\alpha_N(N-a)}|t_ny_n(t)|^{N/(N-1)}}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
Portanto,
$$\begin{aligned}
t_n^N &\geq (\beta_0 - \varepsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N-a}\left(\frac{r}{n}\right)^{N-a}\int_n^{+\infty} e^{\frac{\alpha_0 N}{\alpha_N(N-a)}t_n^{N/(N-1)}(n-2\log n)}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= (\beta_0 - \varepsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N-a}r^{N-a}e^{\frac{\alpha_0 N}{\alpha_N(N-a)}t_n^{N/(N-1)}(n-2\log n)-(N-a)\log n-n}.
\end{aligned}$$

Desta última estimativa segue que (t_n) é uma sequência limitada. Assim (t_n) possui uma subsequência convergente, que denotaremos novamente por (t_n). Afirmamos que

$$t_n^N \to \left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}. \tag{1.48}$$

Suponhamos que (1.48) não vale, então existe um $\delta > 0$ tal que a menos de subsequência, temos

$$t_n^{N/(N-1)} \geq \delta + \frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
t_n^N &\geq (\beta_0-\varepsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N-a}\left(\frac{r}{n}\right)^{N-a}\int_0^{+\infty} e^{\frac{\alpha_0 N}{\alpha_N(N-a)}|t_n y_n(t)|^{N/(N-1)}} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\geq (\beta_0-\varepsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N-a}\left(\frac{r}{n}\right)^{N-a}\int_n^{+\infty} e^{(\delta\frac{\alpha_0 N}{\alpha_N(N-a)}+1)(n-2\log n)} e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= (\beta_0-\varepsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N-a} r^{N-a} e^{\delta\frac{\alpha_0 N}{\alpha_N(N-a)}n-(\delta\frac{\alpha_0 N}{\alpha_N(N-a)}+1)2\log n-(N-a)\log n}.
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Tomando o limite em (1.49), obtemos que $t_n \to +\infty$, o que é uma contradição. Logo, a afirmação 1 vale.

Agora, considere $A_n = \{x \in B_r(0) : t_n M_n \geq R_\varepsilon\}$ e $B_n = B_r(0)\setminus A_n$. Por (1.46) temos que

$$\begin{aligned}
t_n^N &\geq (\beta_0-\varepsilon)\left[\int_{B_r(0)}\frac{e^{(\alpha_0|t_n M_n|^{N/(N-1)})}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \int_{B_n}\frac{e^{(\alpha_0|t_n M_n|^{N/(N-1)})}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right] \\
&+ \int_{B_n}\frac{f(x,t_n M_n)}{|x|^a} t_n M_n\,\mathrm{d}x.
\end{aligned} \tag{1.50}$$

Note que $M_n(x) \to 0$ quase sempre em $B_r(0)$ e as funções características $\chi_{B_n}(x) \to 1$ quase sempre em $B_r(0)$ quando $n \to \infty$. Logo $t_n M_n(x) \leq R_\varepsilon$ em B_n, consequentemente pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$\int_{B_n}\frac{f(x,t_n M_n)}{|x|^a} t_n M_n\,\mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\int_{B_n}\frac{e^{(\alpha_0|t_n M_n|^{N/(N-1)})}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \to \frac{\omega_{N-1}}{N-a} r^{N-a}.$$

Agora notemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(0)} \frac{e^{\alpha_0|t_nM_n|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x &= r^{N-a}\int_{B_1(0)} \frac{e^{\alpha_0|t_n\widetilde{M_n}|^{N/(N-1)}}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \\
&= \omega_{N-1} r^{N-a}\int_0^1 e^{\alpha_0|t_n\widetilde{M_n}(\rho)|^{N/(N-1)}}\rho^{N-1-a}\,\mathrm{d}\rho \\
&= \omega_{N-1}\frac{N}{N-a} r^{N-a}\int_0^1 e^{\frac{\alpha_0 N}{N-a}|t_nV_n(\tau)|^{N/(N-1)}}\tau^{N-1}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{\omega_{N-1}}{N-a} r^{N-a}\int_0^{+\infty} e^{\frac{\alpha_0 N}{\alpha_N(N-a)}|t_ny_n(t)|^{N/(N-1)}}e^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&\geq \frac{\omega_{N-1}}{N-a} r^{N-a}\int_0^{+\infty} e^{y_n^{N/(N-1)}(t)-t}\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

Passando o limite em (1.50), obtemos que

$$\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} \geq (\beta_0-\varepsilon)\left(\frac{\omega_{N-1}}{N-a}r^{N-a}\left(1+e^{1+1/2+\cdots+1/(N-1)}\right)-\frac{\omega_{N-1}}{N-a}r^{N-a}\right).$$

Esta estimativa implica que

$$\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} \geq (\beta_0-\varepsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N-a}r^{N-a}e^{1+1/2+\cdots+1/(N-1)}.$$

Como ε é arbitrário, obtemos que

$$\beta_0 \leq \frac{N-a}{r^{N-a}e^{1+1/2+\cdots+1/(N-1)}}\left(\frac{N-a}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

O que contradiz (f_4^+). Desta forma segue o resultado do lema. ■

Para obtermos o resultado que as soluções u_M e u_0 são distintas precisamos melhorar a estimativa do Lema 1.6.4. Primeiramente temos o seguinte corolário.

Corolário 1.6.1. *Sob as hipóteses $(f_2)-(f_4^+)$, se $\|h\|_*$ é suficientemente pequena, então*

$$\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^N}{N}-\int_\Omega \frac{F(x,tM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - t\int_\Omega hM_n\,\mathrm{d}x\right\} < \frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Prova: Notemos que $\|hM_n\|_1 \leq \|h\|_*$. Logo, tomando $\|h\|_*$ suficientemente pequena e usando o Lema 1.6.4 o resultado segue. ■

Deste corolário e do Lema 1.6.4, obtemos o seguinte resultado.

Corolário 1.6.2. *Sob as hipóteses $(f_2)-(f_4^+)$, existe $\delta_2>0$ tal que para todo $h\in W^{-1,N'}$ com $0<\|h\|_*<\delta_2$, existe uma função $u\in W_0^{1,N}(\Omega)$ com suporte compacto verificando*

$$I(tu) < c_0+\frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} \quad \textit{para todo} \quad t\geq 0.$$

Prova: Notemos que c_0 cresce quando $\|h\|_*$ decresce, pois $c_0 \to 0$ quando $\|h\|_* \to 0$. Logo, existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$\max_{t\geq 0} I(tM_n) < c_0 + \frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} \quad \text{sempre que} \quad 0 < \|h\|_* < \delta_2.$$

Tomando $u = M_n \in W_0^{1,N}(\Omega)$, o resultado está provado. ∎

Observação 1.6.1. *Pelo Corolário 1.6.2, podemos concluir que*

$$0 < c_M < c_0 + \frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Precisaremos também dos seguintes resultados para demonstrarmos que u_M e u_0 são distintas.

Lema 1.6.5. *Seja $\{u_k : \|u_k\| = 1\}$ uma sequência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ convergindo fracamente para uma função não-nula u. Então, para todo $0 < p < (1 - \|u\|^N)^{-1/(N-1)}$, $a \in [0,N)$ e $s > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que $as < N$, vale o seguinte:*

$$\sup_k \int_\Omega \frac{e^{p\alpha_N \frac{N-as}{N}|u_k|^{N/(N-1)}}}{|x|^{as}}\,\mathrm{d}x < \infty.$$

A prova deste resultado segue usando a desigualdade de Hölder e a Proposição 1.1.1.

Lema 1.6.6. *Suponha que $f(x,s)$ satisfaz (f_2) e que possui crescimento crítico em $+\infty$ e $-\infty$. Seja $(\upsilon_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ uma sequência de Palais-Smale para I e υ o seu limite fraco, então a menos de subsequência*

$$\frac{F(x,\upsilon_n)}{|x|^a} \to \frac{F(x,\upsilon)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Prova: Como consequência do Lema 1.5.2, temos que

$$\frac{f(x,\upsilon_n)}{|x|^a} \to \frac{f(x,\upsilon)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Logo, existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $\dfrac{|f(x,\upsilon_n)|}{|x|^a} \leq g$ quase sempre em Ω. Por (f_2) segue que

$$|F(x,\upsilon_n)| \leq \sup_{(x,\upsilon_n)\in\Omega\times[-R,R]} |F(x,\upsilon_n)| + M_0 f(x,\upsilon_n) \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Portanto, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue generalizado (cf. [43])

$$\frac{F(x,\upsilon_n)}{|x|^a} \to \frac{F(x,\upsilon)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

∎

Agora provaremos o seguinte resultado.

Proposição 1.6.1. *Para $\delta_2 > 0$ suficientemente pequeno as soluções u_M e u_0 são distintas.*

Prova: Sejam (v_n) e (u_n) as sequências de Palais-Smale obtidas em (1.24) e (1.25), então

$$\begin{aligned}
&u_n \to u_0 \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega) \text{ e } v_n \rightharpoonup u_M \text{ em } W_0^{1,N}(\Omega)\\
&I(u_n) \to c_0 < 0 \quad \text{e} \quad I(v_n) \to c_M > 0\\
&\langle I'(u_n), u_n\rangle \to 0 \quad \text{e} \quad \langle I'(v_n), v_n\rangle \to 0.
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Suponhamos que $u_0 = u_M$. Então, pelo Lema 1.6.6, temos que

$$I(u_n) = \frac{1}{N}\|u_n\|^N - \int_\Omega \frac{F(x,u_0)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)u_0\,\mathrm{d}x + o(1) = c_0$$

e

$$I(v_n) = \frac{1}{N}\|v_n\|^N - \int_\Omega \frac{F(x,u_0)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)u_0\,\mathrm{d}x + o(1) = c_M.$$

Subtraindo estas equações, obtemos que

$$\|u_n\|^N - \|v_n\|^N \to N(c_0 - c_M) < 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.52}$$

Desde que (u_n) e (v_n) são ambas sequências de Palais-Smale, temos que

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \|u_n\|^N - \int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}u_n\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)u_n\,\mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\langle I'(v_n), v_n\rangle = \|v_n\|^N - \int_\Omega \frac{f(x,v_n)}{|x|^a}v_n\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)v_n\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^N - \|v_n\|^N \quad &- \quad \int_\Omega \left[\frac{f(x,u_n)}{|x|^a}u_n - \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}v_n + \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}v_n - \frac{f(x,v_n)}{|x|^a}v_n\right]\mathrm{d}x\\
&- \quad \int_\Omega [h(u_n - u_0) - h(v_n - u_0)]\,\mathrm{d}x \to 0.
\end{aligned} \tag{1.53}$$

Desde que $h \in W^{-1,N'}$, $u_n \rightharpoonup u_0$ e $v_n \rightharpoonup u_0$, é imediato que o último termo tende para zero. Já o segundo termo podemos escrever como segue:

$$\int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}(u_n - v_n)\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,u_n) - f(x,v_n)}{|x|^a}v_n\,\mathrm{d}x.$$

Notemos que

$$\int_\Omega \frac{f(x,u_n)}{|x|^a}(u_n - v_n)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

De fato, provamos no Lema 1.6.3 que para $\|h\|_* \in (0, \delta_1)$, a sequência minimizante (u_n) satisfaz a seguinte desigualdade:

$$\|u_n\| < \left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{(N-1)/N}.$$

Logo, podemos escolher $q>1$ suficientemente próximo de 1 tal que

$$q\alpha_0\|u_n\|^{N/(N-1)}/\alpha_N+aq/N<1.$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega\left(\frac{|f(x,u_n)|}{|x|^a}\right)^q \mathrm{d}x\le C\int_\Omega\frac{e^{(q\alpha_0\|u_n\|^{N/(N-1)}|\frac{u_n}{\|u_n\|}|^{N/)(N-1)})}}{|x|^{aq}}\,\mathrm{d}x\le C. \tag{1.54}$$

Desde que $u_n\rightharpoonup u_0$ e $v_n\rightharpoonup u_0$, obtemos que $(u_n-v_n)\rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Assim, usando a desigualdade de Hölder e estimativa acima, obtemos que

$$\int_\Omega\frac{f(x,u_n)}{|x|^a}(u_n-v_n)\,\mathrm{d}x\le C\|u_n-v_n\|_{q'}\to 0.$$

Agora, provaremos que

$$\int_\Omega\frac{f(x,u_n)-f(x,v_n)}{|x|^a}v_n\,\mathrm{d}x\to 0. \tag{1.55}$$

Seja $v_n=u_0+w_n$, temos que $w_n\rightharpoonup 0$. Desde que v_n é uma sequência do passo da montanha e $v_n\not\to u_0$. Então $\lim_{n\to\infty}\|w_n\|>0$, caso contrário $v_n\to u_0$ fortemente em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Notemos que a equação (1.55) pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_\Omega\frac{f(x,u_n)-f(x,v_n)}{|x|^a}u_0\,\mathrm{d}x+\int_\Omega\frac{f(x,u_n)-f(x,v_n)}{|x|^a}w_n\,\mathrm{d}x\to 0.$$

Pelo Lema 1.5.2, temos que $f(x,u_n)/|x|^a$ e $f(x,v_n)/|x|^a$ convergem em $L^1(\Omega)$ para $f(x,u_0)/|x|^a$. Usando o mesmo argumento da prova do Lema 1.6.1, o primeiro deste termos converge para zero. Agora, consideremos o segundo termo, isto é,

$$\int_\Omega\frac{f(x,u_n)-f(x,v_n)}{|x|^a}w_n\,\mathrm{d}x=\int_\Omega\frac{f(x,u_n)}{|x|^a}w_n\,\mathrm{d}x-\int_\Omega\frac{f(x,v_n)}{|x|^a}w_n\,\mathrm{d}x.$$

Usando a estimativa (1.54), a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)\hookrightarrow L^s(\Omega)$ para todo $s\ge 1$, obtemos que

$$\int_\Omega\frac{f(x,u_n)}{|x|^a}w_n\,\mathrm{d}x\le\left(\int_\Omega\frac{e^{(q\alpha_0\|u_n\|^{N/(N-1)}|\frac{u_n}{\|u_n\|}|^{N/(N-1)})}}{|x|^{aq}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/q}\|w_n\|_{q'}\le C\|w_n\|_{q'}\to 0.$$

Por fim, mostraremos que

$$\int_\Omega\frac{f(x,v_n)}{|x|^a}w_n\,\mathrm{d}x\to 0\quad\text{quando}\quad n\to\infty.$$

Pelo Corolário 1.6.2, fazendo δ_2 pequeno se necessário, temos que

$$0<c_M<c_0+\frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Logo,

$$\begin{aligned} c_M - c_0 = I(v_n) - I(u_n) + o(1) &= \frac{1}{N}\|v_n\|^N - \frac{1}{N}\|u_n\|^N + o(1) \\ &= \frac{1}{N}\|v_n\|^N - \frac{1}{N}\|u_0\|^N + o(1) \\ &< \frac{1}{N}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}. \end{aligned}$$

Assim, podemos tomar $s > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que

$$\|v_n\|^N - \|u_0\|^N < \left(\frac{N-as}{N}\frac{\alpha_N}{s\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Logo,

$$s\alpha_0\|v_n\|^{N/(N-1)} < \alpha_N \frac{N-as}{N}\left(1 - \left\|\frac{u_0}{\|v_n\|}\right\|\right)^{-1/(N-1)}. \tag{1.56}$$

Agora definamos $U_n = \frac{v_n}{\|v_n\|}$. Então $\|U_n\| = 1$ e $U_n \rightharpoonup U_0 = \frac{u_0}{\lim_{n\to+\infty}\|v_n\|}$. Além disso, $\|U_0\| < 1$, pois $\lim_{n\to+\infty}\|v_n\| > \|u_0\|$. Assim,

$$\int_\Omega \frac{f(x,v_n)}{|x|^a} w_n \,\mathrm{d}x \le C\left(\int_\Omega \frac{e^{(s\alpha_0\|v_n\|^{N/(N-1)}|\frac{v_n}{\|v_n\|}|^{N/(N-1)})}}{|x|^{as}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/s}\|w_n\|_{s'}. \tag{1.57}$$

Consequentemente, pelo Lema 1.6.5, (1.56) e usando o fato que $\|w_n\|_{s'} \to 0$, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{f(x,v_n)}{|x|^a} w_n \,\mathrm{d}x \to 0.$$

Portanto, por (1.53) segue que $\|u_n\|^N - \|v_n\|^N \to 0$. Mas isto contradiz (1.52), e assim concluimos que $u_0 \not\equiv u_M$. ■

A prova do Teorema 1.1.4 segue diretamente da Proposição 1.6.1.

1.6.3 Prova dos Teoremas 1.1.2 e 1.1.5:

Para prova dos Teoremas 1.1.2 e 1.1.5 no caso em que $h(x) \ge 0$, redefinimos $f(x,s)$ da seguinte forma:

$$\widetilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(x,s), & \text{se} \quad (x,s) \in \Omega \times [0,+\infty) \\ 0, & \text{se} \quad (x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Logo, no caso subcrítico (f_1) vale para $s \ge s_1$ e para o caso crítico (f_2) vale para $s \ge R$. Lembremos que as hipóteses (f_1) e (f_2) são necessárias para verificarmos a condição de Palais-Smale e para prova do Lema 1.5.2, e estes resultados continuam válidos também para a não-linearidade modificada.

A prova é uma consequência do seguinte resultado.

Corolário 1.6.3. *Se $h(x) \geq 0$ quase sempre em Ω, então as soluções fracas de* (1.1) são não-negativas.

Prova: Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ uma solução fraca de (1.1). Fazendo $u^+ = \max\{u,0\}$, $u^- = \max\{-u,0\}$ e tomando $v = u^-$ como função teste, como $\langle I'(u), v\rangle = 0$, obtemos que

$$\|u^-\|^N = -\int_\Omega h(x)u^- \mathrm{d}x \leq 0,$$

pois $f(x,u(x))u^-(x) = 0$ em Ω. Consequentemente, $u = u^+ \geq 0$. ∎

Agora, para o caso $h(x) \leq 0$, para provarmos os Teorema 1.1.2 e 1.1.5, redefinimos $f(x,s)$ para

$$\widetilde{f}(x,s) = \begin{cases} -f(x,-s), & \text{se} \quad (x,s) \in \Omega \times (-\infty, 0) \\ f(x,s), & \text{se} \quad (x,s) \in \Omega \times [0,+\infty). \end{cases}$$

Neste caso, a prova dos Teoremas 1.1.2 e 1.1.5 é dado pelo seguinte corolário:

Corolário 1.6.4. *Suponha que (f_4^-) vale e $h(x) \leq 0$ quase sempre em Ω. Então existe pelo menos duas soluções fracas não-positivas de* (1.1).

Prova: Consideremos o seguinte funcional

$$\widetilde{I}(u) = \frac{1}{N}\|u\|^N - \int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x,u)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \int_\Omega (-h(x))u\,\mathrm{d}x,$$

onde $\widetilde{F}$ é a primitiva de $\widetilde{f}$. Por sua definição $\widetilde{f}$ satisfaz as mesmas hipótese de f. Então, desde que $-h(x) \geq 0$ quase sempre em Ω, segue pelo Corolário 1.6.3 que $\widetilde{I}(u)$ tem dois pontos críticos não-negativos. Seja $\widetilde{u}$ um destes pontos críticos, isto é,

$$\int_\Omega |\nabla\widetilde{u}|^{N-2}\nabla\widetilde{u}\nabla v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x,\widetilde{u})}{|x|^a} v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega h(x)v\,\mathrm{d}x = 0, \ \ \forall\, v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Pela construção de $\widetilde{f}$, temos que $\widetilde{f}(x,\widetilde{u}) = -f(x,-\widetilde{u})$. Substituindo v por $-v$ nesta última igualdade, obtemos que

$$\int_\Omega |\nabla(-\widetilde{u})|^{N-2}\nabla(-\widetilde{u})\nabla v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{f(x,-\widetilde{u})}{|x|^a} v\,\mathrm{d}x - \int_\Omega h(x)v\,\mathrm{d}x = 0, \ \ \forall\, v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Donde obtemos que $-\widetilde{u}$ é uma solução não-positiva de (1.1). ∎

CAPÍTULO 2

Sobre uma classe homogênea de problemas quase-lineares singulares e críticos

2.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos a existência e multiplicidade de soluções para uma classe de problemas singular da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{\lambda f(u)}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{P_λ}$$

onde $\Delta_N u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é o operador $N-$Laplaciano, Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ contendo a origem com $N \geq 2$, λ é um parâmetro positivo, $a \in [0,N)$ e o termo não-linear $f(s)$ envolve uma combinação de termos côncavos e convexos e crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser em $+\infty$.

Historicamente problemas elípticos em domínios limitados, envolvendo termos côncavos e convexos e crescimento crítico têm sido estudados extensivamente depois do trabalho inicial de Ambrosetti-Brezis-Cerami [10]. Eles estudaram o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = u^{(N+2)/(N-2)} + \lambda u^q & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $0 < q < 1$. Eles provaram que existe $\Lambda > 0$ tal que (2.1) possui pelo menos duas soluções sempre que $\lambda \in (0,\Lambda)$ e não existe solução quando $\lambda > \Lambda$. Subsequentemente em [37] e [38] e foi abordado a correspondente versão quase-linear:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = u^{p^*-1} + \lambda u^q & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ é o operador $p-$Laplaciano, $1 < p < N$, $p^* = Np/(N-p)$ e $0 < q < p-1$. Foi obtido um resultado similar, mas com p e q restritos as seguintes condições:

$$2N/(N+2) < p < 3 \quad \text{ou} \quad p \geq 3 \quad \text{e} \quad p^* - 1 - 2/(p-1) < q < p-1.$$

Em [56] considerando $\Omega = B_R(0)$, foi possível obter um resultado similar ao de Ambrosetti-Brezis-Cerami [10], mas este resultado só foi possível devido aos resultados dos artigos [16] e [25], onde foi provado que toda solução de (2.2) é radialmente simétrica. Assim a versão quase-linear com $1 < p < N$ e envolvendo um termo não-linear com crescimento crítico sobre um domínio geral não possui ainda resultados de multiplicidade completos.

Neste capítulo motivados pelos trabalhos [5] e [40] estudaremos a versão singular e quase-linear para o caso $p = N$ e com crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser.

A seguir enunciamos as principais condições sobre o qual abordaremos inicialmente o problema (P_λ):

(f_1) f é uma função contínua e de classe $C^1((0,+\infty),\mathbb{R})$, com $f(s) = 0$ para todo $s \leq 0$ e $f(s) > 0$ para todo $s > 0$;

(f_2) f tem *crescimento crítico* em $+\infty$ do tipo Trudinger-Moser com expoente $\alpha_0 > 0$;

(f_3) Existe $\gamma \in (0, N-1)$ tal que
$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(s)}{s^\gamma} > 0$$
e a função $s \mapsto f(s)/s^{N-1}$ não-cresce em $(0,t_*)$ para algum $t_* \in (0,1)$, e a aplicação $t \mapsto f(t)$ é não-decresce no intervalo $(0,t_*) \cup (1/t_*, \infty)$;

(f_4) Existem $R > 0$ e $M > 0$ tais que para todo $s \geq R$
$$F(s) := \int_0^s f(t)\,\mathrm{d}t \leq M f(s).$$

Os próximos teoremas contém os principais resultados deste capítulo.

Teorema 2.1.1. *Suponha que $a \in [0,N)$, $N \geq 2$ e $f(s)$ satisfaz as condições $(f_1)-(f_3)$. Então existe $\lambda_0 > 0$ tal que para qualquer $\lambda \in (0,\lambda_0)$, o problema (P_λ) possui uma única solução, digamos u_λ, com a propriedade $\|u_\lambda\|_\infty \leq t_*$.*

Teorema 2.1.2. *Suponha que $a \in [0,N)$, $N \geq 2$ e $f(s)$ satisfaz as condições $(f_1)-(f_4)$. Então, existe $\Lambda \in (0,+\infty)$ tal que (P_λ) possui pelo menos uma solução para todo $\lambda \in (0,\Lambda]$ e não possui solução para $\lambda > \Lambda$.*

Teorema 2.1.3. *Suponha que $a \in [0,1)$, $N = 2$ e $f(s)$ satisfaz as condições $(f_1)-(f_4)$ e vale a seguinte hipótese adicional:*

(f_5) *Existe uma função $h : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ tal que*
$$\liminf_{s\to+\infty} s h(s) e^{\varepsilon s} = +\infty \quad \text{para todo} \quad \varepsilon > 0$$
e existe $R_0 > 0$ tal que para todo $s \geq R_0$
$$f(s) \geq h(s) e^{\alpha_0 s^2}.$$
Então existe $\Lambda \in (0,+\infty)$ tal que (P_λ) possui pelo menos duas soluções para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$, não existe solução para $\lambda > \Lambda$ e pelo menos uma solução quando $\lambda = \Lambda$.

As principais dificuldades em tratar esta classe de equações é que envolvem o operador $N-$Laplaciano, o crescimento crítico e a perda de regularidade das soluções em $x = 0$ devido a presença da singularidade $|x|^{-a}$ para $a \in [0,N)$.

O ingrediente principal para provar os resultados principais deste capítulo são o método de sub e super soluções e a minimização de funcionais. Para tanto, se faz necessário obtermos um teorema de comparação para o problema singular. No caso $N = 2$ um argumento de minimização local na topologia de $C_0^1(\overline{\Omega})$ será usado para mostrarmos que uma determinada solução é um mínimo local para o funcional associado ao problema em estudo. Depois provaremos a existência de uma segunda solução do tipo passo da montanha. Para isto estudaremos os níveis críticos e as sequências de Palais-Smale.

Importante destacarmos que os resultados deste capítulo complementam alguns resultados do trabalho [40] no sentido que estamos considerando o caso singular e uma classe mais geral de não-linearidades.

Observação 2.1.1. *Para $N = 2$ um exemplo típico de não-linearidade satisfazendo as condições $(f_1) - (f_5)$ é*

$$f(s) = \begin{cases} 0 & se \quad s \in (-\infty, 0); \\ s^{1/2} e^{s^2 - s^{1/2}} & se \quad s \in [0, +\infty), \end{cases}$$

onde $\gamma = 1/2$, $\alpha_0 = 1$ e $h(s) = s^{1/2} e^{-s^{1/2}}$.

De fato, (f_1), (f_2) e (f_5) são imediatas. Agora, para verificarmos (f_3) notemos que

$$\lim_{s \to 0^+} \frac{f(s)}{s^{1/2}} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{f(s)}{s} = s^{-1/2} e^{s^2 - s^{1/2}}$$

é decrescente no intervalo $(0, t_*)$ para algum t_* suficientemente pequeno, pois para s positivo e próximo de zero, temos que

$$(s^{-1/2} e^{s^2 - s^{1/2}})' = \frac{1}{2} s^{-3/2} e^{s^2 - s^{1/2}} \left(4s^2 - s^{1/2} - 1\right) < 0.$$

Por fim, notemos que existe $s_0 > 0$ tal que para $s \geq s_0$

$$s^{1/2} \leq 2s - \frac{1}{2} s^{-1/2}.$$

Assim para $s \geq s_0$ existe $C > 0$ tal que

$$F(s) = \int_0^s t^{1/2} e^{t^2 - t^{1/2}} \, \mathrm{d}t = C + \int_{s_0}^s (2t - \frac{1}{2} t^{-1/2}) e^{t^2 - t^{1/2}} \, \mathrm{d}t = C + e^{s^2 - s^{1/2}} - e^{s_0^2 - s_0^{1/2}}.$$

Consequentemente,

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{F(s)}{f(s)} = 0.$$

Donde obtemos a condição (f_4).

2.2 Formulação Variacional

Associado ao problema (P_λ) temos o funcional $J_\lambda : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J_\lambda(u) = \frac{\|u\|^N}{N} - \lambda \int_\Omega \frac{F(u)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x,$$

onde $\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N \, \mathrm{d}x\right)^{1/N}$. Argumentando como no Capítulo 1 e utilizando a Proposição 1.1.1, temos que a derivada de Fréchet deste funcional é dada por

$$\langle J'_\lambda(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \frac{f(u)}{|x|^a} v \, \mathrm{d}x, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Assim, os pontos críticos de J_λ são as soluções fracas de (P_λ).

Ao longo deste capítulo utilizaremos as seguintes definições para sub e super-solução.

Definição 2.2.1. *Uma função $\underline{u} \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é chamada sub-solução de (P_λ) se*

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{N-2} \nabla \underline{u} \nabla v \, \mathrm{d}x \leq \lambda \int_\Omega \frac{f(\underline{u})}{|x|^a} v \, \mathrm{d}x, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega), \quad v \geq 0.$$

Da mesma forma, uma função $\overline{u} \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ é chamada super-solução de (P_λ) se

$$\int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{N-2} \nabla \overline{u} \nabla v \, \mathrm{d}x \geq \lambda \int_\Omega \frac{f(\overline{u})}{|x|^a} v \, \mathrm{d}x, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega), \quad v \geq 0.$$

2.3 Alguns resultados de existência

Nesta seção provaremos dois resultados básicos de existência. Para o primeiro resultado utilizaremos o seguinte lema bastante conhecido na literatura (cf. [43] proposição 1.2):

Lema 2.3.1. *Sejam E um espaço de Banach reflexivo e $\Phi : E \to \mathbb{R}$ um funcional tal que:*

(i) *Φ é fracamente semicontínuo inferiormente;*

(ii) *Φ é coercivo, isto é, $\Phi(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$.*

Então Φ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in E$ tal que

$$\Phi(u_0) = \inf_E \Phi.$$

Como consequência deste resultado provaremos o seguinte lema.

Lema 2.3.2. *Consideremos o seguinte problema singular:*

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{\overline{h}(u)}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

onde Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ contendo a origem, $a \in [0,N)$ e $\overline{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua tal que $\overline{h}(t) \leq C|t|^\beta$ para algum $C > 0$ e $\beta \in [0,N-1)$. Então o problema (2.3) *possui uma solução fraca em $W_0^{1,N}(\Omega)$.*

Prova: Consideremos o funcional $J : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{\|u\|^N}{N} - \int_\Omega \frac{\overline{H}(u)}{|x|^a} \,\mathrm{d}x,$$

onde $\overline{H}(u) = \displaystyle\int_0^u \overline{h}(t) \,\mathrm{d}t$.

Mostraremos que este funcional satisfaz as condições do Lema 2.3.1:

(i) É bem conhecido que J é de classe C^1 e

$$\langle J'(u), v\rangle = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega \frac{\overline{h}(u)}{|x|^a} v \,\mathrm{d}x, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Logo, os pontos críticos de J são soluções fracas para o problema (2.3).

(ii) J é coercivo. De fato,

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{\|u\|^N}{N} - \int_\Omega \frac{\overline{H}(u)}{|x|^a} \,\mathrm{d}x \\ &\geq \frac{\|u\|^N}{N} - \frac{C_1}{\beta+1}\int_\Omega \frac{|u|^{\beta+1}}{|x|^a} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder para $1/q + 1/q' = 1$ com $q > 1$ suficientemente próximo de 1 de modo que $qa < N$ e a imersão compacta de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ para $t \in [1, +\infty)$, obtemos uma constante $C_2 > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{|u|^{\beta+1}}{|x|^a} \mathrm{d}x \leq \|u\|^{\beta+1}_{q'(\beta+1)} \left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{qa}} \mathrm{d}x\right)^{1/q} \leq C_2\|u\|^{\beta+1}.$$

Consequentemente, existe $C_3 > 0$ tal que

$$J(u) \geq \frac{\|u\|^N}{N} - C_3\|u\|^{\beta+1}.$$

Como $\beta \in [0,N-1)$, segue que $J(u) \to +\infty$ quando $\|u\| \to +\infty$.

(iii) J é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. Com efeito, é conhecido que a norma é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. Assim, só falta provar que o segundo termo é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. Seja $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, pela imersão compacta de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ para $t \in [1,+\infty)$, temos que (u_n) possui uma subsequência, a qual denotaremos novamente por (u_n) tal que $u_n(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω e $u_n \to u$ em $L^{s'(\beta+1)}(\Omega)$, onde $s' = s/(s-1)$ é o expoente conjugado de s com $s > 1$ tal que $as < N$. Além disso, existe $l \in L^1(\Omega)$ tal que

$$|u_n(x)|^{s'(\beta+1)} \leq l(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Usando a continuidade de $\overline{H}$, temos que

$$\frac{\overline{H}(u_n(x))}{|x|^a} \to \frac{\overline{H}(u(x))}{|x|^a} \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Como $|\overline{H}(t)|^{s'} \leq C|t|^{s'(\beta+1)}$ para algum $C > 0$, usando novamente a desigualdade de Hölder e o fato que $as < N$, obtemos uma constante $C_4 > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{\overline{H}(u_n)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \leq C_4 \left(\int_\Omega |u_n|^{s'(\beta+1)}\, \mathrm{d}x \right)^{1/s'} \leq C_4 \left(\int_\Omega |l(x)|\, \mathrm{d}x \right)^{1/s'}.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue generalizado (cf. [43]) concluímos que

$$\int_\Omega \frac{\overline{H}(u_n)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{\overline{H}(u)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x,$$

e daí concluímos a afirmação. Portanto, podemos aplicar o Lema 2.3.1 para o funcional J para obter um mínimo em $W_0^{1,N}(\Omega)$. ■

2.3.1 Alguns resultados de regularidade

O próximo resultado foi provado por James Serrin (cf. o artigo [60], Teoremas 2 e 8).

Lema 2.3.3. *Seja Ω um domínio qualquer em $\mathbb{R}^N$ e seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ uma solução da seguinte equação*

$$-\Delta_N u = a(x)u^{N-1} + b(x),$$

onde $a, b \in L^s(\Omega)$ para algum $s > 1$. Então $u \in L^\infty_{loc}(\Omega)$ e $u \in C^\theta_{loc}(\Omega)$, para algum $\theta \in (0,1)$.

O próximo Lema é uma consequência dos resultados contidos nos artigos [48] e [63].

Lema 2.3.4. *Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ que possui fronteira suave e seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tal que $\Delta_N u \in L^\infty(\Omega)$. Então $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$, para algum $\theta \in (0,1)$.*

O Princípio de Máximo a seguir foi provado por Vásquez no artigo [67].

Lema 2.3.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio e $u \in C^1(\Omega)$ tal que $u \geq 0$ quase sempre em Ω, $\Delta_p u \in L^2_{loc}(\Omega)$ e $\Delta_p u \leq \beta(u)$ quase sempre em Ω, onde $\beta : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua não-decrescente, com $\beta(0) = 0$ e satisfazendo uma das seguintes condições:*

(1) *$\beta(s_0) = 0$ para algum $s_0 > 0$ ou*

(2) *$\beta(s) > 0$ para todo $s > 0$ e*

$$\int_0^1 (s\beta(s))^{-1/p}\, \mathrm{d}s = +\infty.$$

Se $u \neq 0$ em Ω, então $u > 0$ em Ω. Além disso, se $u \in C^1(\Omega \cup \{x_0\})$ com $u(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \partial\Omega$ que satisfaz a condição da bola interior (isto é, existe $B_r \subset \Omega$ tal que $B_r \cap \partial\Omega = \{x_0\}$), então

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0,$$

onde η é a normal unitária exterior a x_0.

Agora estamos em condições de provarmos o principal resultado desta seção.

Lema 2.3.6. *Sejam $\underline{u}$ e $\overline{u}$ sub e super soluções tais que $\underline{u} \leq \overline{u}$ em Ω, respectivamente do problema singular:*

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{\overline{h}(u)}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

onde Ω é um domínio limitado contendo a oriegam e $\overline{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ é uma função contínua tal que $\overline{h}(t) \leq C|t|^\beta$ para algum $C > 0$, $\beta \in [0, N-1)$ e $\overline{h}(t) = 0$ para todo $t \leq 0$. Então o problema (2.4) possui uma solução fraca u em $W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$. Além disso, $u \in C^\theta(\Omega) \cap C^{1,\theta}(\Omega \setminus \{0\})$ para algum $\theta \in (0,1)$ e $u > 0$ em Ω.

Prova: Inicialmente definamos a função $\widetilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ por

$$\widetilde{h}(x,t) = \begin{cases} \overline{h}(\underline{u}(x)); & t < \underline{u}(x), \\ \overline{h}(t); & \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x), \\ \overline{h}(\overline{u}(x)); & t > \overline{u}(x). \end{cases}$$

É imediato que existe $M > 0$ tal que $\widetilde{h}(x,t) \leq M$, pois $\underline{u}, \overline{u} \in L^\infty(\Omega)$ e $\overline{h}$ é uma função contínua. Em seguinda consideremos o funcional $\widetilde{J} : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\widetilde{J}(u) = \frac{\|u\|^N}{N} - \int_\Omega \frac{\widetilde{H}(x,u)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x,$$

onde

$$\widetilde{H}(x,u) = \int_0^u \widetilde{h}(x,t)\, \mathrm{d}t.$$

Assim, pelo Lema 2.3.2 obtemos um ponto de mínimo u em $W_0^{1,N}(\Omega)$ para o funcional $\widetilde{J}$.

Afirmação: $\underline{u} \leq u \leq \overline{u}$ em Ω.

Como $\underline{u}$ é sub-solução e u um ponto de mínimo de $\widetilde{J}$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{N-2} \nabla \underline{u} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \frac{\overline{h}(\underline{u})}{|x|^a} \varphi \, \mathrm{d}x$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{\widetilde{h}(x,u)}{|x|^a} \varphi \, \mathrm{d}x,$$

para todo $\varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $\varphi \geq 0$. Então,

$$\int_\Omega (|\nabla \underline{u}|^{N-2} \nabla \underline{u} - |\nabla u|^{N-2} \nabla u) \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \leq \int_\Omega \frac{(\overline{h}(\underline{u}) - \widetilde{h}(x,u))}{|x|^a} \varphi \, \mathrm{d}x.$$

Escolhendo $\varphi = (\underline{u} - u)^+$, obtemos pela definição de $\widetilde{h}$ a seguinte igualdade

$$\int_\Omega \frac{(\overline{h}(\underline{u}) - \widetilde{h}(x,u))}{|x|^a} (\underline{u} - u)^+ \, \mathrm{d}x = \int_{[\underline{u} - u \geq 0]} \frac{(\overline{h}(\underline{u}) - \widetilde{h}(x,u))}{|x|^a} (\underline{u} - u) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Consequentemente,

$$\int_{[\underline{u} - u \geq 0]} (|\nabla \underline{u}|^{N-2} \nabla \underline{u} - |\nabla u|^{N-2} \nabla u) \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \leq 0.$$

Por outro lado, é bem conhecido que existe $C_N > 0$ tal que

$$C_N |x-y|^N \leq (|x|^{N-2}x - |y|^{N-2}y) \cdot (x-y) \quad \text{para todo} \quad x,y \in \mathbb{R}^N.$$

Assim,

$$\int_\Omega |\nabla (\underline{u} - u)^+|^N \, \mathrm{d}x = \int_{[\underline{u} - u \geq 0]} |\nabla (\underline{u} - u)|^N \, \mathrm{d}x = 0,$$

logo,

$$(\underline{u} - u)^+ = 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega,$$

ou seja,

$$\underline{u} \leq u \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Da mesma forma, podemos verificar que $u \leq \overline{u}$. Portanto,

$$\underline{u} \leq u \leq \overline{u} \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Por outro lado, como $\widetilde{h}(x,u) = \overline{h}(u)$, segue da definição de $\widetilde{h}$ que u é solução de (2.4).

A regularidade de u segue dos Lemas 2.3.3 e 2.3.4, pois

$$b(x) = \frac{\overline{h}(u(x))}{|x|^a} \in L^s(\Omega) \quad \text{para algum} \quad s > 1.$$

Então, pelo Lema 2.3.3 $u \in L^\infty(\Omega) \cap C^\theta(\Omega)$ para algum $\theta \in (0,1)$. Assim, temos que

$$\Delta_N u \in L^\infty(\Omega \setminus B_R(0)) \quad \text{para todo} \quad R > 0.$$

Logo, pelo Lema 2.3.4 $u \in C^{1,\theta}(\Omega \setminus \{0\})$ para algum $\theta \in (0,1)$.

Para concluímos o lema, vamos provar que $u > 0$ em Ω. Seja $\widetilde{\Omega} = \Omega \setminus \overline{B_{R/2}(0)}$, onde $B_R(0) \subset \Omega$, usando que $\Delta_N u \leq 0$ e $\Delta_N u \in L^2(\Omega \setminus \overline{B_{R/2}(0)})$, segue pelo Lema 2.3.5 que

$$u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega \setminus \overline{B_{R/2}(0)}.$$

Assim existe $\delta > 0$ tal que $u(x) \geq \delta$ para todo $x \in \partial B_R(0)$. Agora defina $\widetilde{u} = u|_{B_R(0)}$ e $v = \delta$ em $B_R(0)$, então

$$\int_{B_R(0)} |\nabla \widetilde{u}|^{N-2} \nabla \widetilde{u} \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \geq \int_{B_R(0)} |\nabla v|^{N-2} \nabla v \nabla \varphi \, \mathrm{d}x \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(B_R(0)), \quad \varphi \geq 0.$$

Consequentemente, obtemos que $u \geq \delta > 0$ quase sempre em Ω, mas como u é uma função contínua. Obtemos que $u > 0$ em Ω. ■

2.4 Existência de um mínimo local para λ pequeno

Nesta seção mostraremos a existência de um mínimo local para J_λ em uma pequena vizinhança da origem em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Este é o conteúdo dos próximos três lemas.

Lema 2.4.1. *Suponham que $(f_1) - (f_2)$ são satisfeitas, então existem constantes positivas λ_0, R_0 e δ tais que $J_\lambda(u) \geq \delta$ sempre que $\|u\| = R_0$ e $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

Prova: Por $(f_1) - (f_2)$ existe uma constante $C > 0$ tal que

$$f(s) \leq C e^{\alpha |s|^{N/(N-1)}}, \quad \forall \alpha > \alpha_0.$$

Assim,

$$F(u) = \int_0^u f(s) \, \mathrm{d}s \leq C \int_0^u e^{\alpha |s|^{N/(N-1)}} \, \mathrm{d}s \leq C e^{\alpha |u|^{N/(N-1)}} |u|.$$

Seja $1/q + 1/s = 1$ com $q > 1$ suficientemente próximo de 1 de modo que $qa < N$. Pela desigualdade de Hölder e a imersão contínua de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ para $t \in [1, +\infty)$, obtemos uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \frac{F(u)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x &\leq C \int_\Omega \frac{e^{\alpha |u|^{N/(N-1)}}}{|x|^a} |u| \, \mathrm{d}x \\
&\leq C \left(\int_\Omega \frac{e^{\alpha q \|u\|^{N/(N-1)} (|u|/\|u\|)^{N/(N-1)})}}{|x|^{qa}} \, \mathrm{d}x \right)^{1/q} \left(\int_\Omega |u|^s \, \mathrm{d}x \right)^{1/s} \\
&\leq C_1 \left(\int_\Omega \frac{e^{\alpha q \|u\|^{N/(N-1)} (|u|/\|u\|)^{N/(N-1)})}}{|x|^{qa}} \, \mathrm{d}x \right)^{1/q} \|u\|.
\end{aligned}$$

Agora escolhendo $\|u\|$ de forma que

$$q\alpha\|u\|^{N/(N-1)}/\alpha_N + qa/N \leq 1,$$

ou seja,

$$\|u\| \leq R_0 = \left(\frac{N-qa}{N}\cdot\frac{\alpha_N}{q\alpha_0}\right)^{(N-1)/N}.$$

Segue pela Proposição 1.1.1 que existe $C_2 > 0$ tal que

$$\sup_{\|u\|\leq R_0}\int_\Omega \frac{F(u)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq C_2.$$

Consequentemente,

$$\inf_{\|u\|=R_0} J_\lambda(u) \geq \frac{R_0^N}{N} - \lambda C_2.$$

Assim para $\lambda_0 = R_0^N/2C_2N$, obtemos que

$$\inf_{\|u\|=R_0} J_\lambda(u) \geq \frac{R_0^N}{2N} = \delta > 0.$$

■

Lema 2.4.2. *Sejam R_0, λ_0 e δ como no Lema 2.4.1. Então para cada $\lambda \in (0,\lambda_0)$, temos que $J_\lambda(tu) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\setminus\{0\}$.*

Prova: Por (f_1) e (f_3) existem constantes positivas σ e τ tais que $f(t) \geq \sigma t^\gamma$ para todo $t \in [0,\tau]$. Consequentemente, existe $\sigma_2 > 0$ tal que $F(tu(x)) \geq \sigma_2(tu(x))^{\gamma+1}$ sempre que $tu(x) \in [0,\tau]$, onde $x \in \Omega$. Assim para cada $u \in W_0^{1,N}(\Omega)\setminus\{0\}$ temos

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu) &= \frac{\|tu\|^N}{N} - \lambda\int_\Omega \frac{F(tu)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \frac{t^N}{N}\|u\|^N - \lambda\sigma_2 t^{\gamma+1}\int_{[tu\leq\tau]}\frac{|u|^{\gamma+1}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \lambda\int_{[tu>\tau]}\frac{F(tu)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

onde $[tu\leq\tau] = \{x\in\Omega : tu(x)\leq\tau\}$ e $[tu>\tau] = \{x\in\Omega : tu(x)>\tau\}$. Usando o fato que F é não-negativa, temos que

$$\begin{aligned} J_\lambda(tu) &\leq \frac{t^N}{N}\|u\|^N - \lambda\sigma_2 t^{\gamma+1}\int_{[tu\leq\tau]}\frac{|u|^{\gamma+1}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \\ &= t^{\gamma+1}\left(\frac{t^{N-\gamma-1}}{N}\|u\|^N - \lambda\sigma_2\int_{[tu\leq\tau]}\frac{|u|^{\gamma+1}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right). \end{aligned}$$

Como $(N-\gamma-1) > 0$, $[tu\leq\tau] \nearrow \Omega$ (pois $tu \to 0$ e $\tau > 0$) quando $t \to 0^+$ e $u \not\equiv 0$, obtemos que $J_\lambda(tu) < 0$ para $t > 0$ suficientemente pequeno.

■

Lema 2.4.3. *J_λ possui um mínimo local não-trivial próximo da origem em $W_0^{1,N}(\Omega)$ para todo $\lambda \in (0, \lambda_0)$.*

Prova: É conhecido que a bola $\overline{B}_{R_0}(0)$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma de $W_0^{1,N}(\Omega)$ e convexo. Por outro lado, o funcional J_λ é de classe C^1 e pelos Lemas 2.4.1 e 2.4.2, J_λ é limitado inferiormente sobre $\overline{B}_{R_0}(0)$. Assim pelo Teorema 1.3.2 existe uma sequência (u_n) em $\overline{B}_{R_0}(0)$ tal que

$$J_\lambda(u_n) \to c_0 = \inf_{\|u\| \leq R_0} J_\lambda(u) < 0 \quad \text{e} \quad \|J'_\lambda(u_n)\|_* \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

Como $(u_n) \subset \overline{B}_{R_0}(0)$ provamos no Lema 1.6.2 que existe uma subsequência (u_{n_k}) de (u_n) que converge fortemente para u_λ e necessariamente usando o fato que J_λ é de classe C^1 temos que $\|u_\lambda\| < R_0$ e $J_\lambda(u_\lambda) = c_0 < 0$. Portanto, u_λ é um mínimo local de J_λ.

■

2.5 Prova do Teorema 2.1.1

Nesta seção, usando o método de sub e super soluções mostraremos que para todo $\lambda > 0$ suficientemente pequeno o problema (P_λ) admite uma única solução u_λ com a propriedade $\|u_\lambda\|_\infty \leq t_*$. Inicialmente lembremos do seguinte resultado bastante conhecido na literatura:

Lema 2.5.1. *Sejam $w > 0$ e $v \geq 0$ duas funções contínuas em Ω e diferenciáveis quase sempre em Ω, para $p > 1$ defina*

$$L(v,w) = |\nabla v|^p + (p-1)\frac{v^p}{w^p}|\nabla w|^p - p\frac{v^{p-1}}{w^{p-1}}|\nabla w|^{p-2}\nabla w \nabla v,$$

$$R(v,w) = |\nabla v|^p - \nabla(\frac{v^p}{w^{p-1}})|\nabla w|^{p-2}\nabla w.$$

Então

(i) $L(v,w) = R(v,w)$*;*

(ii) $L(v,w) \geq 0$ *quase sempre em Ω;*

(iii) $L(v,w) = 0$ *quase sempre em Ω se, e somente se, existe $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que $v = \kappa u$ em cada componente conexa de Ω.*

Este resultado é conhecido como a identidade de Picone, e ou desigualdade de Picone para o operador $p-$Laplaciano, uma prova deste resultado pode ser encontrada em [9]. Como aplicação deste resultado fazendo uma adaptação dos argumentos utilizados na prova do Lema 4.1 do artigo [1], provamos o seguinte lema:

Lema 2.5.2. *Seja $\rho : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ uma função contínua tal que $\rho(s)/s^{N-1}$ é não-crescente. Sejam $v, w \in W_0^{1,N}(\Omega)$ funções contínuas e diferenciáveis quase sempre em Ω, sub- e super-solução fracas respectivamente do problema*

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{\rho(u)}{|x|^a} & em \quad \Omega, \\ u > 0 & em \quad \Omega. \end{cases}$$

Então, $w \geq v$ quase sempre em Ω.

Prova: Por definição de sub- e super-solução, para toda $\psi, \phi \in W_0^{1,N}(\Omega)$ não-negativas, temos que

$$\int_\Omega |\nabla v|^{N-2} \nabla v \nabla \psi \, dx \leq \int_\Omega \frac{\rho(v)}{|x|^a} \psi \, dx \tag{2.5}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla w|^{N-2} \nabla w \nabla \phi \, dx \geq \int_\Omega \frac{\rho(w)}{|x|^a} \phi \, dx. \tag{2.6}$$

Consequentemente,

$$\int_\Omega \left(|\nabla w|^{N-2} \nabla w \nabla \phi - |\nabla v|^{N-2} \nabla v \nabla \psi \right) dx \geq \int_\Omega \frac{1}{|x|^a} \left(\rho(w)\phi - \rho(v)\psi \right) dx. \tag{2.7}$$

Seja $\varphi = (v^N - w^N)^+ \in W_0^{1,N}(\Omega)$, como $v > 0$ e $w > 0$ em Ω, podemos considerar as seguintes funções testes

$$\psi = \frac{\varphi}{v^{N-1}} \quad \text{e} \quad \phi = \frac{\varphi}{w^{N-1}}. \tag{2.8}$$

Denotemos

$$A = \int_\Omega \left(|\nabla w|^{N-2} \nabla w \nabla \phi - |\nabla v|^{N-2} \nabla v \nabla \psi \right) dx.$$

Por (2.7) e (2.8), temos que

$$\begin{aligned} A \quad &\geq \quad \int_\Omega \frac{1}{|x|^a} \left(\frac{\rho(w)}{w^{N-1}} - \frac{\rho(v)}{v^{N-1}} \right) (v^N - w^N)^+ dx \\ &= \quad \int_{[v>w]} \frac{1}{|x|^a} \left(\frac{\rho(w)}{w^{N-1}} - \frac{\rho(v)}{v^{N-1}} \right) (v^N - w^N)^+ dx. \end{aligned}$$

Como $\rho(s)/s^{N-1}$ é não-crescente, temos que o lado direito da desigualdade acima é não-negativo. Agora mostraremos uma estimativa para o lado esquerdo. Como w e v são diferenciáveis quase sempre em Ω, temos que

$$\begin{aligned} A \quad &= \quad \int_\Omega |\nabla w|^{N-2} \nabla w \frac{w^{N-1} \nabla \varphi - (N-1) w^{N-2} \varphi \nabla w}{w^{2(N-1)}} dx \\ &- \quad \int_\Omega |\nabla v|^{N-2} \nabla v \frac{v^{N-1} \nabla \varphi - (N-1) v^{N-2} \varphi \nabla v}{v^{2(N-1)}} dx. \end{aligned}$$

Para $\varphi = (v^N - w^N)^+$, temos a menos de um conjunto de medida nula que

$$\nabla\varphi = N(v^{N-1}\nabla v - w^{N-1}\nabla w)\chi_{[v\geq w]},$$

e consequentemente sobre $\Omega \cap [v \geq w]$, temos as seguintes igualdades

$$\frac{w^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)w^{N-2}\varphi\nabla w}{w^{2(N-1)}} = N\frac{v^{N-1}}{w^{N-1}}\nabla v - (N-1)\frac{v^N}{w^N}\nabla w - \nabla w$$

e

$$\frac{v^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)v^{N-2}\varphi\nabla v}{v^{2(N-1)}} = -N\frac{w^{N-1}}{v^{N-1}}\nabla w + (N-1)\frac{w^N}{v^N}\nabla w + \nabla v.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
A &= \int_\Omega |\nabla w|^{N-2}\nabla w\frac{w^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)w^{N-2}\varphi\nabla w}{w^{2(N-1)}}\mathrm{d}x \\
&- \int_\Omega |\nabla v|^{N-2}\nabla v\frac{v^{N-1}\nabla\varphi - (N-1)v^{N-2}\varphi\nabla v}{v^{2(N-1)}}\mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega\cap[v>w]}\left(N\frac{v^{N-1}}{w^{N-1}}|\nabla w|^{N-2}\nabla w\nabla v - (N-1)\frac{v^N}{w^N}|\nabla w|^N - |\nabla w|^N\right)\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\Omega\cap[v>w]}\left(N\frac{w^{N-1}}{v^{N-1}}|\nabla v|^{N-2}\nabla v\nabla w - (N-1)\frac{w^N}{v^N}|\nabla v|^N - |\nabla v|^N\right)\mathrm{d}x \\
&:= \int_{\Omega\cap[v>w]} L_1(x)\mathrm{d}x + \int_{\Omega\cap[v>w]} L_2(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Daí segue pelo Lema 2.5.1 que $L_1(x) \leq 0$ e $L_2(x) \leq 0$ em Ω. Então $A \leq 0$. No entanto, sobre conjunto $[v > w]$ temos que

$$\frac{\rho(w)}{w^{N-1}} - \frac{\rho(v)}{v^{N-1}} \geq 0.$$

Consequentemente o conjunto $[v > w]$ tem medida de Lebesgue nula. Donde concluímos que $w \geq v$ quase sempre em Ω. ■

O resultado anterior foi demonstrado para o operador Laplaciano por Ambrosetti-Brezis-Cerami em [10], no entanto, a prova não vale em geral para o $p-$Laplaciano.

2.5.1 O problema modificado

Nesta subseção consideraremos a função $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\widetilde{f}(t) = \begin{cases} f(t) & \text{se} \quad t < t_*, \\ f(t_*) & \text{se} \quad t \geq t_*. \end{cases} \tag{2.9}$$

E o seguinte problema singular:

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \dfrac{\lambda\widetilde{f}(u)}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{$\widetilde{P}_\lambda$}$$

Lema 2.5.3. *O problema* $(\widetilde{P}_\lambda)$ *possui uma única solução* $\widetilde{u}_\lambda$ *em* $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Prova: Temos que $\widetilde{f}$ é uma função limitada, logo existe $M > 0$ tal que $\widetilde{f}(t) \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, assim pelo Lema 2.3.2 o problema $(\widetilde{P}_\lambda)$ possui uma solução fraca em $W_0^{1,N}(\Omega)$, digamos $\widetilde{u}_\lambda$. Além disso, tomando $a(x) \equiv 0$ e $b(x) = \lambda \widetilde{f}(\widetilde{u}_\lambda(x))|x|^{-a}$ e usando que

$$b(x) \leq \frac{\lambda M}{|x|^a} \in L^s(\Omega) \quad \text{para algum} \quad s > 1,$$

obtemos pelo Lema 2.3.3 que $\widetilde{u}_\lambda \in C^\theta(\Omega)$ para algum $\theta \in (0,1)$. Assim $\Delta_N \widetilde{u}_\lambda \in L^\infty(\Omega \setminus B_R(0))$ para cada $R > 0$. Então, por um argumento semelhante ao feito no Lema 2.3.6 obtemos que $\widetilde{u}_\lambda \in C^{1,\theta}(\Omega \setminus \{0\})$ para algum $\theta \in (0,1)$. Por fim, usando a condição (f_3) temos que $\widetilde{f}(s)/s^{N-1}$ não-cresce, então usando a regularidade acima podemos aplicar o Lema 2.5.2, o qual implica que a solução de $(\widetilde{P}_\lambda)$ é única. Além disso, pelo Lema 2.4.2 obtemos que $\widetilde{u}_\lambda$ é não-trivial.

■

Usando o mesmo argumento da prova do lema anterior temos que o problema singular:

$$\begin{cases} -\Delta_N w = \dfrac{w^\gamma}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ w > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.10}$$

tem uma única solução $w \in W_0^{1,N}(\Omega)$, visto que $\rho(t) = t^\gamma$ satisfaz as condições do Lema 2.5.2.

Observação 2.5.1. *Podemos escolher uma constante* $\xi > 0$ *tal que* $\widetilde{f}(t) \leq \xi t^\gamma$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$.

Este resultado é imediato quando $t \in (-\infty, 0]$, pois neste caso $\widetilde{f}(t) \equiv 0$. Por outro lado, sabemos que $\widetilde{f}(t) \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$, logo se $t \geq t_*$

$$\widetilde{f}(t) \leq \frac{M}{t_*^\gamma} t^\gamma. \tag{2.11}$$

Já no intervalo $(0, t_*)$, temos que $\widetilde{f}(t)/t^{N-1}$ não-cresce. Assim, dado $t_0 > 0$ temos

$$\frac{\widetilde{f}(t)}{t^{N-1}} \leq \frac{\widetilde{f}(t_0)}{t_0^{N-1}} = M_0 \quad \text{sempre que} \quad t \in [t_0, t_*).$$

Como $t^\gamma \geq t^{N-1}$ sobre o intervalo $[t_0, t_*]$, obtemos que

$$\widetilde{f}(t) \leq M_0 t^\gamma. \tag{2.12}$$

Assim combinando (2.11) e (2.12), obtemos $\xi > 0$ tal que $\widetilde{f}(t) \leq \xi t^\gamma$ para todo $t > 0$.

2.5.2 Soluções de (P_λ) de norma L^∞ pequena

Lema 2.5.4. *Seja $\lambda_0 = \xi^{-1}(t_*\|w\|_\infty^{-1})^{N-\gamma-1}$. Então para todo $\lambda \in (0,\lambda_0)$ o problema (P_λ) possui uma única solução tal que $\|u_\lambda\|_\infty \leq t_*$.*

Prova: A prova deste lema será dividida em afirmações. Inicialmente consideremos v_λ a única solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_N v_\lambda = \lambda\xi \dfrac{v_\lambda^\gamma}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad v_\lambda > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad v_\lambda = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.13}$$

Afirmação 1: $(\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda$ é solução do problema (2.10).

De fato, temos que

$$\begin{aligned} -\Delta_N((\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda) &= -\mathrm{div}(|\nabla[(\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda]|^{N-2}\nabla[(\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda]) \\ &= -\mathrm{div}((\lambda\xi)^{\frac{N-2}{\gamma+1-N}} \cdot (\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} |\nabla v_\lambda|^{N-2}\nabla v_\lambda). \end{aligned}$$

Assim,

$$-\Delta_N((\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda) = -(\lambda\xi)^{\frac{N-1}{\gamma+1-N}} \mathrm{div}(|\nabla v_\lambda|^{N-2}\nabla v_\lambda). \tag{2.14}$$

Como v_λ é solução do problema (2.13), segue usando a igualdade (2.14) que

$$-\Delta_N((\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda) = (\lambda\xi)^{\frac{N-1}{\gamma+1-N}} \lambda\xi \frac{v_\lambda^\gamma}{|x|^a} = (\lambda\xi)^{\frac{\gamma}{\gamma+1-N}} \frac{v_\lambda^\gamma}{|x|^a}.$$

Logo,

$$-\Delta_N((\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda) = \frac{((\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda)^\gamma}{|x|^a}.$$

O que prova a afirmação.

Afirmação 2: $\|v_\lambda\|_\infty \leq t_*$ para todo $\lambda \in (0,\lambda_0)$.

De fato, pela unicidade da solução w, temos que $w = (\lambda\xi)^{\frac{1}{\gamma+1-N}} v_\lambda$. Consequentemente, para $\lambda \in (0,\lambda_0)$ e $\xi > 0$, obtemos

$$\|v_\lambda\|_\infty = (\lambda\xi)^{\frac{1}{N-\gamma-1}} \|w\|_\infty \leq (\lambda_0\xi)^{\frac{1}{N-\gamma-1}} \|w\|_\infty.$$

Assim pela definição de λ_0 temos

$$\|v_\lambda\|_\infty \leq (\xi^{-1}(t_*\|w\|_\infty^{-1})^{N-\gamma-1}\xi)^{\frac{1}{N-\gamma-1}} \|w\|_\infty = t_*.$$

Afirmação 3: v_λ é super-solução do problema $(\widetilde{P}_\lambda)$.

De fato, dada $\varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$ uma função teste não-negativa, segue pela observação 2.5.1 que

$$\int_\Omega |\nabla v_\lambda|^{N-2}\nabla v_\lambda \nabla\varphi \, \mathrm{d}x \quad = \quad \lambda\xi\int_\Omega \frac{v_\lambda^\gamma \varphi}{|x|^a} \geq \lambda\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(v_\lambda)\varphi}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.$$

Agora para concluímos a prova do lema seja $\widetilde{u}_\lambda$ a solução do problema $(\widetilde{P}_\lambda)$ obtida no Lema 2.5.3, então $\widetilde{u}_\lambda$ também é sub-solução. Consequentemente, pelo Lema 2.5.2 e a **afirmação 3**, obtemos que $\widetilde{u}_\lambda \leq v_\lambda$ quase sempre em Ω para todo $\lambda \in (0,\lambda_0)$. Logo,

$$\|\widetilde{u}_\lambda\|_\infty \leq \|v_\lambda\|_\infty \leq t_*.$$

Agora basta verificarmos que $\widetilde{u}_\lambda$ é solução do problema (P_λ). Temos que $\|\widetilde{u}_\lambda\|_\infty \leq t_*$, então $\widetilde{u}_\lambda \leq t_*$ quase sempre em Ω, logo $\widetilde{f}(\widetilde{u}_\lambda) = f(\widetilde{u}_\lambda)$ quase sempre em Ω, consequentemente $\widetilde{u}_\lambda$ é solução do problema (P_λ). Por outro lado, as soluções de (P_λ) com esta propriedade são também soluções do problema $(\widetilde{P}_\lambda)$, mas $(\widetilde{P}_\lambda)$ possui solução única, donde segue a unicidade. ■

O Teorema 2.1.1 segue do Lema 2.5.4.

2.6 Prova do Teorema 2.1.2

A prova será dividida em três partes.

2.6.1 Não-existência para $\lambda > 0$ grande

Inicialmente presisamos do seguinte resultado.

Lema 2.6.1. *Existe $C > 0$ tal que $f(t) \geq Ct^{N-1}$ para todo $t > 0$.*

Prova: No intervalo $(0,t_*)$ temos que $f(t)/t^{N-1}$ não-cresce, consequentemente

$$f(t) \geq \frac{f(t_*)}{t_*^{N-1}}t^{N-1} \quad \text{para todo} \quad t \in [0,t_*).$$

Por outro lado, como f tem crescimento crítico em $+\infty$, dado $M > 0$ existe $A_M > 0$ tal que

$$f(t) \geq Me^{\alpha|t|^{N/(N-1)}}$$

para todo $0 < \alpha < \alpha_0$ e $t \geq A_M$. Logo existe $M_2 > 0$ tal que

$$f(t) \geq M_2 t^{N-1} \qquad \text{para todo} \quad t \geq A_M.$$

Usando que f é uma função contínua e estritamente positiva em $[t_*, A_M]$, obtemos $m > 0$ tal que $f(t) \geq m$. Já no intervalo $[t_*, A_M]$ temos que $A_M^{N-1} \geq t^{N-1}$, logo

$$f(t)A_M^{N-1} \geq f(t)t^{N-1} \geq mt^{N-1} \Rightarrow f(t) \geq \left(\frac{A_M}{m}\right)^{N-1} t^{N-1}.$$

Assim, escolhendo

$$C = \min\left\{\frac{f(t_*)}{t_*^{N-1}}, M_2, \left(\frac{A_M}{m}\right)^{N-1}\right\},$$

concluímos a prova do Lema. ∎

Agora provaremos o principal resultado desta subseção.

Lema 2.6.2. *Seja* $\Lambda := \sup\{\lambda > 0 : (P_\lambda)$ *tem uma solução* $\}$. *Então* $0 < \Lambda < \infty$.

Prova: Pelo Lema 2.4.2 é imediato que $\Lambda > 0$. Vamos mostrar que $\Lambda < \infty$. Suponhamos por contradição que existe uma sequência de números reais (λ_n) tal que $\lambda_n \to +\infty$ para a qual o problema (P_{λ_n}) possui uma solução u_n, isto é,

$$\begin{cases} -\Delta_N u_n = \lambda_n \dfrac{f(u_n)}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ u_n > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.15}$$

Agora consideremos o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{cases} -\Delta_N \phi_1 = \lambda \dfrac{\phi_1^{N-1}}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ \phi_1 > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \phi_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.16}$$

Como $|x|^{-a} \in L^s(\Omega)$ para algum $s > 1$, usando os resultados contidos em Aguilar-Peral [8] e Cuesta [24] é conhecido que existe λ_1 o primeiro autovalor e sua correspondente autofunção normalizada ϕ_1, com λ_1 positivo e isolado, isto é, existe um $\delta > 0$ tal que o intervalo $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ não tem outro autovalor. Além disso, $\phi_1 \in C^\theta(\Omega)$ para algum $\theta \in (0,1)$ e $\phi_1 > 0$ em Ω. Usando que $\phi_1 |x|^{-a} \in L^\infty(\Omega \setminus B_R)$ para cada $R > 0$ segue por um argumento semelhante ao feito na prova do Lema 2.3.6 que $\phi_1 \in C^{1,\vartheta}(\Omega \setminus \{0\})$ para algum $\vartheta \in (0,1)$. Para completarmos a prova deste resultado precisaremos da seguinte afirmação.

Afirmação: Para cada $\varepsilon \in (0,1)$, existe $\lambda_* > 0$ tal que $\lambda f(t) > (\lambda_1 + \varepsilon)t^{N-1}$ para todo $\lambda > \lambda_*$ e $t > 0$.

De fato, pelo Lema 2.6.1 temos que existe $C > 0$ tal que $f(t) \geq Ct^{N-1}$ para todo $t > 0$, assim escolhendo $\lambda_* > 0$ tal que $C > (\lambda_1 + 1)/\lambda_*$. Obtemos para cada $\varepsilon \in (0,1)$ que

$$f(t) \geq Ct^{N-1} > \left(\frac{\lambda_1 + \varepsilon}{\lambda_*}\right) t^{N-1}.$$

Logo escolhendo $\lambda_n > \lambda_*$, segue pela afirmação acima que $\lambda_n f(u_n) > (\lambda_1+\varepsilon)u_n^{N-1}$, consequentemente, u_n é super-solução do problema

$$\begin{cases} -\Delta_N u = (\lambda_1+\varepsilon)\dfrac{u^{N-1}}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.17}$$

Agora notemos que $\mu\phi_1$ é sub-solução do problema (2.17) sempre que $\mu < \lambda_1+\varepsilon$. De fato, dada $\varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e não-negativa, então

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla(\mu\phi_1)|^{N-2}\nabla(\mu\phi_1)\nabla\varphi \, dx &= \mu^{N-1}\int_\Omega (|\nabla\phi_1)|^{N-2}\nabla\phi_1\nabla\varphi \, dx \\ &= \mu^{N-1}\lambda_1\int_\Omega \frac{\phi_1^{N-1}}{|x|^a}\varphi \, dx \\ &= \lambda_1\int_\Omega \frac{(\mu\phi_1)^{N-1}}{|x|^a}\varphi \, dx \\ &\leq (\lambda_1+\varepsilon)\int_\Omega \frac{(\mu\phi_1)^{N-1}}{|x|^a}\varphi \, dx. \end{aligned}$$

Assim pelo Lema 2.3.6 temos para cada $\varepsilon_n = 1/2n$ e $\mu_n < \lambda_1+\varepsilon_n$ que existe $\phi_{\varepsilon_n} > 0$ solução do problema (2.17). Desta forma $\overline{\lambda}_n = \lambda_1 + 1/2n$ é uma sequência de autovalores tais que $\overline{\lambda}_n \to \lambda_1$, mas isto contradiz o fato de λ_1 ser isolado.

■

2.6.2 Existência de uma solução para $\lambda \in (0,\Lambda)$

No próximo lema mostraremos que J_λ possui uma solução em $W_0^{1,N}(\Omega)$ para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$.

Lema 2.6.3. *(P_λ) possui uma solução em $W_0^{1,N}(\Omega)$ para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$.*

Prova: Fixemos $\lambda \in (0,\Lambda)$. Seja $\overline{\lambda} \in (\lambda,\Lambda)$ tal que $(P_{\overline{\lambda}})$ possui uma solução positiva, digamos $\overline{u}$. Definamos

$$\underline{\lambda} := \lambda \inf_{t>0}\frac{f(t)}{t^\gamma}.$$

Por (f_3) temos que

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{t^\gamma} > 0.$$

Assim $\underline{\lambda} > 0$. Pelos Lemas 2.3.2 e 2.5.2 existe $\underline{u}$ única solução positiva do problema:

$$\begin{cases} -\Delta_N u = \underline{\lambda}\,\dfrac{u^\gamma}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.18}$$

Pela definição de $\underline{\lambda}$ é claro que $\overline{u}$ é super-solução de (2.18). De fato, para todo $\varphi \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\varphi \geq 0$ temos

$$\underline{\lambda}\int_\Omega \frac{\overline{u}^\gamma}{|x|^a}\varphi\, \mathrm{d}x \leq \overline{\lambda}\int_\Omega \frac{f(\overline{u})}{|x|^a}\varphi\, \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla \overline{u}|^{N-2}\nabla\overline{u}\nabla\varphi\, \mathrm{d}x.$$

Além disso, pelos Lemas 2.3.3 e 2.3.4 temos que $\underline{u}, \overline{u} \in C^{1,\theta}(\Omega \setminus \{0\})$ para algum $\theta \in (0,1)$. Consequentemente aplicando o Lema 2.5.2 a equação (2.18) obtemos que

$$\underline{u} \leq \overline{u} \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Agora definamos

$$g(x,t) = \begin{cases} f(\underline{u}(x)); & t < \underline{u}(x), \\ f(t); & \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x), \\ f(\overline{u}(x)); & t > \overline{u}(x). \end{cases}$$

Seja $G(x,u) = \displaystyle\int_0^u g(x,t)\ \mathrm{d}t$ e consideremos o funcional $I_\lambda : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I_\lambda(u) = \frac{\|u\|^N}{N} - \lambda\int_\Omega \frac{G(x,u)}{|x|^a}\ \mathrm{d}x.$$

Usando o mesmo argumento do Lema 2.3.6 temos que I_λ é limitado inferiormente em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. Então I_λ possui um mínimo global, digamos u_λ, tal que $0 < \underline{u} \leq u_\lambda \leq \overline{u}$ quase sempre em Ω. Assim u_λ é solução fraca da equação

$$-\Delta_N u_\lambda = \lambda\frac{g(x,u_\lambda)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Como $\underline{u} \leq u_\lambda \leq \overline{u}$ quase sempre em Ω, temos que u_λ é solução de (P_λ). E assim concluímos a prova do lema.

■

2.6.3 Existência de uma solução para $\lambda = \Lambda$

Lema 2.6.4. *Existe uma solução u_Λ para (P_Λ).*

Prova: Primeiro mostraremos a seguinte afirmação: Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno, então para cada $\lambda \in (0,\Lambda)$ vale os seguintes resultados:

(i) $v \mapsto J_\lambda(u_\lambda + v)$ é limitado sobre $\{v \in W_0^{1,N}(\Omega) : \|v\| \leq \varepsilon\}$;

(ii) $\inf_{\|v\|\leq\varepsilon} J_\lambda(u_\lambda + v)$ é atingido, digamos em v_λ.

De fato, para $\alpha > \alpha_0$ existe $C_1 > 0$ tal que $f(t) \leq C_1 e^{\alpha|t|^{N/(N-1)}}$, logo

$$F(u_\lambda + v) = \int_0^{u_\lambda+v} f(t)\ \mathrm{d}t \leq C(u_\lambda + v)e^{\alpha|u_\lambda+v|^{N/(N-1)}}.$$

Como $u_\lambda \in L^\infty(\Omega)$ e

$$|u_\lambda + v|^{N/(N-1)} \leq 2^{N/(N-1)}(|u_\lambda|^{N/(N-1)} + |v|^{N/(N-1)}).$$

Usando a expansão da função exponencial, obtemos constantes positivas C_2 e C_3 tais que

$$F(u_\lambda + v) \leq C_1 e^{C_2|v|^{N/(N-1)}}. \tag{2.19}$$

Definamos

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{N-a}{N}\frac{\alpha_N}{C_2}\right)^{(N-1)/N}.$$

Assim para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, usando (2.19) e a Proposição 1.1.1, obtemos que

$$\sup_{\|v\| \leq \varepsilon} \int_\Omega \frac{F(u_\lambda + v)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Deste fato é imediato a afirmativa **(i)**.

Agora, seja (v_n) uma sequência minimizante para $J_\lambda(u_\lambda + \cdot)$ sobre o conjunto $\{v \in W_0^{1,N}(\Omega) : \|v\| \leq \varepsilon\}$. Então $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ fracamente em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Por outro lado, notemos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_\Omega \frac{f(u_\lambda + v)}{|x|^a}(u_\lambda + v)\, \mathrm{d}x \leq C.$$

Assim, pelo Lema 1.5.1 e pela condição (f_4), obtemos

$$\int_\Omega \frac{F(u_\lambda + v_n)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{F(u_\lambda + v_\lambda)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x.$$

Consequentemente,

$$J_\lambda(u_\lambda + v_\lambda) \leq \liminf_{n \to +\infty} J_\lambda(u_\lambda + v_n) = \inf_{\{v \in W_0^{1,N}(\Omega) : \|v\| \leq \varepsilon\}} J_\lambda(u_\lambda + v).$$

Donde obtemos o item **(ii)**.

Seja v_λ como acima, então usando que u_λ é o mínimo global de I_λ, obtemos

$$J_\lambda(u_\lambda) = I_\lambda(u_\lambda) \leq I_\lambda(v_\lambda) < 0. \tag{2.20}$$

Agora suponha que (λ_n) é uma sequência tal que $\lambda_n \to \Lambda$ e u_n a correspondente solução de (P_{λ_n}) obtida no Lema 2.6.3. Então por (2.20), temos

$$J_{\lambda_n}(u_n) \leq 0 \quad \text{e} \quad J'_{\lambda_n}(u_n) = 0.$$

Assim, desde que λ_n é limitada, usando as equações acima obtemos que (u_n) é uma sequência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Então usando o Corolário 1.5.1 do Capítulo 1, obtemos u_Λ solução de (P_Λ).

■

O Teorema 2.1.2 segue dos Lemas 2.6.2, 2.6.3 e 2.6.4.

2.7 Prova do Teorema 2.1.3

Nesta seção vamos assumir que $N = 2$ e $a \in [0,1)$.

2.7.1 Existência de um mínimo para J_λ quando $\lambda \in (0,\Lambda)$

Os argumentos desta subseção são inspirados em idéias contidas nos artigos [37] e [38]. Mostraremos que J_λ possui um mínimo local em $H_0^1(\Omega)$ para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$. Para isto, utilizando os resultados dos trabalhos [37], [38], [40] e [41] é suficiente provarmos que J_λ possui um mínimo em $C_0^1(\overline{\Omega})$ para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$. Este será o conteúdo do próximo lema.

Lema 2.7.1. *J_λ possui um mínimo em $C_0^1(\overline{\Omega})$ para todo $\lambda \in (0,\Lambda)$.*

Prova: Fixemos novamente $\lambda \in (0,\Lambda)$ e sejam $\overline{\lambda} \in (\lambda,\Lambda)$ tal que $(P_{\overline{\lambda}})$ possui uma solução positiva, digamos $\overline{u}$, e

$$\underline{\lambda} := \lambda \inf_{t>0} \frac{f(t)}{t^\gamma}.$$

Pela condição (f_3) temos que $\underline{\lambda} > 0$. Além disso, sabemos que existe $\underline{u}$ única solução da equação

$$\begin{cases} -\Delta u = \underline{\lambda}\, \dfrac{u^\gamma}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.21}$$

Pela defingção de $\underline{\lambda}$ temos que $\overline{u}$ é super-solução de (2.21).

Agora definindo

$$h(x) = \frac{\underline{u}(x)^\gamma}{|x|^a} \quad \text{e} \quad l(x) = \frac{f(\overline{u}(x))}{|x|^a},$$

temos que $h, l \in L^p(\Omega)$ para algum $p > 2$.

De fato, como $0 \le a < 1$, podemos escolher $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $a = 1 - \varepsilon$, assim escolhendo $p = 2 + \varepsilon/2$, temos que $ap = 2 - \varepsilon^2 - 3\varepsilon/2 < 2$. Desta forma, podemos escolher $q > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que $apq < 2$, daí aplicando a desigualdade de Hölder para $1/q + 1/q' = 1$, obtemos

$$\int_\Omega |h(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|\underline{u}(x)|^{\gamma p}}{|x|^{ap}} \,\mathrm{d}x \le \left(\int_\Omega \frac{1}{|x|^{apq}} \,\mathrm{d}x \right)^{1/q} \left(\int_\Omega |\underline{u}(x)|^{\gamma p q'} \,\mathrm{d}x \right)^{1/q'}.$$

Usando a imersão contínua de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ para $t \in [1,+\infty)$ e que $apq < 2$, obtemos que a integral acima é finita. Além disso, pela Proposição 1.1.1, temos que

$$\int_\Omega |l(x)|^p \,\mathrm{d}x = \int_\Omega \frac{|f(\overline{u})|^p}{|x|^{ap}} \,\mathrm{d}x \le C \int_\Omega \frac{e^{p\alpha|u|^2}}{|x|^{ap}} \,\mathrm{d}x < \infty.$$

Donde concluímos a afirmação.

Consequentemente, pela desigualdade de Calderon-Zygmund (cf. Teorema 9.9 em [42]), obtemos que $\underline{u},\overline{u} \in W_0^{2,p}(\Omega)$. Como $p > 2$ segue pelas imersões de Sobolev que $\underline{u},\overline{u} \in C_0^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $\theta \in (0,1)$.

Assim aplicando o Lema 2.5.2 a equação (2.21), obtemos que $\underline{u} \leq \overline{u}$ quase sempre em Ω. Por outro lado, temos que

$$-\Delta\underline{u} = \underline{\lambda}\,\frac{\underline{u}^{\gamma}}{|x|^a} \quad \text{e} \quad -\Delta\overline{u} = \overline{\lambda}\,\frac{f(\overline{u})}{|x|^a}$$

com $0 < \underline{\lambda}\ \underline{u}^{\gamma} < \overline{\lambda}\ \underline{u}^{\gamma} \leq \overline{\lambda}\ \overline{u}^{\gamma} \leq \overline{\lambda} f(\overline{u})$ em Ω. Logo $\overline{u} \neq \underline{u}$ em Ω e

$$-\Delta(\underline{u}-\overline{u}) \geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Consequentemente, pelo Princípio do Máximo de Vásquez (cf. Lema 2.3.5)

$$\underline{u} < \overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} < \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} < 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Agora observemos que por (f_3), podemos escolher $K > 0$ suficientemente grande tal que $f(t) + Kt$ é estritamente crescente para todo $t \in \mathbb{R}_+$.

De fato, por hipótese já temos que f não-decresce em $(0,t_*) \cup (1/t_*,+\infty)$. Então vamos estudar o intervalo $[t_*,1/t_*]$. Temos que f é de classe C^1 em $(0,+\infty)$, logo no intervalo $[t_*,1/t_*]$ existe $m \in \mathbb{R}$ tal que $f'(t) \geq m$. Se $m > 0$ podemos tomar qualquer $K > 0$. Por outro lado, se $m < 0$ temos que

$$(f(t)+Kt)' = f'(t) + K \geq m + K.$$

Então basta tomar $K > -m$.

Agora definamos

$$g(x,t) = \begin{cases} f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x); & t < \underline{u}(x), \\ f(t) + Kt; & \underline{u}(x) \leq t \leq \overline{u}(x), \\ f(\overline{u}(x)) + K\overline{u}(x); & t > \overline{u}(x). \end{cases}$$

E consideremos o funcional $I_\lambda : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$I_\lambda(u) = \frac{\|u\|^2}{2} + \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega \frac{G(x,u)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.$$

Usando o mesmo argumento do Lema 2.3.6, temos que I_λ é limitado inferiormente em $H_0^1(\Omega)$ e fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente. Então I_λ possui um mínimo global, digamos u_λ, tal que $0 < \underline{u} \leq u_\lambda \leq \overline{u}$ quase em Ω. Assim u_λ é solução fraca da equação

$$-\Delta u_\lambda + \lambda K\frac{u_\lambda}{|x|^a} = \lambda\frac{g(x,u_\lambda)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad \Omega \quad \text{e} \quad u = 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Logo pelos Lemas 2.3.3 e 2.3.4 obtemos que $u_\lambda \in C_0^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ para algum $\theta \in (0,1)$. Além disso, como

$$\underline{\lambda}\,\underline{u}(x)^{\gamma} \leq \underline{\lambda} u_\lambda(x)^{\gamma} \leq \lambda f(u_\lambda(x)),$$

obtemos que

$$\underline{\lambda}\,\underline{u}(x)^{\gamma}+\underline{\lambda}\,K\underline{u}(x)<\lambda[f(u_{\lambda}(x))+Ku_{\lambda}(x)]=\lambda g(x,u_{\lambda}(x))<\overline{\lambda}f(\overline{u}(x))+\overline{\lambda}\,K\overline{u}(x).$$

Destas estimativas segue que $\underline{u}\neq u_{\lambda}$, $u_{\lambda}\neq\overline{u}$ e

$$-\Delta(u_{\lambda}-\underline{u})+\frac{\lambda K(u_{\lambda}-\underline{u})}{|x|^{a}}\geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega$$

e

$$-\Delta(\overline{u}-u_{\lambda})+\frac{\lambda K(\overline{u}-u_{\lambda})}{|x|^{a}}\geq 0 \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Consequentemente, considerando $\beta(x)=\dfrac{\lambda K}{|x|^{a}}$, como $\beta\in L^{s}(\Omega)$ para algum $s>1$, obtemos pelo Corolário 5.3 em [65] que

$$\underline{u}<u_{\lambda}<\overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \frac{\partial(u_{\lambda}-\underline{u})}{\partial\eta}<0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial(\overline{u}-u_{\lambda})}{\partial\eta}<0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \tag{2.22}$$

Para conclímos a prova do lema mostraremos que u_{λ} é um mínimo local de J_{λ} na topologia $C_0^1(\overline{\Omega})$. Com efeito, como $\underline{u}<u_{\lambda}<\overline{u}$ temos que u_{λ} é solução de (P_{λ}). Além disso, por (2.22) é conhecido que existe $\delta>0$ tal que se $v\in C_0^1(\overline{\Omega})$ e $\|v-u_{\lambda}\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}\leq\delta$, então

$$\underline{u}<v<\overline{u} \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Assim,

$$J_{\lambda}(v)-I_{\lambda}(v)=\lambda\left(\int_{\Omega}\frac{G(x,v(x))}{|x|^{a}}\,\mathrm{d}x-\int_{\Omega}\frac{F(v(x))}{|x|^{a}}\,\mathrm{d}x-\frac{K}{2}\int_{\Omega}\frac{|v(x)|^{2}}{|x|^{a}}\,\mathrm{d}x\right).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} G(x,v(x)) &= \int_{0}^{\underline{u}(x)}(f(\underline{u}(x))+K\underline{u}(x))\,\mathrm{d}t+\int_{\underline{u}(x)}^{v(x)}(f(t)+Kt)\,\mathrm{d}t \\ &= f(\underline{u}(x))\underline{u}(x)+\int_{\underline{u}(x)}^{v(x)}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{K}{2}\underline{u}^{2}(x)+\frac{K}{2}v^{2}(x) \end{aligned}$$

e

$$F(v(x)) = \int_{0}^{\underline{u}(x)}f(t)\,\mathrm{d}t+\int_{\underline{u}(x)}^{v(x)}f(t)\,\mathrm{d}t=F(\underline{u}(x))+\int_{\underline{u}(x)}^{v(x)}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Logo, sempre que $\|v-u_{\lambda}\|_{C_0^1(\overline{\Omega})}\leq\delta$ temos

$$J_{\lambda}(v)-I_{\lambda}(v)=\lambda\int_{\Omega}\left(f(\underline{u}(x))\underline{u}(x)+\frac{K}{2}\underline{u}^{2}(x)-F(\underline{u}(x))\right)|x|^{-a}\,\mathrm{d}x=C.$$

Então como u_{λ} é um mínimo global de I_{λ}, temos

$$J_{\lambda}(u_{\lambda})=C+I_{\lambda}(u_{\lambda})\leq C+I_{\lambda}(v)=J_{\lambda}(v).$$

Portanto, u_{λ} é um mínimo local de J_{λ} em $C_0^1(\overline{\Omega})$.

■

2.7.2 Existência de uma solução do tipo passo da montanha para $\lambda \in (0,\Lambda)$

Nesta subseção provaremos a existência de uma segunda solução para o problema (P_λ). Para isto seguiremos alguns passos. Inicialmente seja $\underline{u}$ a única solução do problema singular:

$$\begin{cases} -\Delta u = \underline{\lambda}\ \dfrac{u^\gamma}{|x|^a} & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.23}$$

Consideremos $K > 0$ tal que $f(t) + Kt$ não-decresce e definamos

$$\widetilde{f}(x,s) = \begin{cases} f(s) + Ks & \text{se} \quad s > \underline{u}(x), \\ f(\underline{u}(x)) + K\underline{u}(x) & \text{se} \quad s \leq \underline{u}(x). \end{cases} \tag{2.24}$$

Podemos considerar o funcional $\widetilde{J_\lambda} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$\widetilde{J_\lambda}(u) = \frac{\|u\|^2}{2} + \frac{\lambda K}{2} \int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^a}\, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x,u)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x,$$

onde

$$\widetilde{F}(x,s) = \int_0^s \widetilde{f}(x,t)\, \mathrm{d}t.$$

Observemos que se $v \in H_0^1(\Omega) \cap C_0^1(\overline{\Omega})$ é suficientemente próximo a u_λ em $C_0^1(\overline{\Omega})$, usando o mesmo argumento feito na prova do Lema 2.7.1 temos que $I_\lambda(v) = \widetilde{J_\lambda}(v)$, então u_λ é um mínimo local para $\widetilde{J_\lambda}$ restrito a $C_0^1(\overline{\Omega})$. Consequentemente, u_λ é um mínimo local para $\widetilde{J_\lambda}$ em $H_0^1(\Omega)$. Novamente como na prova do Lema 2.7.1 podemos checar que se v_λ é um ponto crítico para $\widetilde{J_\lambda}$, então $v_\lambda > \underline{u}$ em Ω, consequentemente v_λ é solução de (P_λ). Temos também que v_λ é não-trivial. Então para provamos a existência de uma segunda solução para o nosso problema é suficiente mostrarmos que $\widetilde{J_\lambda}$ tem um ponto crítico v_λ diferente de u_λ. Para isto precisamos de uma generalização da noção de sequência de Palais-Smale a qual foi introduzida em [39].

Definição 2.7.1. *Seja $\mathscr{F} \subset H_0^1(\Omega)$ um subconjunto fechado. Dizemos que uma sequência $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ é uma sequência de Palais-Smale para $\widetilde{J_\lambda}$ no nível ρ ao redor de $\mathscr{F}$ se*

$$\lim_{n\to+\infty} dist(u_n, \mathscr{F}) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \widetilde{J_\lambda}(u_n) = \rho \quad \text{e} \quad \lim_{n\to+\infty} \|\widetilde{J_\lambda}'(u_n)\|_* = 0.$$

Notação: $(PS)_{\mathscr{F},\rho}$.

Usando os mesmos argumentos do Lema 1.5.2, temos o seguinte resultado:

Lema 2.7.2. *Sejam $\mathscr{F} \subset H_0^1(\Omega)$ um subconjunto fechado e $\rho \in \mathbb{R}$. Seja $(u_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_{\mathscr{F},\rho}$ para $\widetilde{J_\lambda}$. Então existem uma subsequência de (u_n), que denotaremos novamente por (u_n) e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$ tais que*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 & \text{em} \quad & H_0^1(\Omega) \\ \frac{f(x,u_n)}{|x|^a} &\to \frac{f(x,u_0)}{|x|^a} & \text{em} \quad & L^1(\Omega) \\ \frac{F(x,u_n)}{|x|^a} &\to \frac{F(x,u_0)}{|x|^a} & \text{em} \quad & L^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Agora provaremos o seguinte fato:

Afirmação 2.7.1. *Existe* $e \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ *tal que* $\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) > \widetilde{J}_\lambda(e)$.

De fato, vimos no Capítulo 1 que existem constantes $\theta > 2$, $C > 0$ e $d > 0$ tais que para todo $u \in H_0^1(\Omega)$

$$\widetilde{F}(x,u) \geq C|u|^\theta - d.$$

Assim, dada $v \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$, obtemos que

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) &= \frac{\|u_\lambda + tv\|^2}{2} + \frac{\lambda K}{2} \int_\Omega \frac{|u_\lambda + tv|^2}{|x|^a}\, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x, u_\lambda + tv)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \\ &\geq \frac{\|u_\lambda + tv\|^2}{2} + \frac{\lambda K}{2} \int_\Omega \frac{|u_\lambda + tv|^2}{|x|^a}\, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \frac{|u_\lambda + tv|^\theta - d}{|x|^a}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) &\geq t^2 \frac{\|t^{-1}u_\lambda + v\|^2}{2} + \frac{\lambda K t^2}{2} \int_\Omega |t^{-1}u_\lambda + v|^2\, \mathrm{d}x \\ &- t^\theta \lambda \int_\Omega \frac{|t^{-1}u_\lambda + v|^\theta}{|x|^a}\, \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega \frac{d}{|x|^a}\, \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Como $\theta > 2$, obtemos que $\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + tv) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Assim concluímos a afirmação.

Agora introduziremos algumas notações. Seja

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in C([0,1], H_0^1(\Omega)) : \gamma(0) = u_\lambda \ \text{ e } \ \gamma(1) = e \right\}.$$

Definamos o nível do passo da montanha

$$\rho_0 = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \widetilde{J}_\lambda(\gamma(t)).$$

Então segue que $\rho_0 \geq \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)$.

Seja $R_0 = \|e - u_\lambda\|$. Se $\rho_0 = \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)$ temos que $\inf\{\widetilde{J}_\lambda(v) : \|v - u_\lambda\| = R\} = \rho_0$ para todo $R \in (0, R_0)$. Daí seja $\mathscr{F} = H_0^1(\Omega)$ se $\rho_0 > \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)$ e $\mathscr{F} = \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v - u_\lambda\| = R_0/2\}$ se $\rho_0 = \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)$.

Para encontrarmos um segunda solução do problema (P_λ) precisamos do seguinte resultado:

Lema 2.7.3. *Suponha que* $(f_1) - (f_5)$ *são satisfeitas, então*

$$\rho_0 < \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Prova: Consideremos a seguinte sequência de funções construídas por Moser em [53]:

$$\widetilde{M}_n(x) = (2\pi)^{-1/2} \begin{cases} (\log n)^{1/2}, & \text{se} \quad |x| \leq 1/n \\ \log(1/|x|)/(\log n)^{1/2}, & \text{se} \quad 1/n \leq |x| \leq 1 \\ 0, & \text{se} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Seja $r > 0$ tal que $B_r(0) \subset \Omega$, onde r será escolhido depois. Definido $M_n(x) = \widetilde{M}_n(x/r)$, temos que M_n tem suporte contido em $B_r(0)$. Além disso, é conhecido que $\|M_n\| = 1$ e $M_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Provaremos o lema por um argumento de contradição. Suponhamos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n > 0$ tal que

$$\rho_0 = \sup_{t>0} \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + tM_n) = \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_nM_n) \geq \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}. \tag{2.27}$$

Inicialmente provaremos o seguinte fato.

Afirmação 2.7.2. *A sequência (t_n) é limitada.*

Com efeito, notemos que

$$\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_nM_n) = \frac{t_n^2}{2} \int_\Omega |\nabla(t_n^{-1}u_\lambda + M_n)|^2 \, \mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega \frac{\widehat{F}(x, u_\lambda + t_nM_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x,$$

onde $\widehat{F}$ é a primitiva da seguinte função:

$$\widehat{f}(x,s) = \begin{cases} f(s) & \text{se} \quad s > \underline{u}(x), \\ f(\underline{u}(x)) & \text{se} \quad s \leq \underline{u}(x). \end{cases}$$

Se $t_n \to +\infty$, temos que

$$\frac{t_n^2}{2} \int_\Omega |\nabla(t_n^{-1}u_\lambda + M_n)|^2 \, \mathrm{d}x = \frac{t_n^2}{2} + o(1). \tag{2.28}$$

Por outro lado, temos

$$\int_\Omega \frac{\widehat{F}(x, u_\lambda + t_nM_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \geq \int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \int_0^{u_\lambda + t_nM_n(0)} \frac{\widehat{f}(x,t)}{|x|^a} \, \mathrm{d}t.$$

Sejam

$$a = \max_{\overline{\Omega}} \underline{u} \quad \text{e} \quad b_n = \min_{B_{\frac{r}{n}}(0)} u_\lambda.$$

Então $b_n \to u_\lambda(0)$ quando $n \to +\infty$. Assim, usando a definição de $\widehat{f}$, para n suficientemente grande, obtemos

$$\int_\Omega \frac{\widehat{F}(x, u_\lambda + t_nM_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \geq \int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \int_a^{b_n + t_nM_n(0)} \frac{f(t)}{|x|^a} \, \mathrm{d}t.$$

Usando a condição que a não-linearidade $f(s)$ tem crescimento crítico, obtemos constantes positivas C e ε tais que

$$f(t) \geq Ce^{\varepsilon t^2} \quad \text{para todo} \quad t \geq a.$$

Consequentemente, para n suficientemente grande

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \int_a^{b_n+t_nM_n(0)} \frac{f(t)}{|x|^a}\,\mathrm{d}t &\geq C\int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \int_{b_n+(t_n-1)M_n(0)}^{b_n+t_nM_n(0)} \frac{e^{\varepsilon t^2}}{|x|^a}\,\mathrm{d}t \\ &\geq 2\pi e^{\varepsilon[b_n+(t_n-1)M_n(0)]^2} M_n(0) r^{2-a} n^{-(2-a)}.\end{aligned}$$

Assim, existem constantes positivas m_1 e m_2 tais que

$$\begin{aligned}\int_{B_{\frac{r}{n}}(0)} \int_a^{b_n+t_nM_n(0)} \frac{f(t)}{|x|^a}\,\mathrm{d}t &\geq m_1 e^{m_2\varepsilon(t_n-1)^2\log n}(\log n)^{1/2} n^{-(2-a)} \\ &= m_1 n^{m_2\varepsilon(t_n-1)^2-(2-a)}(\log n)^{1/2}.\end{aligned}$$

Desta última estimativa junto com (2.28) e usando que $t_n \to +\infty$, obtemos que

$$\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_nM_n) \to -\infty \quad \text{quando} \quad n \to +\infty.$$

O que contradiz a estimativa inferior em (2.27). Portanto, a sequência (t_n) é limitada.

Agora vamos estimar $\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_nM_n)$. Primeiro notemos que

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_nM_n) &= \frac{t_n^2}{2} + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_\lambda|^2\,\mathrm{d}x + t_n\int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla M_n\,\mathrm{d}x \\ &+ \frac{\lambda K}{2}\int_\Omega \frac{|u_\lambda + t_nM_n|^2}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \lambda\int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x, u_\lambda + t_nM_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Como u_λ é um ponto crítico de $\widetilde{J}_\lambda$, temos

$$\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_nM_n) = \frac{t_n^2}{2} + \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) - \lambda\int_\Omega \frac{[\widetilde{F}(x, u_\lambda + t_nM_n) - \widetilde{F}(x, u_\lambda) - t_n(f(u_\lambda) + Ku_\lambda)M_n]}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.$$

Esta última equação pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + t_nM_n) &= \frac{t_n^2}{2} + \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) - \lambda\int_\Omega \frac{[\widetilde{F}(x, u_\lambda + t_nM_n) - \widetilde{F}(x, u_\lambda) - t_n f(x, u_\lambda)M_n)]}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \\ &- \lambda t_n\int_\Omega \frac{(\widetilde{f}(x, u_\lambda) - f(u_\lambda) - Ku_\lambda)M_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Como $\widetilde{f}$ não-decresce e $u_\lambda > \underline{u}$ em Ω, segue por (2.27) que

$$t_n^2 \geq \frac{(2-a)2\pi}{\alpha_0}. \tag{2.29}$$

Esta última informação será crucial para prova do lema.

Sabemos que t_n é o ponto de máximo para aplicação $t \mapsto \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + tM_n)$, assim

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda + tM_n)|_{t=t_n} = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla(u_\lambda + t_nM_n)\nabla M_n \,\mathrm{d}x + \lambda K\int_\Omega \frac{u_\lambda M_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = \lambda\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x,u_\lambda + t_nM_n)M_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x. \tag{2.30}$$

Vamos estimar o lado direito desta equação inferiormente. Seja

$$c_n = \min_{|x|\le \frac{r_n}{n}} u_\lambda(x),$$

onde r_n será escolhido depois, com $B_{\frac{r_n}{n}}(0) \subset \Omega$. Então como $\widetilde{f}$ não-decresce, por (f_5) obtemos para n suficientemente grande

$$\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x,u_\lambda + t_nM_n)M_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \ge \int_{B_{\frac{r_n}{n}}(0)} \frac{h(t_nM_n(0))M_n(0)e^{\alpha_0(c_n+t_nM_n(0))^2}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x,u_\lambda + t_nM_n)M_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x &\ge 2\pi h(t_nM_n(0))M_n(0)e^{\alpha_0(c_n+t_nM_n(0))^2}\left(\frac{r_n}{n}\right)^{2-a}\\ &= 2\pi h(t_nM_n(0))M_n(0)e^{\alpha_0(c_n+t_nM_n(0))^2}r_n^{2-a}e^{-(2-a)\log n}.\end{aligned}$$

Por outro lado, temos que

$$(c_n + t_nM_n(0))^2 \ge (t_nM_n(0))^2 + 2c_nt_nM_n(0).$$

Assim por (2.29), temos sobre $B_{\frac{r_n}{n}}(0)$

$$\begin{aligned}\alpha_0(c_n + t_nM_n(0))^2 &\ge \alpha_0 t_n^2(2\pi)^{-1}\log n + 2\alpha_0 c_nt_n(2\pi)^{-1/2}(\log n)^{1/2}\\ &\ge (2-a)\log n + 2\alpha_0 c_nt_n(2\pi)^{-1/2}(\log n)^{1/2}.\end{aligned}$$

Combinando estas estimativas obtemos

$$\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x,u_\lambda + t_nM_n)M_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \ge 2\pi h(t_nM_n(0))M_n(0)e^{2\alpha_0c_nt_nM_n(0)}r_n^{2-a}.$$

Fazendo $r_n^{2-a} = e^{-\alpha_0c_nt_nM_n(0)}$, obtemos que

$$\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x,u_\lambda + t_nM_n)M_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \ge \frac{2\pi}{t_n}h(t_nM_n(0))t_nM_n(0)e^{\alpha_0c_nt_nM_n(0)}.$$

A menos de subsequência temos que $t_n \to t_0 > 0$ e $c_n \to u_\lambda(0) > 0$, assim existem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x, u_\lambda + t_n M_n) M_n}{|x|^a} \,\mathrm{d}x \geq c_1 h(t_n M_n(0)) t_n M_n(0) e^{c_2 M_n(0)}.$$

Usando a condição (f_5), temos que

$$h(t_n M_n(0)) t_n M_n(0) e^{c_2 M_n(0)} = h(t_n[(2\pi)^{-1}\log n]^{1/2}) t_n [(2\pi)^{-1}\log n]^{1/2} e^{c_2[(2\pi)^{-1}\log n]^{1/2}} \to +\infty.$$

Assim, a menos de subsequência temos

$$\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x, u_\lambda + t_n M_n) M_n}{|x|^a} \,\mathrm{d}x \to +\infty. \tag{2.31}$$

Por outro lado, temos que o lado esquerdo da equação (2.30) é limitada.

Com efeito, notemos que

$$\begin{aligned} \int_\Omega (\nabla u_\lambda + t_n \nabla M_n)\nabla M_n \,\mathrm{d}x + \lambda K \int_\Omega \frac{u_\lambda M_n}{|x|^a} \,\mathrm{d}x &= \int_\Omega \nabla u_\lambda \nabla M_n \,\mathrm{d}x + t_n \int_\Omega |\nabla M_n|^2 \,\mathrm{d}x \\ &+ \lambda K \int_\Omega \frac{u_\lambda M_n}{|x|^a} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e os fatos que $\|M_n\| = 1$ e (t_n) é limitada, concluímos a afirmação.

Esta última afirmação junto com (2.31) resultam numa contradição. E assim segue a prova do lema.

■

Agora podemos provar o seguinte resultado.

Lema 2.7.4. *Seja u_λ o mínimo local para $\widetilde{J}_\lambda$ obtido no Lema 2.7.1. Então existe outra solução $v_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ de (P_λ) do tipo passo da montanha.*

Prova: Pelo Lema 2.7.3, temos que

$$\rho_0 < \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Seja $(v_n) \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência $(PS)_{\mathscr{F},\rho_0}$ para $\widetilde{J}_\lambda$ (esta sequência sempre existe pelo Teorema 1 em [39]). Então pelo Lema 2.7.2 existe $v_\lambda \in H_0^1(\Omega)$ tal que $v_n \rightharpoonup v_\lambda$ em $H_0^1(\Omega)$ e

$$\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x, v_n)}{|x|^a} \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x, v_\lambda)}{|x|^a} \,\mathrm{d}x$$

e

$$\int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x, v_n)}{|x|^a} \,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x, v_\lambda)}{|x|^a} \,\mathrm{d}x.$$

Então, v_λ é um ponto crítico de $\widetilde{J}_\lambda$, e vimos no começo desta subseção que v_λ é solução de (P_λ). Agora, mostraremos que $v_\lambda \not\equiv u_\lambda$. Para isto temos que considerar dois casos.

Caso 1: $\rho_0 = J_\lambda(u_\lambda)$ e $v_\lambda \equiv u_\lambda$.

Neste caso, trabalhamos com $\mathscr{F} = \{v \in H_0^1(\Omega) : \|v - u_\lambda\| = \frac{R_0}{2}\}$. Assim temos

$$\begin{aligned}\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) = \rho_0 =& \widetilde{J}_\lambda(v_n) + o(1)\\ =& \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \lambda \int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x,v_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + o(1)\\ =& \frac{1}{2}\|v_n\|^2 - \lambda \int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x,v_\lambda)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + o(1)\\ =& \frac{1}{2}\|v_n\|^2 + \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) - \frac{1}{2}\|u_\lambda\|^2 + o(1).\end{aligned}$$

Desta última estimativa temos que $v_n \to u_\lambda$ em $H_0^1(\Omega)$, pois $v_n \rightharpoonup u_\lambda$ e $\|v_n\| \to \|u_\lambda\|$. Mais isto contradiz o fato de (v_n) ser uma sequência $(PS)_{\mathscr{F},\rho_0}$. Logo, $v_\lambda \not\equiv u_\lambda$.

Caso 2: $\rho_0 > J_\lambda(u_\lambda)$ e $v_\lambda \equiv u_\lambda$.

Primeiro mostraremos que

$$\int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x,v_n)v_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \to \int_\Omega \frac{\widetilde{f}(x,u_\lambda)u_\lambda}{|x|^a}\,\mathrm{d}x. \tag{2.32}$$

Sabemos que

$$\rho_0 < \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda) + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Logo, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$0 < \Big(\rho_0 - \widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)\Big)(1+\varepsilon) < \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}. \tag{2.33}$$

Por outro lado,

$$\frac{\|v_n\|^2}{2} - \lambda \int_\Omega \frac{F(x,v_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \to \rho_0.$$

Logo,

$$\|v_n\|^2 \to 2(\rho_0 + M_0), \tag{2.34}$$

onde $M_0 = \lambda \displaystyle\int_\Omega \frac{\widetilde{F}(x,u_\lambda)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x$. Por (2.33), temos que

$$\left[2(\rho_0 + M_0) - \|u_\lambda\|^2\right](1+\varepsilon) < \frac{(2-a)2\pi}{\alpha_0}.$$

Assim, por (2.34) para n suficientemente grande, temos

$$\left(\|v_n\|^2 - \|u_\lambda\|^2\right)(1+\varepsilon) < \frac{(2-a)2\pi}{\alpha_0}.$$

Daí,

$$\|v_n\|^2\left(1-\left\|\frac{u_\lambda}{\|v_n\|}\right\|\right)(1+\varepsilon)<\frac{(2-a)2\pi}{\alpha_0}.$$

Assim podemos tomar $s>1$ suficientemente próximo de 1 tal que

$$s\alpha_0\|v_n\|^2<\left(1-\left\|\frac{u_\lambda}{\|v_n\|}\right\|\right)^{-1}2\pi(2-as).$$

Como

$$\frac{v_n}{\|v_n\|}\rightharpoonup\frac{u_\lambda}{\lim\|v_n\|},$$

segue pelo Lema 1.6.5 que

$$\int_\Omega\frac{|\widetilde{f}(x,v_n)|^s}{|x|^{as}}\,\mathrm{d}x\le C.$$

Visto que

$$\int_\Omega\frac{|\widetilde{f}(x,v_n)|^s}{|x|^{as}}\,\mathrm{d}x\le C\int_\Omega\frac{e^{s\alpha_0\|v_n\|^2(v_n/\|v_n\|)^2}}{|x|^{as}}\,\mathrm{d}x\le C.$$

Usando esta estimativa e a imersão contínua de $H_0^1(\Omega)\hookrightarrow L^t(\Omega)$ para $t\in[1,+\infty)$, obtemos que

$$\int_\Omega\frac{\widetilde{f}(x,v_n)v_n^2}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\le\left(\int_\Omega\frac{|\widetilde{f}(x,v_n)|^s}{|x|^{as}}\,\mathrm{d}x\right)^{1/s}\cdot\left(\int_\Omega|v_n|^{2s'}\,\mathrm{d}x\right)^{1/s'}\le C.$$

Logo, pelo Lema 1.5.1 concluímos a afirmação (2.32).

Por fim, notemos que

$$\begin{aligned}
\rho_0 &= \lim_{n\to+\infty}\left(\widetilde{J}_\lambda(v_n)-\frac{1}{2}\langle\widetilde{J}'(v_n),v_n\rangle\right)\\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\frac{\widetilde{f}(x,v_n)}{|x|^a}v_n\,\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega\frac{\widetilde{F}(x,v_n)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \left(\frac{\lambda}{2}\int_\Omega\frac{\widetilde{f}(x,u_\lambda)}{|x|^a}u_\lambda\,\mathrm{d}x-\lambda\int_\Omega\frac{\widetilde{F}(x,u_\lambda)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)\\
&= \left(\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)-\frac{1}{2}\langle\widetilde{J}'(u_\lambda),u_\lambda\rangle\right)=\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda).
\end{aligned}$$

Mas isto contradiz o fato $\rho_0>\widetilde{J}_\lambda(u_\lambda)$. Logo, $v_\lambda\not\equiv u_\lambda$.

■

CAPÍTULO 3

Sobre uma desigualdade singular do tipo Trudinger-Moser e suas aplicações

3.1 Introdução

Neste capítulo provaremos uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser com um peso singular para um domínio suave qualquer em $\mathbb{R}^2$ (cf. Seção 3.2, Teorema 3.2.1), e como consequência deste resultado estudaremos a existência e multiplicidade de soluções fracas para a seguinte classe de problemas singulares:

$$-\Delta u+V(x)u=\frac{f(u)}{|x|^a}+h(x), \quad x\in\mathbb{R}^2 \tag{3.1}$$

onde $a\in[0,2)$, $h\in(H^1(\mathbb{R}^2))^*=H^{-1}$ é uma pequena pertubação com $h\not\equiv 0$ e $V:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguinte condições:

(V_1) existe uma constante positiva V_0 tal que

$$V(x)\geq V_0 \quad \text{para todo} \quad x\in\mathbb{R}^2;$$

(V_2) a função $[V(x)]^{-1}$ pertence a $L^1(\mathbb{R}^2)$.

Estamos interessado novamente no caso que a não-linearidade $f(s)$ tem o máximo crescimento sobre s que torna possível tratar o problema (3.1) variacionalmente num espaço de funções adequado, isto é, o crescimento subcrítico e o crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser [53, 66], os quais definimos da seguinte forma no Capítulo 1: Dizemos que $f(s)$ tem *crescimento subcrítico* em $+\infty$ se para todo $\alpha>0$

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}}=0, \tag{3.2}$$

e $f(s)$ tem *crescimento crítico* em $+\infty$ se existe $\alpha_0>0$ tal que

$$\lim_{s\to+\infty}\frac{f(s)}{e^{\alpha s^2}}=\begin{cases}0, & \forall\,\alpha>\alpha_0,\\ +\infty, & \forall\,\alpha<\alpha_0.\end{cases} \tag{3.3}$$

Similarmente definimos crescimento subcrítico e crítico em $-\infty$.

Além disso, assumiremos as seguintes condições sobre o termo não-linear:

(f_0) $f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $f(0) = 0$;

(f_1) existem constantes $\theta > 2$ e $s_1 > 0$ tal que para todo $|s| \geq s_1$,

$$0 < \theta F(s) := \int_0^s f(t)\ \mathrm{d}t \leq sf(s);$$

(f_2) existem constantes positivas R_0 e M_0 tais que para todo $|s| \geq R_0$

$$0 < F(s) \leq M_0|f(s)|.$$

Para aplicarmos métodos variacionais consideremos o seguinte subespaço de $H^1(\mathbb{R}^2)$

$$E = \left\{u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} V(x)u^2\ \mathrm{d}x < \infty\right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert dotado do seguinte produto interno

$$\langle u,v\rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\ \mathrm{d}x, \quad u,v \in E, \tag{3.4}$$

para o qual corresponde a norma $\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$. Aqui $H^1(\mathbb{R}^2)$ denota o usual espaço de Sobolev com a norma

$$\|u\|_{1,2} = \left[\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + |u|^2)\ \mathrm{d}x\right]^{1/2}.$$

Dizemos que $u \in E$ é uma solução fraca do problema (3.1) se

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u)}{|x|^a} v\ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hv\ \mathrm{d}x = 0, \tag{3.5}$$

para todo $v \in E$. Notemos que soluções fracas de (3.1) são pontos críticos do funcional energia

$$I(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u)}{|x|^a}\ \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hu\ \mathrm{d}x. \tag{3.6}$$

É importante lembrarmos que a hipótese (V_1) implica que a imersão

$$E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2)$$

é contínua e a condição (V_2), junto com a desigualdade de Hölder, implicam que

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^2} V(x)^{-1}\ \mathrm{d}x\right)^{1/2} \|u\|. \tag{3.7}$$

Consequentemente,

$$E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^2) \quad \text{para todo} \quad 1 \leq q < \infty, \tag{3.8}$$

com imersões contínuas. Também é bem conhecido que a condição (V_2) implica que estas imersões são compactas para todo $1 \leq q < \infty$ (cf. [45] e [51]). Além disso,

$$\lambda_1 := \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2) \, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^2} u^2/|x|^a \, \mathrm{d}x} > 0. \tag{3.9}$$

Outro fato importante é que se $h \geq 0$, de forma idêntica ao Capítulo 1 é fácil de ver que o problema

$$-\Delta u + V(x)u = \frac{\lambda_1 u + 2ue^{u^2}}{|x|^a} + h(x), \quad x \in \mathbb{R}^2$$

não possui soluções positivas. Assim, assumimos a seguinte condição adicional na origem:

(f_3) $\limsup_{s \to 0} \dfrac{2F(s)}{s^2} < \lambda_1$.

A seguir enunciamos os principais resultados deste capítulo, os quais para fácil referência distinguimos dois casos.

3.1.1 Caso subcrítico

Ao longo deste capítulo denotaremos por H^{-1} o espaço dual de $H^1(\mathbb{R}^2)$ com a norma usual $\|\cdot\|_{H^{-1}}$.

Teorema 3.1.1. *Se $f(s)$ tem crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$, e $(V_1)-(V_2)$, (f_0), (f_1) (ou (f_2)), (f_3) são satifeitas, então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_1$, o problema (*3.1*)* tem pelo menos duas soluções fracas. Uma com energia negativa, enquanto outra com energia positiva.

Além disso, se $h(x)$ tem sinal definido, o seguinte resultado vale:

Teorema 3.1.2. *Sob a mesmas condições do Teorema 3.1.1, se $h(x) \geq 0$ $(h(x) \leq 0)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, então as soluções obtidas no Teorema 3.1.1 são não-negativas (não-positivas), respectivamente.*

3.1.2 Caso crítico

Teorema 3.1.3. *Se $f(s)$ tem crescimento crítico em $+\infty$ e $-\infty$, e que $(V_1)-(V_2)$, (f_0), (f_2), (f_3) são satisfeitas. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_1$, o problema (*3.1*)* tem uma solução fraca com energia negativa.

Teorema 3.1.4. *Assumido as mesmas condições do Teorema 3.1.3 e se adicionarmos que*

(f_4^+) *existem constantes $p > 2$ e C_p tais que*

$$f(s) \geq C_p s^{p-1} \quad \textit{para todo} \quad s \geq 0,$$

onde

$$C_p > \left[\frac{\alpha_0(p-2)}{2p(2-a)\pi}\right]^{(p-2)/2} S_p^p,$$

e

$$S_p = \inf_{u\in E\setminus\{0\}} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + V(x)u^2)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}}.$$

Então existe $\delta_2 > 0$*, tal que se* $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_2$*, o problema (*3.1) tem uma segunda solução fraca.

Além disso, se $h(x)$ tem sinal definido, o seguinte resultado vale:

Teorema 3.1.5. *Sob a mesmas condições do Teorema 3.1.4, se* $h(x) \geq 0$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$*, então as soluções obtidas no Teorema 3.1.4 são não-negativas. Além disso, se* $h(x) \leq 0$ *quase sempre em* $\mathbb{R}^2$ *e* $f(s)$ *satisfaz:*

(f_4^-)

$$|f(s)| \geq C_p|s|^{p-1} \quad \textit{para todo} \quad s \in \mathbb{R},$$

então estas soluções são não-positivas.

Problemas com crescimento subcrítico e crítico exponencial envolvendo o operador Laplaciano em domínios limitados tem sido extensivamente estudado, veja por exemplo de Figueiredo-Miyagaki-Ruf [30] e suas referências. Já o problema $-\Delta u + V(x)u = f(u)$ em todo o espaço $\mathbb{R}^2$ foi tratado primeiramente por Cao [17] considerando o caso não-singular, homogêneo e com o potencial V convergindo para uma constante quando $|x| \to +\infty$. Neste capítulo motivado pelos resultados do Capítulo 1 e pelos artigos de Adimurthi-Sandeep [5], J. M. do Ó [32] e J. M. do Ó-de Medeiros-Severo [34] nosso principal objetivo é estabelecer um resultado de existência e multiplicidade similar ao obtido por J. M. do Ó-de Medeiros-Severo [34] para o problema (3.1). Para tanto, precisaremos provar uma desigualdade do tipo Trudinger-Moser com o peso singular $|x|^{-a}$ com $a \in [0,2)$ em domínios quaisquer em $\mathbb{R}^2$. Além disso, precisamos estabelecer uma versão de um resultado muito conhecido de Lions (cf. Seção 3.2, Teorema 3.2.2) com o peso singular $|x|^{-a}$. Em [34] para o problema com crescimento crítico a função $f(s)$ satisfaz a condição:

$$\liminf_{s\to+\infty} sf(s)e^{-\alpha_0 s^2} \geq \beta_0 > 0. \tag{3.10}$$

Neste trabalho generalizamos o resultado principal em [34], pois tratamos o caso singular e a condição (f_4^+) no Teorema 3.1.4 é menos restritiva que a condição (3.10).

Observação 3.1.1. *Um exemplo típico de função satisfazendo as condições* $(f_2),(f_3)$ *e* (f_4^+) *com crescimento crítico é*

$$f(s)=\begin{cases} 0, & \text{se} \quad s\in(-\infty,0);\\ C_p s^{p-1}+2s(e^{s^2}-1), & \text{se} \quad s\in[0,1];\\ C_p s^{p-1}+(e-1)\left[(2s-1)e^{s^2-s}+s\right], & \text{se} \quad s\in(1,+\infty). \end{cases}$$

Para provarmos (f_2), é suficiente notarmos que para $s>1$ existe $A>0$ tal que

$$F(s)=A+\frac{C_p}{p}(s^p-1)+(e^{s^2-s}-1)+\frac{(s^2-1)}{2},$$

assim,

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{F(s)}{f(s)}=0.$$

Para (f_3), é suficiente notarmos que

$$\limsup_{s\to 0}\frac{2F(s)}{s^2}=2\lim_{s\to 0}\frac{\frac{C_p}{p}s^p+(e^{s^2}-1)-s^2}{s^2}=0<\lambda_1.$$

Além disso, é fácil de ver que $f(s)\geq C_p s^{p-1}$ para todo $s\geq 0$, mostrando que (f_4^+) vale. Por outro lado, notemos que

$$\lim_{s\to+\infty} sf(s)e^{-s^2}=0.$$

Observação 3.1.2. *Lembremos que a condição* (f_2) *é mais forte que* (f_1), *no sentido que* (f_2) *implica* (f_1).

A prova dos nossos resultados de existência seguirá as mesmas idéias do Capítulo 1. Mais precisamente por minimização local em combinação com o Teorema do Passo da Montanha. Primeiro mostraremos que no caso subcrítico o funcional associado ao problema satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, e como consequência podemos distinguir uma solução de mínimo local de uma solução do tipo passo da montanha. Entretanto, novamente no caso crítico a condição de Palais-Smale não é satisfeita em geral, assim para provar que as soluções são distintas repetindo o argumento feito no Capítulo 1 faremos um refinamento para os níveis de energia do funcional associado ao problema. E novamente a condição (f_4^+) no Teorema 3.1.4 será crucial para estimar o nível do passo da montanha.

3.2 Uma desigualdade singular do tipo Trudinger-Moser para subdomínios em $\mathbb{R}^2$

O principal objetivo desta seção é provar uma nova desigualdade o tipo Trudinger-Moser para um domínio qualquer em $\mathbb{R}^2$. No entanto, para um melhor entendimento sobre esta nova desigualdade que pretendemos provar relembremos inicialmente alguns fatos sobre a desigualdade de Trudinger-Moser.

Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado a desigualdade de Trudinger-Moser (cf. [53, 66]) estabelece que para todo $\alpha > 0$ e $u \in H_0^1(\Omega)$

$$e^{\alpha u^2} \in L^1(\Omega)$$

e existe $c > 0$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_\Omega e^{\alpha u^2}\,\mathrm{d}x \leq c|\Omega| \quad \text{para} \quad \alpha \leq 4\pi. \tag{3.11}$$

Além disso, a desigualdade acima é ótima, isto é, para qualquer crescimento $e^{\alpha u^2}$ com $\alpha > 4\pi$ o correspondente supremo é $+\infty$.

Por outro lado, o supremo (3.11) torna-se infinito para domínios Ω com $|\Omega| = \infty$, e assim a desigualdade de Trudinger-Moser não vale para domínios não-limitados. Mais algumas desigualdades do tipo Trudinger-Moser foram propostas para domínios não-limitados, podemos citar por exemplo os trabalhos de Cao [17], Adachi-Tanaka [2] e J. M. do Ó [32]. Eles provaram que para todo $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$

$$(e^{\alpha u^2} - 1) \in L^1(\mathbb{R}^2)$$

e também se $\alpha < 4\pi$ e $\|u\|_2 \leq M$, então existe uma constante positiva $C = C(M, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1)\,\mathrm{d}x \leq C(M, \alpha). \tag{3.12}$$

Em um recente artigo Adimurthi-Sandeep [5] estenderam a desigualdade de Trudinger-Moser com um peso singular. Eles provaram que se Ω é um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ contendo a origem, $u \in H_0^1(\Omega)$ e $a \in [0, 2)$, então

$$\int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{3.13}$$

e

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_\Omega \frac{e^{\alpha u^2}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x < \infty \quad \text{para} \quad \alpha/4\pi + a/2 \leq 1. \tag{3.14}$$

Temos também que a desigualdade acima é ótima, isto é, para qualquer crescimento $e^{\alpha u^2}$ com $\alpha/4\pi + a/2 > 1$ o correspondente supremo é $+\infty$.

Novamente o supremo (3.14) torna-se infinito para domínios Ω com $|\Omega| = \infty$, e assim (3.14) não vale para domínio não-limitados.

É importante destacarmos que os resultados acima são válidos para dimensões superiores a dois. Aqui, motivado pelos trabalhos de Adimurthi-Sandeep [5], Cao [17], Adachi-Tanaka [2] e J. M. do Ó [32], provaremos uma versão da desigualdade de Trudinger-Moser com um peso singular sobre domínio suave qualquer em $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, mostraremos o seguinte resultado:

Teorema 3.2.1. *Sejam Ω um domínio suave em $\mathbb{R}^2$ contendo a origem, $\alpha > 0$, $a \in [0,2)$ e $u \in H_0^1(\Omega)$, então*

$$\int_\Omega \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Além disso, se $\alpha/4\pi + a/2 < 1$ e $\|u\|_2 \leq M$, existe uma constante positiva $C = C(M, \alpha)$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_\Omega \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \leq C(M, \alpha). \tag{3.15}$$

Temos também que o supremo acima é $+\infty$ quando $\alpha/4\pi + a/2 > 1$.

Prova: Inicialmente notemos que

$$\int_\Omega \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x,$$

desde que qualquer função $u \in H_0^1(\Omega)$ pode ser extendida como sendo zero no complementar do domínio Ω, resultando numa função em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Assim é suficiente provarmos o resultado para $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$.

Usando simetrização é suficiente provarmos a desigualdade requerida para funções não-negativas, radialmente simétricas e decrescente $u(x) = u(|x|)$. Consideremos a integral acima dividida em duas partes com um raio $\rho_0 > 0$ a ser escolhido depois.

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x = \int_{B_{\rho_0}} \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{\rho_0}} \frac{(e^{\alpha u^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x. \tag{3.16}$$

Para estimar a primeira integral em (3.16), seja $v(\rho) = u(\rho) - u(\rho_0)$ se $0 \leq \rho \leq \rho_0$ e $v(\rho) \equiv 0$ se $\rho \geq \rho_0$. Então,

$$u^2(\rho) = v^2(\rho) + 2v(\rho)u(\rho_0) + u^2(\rho_0).$$

Pela desigualdade de Young, para cada $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$u^2(\rho) \leq (1+\varepsilon)v^2(\rho) + (1 + C_\varepsilon)u^2(\rho_0).$$

Por outro lado, pelo Lema Radial (cf. [43]), temos

$$|u(\rho)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|u\|_2 \frac{1}{\rho} \quad \text{para todo} \quad \rho > 0.$$

Assim,

$$u^2(\rho) \leq (1+\varepsilon)v^2(\rho) + \frac{(1+C_\varepsilon)}{\pi\rho_0^2}\|u\|_2^2.$$

Escolhendo $\rho_0^2 \geq (1+C_\varepsilon)/\pi$, obtemos que

$$u^2(\rho) \leq (1+\varepsilon)v^2(\rho) + M^2. \tag{3.17}$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{B_{\rho_0}} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x &\leq \int_{B_{\rho_0}} \frac{e^{\alpha((1+\varepsilon)v^2+M^2)}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \\ &\leq e^{\alpha M^2}\int_{B_{\rho_0}} \frac{e^{\alpha(1+\varepsilon)v^2}}{|x|^a}\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.18}$$

Desde que $v \in H_0^1(B_{\rho_0})$, obtemos por (3.18) e (3.13) que

$$\int_{B_{\rho_0}} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x < \infty, \tag{3.19}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $\alpha > 0$. Notemos que se $\|\nabla u\|_2 \leq 1$, então

$$\int_{B_{\rho_0}} |\nabla v|^2\mathrm{d}x = \int_{B_{\rho_0}} |\nabla u|^2\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2\mathrm{d}x \leq 1.$$

Assim tomando $\varepsilon > 0$ tal que $(1+\varepsilon)\alpha/4\pi + a/2 < 1$, e usando a estimativa (3.14) e (3.18), obtemos $C_1 > 0$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{B_{\rho_0}} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq C_1 e^{\alpha M^2}. \tag{3.20}$$

Para a segunda integral, escolhendo $\rho_0 \geq 1$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_{\rho_0}} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_{\rho_0}} (e^{\alpha u^2}-1)\,\mathrm{d}x.$$

Logo, por (3.12)

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_{\rho_0}} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x < \infty, \tag{3.21}$$

para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $\alpha > 0$. Além disso, existe $C_2 = C_2(\alpha, M) > 0$ tal que

$$\sup_{\|\nabla u\|_2 \leq 1} \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_{\rho_0}} \frac{(e^{\alpha u^2}-1)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \leq C_2(\alpha, M). \tag{3.22}$$

Por fim, escolhendo $\rho_0 = \max\left\{1, \sqrt{\frac{(1+C_\varepsilon)}{\pi}}\right\}$, segue por (3.19), (3.20), (3.21) e (3.22) a primeira parte do resultado.

Agora mostraremos que (3.15) não vale se $\alpha/4\pi + a/2 > 1$. Para isto consideremos a sequência de Moser (cf. [53]):

$$M_n(x) = (2\pi)^{-1/2} \begin{cases} (\log n)^{1/2} & \text{se} \quad |x| \leq 1/n \\ \dfrac{\log(1/|x|)}{(\log n)^{1/2}} & \text{se} \quad 1/n \leq |x| \leq 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

É conhecido que $M_n \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}(M_n) = \overline{B}_1$ e $\|\nabla M_n\|_2 = 1$. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha M_n^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \geq \int_{B_{1/n}} \frac{(e^{\alpha M_n^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x = \frac{2\pi}{2-a}\left(n^{2(\alpha/4\pi + a/2 - 1)} - \frac{1}{n^{2-a}}\right).$$

Usando que $\alpha/4\pi + a/2 > 1$ e fazendo $n \to +\infty$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\alpha M_n^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x = +\infty.$$

O que completa a prova.

$\blacksquare$

A desigualdade de Trudinger-Moser foi melhorada por Lions em [50, Teorema I.6]. Ele provou o seguinte resultado num domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^2$: Se (w_n) é uma sequência em $H^1(\Omega)$ tal que $\|w_n\|_{1,2} = 1$ e converge fracamente para w_0 em $H^1(\Omega)$ com $\|w_0\|_{1,2} < 1$, então para todo $0 < p < 4\pi(1 - \|w_0\|_{1,2}^2)^{-1}$ vale a seguinte estimativa

$$\sup_n \int_\Omega e^{p w_n^2}\, \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.23}$$

Este resultado foi estendido para todo $\mathbb{R}^2$ por J. M. do Ó-de Medeiros-Severo em [34]. Eles provaram que se (w_n) é uma sequência em $H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|w_n\|_{1,2} = 1$, $w_n \rightharpoonup w_0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ e $\|w_0\|_{1,2} < 1$. Então para todo $0 < p < 4\pi(1 - \|w_0\|_{1,2}^2)^{-1}$ vale

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} (e^{p w_n^2} - 1)\, \mathrm{d}x < \infty. \tag{3.24}$$

A seguir adaptando o argumento feito por J. M. do Ó-de Medeiros-Severo em [34], estabeleceremos uma versão singular deste resultado em todo $\mathbb{R}^2$.

Teorema 3.2.2. *Seja (w_n) em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|w_n\|_{1,2} = 1$ e suponha que $w_n \rightharpoonup w_0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|w_0\|_{1,2} < 1$. Então para todo $0 < p < 2\pi(2-a)(1 - \|w_0\|_{1,2}^2)^{-1}$ e $a \in [0,2)$, temos*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{p w_n^2} - 1)}{|x|^a}\, \mathrm{d}x < \infty.$$

Prova: Desde que $w_n \rightharpoonup w_0$ e $\|w_n\|_{1,2} = 1$, obtemos que

$$\|w_n - w_0\|_{1,2}^2 = 1 - 2\langle w_n, w_0\rangle + \|w_0\|_{1,2}^2 \to 1 - \|w_0\|_{1,2}^2 < \frac{2\pi(2-a)}{p}.$$

Assim, para n grande temos

$$p\|w_n - w_0\|_{1,2}^2/4\pi + a/2 < 1.$$

Agora escolhendo $q > 1$ mas bem próximo de 1 e $\varepsilon > 0$ satisfazendo

$$qp(1+\varepsilon^2)\|w_n - w_0\|_{1,2}^2/4\pi + a/2 < 1,$$

pelo Lema 3.2.1, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left[e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2} - 1\right]}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left[e^{qp(1+\varepsilon^2)\|w_n-w_0\|_{1,2}^2\left(\frac{w_n-w_0}{\|w_n-w_0\|_{1,2}}\right)^2} - 1\right]}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \le C.$$

Além disso, desde que

$$pw_n^2 \le p(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2 + p(1+\frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} e^{pw_n^2} - 1 &\le (e^{p(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2} e^{p(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1) \\ &\le \frac{1}{q}\left(e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2} - 1\right) + \frac{1}{r}\left(e^{rp(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1\right), \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que para todo $a, b > 0$ e $q^{-1} + r^{-1} = 1$ temos

$$ab - 1 \le \frac{1}{q}(a^q - 1) + \frac{1}{r}(b^r - 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{pw_n^2} - 1)}{|x|^a}\mathrm{d}x &\le \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left[e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n-w_0)^2} - 1\right]}{|x|^a}\mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{\left[e^{rp(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1\right]}{|x|^a}\mathrm{d}x \\ &\le C, \end{aligned}$$

para n grande e assim o resultado está provado.

$\blacksquare$

Agora faremos uma aplicação simples do Teorema 3.2.1.

Lema 3.2.1. *Seja $\beta > 0$ e $r > 1$. Então para cada $\alpha > r$ existe uma constante positiva $C = C(\alpha)$ tal que para todo $s \in \mathbb{R}$*

$$(e^{\beta s^2} - 1)^r \leq C(e^{\alpha\beta s^2} - 1).$$

Em particular, se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ e $a \in [0,2)$ então

$$\frac{(e^{\beta u^2} - 1)^r}{|x|^a} \in L^1(\mathbb{R}^2).$$

Prova: A primeira parte deste lema foi provada em [34]. Consequentemente, pelo Teorema 3.2.1 segue a segunda parte. ■

Observação 3.2.1. *Como consequência do Teorema 3.2.1, Lema 3.2.1 e da desigualdade de Hölder, temos que se $\beta > 0$ e $q > 0$ então a função*

$$|u|^q \frac{(e^{\beta u^2} - 1)}{|x|^a} \in L^1(\mathbb{R}^2) \quad \textit{para todo} \quad u \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

3.3 Formulação variacional do problema (3.1)

Pela condição (f_3) temos que

$$\limsup_{s \to 0} \frac{f(s)}{s} < \lambda_1.$$

Assim, se $f(s)$ é contínua e tem crescimento subcrítico em $+\infty$ e $-\infty$, então para cada $\alpha > 0$ existe b_1, $b_2 > 0$ tais que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$|f(s)| \leq b_1|s| + b_2(e^{\alpha s^2} - 1). \tag{3.25}$$

Similarmente, se $f(s)$ é contínua e tem crescimento crítico em $+\infty$ e $-\infty$, então para cada $\alpha > \alpha_0$ existe c_1, $c_2 > 0$ tais que para todo $s \in \mathbb{R}$

$$|f(s)| \leq c_1|s| + c_2(e^{\alpha s^2} - 1). \tag{3.26}$$

Esta estimativa junto com observação 3.2.1 e as condições (f_1) (ou (f_2)), (f_3) implicam que $\dfrac{F(u)}{|x|^a} \in L^1(\mathbb{R}^2)$ para todo $u \in H^1\left(\mathbb{R}^2\right)$. Logo, o funcional energia $I : E \to \mathbb{R}$ dado por (3.6) está bem definido. Além disso, usando argumentos idênticos aos feitos no Capítulo 1, podemos provar que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ com

$$\langle I'(u), v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + V(x)uv)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u)}{|x|^a} v\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hv\, \mathrm{d}x,$$

para todo $u, v \in E$. Consequentemente, pontos críticos do funcional I são soluções fracas do problema (3.1).

3.4 Geometria do funcional

Nos próximos lemas estudaremos a geometria do funcional I.

Lema 3.4.1. *Se $v \in E$, $\beta > 0$, $q > 0$ e $\|v\| \leq M$ com $\beta M^2/4\pi + a/2 < 1$, então existe $C = C(\beta, M, q) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)}{|x|^a} |v|^q \, \mathrm{d}x \leq C\|v\|^q.$$

Prova: Consideremos que $r > 1$ e suficientemente próximo de 1 tal que $r\beta M^2/4\pi + ra/2 < 1$ e $sq \geq 1$ onde $s = r/(r-1)$. Usando a desigualdade a Hölder, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)}{|x|^a} |v|^q \, \mathrm{d}x \leq \left[\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)^r}{|x|^{ra}} \mathrm{d}x \right]^{1/r} \|v\|_{qs}^q.$$

Agora, tomemos $\alpha > r$ mas suficientemente próximo de r tal que $\alpha\beta M^2/4\pi + ra/2 < 1$, pelo Lema 3.2.1 e pelo Teorema 3.2.1 temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)}{|x|^a} |v|^q \, \mathrm{d}x \leq C_1 \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[e^{\alpha\beta M^2 \left(\frac{v}{\|\nabla v\|}\right)^2} - 1]}{|x|^{ra}} \, \mathrm{d}x \right\}^{1/r} \|v\|_{qs}^q \leq C_2 \|v\|_{qs}^q.$$

Finalmente, usando a imersão contínua $E \hookrightarrow L^{sq}(\mathbb{R}^2)$, concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(e^{\beta v^2} - 1)}{|x|^a} |v|^q \, \mathrm{d}x \leq C\|v\|^q.$$

■

Lema 3.4.2. *Assuma (f_0), (f_1) (ou (f_2)), (f_3) e que $f(s)$ tem crescimento subcrítico (ou crítico) em $+\infty$ e $-\infty$. Então existe $\delta_1 > 0$ tal que para cada $h \in H^{-1}$ com $\|h\|_{H^{-1}} < \delta_1$, existe $\rho_h > 0$ tal que*

$$I(u) > 0 \qquad \text{se} \quad \|u\| = \rho_h.$$

Prova: Por (f_3) existe $\varepsilon, \delta > 0$ tais que se $|s| \leq \delta$ então

$$|F(s)| \leq \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2} |s|^2. \tag{3.27}$$

Por hipótese $f(s)$ é contínua e tem crescimento subcrítico (ou crítico) em $+\infty$ e $-\infty$. Por (f_1) (ou (f_2)), para cada $q > 2$ existe uma constante $C = C(q, \delta)$ tal que

$$|F(s)| \leq C|s|^q (e^{\alpha s^2} - 1), \tag{3.28}$$

se $|s| \geq \delta$. Por (3.27) e (3.28) obtemos que

$$|F(s)| \leq \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}|s|^2 + C|s|^q(e^{\alpha s^2} - 1), \tag{3.29}$$

para todo $s \in \mathbb{R}$ e $q > 2$. Agora, usando o Lema 3.4.1, (3.9) e a imersão contínua (3.8), obtemos que

$$\begin{aligned} I(u) \geq & \ \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{2}\int_\Omega \frac{|u|^2}{|x|^a}\mathrm{d}x - C\|u\|^q - \|h\|_{H^{-1}}\|u\| \\ \geq & \ \frac{1}{2}\left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right]\|u\|^2 - C\|u\|^q - \|h\|_{H^{-1}}\|u\|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$I(u) \geq \|u\|\left[\frac{1}{2}\left(1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right)\|u\| - C\|u\|^{q-1} - \|h\|_{H^{-1}}\right]. \tag{3.30}$$

Desde que $\varepsilon > 0$ e $q > 2$, podemos escolher $\rho > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\left[1 - \frac{(\lambda_1 - \varepsilon)}{\lambda_1}\right]\rho - C\rho^{q-1} > 0.$$

Assim para $\|h\|_{H^{-1}}$ suficientemente pequeno, existe $\rho_h > 0$ tal que $I(u) > 0$ se $\|u\| = \rho_h$. ■

Lema 3.4.3. *Suponha que f satisfaz (f_1) (ou (f_2)). Então existe $e \in E$ com $\|e\| > \rho_h$ tal que*

$$I(e) < \inf_{\|u\| = \rho_h} I(u).$$

Prova: Por (f_1) (ou (f_2)), para $\theta > 2$, existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que para todo $u \in H^1(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$,

$$F(u) \geq C_1|u|^\theta - C_2.$$

Assim escolhendo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$, temos

$$\begin{aligned} I(t\varphi) \ & \leq \frac{t^2}{2}\|\varphi\|^2 - C_1 t^\theta \int_K \frac{|\varphi|^\theta}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + C_2\int_K \frac{\mathrm{d}x}{|x|^a} - t\int_K h(x)\varphi\,\mathrm{d}x, \\ & \leq \frac{t^N}{N}\|\varphi\|^N - C_1 t^\theta \int_K \frac{|\varphi|^\theta}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + t\|h\|_*\|\varphi\| + C_3, \end{aligned}$$

onde $K = \mathrm{supp}(\varphi)$. Como $\theta > 2$, temos que $I(t\varphi) \to -\infty$ quando $t \to +\infty$. Assim $e = t\varphi$ com t suficientemente grande satisfaz o lema ■

Para encontrarmos uma solução via minimização local precisaremos do seguinte resultado.

Lema 3.4.4. *Se $f(s)$ é contínua e tem crescimento subcrítico (ou crítico) em $+\infty$ e $-\infty$, então existem $\eta > 0$ e $v \in E$ com $\|v\| = 1$ tal que $I(tv) < 0$ para todo $0 < t < \eta$. Em particular,*

$$\inf_{\|u\| \leq \eta} I(u) < 0.$$

Prova: Para cada $h \in H^{-1}$, aplicando o Teorema de Representação de Riesz para o espaço de Hilbert E com o produto interno (3.4), o problema

$$-\Delta v + V(x)v = h, \qquad x \in \mathbb{R}^2$$

tem uma única solução v em E. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} hv \, \mathrm{d}x = \|v\|^2 > 0 \quad \text{para cada} \quad h \neq 0.$$

Desde que $f(0) = 0$, por continuidade segue que existe $\eta > 0$ tal que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(tv) = t\|v\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(tv)}{|x|^a} v \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hv \, \mathrm{d}x < 0,$$

para todo $0 < t < \eta$. Usando que $I(0) = 0$, devemos ter $I(tv) < 0$ para todo $0 < t < \eta$. ∎

Desta forma usando estes lemas temos que este funcional tem a mesma geometria do funcional considerado no Capítulo 1. Assim pelos Lemas 3.4.2 e 3.4.3 existe $\delta_1 > 0$ tal que se $\|h\|_* \leq \delta_1$ o nível

$$c_M = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} I(g(t)) > 0,$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], W_0^{1,N}(\Omega)) : g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Temos também pelo Lema 3.4.4 que existe $\eta > 0$ tal que

$$-\infty < c_0 \equiv \inf_{\|u\| \leq \eta} I(u) < 0.$$

Pelos Lemas 3.4.2 e 3.4.3 podemos aplicar o Teorema 1.3.1 para obter uma sequência $(v_n) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que

$$I(v_n) \to c_M \quad \text{e} \quad \|I(v_n)\|_* \to 0. \tag{3.31}$$

Seja ρ_h como no Lema 3.4.2. Desde que $\overline{B}_{\rho_h}$ é um espaço métrico completo com a métrica induzida pela norma de $W_0^{1,N}(\Omega)$ e convexo, e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente sobre $\overline{B}_{\rho_h}$, segue pelo Teorema 1.3.2 que existe uma sequência (u_n) em $\overline{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(u_n) \to c_0 \ \text{ e } \ \|I'(u_n)\|_* \to 0. \tag{3.32}$$

Desta forma precisamos estudar as propriedades das sequências (v_n) e (u_n). O que será o foco da próxima seção.

3.5 Propriedades das sequências de Palais-Smale

Para provarmos que uma sequência de Palais-Smale converge para uma solução fraca do problema (3.1) precisamos estabelecer o seguinte lema:

Lema 3.5.1. *Assuma* (f_1) *(ou* (f_2)*) e que* $f(s)$ *tem crescimento subcrítico (ou crítico) em* $+\infty$ *e* $-\infty$*. Seja* (u_n) *em* E *tal que* $I(u_n) \to c$ *e* $I'(u_n) \to 0$*. Então*

$$\|u_n\| \leq C, \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} u_n \, \mathrm{d}x \leq C \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \leq C.$$

Prova: Temos que

$$\frac{1}{2}\|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} h u_n \, \mathrm{d}x = c + o(1),$$

e para todo $\varphi \in E$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_n \nabla \varphi + V(x) u_n \varphi) \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a} \varphi \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi \, \mathrm{d}x = o(\|\varphi\|). \tag{3.33}$$

Por (f_1) (ou (f_2)), obtemos

$$\begin{aligned} C + \varepsilon_n \|u_n\| &\geq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{[\theta F(u_n) - f(u_n) u_n]}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \\ &\geq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \|u_n\|^2 - \int_{\{x:\, |u_n(x)| < s_1\}} \frac{[\theta F(u_n) - f(u_n) u_n]}{|x|^a} \, \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

onde $\varepsilon_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Usando que $|f(s)s - F(s)| \leq C_1 |s|$ para todo $|s| \leq s_1$ e a desigualdade (3.7), obtemos que

$$C + \varepsilon_n \|u_n\| \geq \left(\frac{\theta}{2} - 1\right) \|u_n\|^2 - C_1 \|u_n\|,$$

esta desigualdade implica que existe $C > 0$ tal que $\|u_n\| \leq C$. As outras estimativas segue diretamente das equações acima. ■

Para provarmos que o limite fraco de uma sequência de Palais-Smale em E é uma solução fraca de (3.1) usaremos o seguinte resultado de convergência devido a de Figueiredo-J. M. do Ó-Ruf [29], veja também [30] para o caso não-singular.

Lema 3.5.2. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ *um domínio limitado e* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função contínua. Então para toda sequência* (u_n) *em* $L^1(\Omega)$ *tal que*

$$u_n \to u \text{ em } L^1(\Omega), \ \frac{f(u_n)}{|x|^a} \in L^1(\Omega) \ \text{ e } \ \int_\Omega \frac{|f(u_n) u_n|}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \leq C,$$

então, a menos de uma subsequência temos

$$\frac{f(u_n)}{|x|^a} \to \frac{f(u)}{|x|^a} \ \text{ em } \ L^1(\Omega).$$

Destes Lemas segue o seguinte resultado.

Corolário 3.5.1. *Seja* (u_n) *uma sequência de Palais-Smale para* I*. Então existe uma subsequência que denotaremos novamente por* (u_n) *que converge fracamente para uma solução não-trivial do problema (*3.1*).*

3.6 Prova dos principais resultados

Para as sequências (v_n) e (u_n) obtidas em (3.31) e (3.32), seque pelo Corolário 3.5.1 os seguintes fatos:

$$v_n \rightharpoonup u_M \quad \text{em} \quad E \quad \text{e} \quad I(v_n) \to c_M$$

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{em} \quad E \quad \text{e} \quad I(u_n) \to c_0,$$

onde $u_M \neq 0$ e $u_0 \neq 0$ são soluções fracas do problema (3.1).

Como as convergências são apenas fracas não podemos concluir que u_M e u_0 são distintas de imediato. Então para provarmos que de fato estas soluções são diferentes vamos considerar os casos subcrítico e crítico. O que será o objetivo das próximas seções.

3.6.1 Caso subcrítico

Nesta subseção daremos a prova do Teorema 3.1.1. Assim assumiremos que V satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e $f(s)$ tem crescimento subcrítico e satisfaz (f_0), (f_1) (ou (f_2)) e (f_3). A demonstração do Teorema 3.1.1 será consequência do seguinte lema.

Lema 3.6.1. *O funcional I satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Prova: Seja (u_n) uma sequência de Palais-Smale. Pelo Lema 3.5.1, (u_n) é uma sequência limitada, assim a menos de subsequência, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E, $u_n \to u_0$ fortemente em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ e $u_n(x) \to u_0(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{(f(u_n) - f(u_0))}{|x|^a}(u_n - u_0)\, \mathrm{d}x \to 0. \tag{3.34}$$

De fato, usando a desigualdade (3.25), para todo $\alpha > 0$ obtemos

$$|f(u_n) - f(u_0)||u_n - u_0| \leq C_1 \left[|u_n| + |u_0| + (e^{\alpha u_n^2} - 1) + (e^{\alpha u_0^2} - 1)\right]|u_n - u_0|.$$

Esta estimativa junto com a desigualdade de Hölder, Teorema 3.2.1 e o Lema 3.2.1 implicam a afirmação (3.34). Agora, observemos que

$$\|u_n - u_0\|^2 = \langle I'(u_n) - I'(u_0), u_n - u_0 \rangle + \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(f(u_n) - f(u_0))}{|x|^a}(u_n - u_0)\, \mathrm{d}x.$$

Assim $u_n \to u_0$ fortemente em E. ■

Prova do Teorema 3.1.1: Pelo Lema 3.6.1 temos que I satisfaz a condição de Palais-Smale, consequentemente,

$$I(v_n) \to I(u_M) = c_M \quad \text{e} \quad I(u_n) \to I(u_0) = c_0.$$

Donde segue que $u_M \neq u_0$. O que prova o Teorema 3.1.1.

3.6.2 Caso crítico

Nesta subseção daremos as provas dos Teoremas Teoremas 3.1.3 e 3.1.4. Portanto, assumiremos que $f(s)$ possui crescimento crítico e satisfaz (f_0), (f_1) (ou (f_2)), (f_3) e (f_4^+). A principal de dificuldade deste caso é que em geral o funcional I não satisfaz a condição de Palais-Smale. Só em determinadas situações.

O próximo lema nos fornece uma condição para o funcional I satisfazer a condição de Palais-Smale.

Lema 3.6.2. *Se (u_n) é uma sequência de Palais-Smale para I em qualquer nível com*

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\|^2 < \frac{2\pi(2-a)}{\alpha_0},$$

*então (u_n) possui uma subsequência que converge fortemente em E para uma solução fraca u_0 de (*3.1).

Prova: Pelo Lema 3.5.1, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E, $u_n \to u_0$ fortemente $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 1$ e $u_n(x) \to u_0(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Além disso, pelo Lema 3.5.2,

$$\frac{f(u_n)}{|x|^a} \to \frac{f(u_0)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Passando o limite em (3.33), temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u_0 \nabla \varphi + V(x) u_0 \varphi)\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)}{|x|^a} \varphi\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} h\varphi\, \mathrm{d}x = 0,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E, concluímos que u_0 é uma solução fraca de (3.1).
Afirmamos que $u_n \to u_0$ fortemente em E. De fato, escrevendo $u_n = u_0 + w_n$, segue que $w_n \rightharpoonup 0$ fracamente em E. Assim, $w_n \to 0$ fortemente em $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $1 \leq q < \infty$. Pelo Lema de Brezis-Lieb (cf. [15]), obtemos

$$\|u_n\|^2 = \|u_0\|^2 + \|w_n\|^2 + o_n(1). \tag{3.35}$$

Inicialmente provaremos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)u_0}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)u_0}{|x|^a}\, \mathrm{d}x. \tag{3.36}$$

Com efeito, desde que $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ é denso em E, para todo $\tau > 0$ existe $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\|\varphi - u_0\| < \tau$. Observemos que

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)u_0}{|x|^a}\, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)u_0}{|x|^a}\, \mathrm{d}x \right| \leq & \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)}{|x|^a}(u_0 - \varphi)\, \mathrm{d}x \right| \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)}{|x|^a}(u_0 - \varphi)\, \mathrm{d}x \right| \\ & + \|\varphi\|_\infty \int_{supp \varphi} \frac{|f(u_n) - f(u_0)|}{|x|^a}\, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Usando que $|\langle I'(u_n), u_0-\varphi\rangle| \le \tau_n\|u_0-\varphi\|$ com $\tau_n \to 0$, estimamos a primeira integral acima da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(u_n)}{|x|^a}(u_0-\varphi)\,\mathrm{d}x\right| &\le \tau_n\|u_0-\varphi\| + \left(\int_{\mathbb{R}^2}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\|u_0-\varphi\|\\ &\quad + \left(\int_{\mathbb{R}^2}V(x)|u_n|^2\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\|u_0-\varphi\|\\ &\quad + \|h\|_{H^{-1}}\|u_0-\varphi\|\\ &\le C\|u_0-\varphi\| < C\tau,\end{aligned}$$

onde C é independente de n e τ. Similarmente, usando que $\langle I'(u_0), u_0-\varphi\rangle = 0$, podemos estimar a segunda integral obtendo

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(u_0)}{|x|^a}(u_0-\varphi)\,\mathrm{d}x\right| < C\tau.$$

Para estimarmos a última integral usando que $\dfrac{f(u_n)}{|x|^a} \to \dfrac{f(u_0)}{|x|^a}$ fortemente em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ e usando as estimativas anteriores concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(u_n)u_0}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(u_0)u_0}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right| < 2C\tau.$$

Esta estimativa implica (3.36), pois τ é arbitrário.

Por (3.35) e (3.36), podemos escrever

$$\langle I'(u_n), u_n\rangle = \langle I'(u_0), u_0\rangle + \|w_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(u_n)w_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + o(1),$$

isto é,

$$\|w_n\|^2 = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(u_n)w_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + o(1). \tag{3.37}$$

Agora notemos que pela desigualdade de Hölder e pelo Lema 3.2.1, para qualquer $\alpha > \alpha_0$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(u_n)w_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right| &\le b_1\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|u_n|^2}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|w_n|^2}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}\\ &+ b_2\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{e^{\alpha\|u_n\|^2(u_n/\|u_n\|)^2}-1}{|x|^a}\right)^r\,\mathrm{d}x\right]^{1/r}\|w_n\|_{r'}.\end{aligned}$$

Por outro lado, pela desigualdade de Hölder com $1<s<\infty$, $as'<2$, $1/s+1/s'=1$, $1<\tau<\infty$, $a\tau'<2$, $1/\tau+1/\tau'=1$, $1<r<\infty$ e $r'=r/(r-1)$, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(u_n)w_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right| &\le b_1(C_1\|u_n\|_{2s}^2+\|u_n\|_2^2)^{1/2}\cdot(C_2\|w_n\|_{2\tau}^2+\|w_n\|_2^2)^{1/2}\\ &+ b_2\left[\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(e^{\alpha q\|u_n\|^2(u_n/\|u_n\|)^2}-1)}{|x|^{qa}}\,\mathrm{d}x\right]^{1/r}\|w_n\|_{r'}.\end{aligned}$$

Por hipótese, $\alpha_0\|u_n\|^2 < (2-a)2\pi$ para n suficientemente grande. Assim para $\alpha > \alpha_0$ e $q > r$, com $r > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que $\alpha q\|u_n\|^2/4\pi + qa/2 < 1$. Usando o Teorema 3.2.1 e a imersão compacta (3.8), concluímos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)w_n}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \to 0.$$

Esta estimativa junto com (3.37) implicam que $\|w_n\| \to 0$, e assim o resultado segue. ∎

A seguir provaremos a existência de uma solução do tipo mínimo local.

Lema 3.6.3. *Para cada $h \in H^{-1}$ com $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_1$, a equação (*3.1*) tem uma solução fraca do tipo mínimo local u_0 com $I(u_0) = c_0 < 0$.*

Prova: Seja ρ_h como no Lema 3.4.2. Podemos escolher $\|h\|_{H^{-1}}$ suficientemente pequeno tal que $\rho_h < ((2-a)2\pi/\alpha_0)^{1/2}$. Desde que $\overline{B}_{\rho_h}$ é um espaço convexo e completo com a métrica induzida pela norma de E, e o funcional I é de classe C^1 e limitado inferiormente sobre $\overline{B}_{\rho_h}$, pelo Teorema 1.3.2 existe uma sequência (u_n) em $\overline{B}_{\rho_h}$ tal que

$$I(u_n) \to c_0 = \inf_{\|u\|\le\rho_h} I(u) \ \text{ e } \ \|I'(u_n)\|_{E'} \to 0.$$

Notemos que se $\|u_n\|^2 \le \rho_h^2 < (2-a)2\pi/\alpha_0$, pelo Lema 3.6.2, existe uma subsequência de (u_n) que converge fortemente para uma solução fraca u_0 de (3.1). Consequentemente, $I(u_0) = c_0 < 0$. ∎

Assim resumindo temos para as sequências (v_n) e (u_n) obtidas em (3.31) e (3.32) que

$$v_n \rightharpoonup u_M \quad \text{em} \quad E \quad \text{e} \quad I(v_n) \to c_M$$

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad E \quad \text{e} \quad I(u_n) \to c_0,$$

onde $u_M \neq 0$ e $u_0 \neq 0$ são soluções fracas do problema (3.1).

Como a primeira convergência é apenas fraca não podemos concluir que u_M e u_0 são distintas de imediato. Então para provarmos que de fato estas soluções são diferentes precisamos de mais informações sobre o nível minimax c_M, o que será o objetivos dos próximos lemas.

Lema 3.6.4. *Para todo $p > 2$ temos que S_p é atingido por uma função $u_p \in E$.*

Prova: Seja $p > 2$ e $(u_k) \subset E$ uma sequência tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_k|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{para todo} \quad k \in \mathbb{N}$$

e

$$\left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_k|^2 + V(x)u_k^2)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2} \to S_p \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Consequentemente, (u_k) é uma sequência limitada em E. Assim sem perda de generalidade podemos assumir que:

$$\begin{aligned}
&u_k \rightharpoonup u_p \quad \text{fracamente em} \quad E,\\
&u_k \to u_p \quad \text{fortemente em} \quad L^s(\mathbb{R}^2) \quad \text{para todo} \quad s \in [1,+\infty),\\
&u_k(x) \to u_p(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^2.
\end{aligned}$$

Logo, a menos de subsequência temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_k|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_p|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.$$

Desta convergência obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_p|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Por outro lado, temos que

$$\|u_p\| \leq \liminf_{k\to+\infty} \|u_k\| = S_p. \tag{3.38}$$

Por (3.38) e usando a definição de S_p, concluímos que

$$S_p = \|u_p\|.$$

■

Como consequência deste lema temos o seguinte resultado:

Lema 3.6.5. *Seja* $\Psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ *a função definida por:*

$$\Psi(t) = \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_p|^2 + V(x)u_p^2)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(tu_p)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.$$

Suponha que (f_4^+) *vale. Então*

$$\max_{t\geq 0} \Psi(t) < \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Prova: Pelo Lema 3.6.4, temos que

$$S_p = \left(\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_p|^2 + V(x)u_p^2)\,\mathrm{d}x\right)^{1/2}. \tag{3.39}$$

Usando a condição (f_4^+) temos

$$\Psi(t) \leq \frac{t^2}{2}\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_p|^2 + V(x)u_p^2)\,\mathrm{d}x - t^p\frac{C_p}{p}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_p|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x.$$

Por (3.39) e usando que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} \frac{|u_p|^p}{|x|^a}\,\mathrm{d}x = 1$, obtemos

$$\Psi(t) \leq \frac{t^2}{2} S_p^2 - t^p \frac{C_p}{p} \leq \max_{t\geq 0}\left[\frac{t^2}{2} S_p^2 - t^p \frac{C_p}{p}\right] = \frac{(p-2)}{2p}\frac{S_p^{2p/(p-2)}}{C_p^{2/(p-2)}}.$$

Novamente por (f_4^+) temos que

$$\frac{(p-2)}{2p}\frac{S_p^{2p/(p-2)}}{C_p^{2/(p-2)}} < \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Assim,

$$\max_{t\geq 0} \Psi(t) < \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Donde concluímos o lema. ■

Como consequência deste lema temos a seguinte estimativa:

Corolário 3.6.1. *Assumindo as condições (V_1) e $(f_2)-(f_4^+)$, se $\|h\|_{H^{-1}}$ é suficientemente pequena, então*

$$\max_{t\geq 0} I(tu_p) = \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^2}{2}\|u_p\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2}\frac{F(tu_p)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - t\int_{\mathbb{R}^2} hu_p\,\mathrm{d}x\right\} < \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Prova: Notemos que $\|hu_p\|_1 \leq \|h\|_{H^{-1}}\|u_p\|$. Assim, se $\|h\|_{H^{-1}}$ é suficientemente pequena, segue pelo Lema 3.6.5 o resultado. ■

Precisaremos melhorar a estimativa do corolário 3.6.1.

Corolário 3.6.2. *Assumindo as condições $(f_2)-(f_4^+)$, temos que existe $\delta_2 > 0$ tal que para todo $h \in H^{-1}$ com $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_2$, existe $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ verificando*

$$I(tu) < c_0 + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0} \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Prova: É possível aumentar o ínfimo c_0, pois c_0 cresce quando $\|h\|_{H^{-1}}$ decresce e $c_0 \to 0$ quando $\|h\|_{H^{-1}} \to 0$. Assim, existe $\delta_2 > 0$ tal que se $0 < \|h\|_{H^{-1}} < \delta_2$, então pelo corolário 3.6.1, temos

$$\max_{t\geq 0} I(tu_p) < c_0 + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Fazendo $u = u_p \in H^1(\mathbb{R}^2)$ temos o resultado do lema. ■

Observação 3.6.1. *Pelo corolário 3.6.2, podemos concluir que*

$$0 < c_M < c_0 + \frac{(2-a)\pi}{\alpha_0}.$$

Também utilizaremos o seguinte resultado de convergência:

Lema 3.6.6. *Suponhamos que $f(s)$ satisfaz a condição (f_2) e tem crescimento crítico em $+\infty$ e $-\infty$. Se $(v_n) \subset E$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional I e u_0 é seu limite fraco, então a menos de uma subsequência temos*

$$\frac{F(v_n)}{|x|^a} \to \frac{F(u_0)}{|x|^a} \quad \textit{em} \quad L^1(\mathbb{R}^2).$$

Prova: Como consequência dos Lemas 3.5.2 e 3.5.1, para todo $R > 0$ obtemos

$$\frac{f(v_n)}{|x|^a} \to \frac{f(u_0)}{|x|^a} \quad \text{em} \quad L^1(B_R).$$

Assim, existe $g \in L^1(B_R)$ tal que $\dfrac{|f(v_n)|}{|x|^a} \leq g$ quase sempre em B_R. Por (f_2) concluímos que

$$|F(v_n)| \leq \sup_{v_n \in [-R_0, R_0]} |F(v_n)| + M_0 |f(v_n)| \ \text{ quase sempre em } \ B_R.$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\frac{F(v_n)}{|x|^a} \to \frac{F(u_0)}{|x|^a} \ \text{ em } \ L^1(B_R)$$

para todo $R > 0$. Fazendo $R \geq 1$ temos

$$\int_{|x|>R} \frac{|F(v_n)|}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \leq \int_{|x|>R} |F(v_n)| \, \mathrm{d}x. \tag{3.40}$$

Então similar a [34, Lema 3.5], obtemos que dado $\delta > 0$ existe $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$\int_{|x|>R} \frac{|F(v_n)|}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \leq C\delta \quad \text{e} \quad \int_{|x|>R} \frac{|F(u_0)|}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \leq C\delta.$$

Desde que

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(v_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u_0)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \right| &\leq \left| \int_{|x|\leq R} \frac{F(v_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x - \int_{|x|\leq R} \frac{F(u_0)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \right| \\ &\quad + \int_{|x|>R} \frac{|F(v_n)|}{|x|^a} \, \mathrm{d}x + \int_{|x|>R} \frac{|F(u_0)|}{|x|^a} \, \mathrm{d}x,\end{aligned}$$

obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(v_n)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(u_0)}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \right| \leq C\delta.$$

Desde que δ é qualquer, o lema está provado. ∎

Agora estamos em condição de provar a seguinte proposição.

Proposição 3.6.1. *Se $\delta_2 > 0$ é suficientemente pequeno, então as soluções de* (3.1) são distintas.

Prova: As sequências (u_n) e (v_n) são tais que

$$u_n \to u_0, \quad I(u_n) \to c_0 < 0, \quad \langle I'(u_n), u_n \rangle \to 0, \tag{3.41}$$

e

$$v_n \rightharpoonup u_M, \quad I(v_n) \to c_M > 0, \quad \langle I'(v_n), v_n \rangle \to 0. \tag{3.42}$$

Agora, suponhamos por contradição que $u_0 = u_M$. Desde que também temos que $v_n \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, a menos de subsequência, $\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2} \geq \|u_0\|_{1,2} > 0$. Assim,

$$w_n \doteq \frac{v_n}{\|v_n\|_{1,2}} \quad \text{e} \quad w_0 \doteq \frac{u_0}{\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2}},$$

implicam que $\|w_n\|_{1,2} = 1$ e $w_n \rightharpoonup w_0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Agora, consideraremos duas possibilidades:
(i) $\|w_0\|_{1,2} = 1$ e (ii) $\|w_0\|_{1,2} < 1$.

Se (i) ocorre, temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,2} = \|u_0\|_{1,2}$, assim $v_n \to u_0$ fortemente em $H^1(\mathbb{R}^2)$. Pela proposição 1.2.1, existe $g \in H^1(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$|v_n| \leq g \ \text{ quase sempre em } \ \mathbb{R}^2.$$

Esta estimativa junto com (3.26) implica que

$$\frac{|f(v_n)v_n|}{|x|^a} \leq c_1 \frac{|g|^2}{|x|^a} + c_2 \frac{|g|(e^{\alpha g^2} - 1)}{|x|^a} \ \text{ quase sempre em } \ \mathbb{R}^2,$$

para cada $\alpha > \alpha_0$. Pela observação 3.2.1, a função

$$c_1 \frac{|g|^2}{|x|^a} + c_2 \frac{|g|(e^{\alpha g^2} - 1)}{|x|^a} \in L^1(\mathbb{R}^2)$$

e usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(v_n)v_n}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)u_0}{|x|^a} \, \mathrm{d}x.$$

Similarmente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_0)u_0}{|x|^a} \, \mathrm{d}x,$$

pois $u_n \to u_0$ fortemente em E. Desde que

$$\langle I'(u_n), u_n \rangle = \|u_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(u_n)u_n}{|x|^a} \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} h u_n \, \mathrm{d}x \to 0$$

e

$$\langle I'(v_n), v_n \rangle = \|v_n\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(v_n)v_n}{|x|^a} \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} h v_n \, \mathrm{d}x \to 0,$$

concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n\|^2 = \lim_{n\to\infty}\|u_n\|^2 = \|u_0\|^2.$$

Logo, $v_n \to u_0$ fortemente em E e consequentemente $I(v_n) \to I(u_0) = c_0$. Isto é uma contradição com (3.41) - (3.42).
Agora, suponhamos que (ii) ocorre. Afirmamos que existe $\delta > 0$ tal que

$$q\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2 \leq (2-a)2\pi\frac{1}{1-\|w_0\|_{1,2}^2} - \delta \tag{3.43}$$

para n grande. De fato, pela observação 3.6.1, temos

$$\alpha_0 < \frac{(2-a)\pi}{c_M - I(u_0)}.$$

Assim, podemos escolher $q > 1$ mas suficientemente próximo de 1 e $\delta > 0$ tais que

$$q\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2 \leq \frac{(2-a)\pi}{c_M - I(u_0)}\|v_n\|_{1,2}^2 - \delta.$$

Desde que $v_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em E, pelo Lema 3.6.6 e pela imersão compacta (3.8), a menos de subsequência, concluímos que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\|v_n\|_{1,2}^2 = \\
&c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]\mathrm{d}x + o_n(1).
\end{aligned} \tag{3.44}$$

Assim, para n suficientemente grande, obtemos

$$\begin{aligned}
&q\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2 \\
&\leq (2-a)2\pi\frac{c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]\mathrm{d}x + o_n(1)}{c_M - I(u_0)} - \delta.
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
&\left\{c_M - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]\mathrm{d}x\right\}(1-\|w_0\|_{1,2}^2) \\
&= c_M - c_M\|w_0\|_{1,2}^2 - I(u_0) + \frac{1}{2}\|u_0\|_{1,2}^2 + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)u_0^2\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2\mathrm{d}x \\
&\quad - \left\{-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2} V(x)v_n^2\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a} + hu_0 + \frac{1}{2}u_0^2\right]\mathrm{d}x\right\}\|w_0\|_{1,2}^2 \\
&\leq c_M - I(u_0),
\end{aligned}$$

onde temos usado que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a}+hu_0+\frac{1}{2}u_0^2\right]\mathrm{d}x=-I(u_0)+\frac{1}{2}\|u_0\|_{1,2}^2+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u_0^2\,\mathrm{d}x,$$
$$\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u_0^2\mathrm{d}x\le\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}V(x)v_n^2\mathrm{d}x,$$

Assim

$$\left\{c_M-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^2}V(x)v_n^2\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}\left[\frac{F(u_0)}{|x|^a}+hu_0+\frac{1}{2}u_0^2\right]\mathrm{d}x\right\}(1-\|w_0\|_{1,2}^2)$$
$$\le c_M-I(u_0).$$

Esta estimativa junto com (3.45) implica (3.43) para n grande.

Agora, tomando $p=(q+\varepsilon)\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2$, segue por (3.43) e pelo Teorema 3.2.2 que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\frac{(e^{(q+\varepsilon)\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2|w_n|^2}-1)}{|x|^{a(q+\varepsilon)}}\mathrm{d}x\le C,\tag{3.46}$$

para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno. Usando (3.26), a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, obtemos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(v_n)(v_n-u_0)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right|\le b_1\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|v_n|^2}{|x|^a}\mathrm{d}x\right)^{1/2}\cdot\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{|v_n-u_0|^2}{|x|^a}\mathrm{d}x\right)^{1/2}$$
$$+b_2\|v_n-u_0\|_{q'}\left[\int_{\mathbb{R}^2}\left(\frac{e^{\alpha_0\|v_n\|_{1,2}^2w_n^2}-1}{|x|^a}\right)^q\mathrm{d}x\right]^{1/q},$$

onde $q'=q/(q-1)$. Agora, pela desigualdade de Hölder para algum $1<\tau<\infty$, Lema 3.2.1, estimativa (3.46) e a imersão compacta (3.8), obtemos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\frac{f(v_n)(v_n-u_0)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x\right|\le C_1(C_2\|v_n-u_0\|_{2\tau}+\|v_n-u_0\|_2)^{1/2}+C_3\|v_n-u_0\|_{q'}\to 0$$

quando $n\to\infty$. Esta convergência junto com o fato que $I'(v_n)(v_n-u_0)\to 0$ mostra que

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla v_n(\nabla v_n-\nabla v_0)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)v_n(v_n-v_0)\,\mathrm{d}x\to 0.$$

Desde que $v_n\rightharpoonup u_0$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2}\nabla u_0(\nabla v_n-\nabla v_0)\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^2}V(x)u_0(v_n-v_0)\,\mathrm{d}x\to 0.$$

Consequentemente, fazendo a diferença destas duas últimas estimativas obtemos que $v_n\to u_0$ em E. Assim $I(v_n)\to I(u_0)=c_0$, o que contradiz (3.41) - (3.42). Portanto, $u_0\neq u_M$. ■

As provas dos Teoremas 3.1.3 e 3.1.4 segue diretamente da Proposição 3.6.1.

3.6.3 Provas dos Teoremas 3.1.2 e 3.1.5:

Para provas dos Teoremas 3.1.2 e 3.1.5 no caso $h(x) \geq 0$, redefinimos $f(s) = 0$ para $s < 0$. Assim, no caso subcrítco (f_1) vale para $s \geq s_1$ e no caso crítico (f_2) vale para $s \geq R_0$. Notemos que as condições (f_1) e (f_2) foram requeridas para ajudar na verificação de algumas propriedades das sequências de Palais-Smale no Lema 3.4.3. Notemos também que os Lemas 3.5.1 e 3.6.6 são válidos para esta não-linearidade modificada.

A prova é consequência do seguinte resultado.

Corolário 3.6.3. *Se $h(x) \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, então as soluções fracas de* (3.1) são não-negativas.

Prova: Seja $u \in E$ um solução fraca de (3.1). Fazendo $u^+ = \max\{u,0\}$, $u^- = \max\{-u,0\}$ e tomando $v = u^-$ em (3.5), obtemos que

$$\|u^-\|^2 = -\int_{\mathbb{R}^2} hu^- \mathrm{d}x \leq 0,$$

pois $f(u(x))u^-(x) = 0$ em $\mathbb{R}^2$. Consequentemente, $u = u^+ \geq 0$. ∎

Agora, no caso $h(x) \leq 0$, em ordem para provar os Teoremas 3.1.2 e 3.1.5, definimos a seguinte função:

$$\widetilde{f}(s) = \begin{cases} -f(-s), & \text{se} \quad s < 0 \\ f(s), & \text{se} \quad s \geq 0. \end{cases}$$

Neste caso, a prova dos Teoremas 3.1.2 e 3.1.5 são dados no seguinte corolário:

Corolário 3.6.4. *Suponhamos que (f_4^-) vale e $h(x) \leq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$. Então existe pelo menos duas soluções fracas não-positivas de* (3.1).

Prova: Consideremos o funcional definido por

$$\widetilde{I}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widetilde{F}(u)}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} (-h)u\,\mathrm{d}x,$$

onde $\widetilde{F}$ é a primitiva de $\widetilde{f}$. Notemos que $\widetilde{f}$ satisfaz as mesmas condições de f. Desde que $-h(x) \geq 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^2$, pelo corolário 3.6.3, $\widetilde{I}(u)$ tem dois pontos críticos não-negativos. Seja $\widetilde{u}$ um destes pontos críticos, isto é,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\nabla\widetilde{u}\nabla v + V(x)\widetilde{u}v)\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widetilde{f}(\widetilde{u})v}{|x|^a}\,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2} hv\,\mathrm{d}x = 0, \ \forall\, v \in E.$$

Relembrando a definição de $\widetilde{f}$, temos que $\widetilde{f}(\widetilde{u}) = -f(-\widetilde{u})$ e substituindo v por $-v$ nesta última equação, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2} [\nabla(-\widetilde{u})\nabla v + V(x)(-\widetilde{u})v]\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(-\widetilde{u})v}{|x|^a}\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} hv\,\mathrm{d}x = 0, \ \forall\, v \in E.$$

o que implica que $-\widetilde{u}$ é uma solução fraca não-positiva de (3.1). ∎

CAPÍTULO 4

Sobre um desigualdade ótima do tipo Trudinger-Moser em $\mathbb{R}^2$

4.1 Introdução

Neste capítulo provaremos uma nova desigualdade do tipo Trudinger-Moser em todo o espaço $\mathbb{R}^2$. Provaremos também a existência de uma função extremal para esta desigualdade.

Para um melhor esclarecimento desta nova desigualdade relembremos alguns fatos sobre a desigualdade de Trudinger-Moser: Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^N$ e $W_0^{1,N}(\Omega)$ o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ com relação a norma

$$\|u\|_{1,N} = \left(\int_\Omega (|\nabla u|^N + |u|^N)\,\mathrm{d}x\right)^{1/N}.$$

Usualmente sobre um domínio limitado usamos a norma de Dirichlet

$$\|\nabla u\|_N = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N\,\mathrm{d}x\right)^{1/N},$$

no lugar da norma $\|\cdot\|_{1,N}$. Neste caso, temos a famosa desigualdade de Trundiger-Moser (cf. [53, 66]) a qual estabelece que

$$e^{\beta|u|^{N/(N-1)}} \in L^1(\Omega), \quad \text{para todo} \quad u \in W_0^{1,N}(\Omega) \quad \text{e} \quad \beta > 0. \tag{4.1}$$

Além disso, existe uma constante $C(N) > 0$ tal que

$$\sup_{\{u\in W_0^{1,N}(\Omega):\ \|\nabla u\|_N \le 1\}} \int_\Omega e^{\beta|u|^{N/(N-1)}}\,\mathrm{d}x \le C(N)|\Omega| \quad \text{para} \quad \beta \le \alpha_N, \tag{4.2}$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{1/(N-1)}$ e ω_{N-1} é a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^N$.

Esta desigualdade é ótima, no sentido que para qualquer $\beta > \alpha_N$ o correspondente supremo é $+\infty$. Contudo, Lions [50] provou que se (u_k) é uma sequência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $\|\nabla u_k\|_N = 1$ e $u_k \rightharpoonup u_0$ fracamente em $W_0^{1,N}(\Omega)$, então para todo p satisfazendo

$$0 < p < \frac{1}{(1 - \|\nabla u_0\|_N^N)^{1/(N-1)}},$$

vale

$$\sup_k \int_\Omega e^{p\alpha_N |u_k|^{N/(N-1)}}\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{4.3}$$

Observemos que este resultado fornece mais informação que (4.2) quando $u_k \rightharpoonup u_0$ fracamente em $W_0^{1,N}(\Omega)$ com $u_0 \not\equiv 0$. Motivado por este resultado de Lions, Adimurthi-Druet [4] investigaram possíveis extensões de (4.2) para subdomínios limitados de $\mathbb{R}^2$, dando uma informação extra mesmo no caso em que $u_k \rightharpoonup 0$ fracamente em $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$. Mais precisamente, eles provaram que se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ é um domínio limitado e

$$\lambda_1(\Omega) = \inf_{u\in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_2^2}{\|u\|_2^2},$$

então

$$C_\alpha(\Omega) = \sup_{\{u\in H_0^1(\Omega),\ \|\nabla u\|_2=1\}} \int_\Omega e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}\,\mathrm{d}x \tag{4.4}$$

satisfaz

$$C_\alpha(\Omega) = \begin{cases} <\infty, & \text{se} \quad 0 \le \alpha < \lambda_1(\Omega); \\ +\infty, & \text{se} \quad \alpha \ge \lambda_1(\Omega). \end{cases}$$

Notemos que se $\alpha = 0$ em (4.4), temos a desigualdade de Trudinger-Moser dada em (4.2) para $N = 2$.

Outro fato importante é que o supremo em (4.2) torna-se infinito quando o domínio Ω não tem medida finita, e assim a desigualdade de Trudinger-Moser não vale para domínios não-limitados. Entretanto, resultados para domínios não-limitados foram estabelecidos, podemos citar o trabalho de Cao [17] para $N = 2$. Mais precisamente, ele provou que para todo $\alpha > 0$ e $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$

$$(e^{\alpha u^2} - 1) \in H^1(\mathbb{R}^2).$$

Além disso, se $\|\nabla u\|_2 \le 1$, $\|u\|_2 \le M < +\infty$ e $\alpha < 4\pi$, então existe $C = C(M,\alpha)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha u^2} - 1)\,\mathrm{d}x \le C(M,\alpha). \tag{4.5}$$

Este resultado foi estendido para $N \ge 2$ por J. M. do Ó [32] e posteriormente melhorado por Adachi-Tanaka [2] no sentido que $C(M,\alpha) = C(\alpha)M^N$. Mais recentemente Ruf [59] melhorou este resultado de Cao [17] no sentido que se a norma de Dirichlet é substituída pela norma padrão de Sobolev, então para todo $u \in H_0^1(\Omega)$ existe uma constante d independente do domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ tal que

$$\sup_{\{u\in H_0^1(\Omega):\|u\|_{1,2}\le 1\}} \int_\Omega (e^{\beta u^2} - 1)\,\mathrm{d}x \le d \quad \text{para} \quad \beta \le 4\pi. \tag{4.6}$$

Temos também que esta desigualdade é ótima, no sentido em que para qualquer $\beta > 4\pi$ o correspondente supremo é $+\infty$. Entretanto, J. M. do Ó-Medeiros-Severo [34] estenderam o resultado de Lions para domínios não-limitados em $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, eles provaram que se $(u_k) \subset H^1(\mathbb{R}^2)$ com $\|u_k\|_{1,2} = 1$ e tal que $u_k \rightharpoonup u_0$ em $H^1(\mathbb{R}^2)$, então para todo p satisfazendo

$$0 < p < \frac{1}{(1 - \|u_0\|_{1,2}^2)},$$

temos

$$\sup_k \int_{\mathbb{R}^2} (e^{4\pi p u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x < \infty. \tag{4.7}$$

Então, como no caso de um domínio limitado este resultado fornece mais informação que a desigualdade (4.6) quando $u_k \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H^1(\mathbb{R}^2)$ com $u_0 \not\equiv 0$. Assim, motivado pelo artigo de Adimurthi-Druet [4] investigamos neste capítulo possíveis extensões de (4.6) em todo $\mathbb{R}^2$. Mais precisamente, consideramos o seguinte subespaço $E \subset H^1(\mathbb{R}^2)$

$$E = \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^2) : \int_{\mathbb{R}^2} (1 + |x|^q)|u|^2\, \mathrm{d}x < \infty \quad \text{com} \quad q > 0 \right\},$$

o qual é um espaço de Hilbert com o produto interno

$$\langle u, v \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u \nabla v + (1 + |x|^q) uv)\, \mathrm{d}x, \quad u, v \in E, \tag{4.8}$$

e a norma correspondente $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$. É bem conhecido (cf. [23], [58]) que para todo $2 \le s < \infty$

$$E \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2) \tag{4.9}$$

com imersões contínuas e $E \hookrightarrow L^s(\mathbb{R}^2)$ com imersão compacta. Além disso, é claro que

$$\lambda_1 \doteq \inf_{u \in E \setminus \{0\}} \frac{\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u|^2 + (1 + |x|^q)|u|^2)\, \mathrm{d}x}{\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2\, \mathrm{d}x} \ge 1. \tag{4.10}$$

O primeiro resultado deste capítulo é o seguinte

Teorema 4.1.1. *Seja*

$$\ell(\alpha) = \sup_{\{u \in E,\ \|u\| = 1\}} \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi(1 + \alpha \|u\|_2^2) u^2} - 1 \right] \mathrm{d}x. \tag{4.11}$$

Então

(1) Para todo $\alpha \in [0, \lambda_1)$ temos que $\ell(\alpha) < \infty$;

(2) Para todo $\alpha \in [\lambda_1, +\infty)$ temos que $\ell(\alpha) = +\infty$.

Outra questão muito importante sobre a desigualdade de Trudinger-Moser é a existência e não-existência de uma função extremal, isto é, uma função que atinge o supremo da desigualdade de Trudinger-Moser. O primeiro resultado nesta direção foi devido a Carleson-Chang [19], eles provaram que se Ω é uma bola em $\mathbb{R}^N$ com $N \ge 2$, então existe uma função que atinge a desigualdade de Trudinger-Moser. Então Flucher [36] estendeu este resultado quando Ω é um domínio qualquer limitado em $\mathbb{R}^2$. Lin [49] generalizou este resultado de existência quando Ω é um domínio qualquer limitado em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$. Recentemente, Li [46, 47], obteve resultados de existência de uma função extremal para certas desigualdades do tipo Trudinger-Moser sobre Variedades compactas com ou sem bordo. Para desigualdades do tipo proposto por Adimurthi-Druet, em domínios limitados, os primeiros resultados de existência de uma função extremal, apareceram nos trabalhos de Lu-Yang [52] e Yang [69].

Assim, motivados pelos trabalhos citados acima, investigamos a existência de uma função extremal para a desigualdade do tipo Trudinger-Moser proposta no Teorema 4.1.1. Mais precisamente, provaremos o seguinte resultado

Teorema 4.1.2. *Para qualquer $\alpha \in [0, \lambda_1)$, existe $u \in E$ tal que $\|u\| = 1$ e*

$$\ell(\alpha) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 \right] \, \mathrm{d}x.$$

Os resultados deste capítulo complementam e melhoram os resultados principais em [2, 17, 32, 59], no sentido que mesmo quando $\alpha = 0$ em $\ell(\alpha)$, então sobre o espaço E chegamos ao expoente 4π, o que não era válido nos resultados contidos em [2, 17, 32]. Para $\alpha \in (0, \lambda_1)$ melhoramos o resultado contido em [59]. Além disso, provamos a existência de uma função extremal para $\ell(\alpha)$.

A prova do ponto (1) do Teorema 4.1.1 é baseada na análise de blow-up de uma sequência de soluções de um determinado problema elíptico com crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$, esta análise será o conteúdo de várias seções deste capítulo. A prova do Teorema 4.1.2 é baseada em dois fatos: primeiro um limite superior para $\ell(\alpha)$ pode ser encontrado utilizando um resultado clássico devido a Carleson-Chang [19] quando é assumido que o blow-up ocorre, segundo é possível construir uma sequência de funções $v_k \in \{u \in E : \|u\| = 1\}$ que supera a cota encontrada inicialmente, assim levando a uma contradição. Esta contradição implica que o blow-up não ocorre e o Teorema 4.1.2 então segue por estimativas elípticas. A prova do ponto (2) do Teorema 4.1.1 é baseado num cálculo de funções testes, o qual será apresentado na Seção 4.6 no final deste capítulo. O método de análise de blow-up é bem conhecido e foi utilizado nos trabalhos [46, 47, 52, 69]. Entretanto, como nossa desigualdade é sobre o $\mathbb{R}^2$ inteiro, encontramos novas dificuldades, por exemplo a perda de compacidade.

4.2 Maximizando funcionais subcríticos

Nesta seção provaremos a existência de uma sequência de funções radiais (u_k) em E maximizante para $\ell(\alpha)$ quando $\alpha \in [0, \lambda_1)$. Para isto, primeiro temos que estabelecer uma versão da desigualdade (4.7) para o espaço E. Este resultado seguirá adaptando os argumentos utilizados por J. M. do Ó-Medeiros-Severo em [34].

Lema 4.2.1. *Seja (w_n) uma sequência no espaço E com $\|w_n\| = 1$ e tal que $w_n \rightharpoonup w_0$ fracamente em E. Então, para todo $0 < p < 4\pi(1 - \|w_0\|^2)^{-1}$ temos*

$$\sup_n \int_{\mathbb{R}^2} (e^{pw_n^2} - 1) \, \mathrm{d}x < \infty.$$

Prova: Desde que $w_n \rightharpoonup w_0$ fracamente em E e $\|w_n\| = 1$, concluímos que

$$\|w_n - w_0\|^2 = 1 - 2\langle w_n, w_0\rangle + \|w_0\|^2 \to 1 - \|w_0\|^2 < \frac{4\pi}{p}.$$

Assim, para n grande temos $p\|w_n - w_0\|^2 < \alpha < 4\pi$ para algum $\alpha > 0$. Escolhendo $q > 1$ suficientemente próximo de 1 e $\varepsilon > 0$ tais que $q(1+\varepsilon^2)p\|w_n - w_0\|^2 < \alpha$, por (4.5), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} - 1\right] \, \mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{qp(1+\varepsilon^2)\|w_n - w_0\|^2 \left(\frac{w_n - w_0}{\|w_n - w_0\|}\right)^2} - 1\right] \mathrm{d}x \\ &\le \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\alpha\left(\frac{|w_n - w_0|}{\|w_n - w_0\|}\right)^2} - 1\right] \mathrm{d}x \le C.\end{aligned}$$

Além disso, desde que

$$pw_n^2 \le p(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2 + p(1 + \frac{1}{\varepsilon^2})w_0^2,$$

segue que

$$\begin{aligned} e^{pw_n^2} - 1 &\le e^{p(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} e^{p(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1 \\ &\le \frac{1}{q}\left(e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} - 1\right) + \frac{1}{r}\left(e^{rp(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1\right), \end{aligned}$$

onde nesta última desigualdade usamos que para todo $a, b > 0$ e $q^{-1} + r^{-1} = 1$ vale

$$ab - 1 \le \frac{1}{q}(a^q - 1) + \frac{1}{r}(b^r - 1).$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} (e^{pw_n^2} - 1)\mathrm{d}x &\le \frac{1}{q}\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{qp(1+\varepsilon^2)(w_n - w_0)^2} - 1\right] \mathrm{d}x + \frac{1}{r}\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{rp(1+1/\varepsilon^2)w_0^2} - 1\right] \mathrm{d}x \\ &\le C,\end{aligned}$$

para n suficientemente grande. Assim o resultado está provado. ■

O próximo resultado foi provado em [34], e será muito útil em alguns dos nosso argumentos.

Lema 4.2.2. *Seja $\beta > 0$ e $r > 1$. Então, para cada $q > r$ existe uma constante positiva $C = C(q)$ tal que para todo $t \in \mathbb{R}$*

$$(e^{\beta t^2} - 1)^r \le C(e^{q\beta t^2} - 1).$$

Seja Ω um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$ e

$$\lambda_1(\Omega) := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega (|\nabla u|^2 + (1 + |x|^q)u^2) \, \mathrm{d}x}{\int_\Omega u^2 \, \mathrm{d}x}.$$

Então, temos o seguinte resultado

Teorema 4.2.1. *Seja*

$$L_{\alpha,\sigma}(\Omega) = \sup_{\{u\in H_0^1(\Omega)\,:\,\|u\|=1\}} \int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1\right]\,\mathrm{d}x. \tag{4.12}$$

Se $0 \le \alpha < \lambda_1(\Omega)$ e $\sigma < 4\pi$, então temos que $L_{\alpha,\sigma}(\Omega) < \infty$. Além disso, existe uma função positiva $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$, para algum $\theta \in (0,1)$, tal que $\|u\| = 1$ e

$$L_{\alpha,\sigma}(\Omega) = \int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1\right]\,\mathrm{d}x.$$

Prova: Seja $(u_j) \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $\|u_j\| = 1$ e

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1\right]\,\mathrm{d}x = L_{\alpha,\sigma}(\Omega).$$

Desde que (u_j) é uma sequência limitada em $H_0^1(\Omega)$, a menos de subsequência, temos

$u_j \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$;
$u_j(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω;
$u_j \to u$ fortemente em $L^2(\Omega)$.

Assim, $U_j(x) = \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1\right] \to U(x) = \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1\right]$ quase sempre em Ω.

Afirmação 4.2.1. *u é uma função extremal para $L_{\alpha,\sigma}(\Omega)$.*

Para provarmos esta afirmação é suficiente verificarmos que $U_j \to U$ fortemente em $L^1(\Omega)$. Se $\|u\| = 1$ a afirmação é imediata, pois desta forma temos que $u_k \to u$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$, veja detalhes em [34]. Então, vamos considerar o caso em $\|u\| < 1$. Notemos que

$$1+\alpha\|u_j\|_2^2 \to 1+\alpha\|u\|_2^2.$$

Desde que $\alpha < \lambda_1(\Omega)$, usando a definição $\lambda_1(\Omega)$ e que $1+s \le \dfrac{1}{1-s}$ para $0 \le s < 1$, temos

$$1+\alpha\|u\|_2^2 < 1+\lambda_1(\Omega)\|u\|_2^2 \le 1+\|u\|^2 \le \frac{1}{1-\|u\|^2}.$$

Assim,

$$\lim_{j\to+\infty} \sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2) < \frac{4\pi}{1-\|u\|^2}.$$

Agora, escolhendo $q > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que

$$\lim_{j\to+\infty} \sigma q(1+\alpha\|u_j\|_2^2) < \frac{4\pi}{1-\|u\|^2}$$

e $q > s > 1$ para algum s a ser escolhido posteriormente, obtemos pelos Lemas 4.2.1 e 4.2.2 que

$$\lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1\right]^s \mathrm{d}x \le C \lim_{j\to+\infty} \int_\Omega \left[e^{q\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1\right]\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{4.13}$$

Então, como (u_j) é limitada em $H_0^1(\Omega)$, usando a imersão de Sobolev e (4.13), existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_\Omega |u_j| \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1 \right] \mathrm{d}x \leq C_1, \tag{4.14}$$

pois, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_\Omega |u_j| \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1 \right] \mathrm{d}x \leq \left(\int_\Omega |u_j|^r \, \mathrm{d}x \right)^{1/r} \left(\int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1 \right]^s \mathrm{d}x \right)^{1/s},$$

onde $1/r + 1/s = 1$ e $s > 1$ suficientemente próximo de 1 tal que $q > s$. Agora, desde que $[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1] \in L^1(\Omega)$ segue que dado $\varepsilon > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\int_A \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 \right] \mathrm{d}x \leq \varepsilon \quad \text{se} \quad |A| \leq \delta \tag{4.15}$$

para todo subconjunto mensurável A de Ω, onde $|A|$ denota a medida de Lebesgue de A. Além disso, usando a imersão de Sobolev, temos que $u \in L^1(\Omega)$. Assim, podemos determinar $M_1 > 0$ tal que

$$|\{x \in \Omega : |u(x)| \geq M_1\}| \leq \delta. \tag{4.16}$$

Tomando $M = \max\{M_1, C_1/\varepsilon\}$ podemos escrever

$$\left| \int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1 \right] \mathrm{d}x - \int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 \right] \mathrm{d}x \right| = I_1 + I_2 + I_3$$

onde

$$I_1 = \int_{\{x\in\Omega:|u_j(x)|\geq M\}} \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1 \right] \mathrm{d}x,$$

$$I_2 = \int_{\{x\in\Omega:|u_j(x)|<M\}} \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1 \right] \mathrm{d}x - \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|<M\}} \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 \right] \mathrm{d}x$$

e

$$I_3 = \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\geq M\}} \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 \right] \mathrm{d}x.$$

Agora vamos estimar I_1, I_2 e I_3. Por (4.14), temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\{x\in\Omega:|u_j(x)|\geq M\}} \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1 \right] \mathrm{d}x \\ &= \int_{\{x\in\Omega:|u_j(x)|\geq M\}} \frac{u_j \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2} - 1 \right]}{|u_j|} \mathrm{d}x \leq \frac{C_1}{M} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando (4.15) e (4.16), temos

$$I_3 = \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|\geq M\}} \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 \right] \mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Afirmamos que quando $j \to \infty$

$$I_2 = \int_{\{x\in\Omega:|u_j(x)|<M\}} \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2}-1\right] \mathrm{d}x - \int_{\{x\in\Omega:|u(x)|<M\}} \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1\right] \mathrm{d}x \to 0.$$

Esta afirmação segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue desde que a sequência de funções

$$g_j(x) = \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u_j\|_2^2)u_j^2}-1\right]\chi_{\{x\in\Omega:|u_j(x)|<M\}} - \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1\right]\chi_{\{x\in\Omega:|u(x)|<M\}}$$

tende para 0 quase sempre em Ω. Além disso, esta função é dominada por uma função em $L^1(\Omega)$, mais precisamente

$$|g_j(x)| \le \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1\right] \in L^1(\Omega) \quad \text{se} \quad |u_j(x)| \ge M$$

e

$$|g_j(x)| \le C + \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1\right] \quad \text{se} \quad |u_j(x)| < M$$

onde

$$C = \sup\{(e^{4\pi(1+\alpha d)t^2}-1) : |t| \le M\},$$

onde $d > 0$.

Portanto, segue da Afirmação 4.2.1 que

$$\int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1\right] \mathrm{d}x = L_{\alpha,\sigma}(\Omega). \tag{4.17}$$

Notemos que podemos tomar $u \ge 0$, pois (4.17) também vale para $|u|$. Além disso, usando regularidade elíptica temos que $u \in C^{1,\theta}(\overline{\Omega})$ (veja detalhes deste argumento na Seção 4.3).

Por outro lado, temos

$$\|u\| \le \liminf_{j\to+\infty} \|u_j\| = 1$$

e desde que

$$\int_\Omega \left[e^{\sigma(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1\right] \mathrm{d}x < \int_\Omega \left[e^{\sigma\left(1+\alpha\frac{\|u\|_2^2}{\|u\|^2}\right)\frac{u^2}{\|u\|^2}}-1\right] \mathrm{d}x$$

se $\|u\| < 1$, então $\|u\| = 1$.

■

Para simplificar a notação: Seja $\sigma_k = 4\pi - \delta_k$ com $\delta_k \searrow 0$, $R_k \nearrow +\infty$ quando $k \to +\infty$, B_{R_k} a bola em $\mathbb{R}^2$ centrada na origem com raio R_k e

$$S(R_k) = \left\{ v \in H_0^1(B_{R_k}) : \int_{B_{R_k}} \left(|\nabla v|^2 + (1+|x|^q)|v|^2\right) \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Notemos que $S(R_k) \subset E$, pois toda função $v \in S(R_k)$ pode ser estendida para zero fora de B_{R_k}, obtendo uma função em $H^1(\mathbb{R}^2)$.

Corolário 4.2.1. *Para qualquer* $\alpha \in [0,\lambda_1)$ *e para cada* $k \in \mathbb{N}$, *existe uma função positiva* $u_k \in S(R_k)$ *tal que* $u_k \in C^{1,\theta}(\overline{B_{R_k}})$ *para algum* $\theta \in (0,1)$ *e*

$$\int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2} - 1\right] \,\mathrm{d}x = L_{\alpha,\sigma_k}(B_{R_k}).$$

Além disso, podemos assumir que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2} - 1\right] \,\mathrm{d}x = \int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2} - 1\right] \,\mathrm{d}x$$

é crescente.

Prova: Desde que $\lambda_1(B_{R_k}) \geq \lambda_1$, a prova segue do Teorema 4.2.1 escolhendo $\Omega = B_{R_k}$ e $\sigma_k = 4\pi - \delta_k$.

■

Agora, provaremos o principal resultado desta seção.

Lema 4.2.3. *Seja* (u_k) *como acima, então para qualquer* $0 \leq \alpha < \lambda_1$, *temos*

a) (u_k) *é uma sequência maximizante para* $\ell(\alpha)$, *isto é,*

$$\ell(\alpha) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{(4\pi-\delta_k)(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2} - 1) \,\mathrm{d}x.$$

b) u_k *pode ser escolhida radialmente simétrica e radialmente decrescente, isto é,* $u_k(|x|) = u_k(|x'|)$ *se* $|x| = |x'|$ *e* $u_k(|x|) \geq u_k(|x'|)$ *se* $|x| \leq |x'|$.

Prova: a) Seja $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2,[0,1])$ tal que

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in B_1 \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}^2 \setminus B_2. \end{cases}$$

Então dada qualquer $\varphi \in E$ com $\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla\varphi|^2 + (1+|x|^q)|\varphi|^2)\mathrm{d}x = 1$, temos

$$\tau^2(L) := \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla(\eta(x/L)\varphi)|^2 + (1+|x|^q)\,|\eta(x/L)\varphi|^2\right) \mathrm{d}x \to 1, \text{ quando } L \to +\infty.$$

De fato, primeiro considere $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, então existe $R > 0$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B_R$, e consequentemente, quando $L > R$, obtemos

$$\begin{aligned} \tau^2(L) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(|\nabla(\eta(x/L)\varphi)|^2 + (1+|x|^q)\,|\eta(x/L)\varphi|^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{B_R} \left(|\nabla(\eta(x/L)\varphi)|^2 + (1+|x|^q)\,|\eta(x/L)\varphi|^2\right) \mathrm{d}x \qquad (4.18) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla\varphi|^2 + (1+|x|^q)|\varphi|^2)\mathrm{d}x = 1. \end{aligned}$$

Para $\varphi \in E$ a afirmação segue por um argumento de densidade. Então para qualquer L fixo e $R_k > 2L$, como $\|\eta(\frac{x}{L})\frac{\varphi}{\tau(L)}\| = 1$ e u_k atinge a constante $L_{\alpha,\sigma_k}(B_{R_k})$ definida em (4.12), obtemos as seguintes estimativas:

$$\int_{B_L}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|\frac{\varphi}{\tau(L)}\|_2^2)|\frac{\varphi}{\tau(L)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x \le \int_{B_{2L}}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|\eta(\frac{x}{L})\frac{\varphi}{\tau(L)}\|_2^2)|\eta(\frac{x}{L})\frac{\varphi}{\tau(L)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x,$$

assim

$$\begin{aligned}\int_{B_L}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|\frac{\varphi}{\tau(L)}\|_2^2)|\frac{\varphi}{\tau(L)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x &\le \int_{B_{R_k}}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}-1)\right]\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}-1)\right]\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Pelo Lema de Fatou, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_L}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|\frac{\varphi}{\tau(L)}\|_2^2)|\frac{\varphi}{\tau(L)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x &= \int_{B_L}\liminf_{k\to+\infty}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|\frac{\varphi}{\tau(L)}\|_2^2)|\frac{\varphi}{\tau(L)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{k\to+\infty}\int_{B_L}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|\frac{\varphi}{\tau(L)}\|_2^2)|\frac{\varphi}{\tau(L)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Assim, por (4.19) temos

$$\int_{B_L}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|\frac{\varphi}{\tau(L)}\|_2^2)|\frac{\varphi}{\tau(L)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x \le \liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}-1)\right]\,\mathrm{d}x. \tag{4.20}$$

Seja $L_j \to +\infty$ quando $j \to +\infty$, então usando novamente o Lema de Fatou e a desigualdade (4.20), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|\varphi\|_2^2)|\varphi|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^2}\lim_{j\to+\infty}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|\frac{\varphi}{\tau(L_j)}\|_2^2)|\frac{\varphi}{\tau(L_j)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{j\to+\infty}\int_{B_{L_j}}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|\frac{\varphi}{\tau(L_j)}\|_2^2)|\frac{\varphi}{\tau(L_j)}|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x\\ &\le \liminf_{j\to+\infty}\left(\liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}-1)\right]\,\mathrm{d}x\right)\\ &\le \liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}-1)\right]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|\varphi\|_2^2)|\varphi|^2}-1\right]\,\mathrm{d}x \le \liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}-1\right]\,\mathrm{d}x.$$

Desde que φ é arbitrária, obtemos

$$\ell(\alpha) \le \liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}-1\right]\,\mathrm{d}x.$$

Por outro lado,

$$\limsup_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}-1\right]\,\mathrm{d}x \le \ell(\alpha).$$

Logo,

$$\ell(\alpha) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2} - 1 \right] \,\mathrm{d}x.$$

b) Aqui usaremos simetrização de Schwarz, lembremos algumas das suas propriedades básicas (cf. [43]). Seja $1 \le p \le +\infty$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^2)$ tal que $u \ge 0$. Então existe uma única função não-negativa $u^* \in L^p(\mathbb{R}^2)$, chamada de simetrização de Schwarz de u, tal que u^* depende somente de $|x|$, u^* é uma função radialmente decrescente e para todo $\lambda > 0$

$$|\{x : u^*(x) > \lambda\}| = |\{x : u(x) > \lambda\}|$$

e existe $R_\lambda > 0$ tal que $\{x : u^*(x) > \lambda\}$ é uma bola B_{R_λ} de raio R_λ centrada na origem. Além disso, dada $G : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ uma função contínua e crescente tal que $G(0) = 0$. Então, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(u^*(x)) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2} G(u(x)) \,\mathrm{d}x.$$

Além disso, se $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ então

i) $u^* \in H^1(\mathbb{R}^2)$

ii) $\|\nabla u^*\|_2 \le \|\nabla u\|_2$

iii) $\|u^*\|_2 = \|u\|_2$.

Agora estamos prontos para provar b). Seja u_k^* a simetrização de Schwarz de u_k, então como o potencial $V(x) = (1+|x|^q)$ é radial e crescente, temos que

$$\tau_k^2 := \int_{B_{R_k}} (|\nabla u_k^*|^2 + (1+|x|^q)|u_k^*|^2) \,\mathrm{d}x \le \int_{B_{R_k}} (|\nabla u_k|^2 + (1+|x|^q)|u_k|^2) \,\mathrm{d}x = 1.$$

Notemos que se $\tau_k = 1$ podemos escolher u_k radial e decrescente, pois

$$\int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k^*\|_2^2)|u_k^*|^2} - 1 \right] \,\mathrm{d}x = \int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2} - 1 \right] \mathrm{d}x. \tag{4.21}$$

Para obtermos a igualdade (4.21), basta considerarmos $G(u_k(x)) = e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2(x)} - 1$ e observar que termo o $\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2) = \sigma_k(1+\alpha\|u_k^*\|_2^2)$ é constante para cada u_k. Temos que $\tau_k \le 1$, então usando (4.21), temos

$$\int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\left\|u_k^*/\tau_k\right\|_2^2)|u_k^*/\tau_k|^2} - 1 \right] \,\mathrm{d}x \ge \int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2} - 1 \right] \,\mathrm{d}x. \tag{4.22}$$

Por outro lado, $u_k^*/\tau_k \in S(R_k)$ e consequentemente, temos

$$\int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k^*/\tau_k\|_2^2)|u_k^*/\tau_k|^2} - 1 \right] \,\mathrm{d}x \le \int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2} - 1 \right] \,\mathrm{d}x. \tag{4.23}$$

Por (4.21), (4.22), (4.23) e usando novamente o crescimento da função exponencial, obtemos

$$\int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k^*/\tau_k\|_2^2)|u_k^*/\tau_k|^2} - 1 \right] \,\mathrm{d}x \quad = \quad \int_{B_{R_k}} \left[e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k^*\|_2^2)|u_k^*|^2} - 1 \right] \,\mathrm{d}x,$$

a qual implica que $\tau_k = 1$. Assim, concluímos a prova do lema.

■

4.3 Análise de blow-up

Nesta seção, usaremos a análise de blow-up para entender o comportamento da sequência maximizante u_k obtida no Lema 4.2.3. A análise de blow-up será composta por vários lemas.

Desde que $\|u_k\| = 1$, a menos de subsequência, podemos assumir que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em E. Assim, para provar os Teoremas 4.1.1 e 4.1.2, precisamos somente provar que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)|u_k|^2}-1)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2}(e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1)\,\mathrm{d}x.$$

Este é um resultado de convergência que envolve uma análise muito delicada e para isto considerando

$$c_k = u_k(0),$$

o máximo da função u_k temos duas situações a considerar: Primeiro quando (c_k) é uma sequência limitada e segundo quando (c_k) é uma sequência não-limitada.

Primeiro vamos escrever a equação de Euler-Lagrange satisfeita por u_k. Consideremos o seguinte funcional $J : E \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\sigma_k(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x.$$

Utilizando um argumento semelhante ao feito na Seção 1.2 do Capítulo 1, podemos verificar as seguintes igualdades:

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{J(u+tv)-J(u)}{t} &= \int_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{\sigma_k(1+\alpha\|u+tv\|_2^2)(u+tv)^2}\right)|_{t=0}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\sigma_k e^{\sigma_k(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left((1+\alpha\|u+tv\|_2^2)(u+tv)^2\right)|_{t=0}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^2}\sigma_k e^{\sigma_k(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}\left(2(1+\alpha\|u\|_2^2)uv+2\alpha\left(\int_{\mathbb{R}^2}uv\,\mathrm{d}x\right)u^2\right)\,\mathrm{d}x \\
&= 2\sigma_k\int_{\mathbb{R}^2}uve^{\sigma_k(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}\,\mathrm{d}x+2\sigma_k\alpha\int_{\mathbb{R}^2}u^2e^{\sigma_k(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^2}uv\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Além disso, temos que J é de classe C^1 e $F(u_k) = \|u_k\|^2 - 1$ é tal que $F'(u_k) \neq 0$. Logo, pelo Teorema dos Multiplicados de Lagrange existe μ_k tal que $\mu_k F'(u_k) = J'(u_k)$, ou seja,

$$\begin{aligned}
\mu_k\int_{B_{R_k}}(\nabla u_k\nabla v+(1+|x|^q)u_kv)\,\mathrm{d}x &= \\
2\sigma_k\int_{\mathbb{R}^2}u_kve^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}\,\mathrm{d}x &+ 2\sigma_k\alpha\int_{\mathbb{R}^2}u_k^2e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}\,\mathrm{d}x\int_{\mathbb{R}^2}u_kv\,\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

para toda $v \in E$. Tomando $v = u_k$ e usando que $\|u_k\| = 1$, obtemos

$$\mu_k = 2\sigma_k(1+2\alpha\|u_k\|_2^2)\int_{B_{R_k}}u_k^2e^{\sigma_k(1+\alpha\|u_k\|_2^2)u_k^2}\,\mathrm{d}x.$$

Logo, no sentido fraco, temos

$$\begin{cases} -\Delta u_k + (1+|x|^q)u_k = \dfrac{\beta_k}{\lambda_k} u_k e^{\alpha_k u_k^2} + \gamma_k u_k, & \text{em} \quad B_{R_k} \\ \|u_k\| = 1, \ u_k > 0 & \text{em} \quad B_{R_k} \\ \alpha_k = (4\pi - \delta_k)(1+\alpha\|u_k\|_2^2) \\ \beta_k = \dfrac{1+\alpha\|u_k\|_2^2}{1+2\alpha\|u_k\|_2^2} \\ \gamma_k = \dfrac{\alpha}{1+2\alpha\|u_k\|_2^2} \\ \lambda_k = \displaystyle\int_{B_{R_k}} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x, \end{cases} \tag{4.24}$$

onde δ_k é uma sequência de termos positivos que converge para zero.

Agora vamos estudar este problema. Primeiro temos o seguinte lema:

Lema 4.3.1. $\inf_k \lambda_k > 0$.

Prova: Notemos que $\lambda_k \geq 0$. Agora suponhamos por contradição que $\lambda_k \to 0$. Assim,

$$\ell(\alpha) = \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x \leq 4\pi(1+\alpha) \lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x = 0, \tag{4.25}$$

onde na última estimativa usamos a seguinte desigualdade $(e^t - 1) \leq te^t$ para $t \geq 0$ e o fato que $\|u_k\| = 1$. Note que por (4.25) obtemos que $\ell(\alpha) = 0$, o que é impossível.

■

Agora vamos estudar o comportamento da sequência (c_k).

CASO 1: $\sup_k c_k < \infty$.

Esta é a situação mais simples, para concluímos os Teoremas 4.1.1 e 4.1.2 basta provarmos o seguinte lema.

Lema 4.3.2. *Se (c_k) é limitada, então $\ell(\alpha)$ é atingido.*

Prova: Seja

$$I_k = \left| \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{\alpha_k u_k^2} - 1 - \alpha_k u_k^2 \right] \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 - 4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2 \right] \mathrm{d}x \right|.$$

Então para $L > 0$, o qual será escolhido depois, temos

$$\begin{aligned} I_k \leq\ & \left| \int_{B_L} \left[e^{\alpha_k u_k^2} - 1 - \alpha_k u_k^2 \right] \mathrm{d}x - \int_{B_L} \left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 - 4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2 \right] \mathrm{d}x \right| \\ +\ & \left| \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_L} \left[e^{\alpha_k u_k^2} - 1 - \alpha_k u_k^2 \right] \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_L} \left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2} - 1 - 4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2 \right] \mathrm{d}x \right|. \end{aligned}$$

Como (c_k) é uma sequência limitada, então usando a equação (4.24) temos $\Delta u_k \in L^t(B_L)$ para todo $t \geq 1$, assim por regularidade elíptica temos que $u_k \to u$ fortemente em $C^{1,\theta}(B_L)$ para algum $\theta \in (0,1)$. Além disso, usando a imersão compacta $E \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$, temos que $u_k \to u$ em $L^2(\mathbb{R}^2)$. Assim,

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\int_{B_L}\left[e^{\alpha_k u_k^2}-1-\alpha_k u_k^2\right]\,\mathrm{d}x-\int_{B_L}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1-4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2\right]\,\mathrm{d}x\right|=0. \tag{4.26}$$

Lembremos que para todo $\beta > 0$,

$$\lim_{t\to 0}\frac{e^{\beta t^2}-1-\beta t^2}{t^4}=\frac{\beta^2}{2}.$$

Assim, existe $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $C > 0$ tais que

$$e^{\beta t^2}-1-\beta t^2 \leq Ct^4, \quad \text{para todo} \quad t\in[0,\varepsilon]. \tag{4.27}$$

Por outro lado, desde que u_k é radialmente simétrica e radialmente decrescente, temos

$$u_k^2(L)|B_L| \leq \int_{B_L} u_k^2\,\mathrm{d}x \leq 1.$$

Logo, podemos determinar $L > 0$ tal que $u_k(x) \leq (\varepsilon/3C)^{1/2}$ para todo $x \notin B_L$. Por (4.27), obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_L}\left[e^{\alpha_k u_k^2}-1-\alpha_k u_k^2\right]\,\mathrm{d}x &\leq C\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_L} u_k^4\,\mathrm{d}x\\ &= C\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_L} u_k^2 u_k^2\,\mathrm{d}x\\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}\int_{\mathbb{R}^2} u_k^2\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned} \tag{4.28}$$

Por outro lado, para $L > 0$ suficientemente grande, temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_L}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1-4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2\right]\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4.29}$$

Por (4.26), (4.28) e (4.29), e fazendo ε tender para zero, obtemos

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{\alpha_k u_k^2}-1-\alpha_k u_k^2\right]\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1-4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2\right]\,\mathrm{d}x.$$

Desta equação, obtemos que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{\alpha_k u_k^2}-1\right)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^2}\left(e^{4\pi(1+\alpha\|u\|_2^2)u^2}-1\right)\,\mathrm{d}x. \tag{4.30}$$

Assim, u é uma função que atinge $\ell(\alpha)$. ∎

CASO 2: $c_k \nearrow +\infty$.

Este caso é mais delicado, e os argumentos utilizados são denominados na literatura de análise de blow-up.

Definamos

$$r_k^2 = \frac{\lambda_k}{\beta_k c_k^2 e^{\alpha_k c_k^2}} \tag{4.31}$$

Inicialmente, temos o seguinte resultado:

Lema 4.3.3. *Seja $\sigma_k = 4\pi - \delta_k$, onde $\delta_k \searrow 0$. Então, $r_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}c_k^2} \to 0$ quando $k \to +\infty$. Consequentemente $r_k \to 0$ quando $k \to +\infty$.*

Prova: Usando as definições de r_k e λ_k, temos que

$$\begin{aligned} r_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}c_k^2} &= \lambda_k \beta_k^{-1} c_k^{-2} e^{-\alpha_k c_k^2} e^{\frac{\sigma_k}{2}c_k^2} \\ &= \beta_k^{-1} c_k^{-2} e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2} \int_{\mathbb{R}^2} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Dado $L > 0$, podemos escrever

$$r_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}c_k^2} = \beta_k^{-1} c_k^{-2} e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2} \int_{B_L} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x + \beta_k^{-1} c_k^{-2} e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_L} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x.$$

Observe que a segunda integral da igualdade acima pode ser escrita da seguinte forma:

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_L} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_k^j \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_L} \frac{|u_k|^{2j+2}}{j!}\, \mathrm{d}x.$$

Assim, usando o Lema Radial (cf. [43]), temos

$$|u_k(\rho)| \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \|u_k\|_2 \frac{1}{\rho}, \quad \text{para todo} \quad \rho > 0.$$

Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_L} |u_k|^{2j+2}\, \mathrm{d}x \leq \|u_k\|_2^{2j+2} \frac{2}{\pi^j} \int_L^{+\infty} \rho^{-2j-1}\, \mathrm{d}\rho \leq \frac{1}{\pi^j j L^{2j}}.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_L} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^j}{j! \pi^j j L^{2j}} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha_k^j}{j! \pi^j L^{2j}} \leq C_1(L).$$

Desta última estimativa, temos que

$$r_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}c_k^2} \leq \beta_k^{-1} c_k^{-2} \int_{B_L} u_k^2 e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2} e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x + C_1(L) \beta_k^{-1} c_k^{-2} e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2}.$$

Agora, usando o fato de que $c_k = u_k(0) \geq u_k(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$ temos

$$-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2 \leq -(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})u_k^2(x), \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Logo

$$\begin{aligned} r_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}c_k^2} &\leq \beta_k^{-1} c_k^{-2} \int_{B_L} u_k^2 e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})u_k^2} e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x + C_1(L)\beta_k^{-1} c_k^{-2} e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2} \\ &= \beta_k^{-1} c_k^{-2} \int_{B_L} u_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}u_k^2}\, \mathrm{d}x + C_1(L)\beta_k^{-1} c_k^{-2} e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2}. \end{aligned}$$

Afirmamos que existe $C > 0$ tal que

$$\int_{B_L} u_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}u_k^2}\, \mathrm{d}x \leq C. \tag{4.32}$$

De fato, temos que

$$\int_{B_L} |\nabla (u_k - u_k(L))^+|\, \mathrm{d}x \leq 1.$$

Então, pela desigualdade de Trudinger-Moser temos

$$\int_{B_L} e^{4\pi[(u_k - u_k(L)^+]^2}\, \mathrm{d}x \leq C(L). \tag{4.33}$$

Para $p < 4\pi$ podemos determinar uma constante positiva $C(p)$ tal que

$$pu_k^2 \leq 4\pi[(u_k - u_k(L))^+]^2 + C(p). \tag{4.34}$$

Combinando (4.33) e (4.34), temos

$$\int_{B_L} e^{pu_k^2}\, \mathrm{d}x \leq C(L,p). \tag{4.35}$$

Seja $s > 1$ tal que $p = s\sigma_k/2 < 4\pi$ e r tal que $1/s + 1/r = 1$, então pela desigualdade de Hölder temos

$$\int_{B_L} u_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}u_k^2}\, \mathrm{d}x \leq \left(\int_{B_L} e^{pu_k^2}\, \mathrm{d}x \right)^{1/s} \left(\int_{B_L} |u_k|^{2r} \right)^{1/r}.$$

Então, usando (4.35) e a imersão $E \hookrightarrow L^t(\mathbb{R}^2)$ para todo $t \geq 2$, obtemos (4.32).

Logo, existe $C > 0$ tal que

$$r_k^2 e^{\frac{\sigma_k}{2}c_k^2} \leq C\beta_k^{-1} c_k^{-2} + C_1(L)\beta_k^{-1} c_k^{-2} e^{-(\alpha_k - \frac{\sigma_k}{2})c_k^2}.$$

Como $0 < a_0 \leq \beta_k \leq A_0$ e $c_k \nearrow +\infty$, concluímos o resultado. ■

O próximo lema fornece uma informação muito importante que ocorre no caso Blow-up, que é $u_k \rightharpoonup 0$ fracamente em E.

Lema 4.3.4. *Para a sequência (u_k) temos que $u_k \rightharpoonup 0$ fracamente em E, $u_k \to 0$ fortemente $L^q(\mathbb{R}^2)$ para todo $q \geq 2$. Além disso, temos que $\alpha_k \to 4\pi$, $\beta_k \to 1$ e $\gamma_k \to \alpha$.*

Prova: Como $\|u_k\| = 1$ e E é um espaço de Hilbert, podemos assumir a menos de subsequência que

$$u_k \rightharpoonup u_0 \quad \text{fracamente em} \quad E$$

e pela imersão compacta $E \hookrightarrow L^2(\mathbb{R}^2)$

$$u_k \to u_0 \quad \text{fortemente em} \quad L^2(\mathbb{R}^2).$$

Suponhamos que $u_0 \neq 0$ e $\|u_0\| < 1$, então para todo $0 \leq \alpha < \lambda_1$, temos

$$1 + \alpha\|u_k\|_2^2 \to 1 + \alpha\|u_0\|_2^2 \leq 1 + \|u_0\|^2 < \frac{1}{1 - \|u_0\|^2}.$$

Assim para cada $R > 0$, temos pelo Lema 4.2.1 que $e^{\alpha_k u_k^2}$ é limitado em $L^r(B_R)$ para algum $r > 1$ desde que k seja suficientemente grande, pois $e^{\alpha_k u_k^2} = (e^{\alpha_k u_k^2} - 1) + 1$. Assim, pela desigualdade de Hölder, podemos concluir que

$$u_k e^{\alpha_k u_k^2} \in L^{r_0}(B_R) \quad \text{para algum} \quad r_0 > 1.$$

Assim, obtemos que

$$h(x) = \frac{\beta_k}{\lambda_k} u_k e^{\alpha_k u_k^2} + [\gamma_k - (1 + |x|^q)]u_k \in L^{r_0}(B_R).$$

Pela equação (4.24) temos que $\Delta u_k \in L^{r_0}(B_R)$ para algum $r_0 > 1$ e cada $R > 0$. Aplicando estimativas elípticas (cf. Teorema 2, [60]) para o problema

$$-\Delta u_k = h(x) \quad \text{em} \quad B_R,$$

existe $C(r_0) > 0$ tal que

$$\|u_k\|_\infty \leq C(r_0)R^{-1}\left(\|u_k\|_2^2 + RK\right)^{1/2} \leq C(r_0)R^{-1}\left(1 + RK\right)^{1/2},$$

onde $K = R^{2(r_0-1)/r_0}\|h\|_{L^{r_0}(B_R)}$. Assim, obtemos que u_k é uniformemente limitado em B_R, mais isto contradiz o fato que $c_k \nearrow +\infty$. Logo, $u_0 = 0$ e consequentemente temos que $\alpha_k \to 4\pi$, $\beta_k \to 1$ e $\gamma_k \to \alpha$

■

Agora definamos as funções de blow-up:

$$\begin{cases} \psi_k(x) = c_k^{-1} u_k(r_k x) \\ \varphi_k(x) = c_k(u_k(r_k x) - c_k) \end{cases} \tag{4.36}$$

sobre o domínio $\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^2 : r_k x \in B_1\}$. Notemos que

$$\begin{cases} -\Delta\psi_k = c_k^{-2}\psi_k e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + [\gamma_k - (1+|x|^q)]r_k^2\psi_k \text{ em } \Omega_k; \\ -\Delta\varphi_k = \psi_k e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + [\gamma_k - (1+|x|^q)]r_k^2 c_k^2\psi_k \text{ em } \Omega_k. \end{cases} \tag{4.37}$$

De fato, temos que

$$-\Delta u_k + (1+|x|^q)u_k = \frac{\beta_k}{\lambda_k}u_k e^{\alpha_k u_k^2} + \gamma_k u_k \quad \text{em} \quad B_{R_k}.$$

Pela definição de ψ_k, obtemos que

$$\Delta u_k(r_k x) = \frac{1}{r_k^2 c_k^{-1}}\Delta\psi_k(x).$$

Notemos também que

$$\frac{\beta_k}{\lambda_k}u_k(r_k x)e^{\alpha_k u_k^2(r_k x)} = \frac{c_k^{-2}e^{-\alpha_k c_k^2}\psi_k(x)e^{\alpha_k u_k^2(r_k x)}}{r_k^2 c_k^{-1}} = \frac{c_k^{-1}}{r_k^2}\psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)}.$$

Combinando estas estimativas temos

$$-\frac{1}{r_k^2 c_k^{-1}}\Delta\psi_k(x) + (1+|x|^q)\frac{\psi_k(x)}{c_k^{-1}} = \frac{c_k^{-1}}{r_k^2}\psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + \gamma_k\frac{\psi_k(x)}{c_k^{-1}}.$$

Multiplicando esta última equação por $r_k^2 c_k^{-1}$, obtemos

$$-\Delta\psi_k(x) + (1+|x|^q)r_k^2\psi_k(x) = c_k^{-2}\psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + \gamma_k r_k^2\psi_k(x).$$

Assim provamos a primeira equação.

Agora usando a definição de φ_k, obtemos que

$$\Delta u_k(r_k x) = \frac{1}{r_k^2 c_k}\Delta\varphi_k(x).$$

Logo, temos que

$$-\frac{1}{r_k^2 c_k}\Delta\varphi_k(x) + (1+|x|^q)\frac{\psi_k(x)}{c_k^{-1}} = \frac{c_k^{-1}}{r_k^2}\psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + \gamma_k\frac{\psi_k(x)}{c_k^{-1}}.$$

Multiplicando esta última equação por $r_k^2 c_k$, obtemos

$$-\Delta\varphi_k(x) + (1+|x|^q)r_k^2 c_k^2\psi_k(x) = \psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + \gamma_k r_k^2 c_k^2\psi_k(x).$$

Assim provamos a segunda equação.

Aplicando estimativas elípticas provaremos que:

$$\begin{cases} \psi_k \to 1 \text{ em } C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2), \\ \varphi_k \to \varphi \text{ em } C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2). \end{cases} \tag{4.38}$$

De fato, dado $R > 0$, como $\|\psi_k\|_\infty \leq 1$, $r_k^2 \to 0$ e $(u_k^2(r_k x) - c_k^2) \leq 0$ para $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, então para todo $s \geq 1$ temos

$$-\Delta\psi_k = c_k^{-2}\psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + [\gamma_k - (1+|x|^q)]r_k^2\psi_k(x) \in L^s(B_R)$$

Assim por estimativas elípticas (cf. Capítulo 9, [42]) temos

$$\|\psi_k\|_{W^{2,s}(B_R)} \leq C(\|\psi_k\|_{L^s(B_R)} + \|h\|_{L^s(B_R)}) \leq C(R),$$

onde

$$h(x) = c_k^{-2}\psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + [\gamma_k - (1+|x|^q)]r_k^2\psi_k(x).$$

Como podemos tomar qualquer s, temos que

$$\|\psi_k\|_{C^{1,\theta}(\overline{B_R})} \leq C\|\psi_k\|_{W^{2,s}(B_R)} \leq C(R).$$

Assim para uma subsequência temos

$$\psi_k \to \psi \text{ em } C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Por outro lado, usando a definição de ψ_k segue que $\psi_k(0) = 1$. Então, usando a convergência uniforme acima obtemos que $\psi(0) = 1$. Além disso, tomando o limite na equação

$$\int_{B_R} \nabla\psi_k \nabla v \,\mathrm{d}x = c_k^{-2}\int_{B_R} \psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)}v \,\mathrm{d}x + r_k^2\int_{B_R}[\gamma_k - (1+|x|^q)]\psi_k(x)v \,\mathrm{d}x,$$

para todo $v \in C_0^\infty(B_R)$, como $r_k \to 0$, $\gamma_k \to \alpha$ e $c_k \nearrow +\infty$, obtemos

$$\int_{B_R} \nabla\psi_k \nabla v \,\mathrm{d}x \to 0.$$

Consequentemente, obtemos

$$\int_{B_R} \nabla\psi \nabla v \,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{para todo} \quad v \in C_0^\infty(B_R).$$

Assim,

$$-\Delta\psi = 0 \quad \text{em} \quad B_R.$$

Logo, ψ é harmônica. Temos também que ψ é limitada, pois ψ_k é uniformemente limitada. Logo, usando um Teorema tipo Liouville ψ é constante, mais como $\psi(0) = 1$, então $\psi \equiv 1$. Assim, provamos a primeira parte da afirmação (4.38).

Para a segunda parte da afirmação basta observar que

$$-\Delta\varphi_k(x) = \psi_k(x)e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x)-c_k^2)} + [\gamma_k - (1+|x|^q)]r_k^2 c_k^2\psi_k(x) \in L^s(B_R),$$

para todo $s \geq 1$, pois $(u_k^2(r_k x) - c_k^2) \leq 0$, $\|\psi_k\|_\infty \leq 1$ e $r_k^2 c_k^2 \to 0$. Assim por estimativas elípticas (cf. Capítulo 9, [42]) temos para uma subsequência que

$$\varphi_k \to \varphi \text{ em } C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Agora provaremos que φ satisfaz:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = e^{8\pi\varphi} \text{ em } \mathbb{R}^2; \\ \varphi(0) = 0 = \sup\varphi; \\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{8\pi\varphi}\, \mathrm{d}x = 1. \end{cases} \tag{4.39}$$

Notemos que

$$u_k^2(r_k x) - c_k^2 = c_k^2\left(\frac{u_k^2(r_k x)}{c_k^2} - 1\right) = c_k^2(\psi_k^2(x) - 1) = c_k^2(\psi_k - 1)(\psi_k + 1).$$

Temos também que

$$\varphi_k(x) = c_k(u_k(r_k x) - c_k) = c_k^2\left(\frac{u_k(r_k x)}{c_k} - 1\right) = c_k^2(\psi_k - 1)$$

Destas estimativas, obtemos que

$$u_k^2(r_k x) - c_k^2 = \varphi_k(\psi_k + 1) \to 2\varphi \quad \text{em} \quad C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Temos também que $\varphi(0) = 0$ pois $\varphi_k(0) = 0$ para todo k. Sabemos também pelo Lema 4.3.4 que $\alpha_k \to 4\pi$. Como

$$0 \geq u_k^2(r_k x) - c_k^2 \to 2\varphi \quad \text{em} \quad C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2),$$

obtemos que

$$\varphi(x) \leq 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Assim,

$$\sup\varphi = \varphi(0) = 0.$$

Agora notemos que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} e^{8\pi\varphi}\, \mathrm{d}x &= \int_{B_R} \lim_{k\to+\infty} e^{8\pi\varphi_k}\, \mathrm{d}x \\ &\leq \liminf_{k\to+\infty} \int_{B_R} e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x) - c_k^2)}\, \mathrm{d}x \\ &= \liminf_{k\to+\infty} e^{-\alpha_k c_k^2} \int_{B_{Rr_k}} e^{\alpha_k u_k^2(x)} r_k^{-2}\, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

Usando as definições de r_k e λ_k, e que $\beta_k \to 1$, obtemos que

$$\begin{aligned}\int_{B_R} e^{8\pi\varphi}\,\mathrm{d}x &\leq \liminf_{k\to+\infty} \frac{\beta_k c_k^2}{\lambda_k}\int_{B_{Rr_k}} e^{\alpha_k u_k^2(x)}\,\mathrm{d}x\\ &= \liminf_{k\to+\infty} \frac{\beta_k}{\lambda_k}\int_{B_{Rr_k}} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2(x)}\,\mathrm{d}x + o(1)\\ &\leq 1.\end{aligned}$$

Logo, φ satisfaz a seguinte equação:

$$\begin{cases} -\Delta\varphi = e^{8\pi\varphi} \text{ em } \mathbb{R}^2;\\ \varphi(0) = 0 = \sup\varphi;\\ \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} e^{8\pi\varphi}\,\mathrm{d}x \leq 1.\end{cases}$$

Usando os resultados contidos em Li (Lema 4.2, [47]) e o teorema de unicidade em [22], é conhecido que

$$\varphi(x) = -\frac{1}{4\pi}\log(1+\pi|x|^2)$$

é solução do problema acima. Consequentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{8\pi\varphi}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Assim concluímos a afirmação (4.39).

Usando os fatos acima temos o seguinte resultado:

Lema 4.3.5. *Dado qualquer* $A > 1$, *definamos*

$$u_k^A = \min\{u_k, c_k/A\}.$$

Então,

$$\limsup_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_k^A|^2 + (1+|x|^q)|u_k^A|^2)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{A}. \tag{4.40}$$

Prova: Como $\|u_k\| = 1$, temos que

$$\int_{[u_k\leq \frac{c_k}{A}]}(|\nabla u_k|^2 + (1+|x|^q)|u_k|^2)\,\mathrm{d}x = 1 - \int_{[u_k> \frac{c_k}{A}]}(|\nabla u_k|^2 + (1+|x|^q)|u_k|^2)\,\mathrm{d}x.$$

Usando esta estimativa, a definição de u_k^A e somando de ambos os lados o termo $\displaystyle\int_{[u_k>\frac{c_k}{A}]}|u_k^A|^2\,\mathrm{d}x$, obtemos que

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_k^A|^2 + (1+|x|^q)|u_k^A|^2)\,\mathrm{d}x\\ &\quad = 1 - \left(\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla(u_k - \frac{c_k}{A})^+|^2 + (1+|x|^q)(u_k-\frac{c_k}{A})^+u_k)\,\mathrm{d}x\right)\\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^q)(u_k-\frac{c_k}{A})^+u_k\,\mathrm{d}x - \int_{[u_k>\frac{c_k}{A}]}(1+|x|^q)u_k^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad + \int_{[u_k>\frac{c_k}{A}]}(1+|x|^q)|u_k^A|^2\,\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{4.41}$$

Agora vamos estimar cada um deste termos. Primeiro notemos que:

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^2 : u_k \geq \frac{c_k}{A}\}\right| \left(\frac{c_k}{A}\right)^2 = \int_{[u_k \geq \frac{c_k}{A}]} \left(\frac{c_k}{A}\right)^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{[u_k \geq \frac{c_k}{A}]} u_k^2 \,\mathrm{d}x \leq 1.$$

Assim, obtemos que

$$\left|\{x \in \mathbb{R}^2 : u_k \geq \frac{c_k}{A}\}\right| \leq \frac{A^2}{c_k^2} \to 0.$$

Desta afirmação podemos escolher uma sequência $\rho_k \to 0$ tal que

$$\{x \in \mathbb{R}^2 : u_k \geq \frac{c_k}{A}\} \subset B_{\rho_k}.$$

Temos também que $u_k \rightharpoonup 0$ em E, então u_k converge em $L^p(B_1)$ para todo $p > 1$. Logo, existe $h \in L^p(B_1)$ tal que $u_k(x) \leq |h(x)|$ quase sempre em B_1. Consequentemente, temos

$$\begin{aligned} \lim_{k \to +\infty} \int_{[u_k > \frac{c_k}{A}]} (1+|x|^q)|u_k^A|^p \,\mathrm{d}x &\leq \lim_{k \to +\infty} (1+\rho_k^q) \int_{[u_k > \frac{c_k}{A}]} u_k^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \lim_{k \to +\infty} (1+\rho_k^q) \int_{B_{\rho_k}} |h(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.42}$$

Segue desta estimativa que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{[u_k > \frac{c_k}{A}]} u_k^p \,\mathrm{d}x = 0, \tag{4.43}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{[u_k > \frac{c_k}{A}]} (1+|x|^q) u_k^2 \,\mathrm{d}x = 0, \tag{4.44}$$

e

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{[u_k > \frac{c_k}{A}]} (1+|x|^q)|u_k^A|^2 \,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.45}$$

Agora afirmamos que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (1+|x|^q)(u_k - \frac{c_k}{A})^+ u_k^p \,\mathrm{d}x = 0, \quad \text{para todo} \quad p > 0. \tag{4.46}$$

De fato, sobre $\mathbb{R}^2 \setminus B_{\rho_k}$ temos que $(u_k - \frac{c_k}{A})^+ = 0$. Assim,

$$\lim_{k \to +\infty} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{\rho_k}} (1+|x|^q)(u_k - \frac{c_k}{A})^+ u_k^p \,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.47}$$

Por outro lado, temos que

$$\int_{B_{\rho_k}} (1+|x|^q)(u_k - \frac{c_k}{A})^+ u_k^p \,\mathrm{d}x \leq (1+\rho_k^q) \left(\int_{B_{\rho_k}} |(u_k - \frac{c_k}{A})^+|^s \,\mathrm{d}x \right)^{1/s} \left(\int_{B_{\rho_k}} u_k^{rp} \,\mathrm{d}x \right)^{1/r},$$

onde $1/s+1/r=1$ e tais que $rp>1$. Logo, pela desigualdade de Hölder e (4.43), obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{k\to+\infty}\int_{B_{\rho_k}}&(1+|x|^q)(u_k-\frac{c_k}{A})^+u_k^p\,\mathrm{d}x \\ &\leq \lim_{k\to+\infty}(1+\rho_k^q)\left(\int_{B_1}|2h(x)|^s\,\mathrm{d}x\right)^{1/s}\left(\int_{B_{\rho_k}}u_k^{rp}\,\mathrm{d}x\right)^{1/r}=0. \end{aligned} \tag{4.48}$$

Logo, usando (4.47) e (4.48), obtemos

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(1+|x|^q)(u_k-\frac{c_k}{A})^+u_k^p\,\mathrm{d}x=0.$$

Agora testando (4.24) com $(u_k-\frac{c_k}{A})^+$, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla(u_k-\frac{c_k}{A})^+|^2&+(1+|x|^q)(u_k-\frac{c_k}{A})^+u_k)\,\mathrm{d}x \\ &=\int_{\mathbb{R}^2}(u_k-\frac{c_k}{A})^+\left(\frac{\beta_k}{\lambda_k}u_ke^{\alpha_ku_k^2}+\gamma_ku_k\right)\,\mathrm{d}x \\ &\geq\int_{B_{Lr_k}}(u_k-\frac{c_k}{A})^+\left(\frac{\beta_k}{\lambda_k}u_ke^{\alpha_ku_k^2}+\gamma_ku_k\right)\,\mathrm{d}x \\ &=\int_{B_L}\frac{A\psi_k(x)-1}{A}\psi_ke^{\alpha_k(\psi_k+1)\varphi_k+o(1)}\,\mathrm{d}x+o(1). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Esta desigualdade junto com (4.39) diz que

$$\liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla(u_k-\frac{c_k}{A})^+|^2+(1+|x|^q)(u_k-\frac{c_k}{A})^+u_k)\,\mathrm{d}x\geq\frac{A-1}{A}\int_{B_L}e^{8\pi\varphi}\,\mathrm{d}x.$$

Agora fazendo $L\to+\infty$, obtemos

$$\liminf_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla(u_k-\frac{c_k}{A})^+|^2+(1+|x|^q)(u_k-\frac{c_k}{A})^+u_k)\,\mathrm{d}x\geq\frac{A-1}{A}. \tag{4.50}$$

Combinando (4.41), (4.44), (4.45), (4.46) e (4.50), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^2}(|\nabla u_k^A|^2+(1+|x|^q)|u_k^A|^2)\,\mathrm{d}x\quad\leq\quad 1-\left(1-\frac{1}{A}\right)+o(1)=\frac{1}{A}.$$

Assim, concluímos o resultado. ∎

Assim, temos o seguinte corolário:

Corolário 4.3.1. *Dado $\delta>0$, temos que*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta}(|\nabla u_k|^2+(1+|x|^q)|u_k|^2)\,\mathrm{d}x\to 0.$$

Prova: Usando que $c_k \nearrow +\infty$ e $u_k^A = \min\{u_k, c_k/A\}$, obtemos que $u_k^A = u_k$ em $[u_k \leq c]$ para k suficientemente grande, pois $c_k/A \nearrow +\infty$. Assim,

$$\int_{[u_k\leq c]} (|\nabla u_k|^2 + (1+|x|^q)|u_k|^2)\ \mathrm{d}x = \int_{[u_k\leq c]} (|\nabla u_k^A|^2 + (1+|x|^q)|u_k^A|^2)\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{A},$$

para qualquer constante c. Fazendo $A \to +\infty$, obtemos

$$\int_{[u_k\leq c]} (|\nabla u_k|^2 + (1+|x|^q)|u_k|^2)\ \mathrm{d}x \to 0.$$

Para concluímos o resultado basta usarmos que $[u_k \leq c] = B_{r(c)}(0)$, onde $r(c) > 0$. ∎

Agora provaremos o seguinte lema:

Lema 4.3.6. *Temos que*

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\ \mathrm{d}x \leq \limsup_{k\to+\infty} \frac{\lambda_k}{c_k^2} \tag{4.51}$$

e consequentemente,

$$\frac{\lambda_k}{c_k} \to +\infty \quad e \quad \sup_k \frac{c_k^2}{\lambda_k} < +\infty. \tag{4.52}$$

Prova: Inicialmente temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\ \mathrm{d}x \;=\; \int_{[u_k\leq \frac{c_k}{A}]} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\ \mathrm{d}x + \int_{[u_k > \frac{c_k}{A}]} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\ \mathrm{d}x.$$

Agora usando o crescimento da função exponencial e a definição de λ_k, temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\ \mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha_k |u_k^A|^2} - 1)\ \mathrm{d}x + A^2\frac{\lambda_k}{c_k^2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2}}{\lambda_k}\ \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha_k |u_k^A|^2} - 1)\ \mathrm{d}x + A^2\frac{\lambda_k}{c_k^2}.\end{aligned}$$

Vamos provar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha_k |u_k^A|^2} - 1)\ \mathrm{d}x \to 0.$$

Desde que u_k é radialmente simétrica e radialmente decrescente podemos determinar $L > 0$ tal que $u_k \leq 1$ sobre $\mathbb{R}^2 \setminus B_L$, então $u_k^A = u_k$ em $\mathbb{R}^2 \setminus B_L$. Usando o Lema Radial e que $\|u_k\|_2 \to 0$ é conhecido que dado $p > 0$ existe $C(p) > 0$ tal que

$$\lim_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_L} (e^{p\alpha_k |u_k^A|^2} - 1)\ \mathrm{d}x \leq \lim_{k\to+\infty} C(p) \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_L} u_k^2\ \mathrm{d}x = 0. \tag{4.53}$$

Sabemos também pelo Lema 4.3.5 que

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla u_k^A|^2 + |u_k^A|^2)\ \mathrm{d}x \leq \frac{1}{A} < 1 \quad \text{quando} \quad A > 1.$$

Assim segue pela desigualdade de Trudinger-Moser que

$$\sup_k \int_{B_L} e^{p'\alpha_k((u_k^A - u_k(L))^+)^2}\,\mathrm{d}x < \infty \quad \text{para todo} \quad p' < A,$$

pois

$$\lim_{k\to+\infty}\{p'\alpha_k\|(u_k^A - u_k(L))^+\|^2\} = \lim_{k\to+\infty} p'\alpha_k\|u_k^A\|^2 < 4\pi.$$

Além disso, desde que para todo $p < p'$

$$p|u_k^A|^2 \leq p'|(u_k^A - u_k(L))|^2 + C(p,p'),$$

temos

$$\sup_k \int_{B_L} (e^{p\alpha_k|u_k^A|^2} - 1)\,\mathrm{d}x < \infty \quad \text{para todo} \quad p < A. \tag{4.54}$$

Por outro lado, a menos de subsequência temos que $u_k^A \to 0$ quase sempre $\mathbb{R}^2$. Então em B_L, usando um argumento similar ao feito na prova do Teorema 4.2.1, obtemos que

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{B_L}(e^{\alpha_k|u_k^A|^2} - 1)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{4.55}$$

Assim

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}(e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \lim_{k\to+\infty} A^2\frac{\lambda_k}{c_k^2}.$$

Logo, fazendo $A \to 1$ obtemos (4.51).

Por fim, se $\dfrac{\lambda_k}{c_k}$ é limitada ou $\sup_k \dfrac{c_k^2}{\lambda_k} = +\infty$, então por (4.51) temos

$$\ell(\alpha) \leq \frac{\lambda_k}{c_k^2} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty,$$

o que é impossível. Assim, concluímos o lema. ∎

Usando uma idéia similar a utilizada na prova do Lema 3.7 em [46], provaremos o seguinte resultado:

Lema 4.3.7. *Temos que* $\dfrac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}$ *converge para a função Delta de Dirac* δ_0 *fracamente, isto é, para todo* $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *temos*

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\eta(x)\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x = \eta(0).$$

Prova: Seja $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, então

$$\left|\int_{\mathbb{R}^2}\eta(x)\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq I_1 + I_2 + I_3,$$

onde

$$I_1 = \int_{[u_k \geq \frac{c_k}{A}] \setminus B_{Lr_k}} \eta(x) \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x,$$

$$I_2 = \int_{B_{Lr_k}} \eta(x) \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x$$

e

$$I_3 = \int_{[u_k < \frac{c_k}{A}]} \eta(x) \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x$$

para algum $A > 1$. Agora vamos estimar cada uma destas integrais. Primeiro temos que

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{Lr_k}} |\eta(x)| \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x \\ &\leq A\|\eta\|_\infty \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{Lr_k}} \frac{\beta_k}{\lambda_k} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando a definição de λ_k em (4.24), obtemos que

$$|I_1| \leq A\beta_k \|\eta\|_\infty \left(1 - \int_{B_{Lr_k}} \frac{1}{\lambda_k} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x\right).$$

Por (4.31) e (4.36), temos

$$\begin{aligned} \int_{B_{Lr_k}} \frac{1}{\lambda_k} u_k^2 e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x &= \int_{B_L} \frac{1}{\lambda_k} u_k^2(r_k x) e^{\alpha_k u_k^2(r_k x)} r_k^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta_k} \int_{B_L} \left(\frac{u_k(r_k x)}{c_k}\right)^2 e^{\alpha_k(u_k^2(r_k x) - c_k^2)} \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\beta_k} \int_{B_L} \psi_k^2(x) e^{\alpha_k(\psi_k(x)+1)\varphi_k(x)} \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Logo, fazendo $k \to +\infty$ e usando $\beta_k \to 1$ e por fim fazendo $L \to +\infty$, obtemos que

$$|I_1| \leq A\|\eta\|_\infty \left(1 - \int_{B_L} e^{8\pi\varphi} \,\mathrm{d}x\right) \to 0,$$

pois

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{8\pi\varphi} \,\mathrm{d}x = 1.$$

Estimando I_2:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{B_{Lr_k}} \eta(x) \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{B_L} \eta(r_k x) \frac{e^{-\alpha_k c_k^2}}{c_k^2 r_k^2} c_k u_k(r_k x) e^{\alpha_k u_k^2(r_k x)} r_k^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{B_L} \eta(r_k x) \psi_k(x) e^{\alpha_k(\psi_k(x)+1)\varphi_k(x)} \,\mathrm{d}x \\ &= \eta(0) \int_{B_L} e^{8\pi\varphi} \,\mathrm{d}x + o(1) = \eta(0) + o(1). \end{aligned}$$

Agora notemos que

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{[u_k<\frac{c_k}{A}]} \eta(x)\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \|\eta\|_\infty \beta_k \frac{c_k}{\lambda_k}\int_{[u_k<\frac{c_k}{A}]} u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x \\ &\leq \|\eta\|_\infty \beta_k \frac{c_k}{\lambda_k}\int_{\mathbb{R}^2} u_k^A e^{\alpha_k |u_k^A|^2}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Combinando o Lema 4.3.5 e o Lema Radial, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_k^A e^{\alpha_k |u_k^A|^2}\,\mathrm{d}x < \infty. \tag{4.56}$$

Assim, existe $C>0$ tal que

$$I_3 \leq C\|\eta\|_\infty \beta_k \frac{c_k}{\lambda_k}$$

Por (4.52) temos que

$$\frac{c_k}{\lambda_k} \to 0,$$

daí concluímos que $I_3 \to 0$ quando $k \to +\infty$. Combinando as três estimativas terminamos a prova do lema. ∎

Adaptando os argumentos de M. Struwe em [61], provaremos o seguinte lema:

Lema 4.3.8. *Para qualquer $R>0$ e $1<\tau<2$, temos que $c_k u_k \rightharpoonup G$ fracamente em $W^{1,\tau}(B_R)$, onde G é uma função de Green tal que*

$$-\Delta G + (1+|x|^q)G = \delta_0 + \alpha G \quad em \quad B_R \tag{4.57}$$

no sentido fraco. Além disso, $c_k u_k \to G$ em $C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ para algum $\theta\in(0,1)$.

Prova: Seja $U_k = c_k u_k$, assim pela equação (4.24), temos no sentido fraco que

$$-\Delta U_k + (1+|x|^q)U_k = \frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} + \gamma_k U_k \quad \text{em} \quad B_{R_k}. \tag{4.58}$$

Primeiro mostraremos que existe $C(\tau,R)>0$ tal que $\|\nabla U_k\|_\tau \leq C(\tau,R)$ para qualquer $1<\tau<2$ e $R>0$.

Notemos que $\gamma_k \in [0,\lambda_1)$. Vamos considerar dois casos:

Caso 1: $\gamma_k = 0$.

Notemos que

$$-\Delta U_k + U_k \leq -\Delta U_k + (1+|x|^q)U_k = \frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \quad \text{em} \quad B_{R_k},$$

assim,

$$-\Delta U_k + U_k \leq \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \quad \text{em} \quad B_{R_k}.$$

Definamos $\Omega_t = \{0 \leq U_k \leq t\}$ e $U_k^t = \min\{U_k, t\}$, então $U_k^t \in H_0^1(B_{R_k})$ e pelo Lema 4.3.7, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_t} \left(|\nabla U_k^t|^2 + |U_k^t|^2\right) \,\mathrm{d}x &\leq \int_{B_{R_k}} \left(-U_k^t \Delta U_k + U_k^t U_k\right) \,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B_{R_k}} U_k^t \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \,\mathrm{d}x \\
&\leq t.
\end{aligned}$$

Seja η uma função radialmente simétrica tal que $\eta \equiv 1$ em B_R, $\eta \equiv 0$ em B_{2R}^c e $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2, [0,1])$. Notemos que $|\nabla(\eta U_k^t)| = |\eta \nabla U_k^t + U_k^t \nabla \eta| = 0$ em $B_R \cap \Omega_t^c$, pois $U_k^t = t$ e $\nabla \eta = 0$ em $B_R \cap \Omega_t^c$. Além disso, usando a simetria da sequência (u_k) podemos escolher t suficientemente grande, se necessário, tal que $\Omega_t^c \subset B_R$, consequentemente

$$\begin{aligned}
\int_{B_{2R}} |\nabla(\eta U_k^t)|^2 \,\mathrm{d}x &= \int_{B_{2R} \cap \Omega_t} |\nabla(\eta U_k^t)|^2 \,\mathrm{d}x \\
&\leq 2\max\{1, R^{-2}\} \int_{\Omega_t} \left(|\nabla U_k^t|^2 + |U_k^t|^2\right) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Assim existe $C_1(R) > 0$ tal que

$$\int_{B_{2R}} |\nabla(\eta U_k^t)|^2 \,\mathrm{d}x \leq C_1(R)t.$$

Seja ρ tal que $U_k(\rho) = t$. Pela estimativa acima, temos que

$$\inf\left\{\int_{B_{2R}} |\nabla v|^2 \,\mathrm{d}x : v \in H_0^1(B_{2R}) \quad \text{e} \quad v|_{B_\rho} = t\right\} \leq C_1(R)t.$$

É conhecido que o ínfimo acima é atingido por (cf. [61, 69])

$$V(x) = \begin{cases} \dfrac{-t\log(\frac{|x|}{2R})}{\log(\frac{2R}{\rho})} & \text{em} \quad B_{2R} \setminus B_\rho, \\ t & \text{em} \quad B_\rho. \end{cases}$$

Calculando $\nabla V(x)$, temos

$$\nabla V(x) = \begin{cases} \dfrac{-tx}{\log(\frac{2R}{\rho})|x|^2} & \text{em} \quad B_{2R} \setminus B_\rho, \\ 0 & \text{em} \quad B_\rho. \end{cases}$$

Logo,

$$\int_{B_{2R}} |\nabla V(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \frac{t^2}{\log^2(\frac{2R}{\rho})} \int_{B_{2R} \setminus B_\rho} \frac{\mathrm{d}x}{|x|^2} = \frac{2\pi t^2}{\log(\frac{2R}{\rho})}.$$

Donde, obtemos
$$\frac{2\pi t^2}{\log(\frac{2R}{\rho})} \le C_1(R)t \Rightarrow \rho \le 2Re^{-2\pi t/C_1(R)}.$$
Destes fatos, obtemos que
$$|\{x \in B_{2R} : U_k \ge t\}| = |B_\rho| \le C_2(R)e^{-A(R)t},$$
onde $A(R)$ é uma constante positiva que depende somente de R. Seja $m_1 \in \mathbb{N}$ tal que $t \le m_1$, então para qualquer $\delta < A(R)$, temos
$$\begin{aligned}\int_{B_R} e^{\delta U_k}\,\mathrm{d}x &\le e^{\delta m_1}\pi R^2 + \sum_{m=m_1}^{\infty} |\{m \le U_k \le m+1\}| e^{\delta(m+1)} \\ &\le e^{\delta m_1}\pi R^2 + C_2(R)\sum_{m=m_1}^{\infty} e^{-(A(R)-\delta)m}e^{\delta} \le C(R).\end{aligned} \tag{4.59}$$
Testando a equação (4.24) com a função $\log\dfrac{1+2(U_k-U_k(R))^+}{1+(U_k-U_k(R))^+}$, obtemos
$$\begin{aligned}\int_{B_R} -\log\frac{1+2(U_k-U_k(R))^+}{1+(U_k-U_k(R))^+}\Delta U_k\,\mathrm{d}x &= \int_{B_R}\log\frac{1+2(U_k-U_k(R))^+}{1+(U_k-U_k(R))^+}\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{B_R}\log\frac{1+2(U_k-U_k(R))^+}{1+(U_k-U_k(R))^+}U_k\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Mais, $\log\left(2-\dfrac{1}{1+s}\right) \le \log 2$ para todo $s>0$, então
$$\begin{aligned}\int_{B_R}\nabla\left(\log\frac{1+2(U_k-U_k(R))^+}{1+(U_k-U_k(R))^+}\right)\nabla U_k\,\mathrm{d}x &\le \log 2\int_{B_R}\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x \\ &- \int_{B_R}\log\frac{1+2(U_k-U_k(R))^+}{1+(U_k-U_k(R))^+}U_k\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Notemos que
$$\begin{aligned}\nabla\left(\log\frac{1+2(U_k-U_k(R))^+}{1+(U_k-U_k(R))^+}\right) &= \frac{2\nabla U_k}{1+2(U_k-U_k(R))^+} - \frac{\nabla U_k}{1+(U_k-U_k(R))^+} \\ &= \frac{\nabla U_k}{(1+2(U_k-U_k(R))^+)(1+(U_k-U_k(R))^+)}\end{aligned}$$
e
$$\int_{B_R}\log\frac{1+2(U_k-U_k(R))^+}{1+(U_k-U_k(R))^+}U_k\,\mathrm{d}x \ge 0.$$
Então
$$\int_{B_R}\frac{|\nabla U_k|^2}{(1+U_k-U_k(R))(1+2U_k-2U_k(R))}\,\mathrm{d}x \le \log 2\int_{B_R}\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pelo Lema 4.3.7, tomando $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ tal que $\varphi \equiv 1$ em B_R, obtemos

$$\lim_{k\to+\infty}\int_{B_R}\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x \le \lim_{k\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^2}\varphi\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x = 1.$$

Logo, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $k \ge k_0$, temos

$$\int_{B_R}\frac{|\nabla U_k|^2}{(1+U_k-U_k(R))(1+2U_k-2U_k(R))}\,\mathrm{d}x \quad \le \quad \log 2. \tag{4.60}$$

Agora, denotando $v_1 = 1+(U_k-U_k(R))^+$ e $v_2 = 1+2(U_k-U_k(R))^+$. Para cada $1<\tau<2$, pela desigualdade de Young, obtemos

$$|\nabla U_k|^\tau = \frac{|\nabla U_k|^\tau}{(v_1v_2)^{\tau/2}}(v_1v_2)^{\tau/2} \le \frac{|\nabla U_k|^2}{(v_1v_2)} + (v_1v_2)^{\tau/(2-\tau)}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\int_{B_R}|\nabla U_k|^\tau\,\mathrm{d}x &\le \int_{B_R}\frac{|\nabla U_k|^2}{(1+U_k-U_k(R))(1+2U_k-2U_k(R))}\,\mathrm{d}x + ((1+U_k)(1+2U_k))^{\tau/(2-\tau)}\,\mathrm{d}x\\ &\le \int_{B_R}\left(\frac{|\nabla U_k|^2}{(1+U_k-U_k(R))(1+2U_k-2U_k(R))}+Ce^{\delta U_k}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Por (4.59) e (4.60), obtemos

$$\int_{B_R}|\nabla U_k|^\tau\,\mathrm{d}x \le C(\tau,R).$$

Caso 2: $0<\gamma_k<\lambda_1$.

Primeiro mostraremos que U_k é limitada em $L^1(B_{R_k})$. Suponhamos por contradição que existe uma subsequência tal que $\|U_k\|_1 \to +\infty$. Seja $w_k = U_k/\|U_k\|_1$. Então $\|w_k\|_1 = 1$ e

$$-\Delta w_k \le -\Delta w_k + (1+|x|^q)w_k = \frac{1}{\|U_k\|_1}\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} + \gamma_k w_k \quad \text{em} \quad B_{R_k}.$$

Logo, $-\Delta w_k \in L^1(B_{R_k})$, assim repetindo o argumento do caso 1, obtemos que

$$\int_{B_R}|\nabla w_k|^\tau\,\mathrm{d}x \le C(\tau,R).$$

Pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, existe $\theta(\tau)\in(0,1)$ tal que

$$\|w_k\|_{L^\tau(B_R)} \le C_1(\tau,R)\|w_k\|_1^{\theta(\tau)}\|\nabla w_k\|_{L^\tau(B_R)}^{1-\theta(\tau)} \le C(\tau,R).$$

Assim, (w_k) é limitada em $W^{1,\tau}(B_R)$. Portanto, sem perda de generalidade podemos assumir que $w_k \rightharpoonup w$ em $W^{1,\tau}(B_R)$ para qualquer $R>0$. Então, usando que $\|U_k\|_1 \to +\infty$ e $\gamma_k \to \alpha$, obtemos

$$\int_{B_R}[\nabla w\nabla\phi + (1+|x|^q)w\phi]\,\mathrm{d}x = \alpha\int_{B_R}w\phi\,\mathrm{d}x, \quad \forall\phi\in C^1(B_R), \quad \forall R>0.$$

Então, por uma argumento de densidade, temos

$$\int_{B_R}[\nabla w\nabla\phi+(1+|x|^q)w\phi]\ \mathrm{d}x=\alpha\int_{B_R}w\phi\ \mathrm{d}x,\quad \forall\phi\in W^{1,\tau}(B_R),\quad \forall R>0.$$

Como R é arbitrário, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^2}[\nabla w\nabla\phi+(1+|x|^q)w\phi]\ \mathrm{d}x=\alpha\int_{\mathbb{R}^2}w\phi\ \mathrm{d}x,\quad \forall\phi\in W^{1,\tau}(\mathbb{R}^2).$$

Desde que $\alpha<\lambda_1$, usando a definição de λ_1 e tomando $\phi=w$, obtemos pela equação acima que $w=0$, o que contradiz o fato que $\|w\|_1=1$. Portanto, temos que $\|U_k\|_1$ é limitada.

Usando que $\|U_k\|_1$ é limitada, temos que

$$-\Delta U_k+(1+|x|^q)U_k=\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_ku_ke^{\alpha_k u_k^2}+\gamma_k U_k\in L^1(B_{R_k}).$$

Assim, novamente pelo mesmo argumento do Caso 1, para qualquer $1<\tau<2$ e $R>0$, temos

$$\int_{B_R}|\nabla U_k|^\tau\ \mathrm{d}x\le C(\tau,R).$$

Como $\|U_k\|_1\le C$, obtemos pela desigualdade de Gagliardo-Nirenberg, que existe $\theta(\tau)\in(0,1)$ tal que

$$\|U_k\|_{L^\tau(B_R)}\le C_1(\tau,R)\|U_k\|_1^{\theta(\tau)}\|\nabla U_k\|_{L^\tau(B_R)}^{1-\theta(\tau)}\le C(\tau,R). \tag{4.61}$$

Portanto, (U_k) é limitada em $W^{1,\tau}(B_R)$. Assim, U_k converge fracamente para alguma função G em $W^{1,\tau}(B_R)$ para qualquer R e $1<\tau<2$. Pelas imersões de Sobolev temos que U_k é limitada $L^p(B_R)$ para todo $p\in[1,+\infty)$. Testando a equação (4.24) com $\phi\in C_0^\infty(B_R)$, obtemos que

$$\int_{B_R}(\nabla\phi\nabla(c_ku_k)+(1+|x|^q)\phi c_ku_k)\ \mathrm{d}x=\int_{B_R}\phi\frac{\beta_k}{\lambda_k}c_ku_ke^{\alpha_k u_k^2}\ \mathrm{d}x+\gamma_k\int_{B_R}\phi c_ku_k\ \mathrm{d}x.$$

Fazendo $k\to+\infty$, temos pelo Lema 4.3.7 que

$$\int_{B_R}(\nabla\phi\nabla G+(1+|x|^q)\phi G)\ \mathrm{d}x=\phi(0)+\alpha\int_{B_R}\phi G\,\mathrm{d}x,\quad \text{para todo}\quad R>0.$$

Então, no sentido fraco, temos

$$-\Delta G+(1+|x|^q)G=\delta_0+\alpha G.$$

Agora vamos estudar a regularidade da função G. Primeiro fixemos $r>0$ tal que $r<2r<3r<R$ e escolhamos uma função tal que $\eta\in C_0^\infty(B_R\setminus B_r,[0,1])$ e $\eta\equiv1$ em $B_{3r}\setminus B_{2r}$. Notemos que $\|\nabla(\eta u_k)\|_2\to0$. De fato, usando o Corolário 4.3.1 e a definição da função η, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_R\setminus B_r}|\nabla(\eta u_k)|^2\ \mathrm{d}x &= \int_{B_R\setminus B_r}|\eta\nabla u_k+u_k\nabla\eta|^2\ \mathrm{d}x\\ &\le \int_{B_R\setminus B_r}|\nabla u_k|^2\ \mathrm{d}x+C\|u_k\|_2^2\to0.\end{aligned}$$

Assim,

$$\|\nabla(\eta u_k)\|_2 \to 0.$$

Consequentemente, temos que $e^{\alpha_k \eta^2 u_k^2}$ é limitada em $L^s(B_R \setminus B_r)$ para todo $s > 1$. De fato, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $s\alpha_k \|\nabla(\eta u_k)\|_2^2 < 4\pi$ para todo $k \geq k_0$, assim pela desigualdade de Trudinger-Moser, obtemos

$$\int_{B_R \setminus B_r} e^{s\alpha_k(\eta u_k)^2}\, \mathrm{d}x = \int_{B_R \setminus B_r} e^{s\alpha_k \|\nabla(\eta u_k)\|_2^2 \left(\frac{\eta u_k}{\|\nabla(\eta u_k)\|_2}\right)^2}\, \mathrm{d}x \leq C(R).$$

Como consequência deste fato temos também que $e^{\alpha_k u_k^2}$ é limitada em $L^s(B_{3r} \setminus B_{2r})$ para todo $s > 1$ e $k \geq k_0$. Com efeito, temos que

$$\int_{B_{3r} \setminus B_{2r}} e^{s\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x \leq \int_{B_R \setminus B_r} e^{s\alpha_k(\eta u_k)^2}\, \mathrm{d}x \leq C(R). \tag{4.62}$$

Agora notemos que

$$-\Delta(c_k u_k) = \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} + [\gamma_k - (1 + |x|^q)] c_k u_k \quad \text{em} \quad B_{R_k}.$$

Assim,

$$-\int_{B_{3r} \setminus B_{2r}} \Delta(c_k u_k)\, \mathrm{d}x = \int_{B_{3r} \setminus B_{2r}} \frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x + \int_{B_{3r} \setminus B_{2r}} [\gamma_k - (1 + |x|^q)] c_k u_k\, \mathrm{d}x.$$

Notemos que $c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2} \in L^p(B_{3r} \setminus B_{2r})$ para qual quer $1 < p < 2$. De fato, dado $1 < p < 2$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{B_{3r} \setminus B_{2r}} \left(\frac{\beta_k}{\lambda_k} c_k u_k e^{\alpha_k u_k^2}\right)^p \mathrm{d}x \leq C_1 \left(\int_{B_{3r} \setminus B_{2r}} (c_k u_k)^{sq}\, \mathrm{d}x\right)^{1/s} \left(\int_{B_{3r} \setminus B_{2r}} e^{s'\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x\right)^{1/s'},$$

onde $1/s + 1/s' = 1$ com $sp < 2$. Assim, usando (4.61) e (4.62), obtemos que $\Delta(c_k u_k) \in L^p(B_{3r} \setminus B_{2r})$. Aplicando estimativas elípticas (cf. Teorema 2, [60]) segue que existe $C(R) > 0$ tal que

$$\|c_k u_k\|_{C^{1,\theta}(\overline{B_{3r}} \setminus B_{5r/2})} \leq C_1(R).$$

Logo, pelo Teorema Ascoli-Arzelá, a menos de subsequência, temos $c_k u_k \to G$ em $C^{1,\theta}(\overline{B_{3r}} \setminus B_{5r/2})$. Desde que R é arbitrário podemos concluir a última afirmação do lema.

■

4.4 Um limite superior para $\ell(\alpha)$

Nesta seção provaremos a existência de uma limitação superior para $\ell(\alpha)$. Para tanto, usando um argumento similar ao utilizado nos trabalhos [44, 46, 47, 52] precisaremos do seguinte lema devido a Carleson-Chang (cf. [19]):

Lema 4.4.1. *Seja B_1 a bola unitária em $\mathbb{R}^2$. Suponhamos que v_k é uma sequência em $H_0^1(B_1)$ tal que $\|\nabla v_k\|_{L^2(B_1)}^2 = 1$. Se $v_k \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_0^1(B_1)$, então*

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{B_1} \left(e^{4\pi v_k^2} - 1\right) \, \mathrm{d}x \leq |B_1|e.$$

Agora provaremos o seguinte resultado:

Proposição 4.4.1. *Sob a condição que $c_k \nearrow +\infty$, temos que*

$$\ell(\alpha) \leq \pi e^{4\pi A_0 + 1},$$

para todo $\alpha \in [0, \lambda_1)$, onde A_0 é uma constante.

Prova: Pelo Lema 4.3.8, temos que $c_k u_k \to G$ em $C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$. Assim,

$$-\Delta\left(G(x) + \frac{1}{2\pi}\log|x|\right) = [\alpha - (1+|x|^q)]G(x) \in L^r_{loc}(\mathbb{R}^2), \quad \text{para todo} \quad r > 1.$$

Então, usando estimativas elípticas (cf. Teorema 2, [60]) temos

$$G(x) + \frac{1}{2\pi}\log|x| \in C^{1,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^2).$$

Consequentemente, similar a [44, 47, 52] a função de Green G tem a seguinte representação

$$G(x) = -\frac{1}{2\pi}\log|x| + A_0 + o(1),$$

onde A_0 é uma constante que só depende de α.

Seja ν a normal unitária exterior a ∂B_δ, então usando o Teorema da divergência, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta} (|\nabla G(x)|^2 + (1+|x|^q)|G(x)|^2) \, \mathrm{d}x &= \alpha \int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta} |G(x)|^2 \, \mathrm{d}x - \int_{\partial B_\delta} G(x)\frac{\partial G(x)}{\partial(-\nu)} \, \mathrm{d}\sigma \\ &= \alpha\|G\|_2^2 + G(\delta)\int_{\partial B_\delta} \frac{\partial G(x)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}\sigma + o_\delta(1).\end{aligned} \tag{4.63}$$

Usando integração por partes em ambos os lados da equação (4.57) sobre B_δ, temos que

$$\int_{B_\delta} \Delta G(x) \, \mathrm{d}x = 1 + \int_{B_\delta} [\alpha - (1+|x|^q)]G(x) \, \mathrm{d}x.$$

E novamente pelo Teorema da divergência, obtemos que

$$\int_{\partial B_\delta} \frac{\partial G(x)}{\partial \nu} \, \mathrm{d}\sigma = 1 + \int_{B_\delta} [\alpha - (1+|x|^q)]G(x) \, \mathrm{d}x.$$

Logo, (4.63) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta}(|\nabla G(x)|^2+(1+|x|^q)|G(x)|^2)\,\mathrm{d}x\\
&\qquad=\alpha\|G\|_2^2+G(\delta)+G(\delta)\int_{B_\delta}[\alpha-(1+|x|^q)]G(x)\,\mathrm{d}x+o_\delta(1)\\
&\qquad=\alpha\|G\|_2^2+G(\delta)+o_\delta(1).
\end{aligned}\tag{4.64}$$

Consequentemente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta}(|\nabla G(x)|^2+(1+|x|^q)|G(x)|^2)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2\pi}\log\delta+A_0+\alpha\|G\|_2^2+o_\delta(1),$$

Logo, para k suficientemente grande temos

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta}(|\nabla u_k|^2+(1+|x|^q)|u_k|^2)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{c_k^2}\left(-\frac{1}{2\pi}\log\delta+A_0+\alpha\|G\|_2^2+o_\delta(1)+o_k(1)\right).$$

Agora, sejam $b_k=u_k(\delta)$ e $w_k=(u_k-b_k)^+$, então $w_k\in H_0^1(B_\delta)$ e

$$\begin{aligned}
\tau_k=\int_{B_\delta}|\nabla u_k|^2\,\mathrm{d}x &= 1-\left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta}(|\nabla u_k|^2+(1+|x|^q)|u_k|^2)\,\mathrm{d}x\right)-\int_{B_\delta}(1+|x|^q)u_k^2\,\mathrm{d}x\\
&= 1-\left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_\delta}(|\nabla u_k|^2+(1+|x|^q)|u_k|^2)\,\mathrm{d}x\right)+o_k(1)\\
&= 1-\frac{1}{c_k^2}\left(-\frac{1}{2\pi}\log\delta+A_0+\alpha\|G\|_2^2+o_\delta(1)+o_k(1)\right).
\end{aligned}$$

Pelo Lema 4.4.1, temos que

$$\limsup_{k\to+\infty}\int_{B_\delta}(e^{4\pi(w_k/\tau_k^{1/2})^2}-1)\,\mathrm{d}x\le\pi\delta^2 e.\tag{4.65}$$

Sabemos por (4.39) que em B_{Lr_k}, $\varphi_k\to\varphi$ em $C_{loc}^{1,\theta}(\mathbb{R}^2)$, onde $\varphi_k(x/r_k)=c_k(u_k(x)-c_k)$, logo sobre B_{Lr_k} provaremos a seguinte estimativa:

$$\alpha_k u_k^2\le 4\pi w_k^2/\tau_k-2\log\delta+4\pi A_0+o(1).\tag{4.66}$$

Com efeito, usando que $u_k c_k\to G$ em $C_{loc}^{1,\theta}(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$ e que $\|u_k\|_2\to 0$, obtemos as seguintes estimativas:

$$\begin{aligned}
\alpha_k u_k^2 &\le 4\pi(1+\alpha\|u_k\|_2^2)(w_k+b_k)^2\\
&= 4\pi(1+\alpha\|u_k\|_2^2)(w_k^2+2w_kb_k+b_k^2)\\
&= 4\pi w_k^2+8\pi w_kb_k+4\pi b_k^2+4\pi\alpha\|u_k\|_2^2w_k^2+8\pi\alpha\|u_k\|_2^2w_kb_k+4\pi\alpha\|u_k\|_2^2b_k^2.
\end{aligned}$$

Usando a definição de w_k, obtemos

$$\begin{aligned}
\alpha_k u_k^2 &\le 4\pi w_k^2+8\pi(c_k-b_k)b_k+4\pi b_k^2+12\pi\alpha\|u_k\|_2^2(u_k-c_k)c_k+4\pi\alpha\|u_k\|_2^2c_k^2\\
&= 4\pi w_k^2+8\pi b_kc_k-4\pi b_k^2+12\pi\alpha\|u_k\|_2^2(u_k-c_k)c_k+4\pi\alpha\|c_ku_k\|_2^2\\
&\le 4\pi w_k^2+8\pi b_kc_k+12\pi\alpha\|u_k\|_2^2\varphi_k+4\pi\alpha\|c_ku_k\|_2^2.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\alpha_k u_k^2 \leq 4\pi w_k^2 + 8\pi b_k c_k + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + o_k(1). \tag{4.67}$$

Agora vamos estimar o primeiro destes termos. Provaremos que

$$4\pi w_k^2 \quad \leq \quad 4\pi(w_k/\tau_k^{1/2})^2 + 2\log\delta - 4\pi A_0 - 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + o_\delta(1) + o_k(1). \tag{4.68}$$

De fato, denote por $H_k(\delta) = -\dfrac{1}{2\pi}\log\delta + A_0 + \alpha\|G\|_2^2 + o_\delta(1) + o_k(1)$, então

$$\tau_k = 1 - \frac{1}{c_k^2}H_k(\delta)$$

e

$$0 \leq c_k^{-2}H_k^2(\delta) \Rightarrow -H_k(\delta) \leq -H_k(\delta) + c_k^{-2}H_k^2(\delta) \Rightarrow -H_k(\delta) \leq -H_k(\delta)\left(1 - c_k^{-2}H_k(\delta)\right)$$

Multiplicando a última desigualdade por $c_k^{-2}w_k^2$, obtemos que

$$-c_k^{-2}H_k(\delta)w_k^2 \leq -H_k(\delta)\left(1 - c_k^{-2}H_k(\delta)\right)c_k^{-2}w_k^2 \Rightarrow -c_k^{-2}H_k(\delta)w_k^2 \leq -H_k(\delta)\left(1 - c_k^{-2}H_k(\delta)\right).$$

Assim, temos que

$$w_k^2(1 - c_k^{-2}H_k(\delta)) \leq w_k^2 - H_k(\delta)\left(1 - c_k^{-2}H_k(\delta)\right).$$

Esta desigualdade implica que

$$w_k^2 \quad \leq \quad \frac{w_k^2}{\tau_k} - H_k(\delta).$$

Pela definição de $H_k(\delta)$ segue a afirmação.

Agora, usando que $b_k c_k \to G(\delta)$, temos

$$8\pi b_k c_k = -4\log\delta + 8\pi A_0 + o_\delta(1) + o(1). \tag{4.69}$$

Combinando (4.67), (4.68) e (4.69), obtemos (4.66).

Logo, usando (4.66) para k suficientemente grande tal que $B_{Lr_k} \subset B_\delta$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{B_{Lr_k}} e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x \quad &\leq \quad \delta^{-2}e^{4\pi A_0 + o(1)}\int_{B_{Lr_k}} e^{\alpha_k (w_k/\tau_k^{1/2})^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \quad \delta^{-2}e^{4\pi A_0 + o(1)}\int_{B_{Lr_k}} \left(e^{\alpha_k (w_k/\tau_k^{1/2})^2} - 1\right)\mathrm{d}x + o_k(1) \\
&\leq \quad \delta^{-2}e^{4\pi A_0 + o(1)}\int_{B_\delta} \left(e^{\alpha_k (w_k/\tau_k^{1/2})^2} - 1\right)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Segue por (4.65) que

$$\limsup_{k\to+\infty}\int_{B_{Lr_k}} e^{\alpha_k u_k^2}\,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \pi e^{4\pi A_0 + 1}. \tag{4.70}$$

Existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{x \in \mathbb{R}^2 : u_k(x) \geq \frac{c_k}{A}\} \subset B_{Lr_k}$ para $k \geq k_0$, logo por (4.55), temos

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{B_\delta \setminus B_{Lr_k}} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x = \limsup_{k\to+\infty} \int_{B_\delta \setminus B_{Lr_k}} (e^{\alpha_k |u_k^A|^2} - 1)\, \mathrm{d}x = 0. \tag{4.71}$$

Por outro lado, pelo Lema Radial (cf. [43]) existe $C = C(\delta) > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x \leq C\|u_k\|_2^2.$$

Como $\|u_k\|_2^2 \to 0$, obtemos

$$\limsup_{k\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x = 0. \tag{4.72}$$

Assim para k suficientemente grande, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x &= \int_{B_{Lr_k}} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{Lr_k}} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x \\
&\leq \int_{B_{Lr_k}} e^{\alpha_k u_k^2}\, \mathrm{d}x + \int_{B_\delta \setminus B_{Lr_k}} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\delta} (e^{\alpha_k u_k^2} - 1)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Por (4.70), (4.71) e (4.72), obtemos que

$$\ell(\alpha) \leq \pi e^{4\pi A_0 + 1}.$$

■

4.5 Prova dos resultados principais no caso: $c_k \nearrow +\infty$

Para provamos os Teoremas 4.1.1 e 4.1.2, argumentando de forma similar a Li em [47] precisamos construir uma sequência de funções teste contradizendo a proposição 4.4.1. Mais precisamente, devemos determinar $v_\varepsilon \in E$ tais que $\|v_\varepsilon\| = 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi(1+\alpha\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2} - 1 \right] \mathrm{d}x > \pi e^{4\pi A_0 + 1}, \tag{4.73}$$

para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno.

Definamos a sequência:

$$v_\varepsilon(x) = \begin{cases} C - \dfrac{\log(1 + \pi|x/\varepsilon|^2) + B}{4\pi C} & \text{se} \quad |x| < L\varepsilon \\ \dfrac{G(|x|)}{C} & \text{se} \quad |x| \geq L\varepsilon, \end{cases}$$

onde C, B e L são funções de ε (as quais serão definidas depois por (4.75), (4.76) e (4.78)) tais que:

(i) $L \to +\infty$, $C \to +\infty$ e $L\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$;

(ii) $C - \dfrac{\log(1+\pi L^2)+B}{4\pi C} = \dfrac{G(L\varepsilon)}{C}$;

(iii) $\dfrac{\log L}{C^2} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$.

A seguir normalizando v_ε vamos obter algumas informações sobre B, C e L. Primeiro usando o mesmo argumento das estimativas (4.63), (4.64) e a definição de v_ε sobre $\mathbb{R}^2 \setminus B_{L\varepsilon}$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_{L\varepsilon}} & (|\nabla v_\varepsilon|^2 + (1+|x|^q)|v_\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{C^2}\left(\int_{\mathbb{R}^2\setminus B_{L\varepsilon}} (|\nabla G(x)|^2 + (1+|x|^q)|G(x)|^2)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \frac{1}{C^2}\left(\alpha\|G\|_2^2 - \int_{\partial B_{L\varepsilon}} G(L\varepsilon)\frac{\partial G(x)}{\partial(-\nu)}\,\mathrm{d}\sigma + o_\delta(1)\right) \\
&= \frac{1}{C^2}\left(\alpha\|G\|_2^2 + G(L\varepsilon) + G(L\varepsilon)\int_{B_{L\varepsilon}} [\alpha - (1+|x|^q)]G(x)\,\mathrm{d}x + o_\delta(1)\right) \\
&= \frac{1}{C^2}\big(\alpha\|G\|_2^2 + G(L\varepsilon) + o_\varepsilon(1) + o_\delta(1)\big) \\
&= \frac{1}{4\pi C^2}\big(4\pi\alpha\|G\|_2^2 - \log(L\varepsilon)^2 + 4\pi A_0 + o_\varepsilon(1) + o_\delta(1)\big).
\end{aligned}
$$

Por outro lado, por um simples cálculo, temos que

$$\int_{B_{L\varepsilon}} |\nabla v_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4\pi C^2}\big(\log(1+\pi L^2) - 1\big) + O(L^{-2}C^{-2}).$$

e

$$\int_{B_{L\varepsilon}} (1+|x|^q)|v_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x = O((L\varepsilon)^2 C^2 \log L).$$

Consequentemente, temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_\varepsilon|^2 & + (1+|x|^q)|v_\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4\pi C^2}\big(-1 + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + 4\pi A_0 + \log(1+\pi L^2) - \log(L\varepsilon)^2 + \phi\big),
\end{aligned}
$$

onde

$$\phi = O((L\varepsilon)^2 C^2 \log L (L\varepsilon)^2 \log^2(L\varepsilon) + L^{-2} + o_\varepsilon(1) + o_\delta(1)).$$

Assim, fazendo

$$\int_{\mathbb{R}^2} (|\nabla v_\varepsilon|^2 + (1+|x|^q)|v_\varepsilon|^2)\,\mathrm{d}x = 1,$$

obtemos

$$4\pi C^2 = -1 + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + 4\pi A_0 + \log(1+\pi L^2) - \log(L\varepsilon)^2 + \phi, \tag{4.74}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}4\pi C^2 &= -1+4\pi\alpha\|G\|_2^2+4\pi A_0+\log(1+\pi L^2)-\log L^2-\log\varepsilon^2+\phi\\ &= -1+4\pi\alpha\|G\|_2^2+4\pi A_0+\log\frac{(1+\pi L^2)}{L^2}-\log\varepsilon^2+\phi\\ &= -1+4\pi\alpha\|G\|_2^2+4\pi A_0+\log\pi-\log\varepsilon^2+\phi.\end{aligned}\tag{4.75}$$

Por (ii), temos que

$$4\pi C^2-\log(1+\pi L^2)-\Lambda_\varepsilon = 4\pi G(L\varepsilon).$$

Então combinando com (4.74) e usando a definição de G, obtemos

$$\Lambda_\varepsilon = -1+4\pi\alpha\|G\|_2^2+\phi.\tag{4.76}$$

Agora vamos estimar o seguinte termo:

$$\int_{B_{L\varepsilon}} e^{4\pi(1+\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2}\,\mathrm{d}x.$$

Afirmamos que em $B_{L\varepsilon}$

$$4\pi(1+\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2 \geq (4\pi C^2-2\Lambda_\varepsilon)-2\log(1+\pi|x/\varepsilon|^2)+4\pi\alpha\|G\|_2^2+O(C^{-2}\log L).$$

De fato, temos que

$$\|v_\varepsilon\|_2^2 = C^{-2}\|G\|_2^2+o_\varepsilon(1)$$

e em $B_{L\varepsilon}$, temos que

$$\begin{aligned}4\pi(1+\alpha\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2 &= 4\pi\left(1+\alpha C^{-2}\|G\|_2^2\right)\left(C-\frac{\log(1+\pi|x/\varepsilon|^2)+\Lambda_\varepsilon}{4\pi C}\right)^2\\ &\geq 4\pi\left(1+\alpha C^{-2}\|G\|_2^2\right)C^2\left(1-2\frac{\log(1+\pi|x/\varepsilon|^2)+\Lambda_\varepsilon}{4\pi C^2}\right)\\ &= \left(1+\alpha C^{-2}\|G\|_2^2\right)\left[(4\pi C^2-2\Lambda_\varepsilon)-2\log(1+\pi|x/\varepsilon|^2)\right].\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}4\pi(1+\alpha\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2 &\geq (4\pi C^2-2\Lambda_\varepsilon)-2\log(1+\pi|x/\varepsilon|^2)+4\pi\alpha\|G\|_2^2\\ &- 2C^{-2}\alpha\|G\|_2^2(\log(1+\pi|x/\varepsilon|^2)+\Lambda_\varepsilon)\\ &= (4\pi C^2-2\Lambda_\varepsilon)-2\log(1+\pi|x/\varepsilon|^2)+4\pi\alpha\|G\|_2^2+O(C^{-2}\log^2 L).\end{aligned}$$

Assim provamos a afirmação.

Agora, afirmamos que:

$$\int_{B_{L\varepsilon}}\left[e^{4\pi(1+\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2}-1\right]\,\mathrm{d}x \geq \pi e^{4\pi A_0+1}+O((L\varepsilon)^2C^2\log L+L^{-2}+(L\varepsilon)^2\log^2 L\varepsilon).$$

De fato, temos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{L\varepsilon}} \left[e^{4\pi(1+\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2} - 1\right] \, \mathrm{d}x &\geq e^{(4\pi C^2 - 2\Lambda_\varepsilon) + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + O(C^{-2}\log L)} \int_{B_{L\varepsilon}} \frac{1}{(1+\pi|x/\varepsilon|^2)^2} \, \mathrm{d}x \\
&= e^{(4\pi C^2 - 2\Lambda_\varepsilon) + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + O(C^{-2}\log^2 L)} \int_{B_L} \frac{\varepsilon^2}{(1+\pi|x|^2)^2} \, \mathrm{d}x \\
&= e^{(4\pi C^2 - 2\Lambda_\varepsilon) + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + O(C^{-2}\log^2 L)} \int_0^{\pi L^2} \frac{\varepsilon^2}{(1+s)^2} \, \mathrm{d}s \\
&= e^{(4\pi C^2 - 2\Lambda_\varepsilon) + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + O(C^{-2}\log^2 L)} \varepsilon^2 \frac{\pi L^2}{1+\pi L^2}.
\end{aligned}$$

Por (4.74), (4.75), (4.76), temos que

$$(4\pi C^2 - 2\Lambda_\varepsilon) + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 = 1 + 4\pi A_0 + \log(\pi/\varepsilon^2) - \phi.$$

Assim, obtemos que

$$\begin{aligned}
\int_{B_{L\varepsilon}} \left[e^{4\pi(1+\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2} - 1\right] \, \mathrm{d}x &\geq e^{1+4\pi A_0 + \log(\pi/\varepsilon^2) - \phi + O(C^{-2}\log^2 L)} \varepsilon^2 (1 + O(L^{-2})) \\
&\geq \pi e^{1+4\pi A_0} + O((L\varepsilon)^2 C^2 \log L + L^{-2} + (L\varepsilon)^2 \log^2 L\varepsilon).
\end{aligned}$$

O que prova a afirmação.

Além disso, em $\mathbb{R}^2 \setminus B_{L\varepsilon}$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{L\varepsilon}} \left[e^{4\pi(1+\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2} - 1\right] \, \mathrm{d}x \geq 4\pi \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{L\varepsilon}} \left|\frac{G(x)}{C}\right|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi(1+\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2} - 1\right] \, \mathrm{d}x &\geq \pi e^{4\pi A_0 + 1} + 4\pi \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{L\varepsilon}} \left|\frac{G(x)}{C}\right|^2 \, \mathrm{d}x \\
&+ O((L\varepsilon)^2 C^2 \log L + L^{-2} + (L\varepsilon)^2 \log^2 L\varepsilon).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi(1+\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2} - 1\right] \, \mathrm{d}x &\geq \pi e^{4\pi A_0 + 1} + \frac{4\pi}{C^2} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_{L\varepsilon}} |G(x)|^2 \, \mathrm{d}x \qquad (4.77) \\
&+ O((L\varepsilon)^2 C^4 \log L + C^2/L^2 + C^2 (L\varepsilon)^2 \log^2 L\varepsilon).
\end{aligned}$$

Agora tomando $L = -\log\varepsilon$, obtemos que $L\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Logo para concluímos o resultado precisamos provar que existe $C = C(\varepsilon)$ solução da equação (4.75). Para provarmos esta afirmação defina:

$$z(t) = -4\pi t^2 - 1 + 4\pi\alpha\|G\|_2^2 + 4\pi A_0 + \log\pi - \log\varepsilon^2 + \phi.$$

Desde que

$$z\left(\left(-\frac{2}{4\pi}\log\varepsilon^2\right)^{1/2}\right)=\log\varepsilon^2+o_\varepsilon(1)+\log\pi+\phi<0$$

e

$$z\left(\left(-\frac{1}{8\pi}\log\varepsilon^2\right)^{1/2}\right)=-\frac{1}{2}\log\varepsilon^2+o_\varepsilon(1)+\log\pi+\phi>0$$

para ε pequeno, temos que z possui um zero no intervalo

$$\left(\left(-\frac{1}{8\pi}\log\varepsilon^2\right)^{1/2},\left(-\frac{2}{4\pi}\log\varepsilon^2\right)^{1/2}\right).$$

Assim, para definir C é suficiente considerarmos

$$4\pi C^2=-\log\varepsilon^2+O(1). \tag{4.78}$$

Assim, quando $\varepsilon\to 0$, temos

$$\frac{\log L}{C^2}\to 0$$

e então

$$(L\varepsilon)^2C^4\log L+C^2L^{-2}+C^2(L\varepsilon)^2\log^2 L\varepsilon\to 0.$$

Logo, (i), (ii) e (iii) valem e podemos concluir por (4.78) que para $\varepsilon>0$ suficientemente pequeno

$$\int_{\mathbb{R}^2}\left[e^{4\pi(1+\alpha\|v_\varepsilon\|_2^2)v_\varepsilon^2}-1\right]\,\mathrm{d}x>\pi e^{4\pi A_0+1}.$$

Assim obtemos uma contradição entre (4.73) e a Proposição 4.4.1, o que implica que (c_k) é limitada.

Assim finalizamos a prova do primeiro ponto do Teorema 4.1.1 e a prova do Teorema 4.1.2, pois vimos no Lema 4.3.2 que quando (c_k) é limitada, $\ell(\alpha)$ é atingido.

4.6 Calculando funções testes

Nesta seção provaremos o segundo ponto do Teorema 4.1.1, isto é, $\ell(\alpha)=+\infty$ se $\alpha\geq\lambda_1$. Para prova deste resultado utilizaremos um argumento similar ao feito por Adimuthi-Druet em [4]. Consideremos λ_1 como definido em (4.10), ϕ_1 auto-função positiva associada a λ_1 e tal que $\|\phi_1\|_2=1$, e a sequência de Moser (cf. [53]):

$$w_k(x)=(2\pi)^{-1/2}\begin{cases}(\log k)^{1/2} & \text{se} \quad |x|\leq 1/k\\ \dfrac{\log(1/|x|)}{(\log k)^{1/2}} & \text{se} \quad 1/k\leq|x|\leq 1\\ 0 & \text{se} \quad |x|\geq 1.\end{cases}$$

Lembremos que $w_k \in H^1(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}(w_k) = \overline{B}_1$, $\int_{B_1} |\nabla w_k|^2 \, \mathrm{d}x = 1$ e $w_k \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_0^1(B_1)$. Agora, definamos

$$v_k = w_k + t_k \phi_1,$$

onde (t_k) é uma sequência tal que:

(T_1) $t_k > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$;

(T_2) $t_k \to 0$ quando $k \to +\infty$;

(T_3) $\beta_k = t_k (\log k)^{1/2} \to +\infty \quad \text{quando} \quad k \to +\infty$;

(T_4) $t_k^2 (\log k)^{1/2} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty$.

Podemos tomar por exemplo $t_k = (\log k)^{-1/3}$. Nosso principal objetivo é provar que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left[e^{4\pi \left(1 + \alpha \frac{\|v_k\|_2^2}{\|v_k\|^2}\right) \frac{v_k^2}{\|v_k\|^2}} - 1 \right] \mathrm{d}x \to +\infty.$$

Para nossa proposta, calculamos $\|v_k\|^2$ e $\|v_k\|_2^2$. Primeiro, temos que

$$\|v_k\|^2 = \|w_k\|^2 + 2t_k \int_{B_1} (\nabla w_k \nabla \phi_1 + (1 + |x|^q) w_k \phi_1) \, \mathrm{d}x + t_k^2 \|\phi_1\|^2.$$

Usando as definições de λ_1 e ϕ_1, temos

$$\|v_k\|^2 = 1 + \int_{B_1} (1 + |x|^q) w_k^2 \, \mathrm{d}x + 2\lambda_1 t_k \int_{B_1} \phi_1 w_k \, \mathrm{d}x + \lambda_1 t_k^2. \tag{4.79}$$

Como

$$0 \le \int_{B_1} (1 + |x|^q) w_k^2 \, \mathrm{d}x \le 2\|w_k\|_2^2 \to 0,$$

obtemos que

$$\int_{B_1} (1 + |x|^q) w_k^2 \mathrm{d}x \to 0. \tag{4.80}$$

Agora, vamos estimar o termo $t_k \int_{B_1} \phi_1 w_k \, \mathrm{d}x$. Notemos que

$$\begin{aligned} t_k \int_{B_1} \phi_1 w_k \, \mathrm{d}x &= (2\pi)^{-1/2} t_k \left\{ \int_{|x| \le 1/k} \sqrt{\log k} \phi_1 \, \mathrm{d}x + \int_{1/k \le |x| \le 1} \frac{\log(1/|x|)}{\sqrt{\log k}} \phi_1 \, \mathrm{d}x \right\} \\ &= (2\pi)^{-1/2} \frac{t_k}{\sqrt{\log k}} \left\{ \int_{|x| \le 1/k} \log k \phi_1 \, \mathrm{d}x + \int_{1/k \le |x| \le 1} \log(1/|x|) \phi_1 \, \mathrm{d}x \right\}. \end{aligned}$$

Usando que $\beta_k = t_k \sqrt{\log k}$, temos

$$\frac{t_k}{\sqrt{\log k}} = t_k^2 \beta_k^{-1},$$

assim

$$t_k \int_{B_1} \phi_1 w_k \, \mathrm{d}x = (2\pi)^{-1/2} t_k^2 \beta_k^{-1} \left\{ \int_{|x| \le 1/k} \log k \phi_1 \, \mathrm{d}x + \int_{1/k \le |x| \le 1} \log(1/|x|) \phi_1 \, \mathrm{d}x \right\}.$$

Notemos que

$$0 \le \int_{|x| \le 1/k} \log k \phi_1 \, \mathrm{d}x = \log k \int_{|x| \le 1/k} \phi_1 \, \mathrm{d}x \le 2\pi \|\phi_1\|_\infty \frac{\log k}{k^2} \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to +\infty.$$

Logo,

$$t_k \int_{B_1} \phi_1 w_k \, \mathrm{d}x = o(t_k^2 \beta_k^{-1}) + (2\pi)^{-1/2} t_k^2 \beta_k^{-1} \int_{1/k \le |x| \le 1} \log(1/|x|) \phi_1 \, \mathrm{d}x. \tag{4.81}$$

Definamos

$$G(x) = \begin{cases} (2\pi)^{-1/2} \log(1/|x|) & \text{se} \quad |x| \le 1 \\ 0 & \text{se} \quad |x| \ge 1. \end{cases}$$

Combinando (4.79), (4.80), (4.81) e utilizando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos

$$\|v_k\|^2 = 1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1 t_k^2 \beta_k^{-1} \int_{B_1} \phi_1 G(x) \, \mathrm{d}x + o(t_k^2 \beta_k^{-1}). \tag{4.82}$$

Analogamente, temos que

$$\|v_k\|_2^2 = t_k^2 + 2 t_k^2 \beta_k^{-1} \int_{B_1} \phi_1 G(x) \, \mathrm{d}x + o(t_k^2 \beta_k^{-1}). \tag{4.83}$$

De fato,

$$\|v_k\|_2^2 = \|w_k\|_2^2 + 2 t_k \int_{B_1} w_k \phi_1 \, \mathrm{d}x + t_k^2 \|\phi_1\|_2^2,$$

usando que $\|w_k\|_2 \to 0$, $\|\phi_1\|_2 = 1$ e a estimativa acima para $t_k \int_{B_1} w_k \phi_1 \, \mathrm{d}x$, obtemos o resultado.

Por (4.82), (4.83) e usando o Lema 4.6.1 (ver o final desta seção), obtemos que

$$1 + \alpha \frac{\|v_k\|_2^2}{\|v_k\|^2} = 1 + \alpha t_k^2 + 2\alpha t_k^2 \beta_k^{-1} \int_{B_1} \phi_1 G(x) \, \mathrm{d}x + o(t_k^2 \beta_k^{-1}) + O(t_k^4)$$

e pelo Lema 4.6.2 (ver o final desta seção), temos

$$\begin{aligned} \left(1 + \alpha \frac{\|v_k\|_2^2}{\|v_k\|^2}\right) \frac{1}{\|v_k\|^2} &= 1 + (\alpha - \lambda_1) \left(t_k^2 + 2 t_k^2 \beta_k^{-1} \int_{B_1} \phi_1 G(x) \, \mathrm{d}x \right) \\ &+ o(t_k^2 \beta_k^{-1}) + O(t_k^4). \end{aligned}$$

Desde que $\alpha \ge \lambda_1$, obtemos que

$$\left(1 + \alpha \frac{\|v_k\|_2^2}{\|v_k\|^2}\right) \frac{1}{\|v_k\|^2} \ge 1 + o(t_k^2 \beta_k^{-1}) + O(t_k^4).$$

Agora, notemos que

$$
\begin{aligned}
4\pi\left(1+\alpha\frac{\|v_k\|_2^2}{\|v_k\|^2}\right)\frac{v_k^2}{\|v_k\|^2} &\geq 4\pi(w_k^2+t_k\phi_1)^2(1+o(t_k^2\beta_k^{-1})+O(t_k^4)) \\
&\geq 4\pi(w_k^2+2t_kw_k\phi_1)(1+o(t_k^2\beta_k^{-1})+O(t_k^4)) \\
&= 4\pi\left((2\pi)^{-1}\log k+2(2\pi)^{-1/2}t_k\sqrt{\log k}\phi_1\right)(1+o(t_k^2\beta_k^{-1})+O(t_k^4)) \\
&= (2\log k+4\sqrt{2\pi}\beta_k\phi_1)(1+o(t_k^2\beta_k^{-1})+O(t_k^4)).
\end{aligned}
$$

Denotemos $\theta_k = o(t_k^2\beta_k^{-1})$ e $\xi_k = O(t_k^4)$, então em $B_{1/k}$, temos

$$(2\log k+4\sqrt{2\pi}\beta_k\phi_1)(\theta_k+\xi_k) = 2\theta_k\log k+\theta_k\beta_k\phi_1(x)+2\xi_k\log k+\xi_k\beta_k\phi_1(x) \geq o(\beta_k).$$

Logo,

$$4\pi\left(1+\alpha\frac{\|v_k\|_2^2}{\|v_k\|^2}\right)\frac{v_k^2}{\|v_k\|^2} \geq 2\log k+4\sqrt{2\pi}\beta_k\phi_1+o(\beta_k).$$

Seja

$$\bar{I} = \int_{|x|\leq 1/k}(e^{2\log k+4\sqrt{2\pi}\beta_k\phi_1+o(\beta_k)}-1)\,\mathrm{d}x = k^2\int_{|x|\leq 1/k}e^{4\sqrt{2\pi}\beta_k\phi_1+o(\beta_k)}\,\mathrm{d}x-\int_{|x|\leq 1/k}\mathrm{d}x.$$

Lembremos que $\phi_1(0)>0$, logo existe $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $\phi_1(x)>0$ para todo $x\in B_{1/k}$ e $k\geq k_0$. Assim, temos que

$$m_k = \min_{x\in B_{1/k}}\phi_1(x) > 0.$$

Assim, por (T_3)

$$\bar{I} \geq k^2\int_{|x|\leq 1/k}e^{4\sqrt{2\pi}\beta_k m_k+o(\beta_k)}\,\mathrm{d}x-\int_{|x|\leq 1/k}\mathrm{d}x = 2\pi\left(e^{4\sqrt{2\pi}\beta_k m_k+o(\beta_k)}-\frac{1}{k^2}\right)\to+\infty.$$

Donde concluímos o resultado.

Agora provaremos dois lemas que usamos na prova anterior.

Lema 4.6.1. *Suponhamos que* $(T_1)-(T_4)$ *são satisfeitas e sejam*

$$A_k = 1+\lambda_1t_k^2+2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C+o(t_k^2\beta_k^{-1}) \quad \text{e} \quad B_k = t_k^2+2\beta_k^{-1}t_k^2C+o(t_k^2\beta_k^{-1}).$$

Então, temos que

$$\alpha\frac{B_k}{A_k} = \alpha t_k^2+2\alpha\beta_k^{-1}t_k^2C+o(t_k^2\beta_k^{-1})+O(t_k^4).$$

Prova: É suficiente provarmos que

$$\frac{B_k}{A_k}-(t_k^2+2\beta_k^{-1}t_k^2C) = o(t_k^2\beta_k^{-1})+O(t_k^4).$$

Usaremos a seguinte notação $D_k = o(t_k^2\beta_k^{-1})$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\frac{B_k}{A_k} - (t_k^2 + 2\beta_k^{-1}C) &= \frac{t_k^2 + 2\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k}{1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} - (t_k^2 + 2\beta_k^{-1}C) \\
&= \frac{D_k - (t_k^2 + 2\beta_k^{-1}t_k^2C)(\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k)}{1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} \\
&= \frac{D_k}{1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} - \frac{t_k^2 D_k(1 + 2\beta_k^{-1}C)}{1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} \\
&- \frac{t_k^4(\lambda_1 + 4\lambda_1\beta_k^{-1}C + 4\lambda_1\beta_k^{-2}C^2)}{1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k}.
\end{aligned}
$$

Como $t_k \to 0$, $\beta_k \to +\infty$ e $D_k \to 0$, obtemos

$$\frac{D_k}{1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} = o(t_k^2\beta_k^{-1}),$$

$$\frac{t_k^2 D_k(1 + 2\beta_k^{-1}C)}{1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} = o(1)$$

e

$$\frac{t_k^4(\lambda_1 + 4\lambda_1\beta_k^{-1}C + 4\lambda_1\beta_k^{-2}C^2)}{1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} = O(t_k^4).$$

Assim, concluímos o Lema. ■

Lema 4.6.2. *Suponhamos que $(T_1) - (T_4)$ são satisfeitas e sejam*

$$C_k = 1 + \alpha t_k^2 + 2\alpha\beta_k^{-1}t_k^2C + o(t_k^2\beta_k^{-1}) + O(t_k^4) \quad e \quad F_k = 1 + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + o(t_k^2\beta_k^{-1})$$

Então, temos que

$$\frac{C_k}{F_k} = 1 + (\alpha - \lambda_1)t_k^2 + 2(\alpha - \lambda_1)\beta_k^{-1}t_k^2C + o(t_k^2\beta_k^{-1}) + O(t_k^4).$$

Prova: É suficiente provarmos que

$$\frac{C_k}{F_k} - E_k = o(t_k^2\beta_k^{-1}) + O(t_k^4),$$

onde

$$E_k = 1 + (\alpha - \lambda_1)t_k^2 + 2(\alpha - \lambda_1)\beta_k^{-1}t_k^2C.$$

Usaremos as seguintes notações $D_k = o(t_k^2\beta_k^{-1})$ e $\Lambda_k = O(t_k^4)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{C_k}{F_k} - E_k &= \frac{1+\alpha t_k^2 + 2\alpha\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k + \Lambda_k}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} - \left\{1+(\alpha-\lambda_1)t_k^2 + 2(\alpha-\lambda_1)\beta_k^{-1}t_k^2C\right\} \\
&= \frac{D_k + \Lambda_k + \lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} - \frac{\lambda_1 t_k^2 + \lambda_1\alpha t_k^4 + 2\alpha\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^4C - \lambda_1^2 t_k^4 - 2\lambda_1^2\beta_k^{-1}t_k^4}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} \\
&- \frac{2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + 2\alpha\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^4C + 4\alpha\lambda_1\beta_k^{-2}t_k^4C^2 - 2\lambda_1^2\beta_k^{-1}t_k^4C - 4\lambda_1^2\beta_k^{-2}t_k^4C^2}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} \\
&- \frac{D_k(1+(\alpha-\lambda_1)t_k^2 + 2(\alpha-\lambda_1)\beta_k^{-1}t_k^2C)}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k}
\end{aligned}$$

Observemos que os termos com t_k^2 se anulam nas três primeiras parcelas, assim obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{C_k}{F_k} - E_k &= \frac{\Lambda_k}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} \\
&+ t_k^4\frac{-\lambda_1\alpha - 4\alpha\lambda_1\beta_k^{-1}C + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1} - 4\alpha\lambda_1\beta_k^{-2}C^2 + 1\lambda_1\beta_k^{-1}C + \lambda_1^2\beta_k^{-2}C^2}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} \\
&- \frac{D_k[(\alpha-\lambda_1)t_k^2 + 2(\alpha-\lambda_1)\beta_k^{-1}t_k^2C]}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k}.
\end{aligned}$$

Como $t_k \to 0$, $\beta_k \to +\infty$ e $D_k \to 0$, obtemos

$$\frac{\Lambda_k}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} = O(t_k^4),$$

$$\frac{t_k^4[-\lambda_1\alpha - 4\alpha\lambda_1\beta_k^{-1}C + \lambda_1^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1} - 4\alpha\lambda_1\beta_k^{-2}C^2 + 1\lambda_1\beta_k^{-1}C + \lambda_1^2\beta_k^{-2}C^2]}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} = O(t_k^4)$$

e

$$\frac{D_k[(\alpha-\lambda_1)t_k^2 + 2(\alpha-\lambda_1)\beta_k^{-1}t_k^2C]}{1+\lambda_1 t_k^2 + 2\lambda_1\beta_k^{-1}t_k^2C + D_k} = o(t_k^2\beta_k^{-1}).$$

Assim, concluímos o Lema.

■

Referências Bibliográficas

[1] A. Abdellaoni and I. Peral, *Existence and nonexistence result for quasilinear elliptic equations involving the $p-$Laplacian with critical potential*, Annali di Matemática **182** (2003), 247–270.

[2] S. Adachi and K. Tanaka, *Trudinger type inequalities in $\mathbb{R}^N$ and their best exponents*, Proceedings of the American Mathematical Society **128** (1999), 2051–2057.

[3] Adimurthi, *Existence of positive solutions of the semilinear Dirichlet problem with critical growth for the N-Laplacian*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. **17** (1990), 393–413.

[4] Adimurthi and O. Druet, *Blow-up analysis in dimension 2 and a sharp form of Trudinger-Moser inequality*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 295–322.

[5] Adimurthi and K. Sandeep, *A singular Moser-Trudinger embedding and its applications*, Nonlinear Differential Equations and Applications **13** (2007), 585–603.

[6] Adimurthi, P. N. Skikanth and S. L. Yadava, *Phenomena of critical exponent in $\mathbb{R}^2$* , Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **119** (1991), 19–25.

[7] Adimurthi and S. L. Yadava, *Multiplicity results for semilinear elliptic equations in bounded domain of $\mathbb{R}^2$ involving critical exponent*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **17** (1990), 481–504.

[8] J. A. Aguilar and I. Peral, *On an elliptic with exponential growth*, Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova **96** (1996), 143–175.

[9] W. Allegretto and Huang, Y.X., *A Picones identity for the p-Laplacian and applications*, Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. **32** (1998), 819–830

[10] A. Ambrosetti, H. Brezis and G. Cerami, *Combined Effects of Concave and Convex Nonlinearities in some Elliptic Problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 529–543.

[11] A. Ambrosetti and P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[12] A. Anane, *Simplicité et isolation de la première valuer propre de p-Laplacien avec poids*, C.R. Acad. Sci. Paris **305** (1987), 725–728.

[13] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar field equations, I. Existence of ground state*, Arch. Rat. Mech. Anal. **82** (1983), 313-346.

[14] M. S. Berger, *Nonlinearity and Functional Analysis*. Academic Press, New York, 1978.

[15] H. Brézis and E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. **88** (1983), 486–490.

[16] F. Brock, *Radial symmetry for nonnegative solutions of semilinear elliptic equations involving the $p-$Laplacian*, in: Progress in Partial Differential Equations, vol. 1, Pont-Mousson, (1997), in: Pitman Res. Notes Math. ser., vol. 383, Longman, Harlow, (1998),46–57.

[17] D. M. Cao, *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 407–435.

[18] D. M. Cao and Z. J. Zhang, *Eigenfuntions of nonlinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Acta Math. Sci. (English Ed.) **13** (1993), 74–88.

[19] L. Carleson and A. Chang, *On the existence of an extremal function for an inequality of J. Moser*, Bull. sci. Math. **110** (1986), 113–127.

[20] J. Chabrowski, *On multiple solutions for the nonhomgegeneous p-laplacian with a critical Sobolev exponent*, J. Differential Equations **8** (1995), 113–127.

[21] J. Chabrowski,*Variational methods for potential operator equations. With applications to nonlinear elliptic equations*. de Gruyter Studies in Mathematics, **24** Walter de Gruyter., Berlin, 1997.

[22] W. Chen and C. Li, *Classification of solutions of some nonlinear elliptic equations*, Duke Math. J. **63** (1991), 615–622.

[23] D.G. Costa, *On a class of elliptic systems in* $\mathbb{R}^N$, Electron. J. Differential Equations (1994), No. 07, 1–14.

[24] M. Cuesta, *Eigenvalue problems for the p-Laplacian with indefinite weights*, Electronic Journal of Differential Equations (2001), No. 33, 1–9.

[25] L. Damascelli and F. Pacella, *Monotonicity and symmetry of solutions of $p-$Laplace equations, $1 < p < 2$, via the moving plane method*, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4) 26 (4) (1998), 689–707.

[26] D. G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Escola Latino-Americana de Eq. Diferenciais, Universidade de São Paulo, 1981.

[27] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[28] D. G. de Figueiredo, J. M. do Ó and B. Ruf, *On an inequality by Trudinger and J. Moser and related elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **55** (2002), 135–152.

[29] D. G. de Figueiredo, J. M. do Ó and B. Ruf, *Elliptic equations and systems with critical Trudinger-Moser nonlinearities*, preprint (2010).

[30] D. G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki and B. Ruf, *Elliptic equations in $\mathbb{R}^2$ with nonlinearities in the critical growth range*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **3** (1995), 139–153.

[31] J. I. Díaz, *Nonlinear partial differential equations and free boundaries. Vol. I. Elliptic equations*,"Research Notes in Mathematics", Edit. Pitman, **106**, Boston, MA (1985).

[32] J. M. do Ó, *Semilinear Dirichlet problems for the N-laplaciano in $\mathbb{R}^N$ with nonlinearities in the critical growth range*, Differential Integral Equations **5** (1996), 967–979.

[33] J. M. do Ó, *N-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ with critical growth*, Abstract and Applied Analysis **2** (1997), 301–315.

[34] J. M. do Ó, E. Medeiros and U. B. Severo, *A nonhomogeneous elliptic problem involving critical growth in dimension two*, J. Math. Anal. Appl. **345** (2008) 286–304

[35] J. M. do Ó, E. Medeiros and U. B. Severo, *On a quasilinear nonhomogeneous elliptic equation with critical growth in $\mathbb{R}^N$*, J. Differential Equations **246** (2009), 1363–1386.

[36] M. Flucher, *Extremal functions for Trudinger-Moser inequality in 2 dimensions*, Comment. Math. Helv. **67** (1992), 471–497.

[37] A. Garcia, J. Manfredi and I. Peral, *Sobolev versus Holder local minimizers and global multiplicity for some quasilinear elliptic equations*, Comm. Comtemp. Math. 2 **(3)** (2000), 385–404.

[38] A. Garcia and I. Peral, *Some results about the existence of a second positive solution in a quasilinear critical problem*, Indiana Univ. Math. J. **43** (1994), 941–957.

[39] N. Ghoussoub and D. Preiss, *A general mountain pass principle for locating and classifying critical points*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Lineaire **6** (1989), 321–330.

[40] J. Giacomoni, S. Prashanth and K. Sreenadh, *A global multiplicity result for $N-$Laplacian with critical nonlinearity of concave-convex type*, J. Differential equations **232** (2007), 544–572.

[41] J. Giacomoni, S. Prashanth and K. Sreenadh, *$W^{1,N}$ versus C^1 local minimizers for elliptic funcionals with critical growth in R^N*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I **347** (2009), 255–260.

[42] D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag Berlim Heidelberg, 2001.

[43] O. Kavian, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[44] S. Kichenassamy and L. Veron, *Singular solution of the $p-$Laplace equation*, Math. Ann. **275** (1986), 599–615.

[45] V. Kondrat'ev and M. Shubin, *Discreteness of spectrum for the Schödinger operators on manifolds of bounded geometry*, Operator Theory: Advances and Applications **110** (1999), 185–226.

[46] Y. Li, *Moser-Trudinger inequality on compact Riemannian manifolds of dimension two*, J. Partial Differential Equations **14** (2001), 163–192.

[47] Y. Li, *The extremal functions for Moser-Trudinger inequality on compact Riemannian manifolds*, To appear in Sci. Chinese, series **A**.

[48] G. M. Liebermann, *Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equation*, Nonlinear Anal. **12** (1988), 1203–1219.

[49] K. Lin, *Extremal functions for Moser's inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 2663–2671.

[50] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, Part I*, Revista Matemática Iberoamericana **1** (1985), 145–201.

[51] Z. Liu and Z. Q. Wang, *Schrödinger equations with concave and convex nonlinearities.* Z. Angew. Math. Phys. **56** (2005), no. 4, 609–629.

[52] G. Lu and Y. Yang, *Sharp constant and extremal function for the improved Moser-Trudinger inequality involving L^p norm in two dimension*, Discrete and Continuous, Dynamical Systems **25**, (2009), 963–979.

[53] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J. **20** (1971), 1077–1092.

[54] Pólya, G. and Szegö, G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.

[55] Rabinowitz, P. H., *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*. J. Functional Analysis, 1971.

[56] S. Prashanth and K. Sreenadh, *Multiplicity result in a ball for $p-$Laplace equation with positive nonlinearity*, Adv. Differential Equations 7 (7) (2002), 877–896.

[57] P. H. Rabinowitz, *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*. CBMS, n. 65, AMS, 1986.

[58] P.H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. angew Math. Phys (Zamp) 43 (1992), 270-291.

[59] B. Ruf, *A sharp Trudinger-Moser type inequality for unbounded domains in $\mathbb{R}^2$*, J. Funct. Anal. **219** (2005), 340–367.

[60] J. Serrin, *Local behavior of solutions of quasilinear equations*, Acta Math. **111** (1964), 247–302.

[61] M. Struwe, *Positive solution of critical semilinear elliptic equations on non-contractible planar domain*, J. Eur. Math. Soc. **2** (2000), 100–126.

[62] W. Strauss, *Mathematical aspects of classical nonlinear field equations. Nonlinear problems in theoretical physics*, Lecture Notes in Phys., **98**, Springer, Berlin-New York, 1979.

[63] P. Tolksdorf, *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equation*, J. Differential Equations **51** (1984), 126–150.

[64] E. Tonkes, *Solution to a perturbed critical semilinear equation concerning the N-Laplacian in $\mathbb{R}^N$*. Comment. Math. Univ. Carolinac **40** (1999), 679–699.

[65] N. S. Trudinger, *Linear elliptic operators with measurable coefficients*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa **27** (1973), 265–308.

[66] N. S. Trudinger, *On imbedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–484.

[67] J. L. Vásquez, *A strong maximum principle for some quasilinear equations*, Appl. Math. Optim. **12** (1984), 191–202.

[68] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, (1996).

[69] Y. Yunyan, *A sharp form of Moser-Trudinger inequality in high dimension*, Journal of Functional Analysis **239** (2006), 100–126.

Este volume foi tipografado em LaTeX na classe UFPEThesis (www.cin.ufpe.br/~paguso/ufpethesis).