Universidade Estadual de Campinas

INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Existência e Concentração de Soluções para Equações de Schrödinger Quase-Lineares

por

Elisandra de Fátima Gloss de Moraes †

Doutorado em Matemática - Campinas - SP

Orientador: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Co-orientador: Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo

†Este trabalho contou com o suporte financeiro da Capes.

Existência e Concentração de Soluções para uma Classe de Equações de Schrödinger Quase-Lineares

Este exemplar corresponde à redação final da Tese devidamente corrigida e defendida por **Elisandra de Fátima Gloss de Moraes** e aprovada pela comissão julgadora.

Campinas, 09 de março de 2010.

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó
(Orientador)

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo
(Co-orientador)

Banca examinadora:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó.
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki.
Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes.
Prof. Dr. Pierluigi Benevieri.
Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva.

Tese apresentada ao Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica da UNICAMP como requisito parcial para obtenção do título de **Doutora em Matemática**.

FICHA CATALOGRÁFICA ELABORADA PELA BIBLIOTECA DO IMECC DA UNICAMP
Bibliotecária: Miriam Cristina Alves – CRB8 / 5094

Moraes, Elisandra de Fátima Gloss de
M791e Existência e concentração de soluções para equações de Schrödinger quase-lineares/ Elisandra de Fátima Gloss de Moraes -- Campinas, [S.P. : s.n.], 2010.

Orientador : João Marcos Bezzerra do Ó; Djairo Guedes de Figueiredo
Tese (doutorado) - Universidade Estadual de Campinas, Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica.

1. Schrödinger, Equação de. 2. Princípios variacionais. 3. Equações diferenciais elípticas. I. Do Ó, João Marcos Bezerra. II. Figueiredo, Djairo Guedes de. III. Universidade Estadual de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. IV. Título.

Título em inglês: Existence and concentration of solutions for quasilinear Schrödinger equations

Palavras-chave em inglês (Keywords): 1. Schrödinger, Equation. 2. Variational principles. 3. Elliptic differential equations.

Área de concentração: Análise

Titulação: Doutora em Matemática

Banca examinadora: Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó (UFPB)
Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki (UFV)
Prof. Dr. Orlando Francisco Lopes (IME-USP)
Prof. Dr. Pierluigi Benevieri (IME-USP)
Prof. Dr. Francisco Odair Vieira de Paiva (IMECC-UNICAMP)

Data da defesa: 09/03/2010

Programa de Pós-Graduação: Doutorado em Matemática

Tese de Doutorado defendida em 09 de março de 2010 e aprovada

Pela Banca Examinadora composta pelos Profs. Drs.

____

Prof(a). Dr(a). JOÃO MARCOS BEZERRA DO Ó

____

Prof(a). Dr(a). OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI

____

Prof(a). Dr(a). ORLANDO FRANCISCO LOPES

____

Prof(a). Dr(a). PIERLUIGI BENEVIERI

____

Prof(a). Dr(a). FRANCISCO ODAIR VIEIRA DE PAIVA

A minha família

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus.

Ao meu orientador João Marcos Bezerra do Ó, pelo incentivo constante e pelas discussões e sugestões que possibilitaram que este trablalho fosse finalizado.

A minha família que sempre me deu apoio apesar da distância tão cedo necessária. Ao meu marido e colega Bruno Henrique Carvalho Ribeiro, pelo carinho e incentivo em todos os momentos e pela paciência nos momentos difíceis.

Aos professores Everaldo de Medeiros e Uberlândio Severo pelas sugestões e à professora Flávia Jerônimo pelo apoio.

Aos professores Francisco Odair de Paiva, Olímpio Miyagaki, Orlando Lopes, Pierluigi Benevieri, pela participação na banca examinadora.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do IMECC-UNICAMP e ao Professor Djairo Guedes de Figueiredo por ter aceitado ser meu co-orientador.

Aos meus professores cujos ensinamentos me levam a obter mais um título importante.

Aos amigos e colegas do curso de doutorado: Allan Moura, Anne Bronzi, Anderson Cardoso, Carlos Banquet, Cíntia Peixoto, Edcarlos Silva, Evandro Monteiro, Henrique Vitório, Taísa Junges, dentre outros, pelo apoio nos momentos de estudo e pelos bons momentos de descontração.

Aos funcionários da Secretaria de Pós-Graduação do IMECC-UNICAMP pela atenção e cordialidade.

Enfim, a Capes pelo suporte financeiro.

RESUMO

Neste trabalho, estudamos questões relacionadas com existência e concentração de soluções do tipo onda estacionária, para uma classe de equações de Schrödinger quase-lineares. Trabalhamos com este problema no caso unidimensional e no caso de dimensões maiores que um, usando diferentes abordagens. Trataremos também de equações envolvendo o operador p-laplaciano e de um sistema de equações semilineares. Na obtenção de nossos resultados usamos métodos variacionais e uma técnica introduzida recentemente que nos permite tratar de não linearidades mais gerais do que as comumente encontradas na literatura. Em particular a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e a monotonicidade da não linearidade não são aqui necessárias.

Palavras-chave: Equação de Schrödinger, concentração de soluções, equação quase-linear, p-laplaciano, métodos variacionais.

ABSTRACT

In this work we study questions related with existence and concentration of stationary waves solutions for a class of quasilinear Schrödinger equations. We investigate this problem in the one dimensional case and the other dimensions using different approaches. We also treat equations involving the p-laplacian operator and a system of semilinear equations. To obtain our results we use variational methods and a strategy recently introduced which allows us to consider nonlinearities more general than those usually found on the literature. In particular the Ambrosetti-Rabinowitz condition and the monotonicity of the nonlinearity are not necessary.

Keywords: Schrödinger equation, concentration of solutions, quasilinear equation, p-laplacian, variational methods.

LISTA DE SÍMBOLOS

Neste trabalho usaremos as seguintes notações:

- c, C, C_0, C_1, ... denotam constantes positivas (possivelmente diferentes);
- $|A|$ denota a medida de Lebesgue de um subconjunto A em $\mathbb{R}^N,\ N \geq 1$;
- $\mathrm{supp}(f)$ denota o suporte da função f;
- $B_R(x)$ denota a bola aberta de centro x e raio R;
- $A(x; r, R)$ denota o anel $\{y \in \mathbb{R}^N : r \leq |x - y| \leq R\}$;
- $\rightharpoonup$, $\rightarrow$ denotam convergência fraca e forte, respectivamente, num espaço normado X;
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o par dualidade entre o espaço X e o seu dual X';
- $u^+ = \max\{u, 0\}$ e $u^- = \max\{-u, 0\}$;
- χ_Ω denota a função característica do conjunto Ω;
- $\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$ denota o gradiente da função u;
- $\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ e $\Delta_p u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$ denotam respectivamente o laplaciano de u e o p-laplaciano de u , para $1 < p < \infty$;

- $L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurável} : \displaystyle\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x < \infty\right\}$, para $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ é um aberto, com norma dada por

$$\|u\|_p = \left(\int_\Omega |u|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p};$$

- $L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurável} : \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty\}$ com norma dada por

$$\|u\|_\infty = \inf\{C > 0 : |u(x)| \leq C \text{ quase sempre em } \Omega\};$$

- $\mathcal{C}(\Omega)$ denota o espaço das funções contínuas em Ω e $\mathcal{C}_c(\Omega)$ são as funções contínuas de suporte compacto em Ω;

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$, $k \geq 1$ inteiro, denota o espaço das funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω e $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 1} \mathcal{C}^k(\Omega)$;

- $\mathcal{C}_c^k(\Omega) = \mathcal{C}^k(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$ e $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega) = \mathcal{C}^\infty(\Omega) \cap \mathcal{C}_c(\Omega)$;

- $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in \mathcal{C}(\Omega) : \displaystyle\sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\right\}$ com $0 < \alpha < 1$, e $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ são as funções em $\mathcal{C}^k(\Omega)$ tais que todas as derivadas parciais de ordem k estão em $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$;

- $\mathcal{C}_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$ são as funções que pertencem a $\mathcal{C}^{0,\alpha}(K)$ para todo compacto K de Ω, onde α depende de K;

- $\mathcal{C}_{loc}^{k,\alpha}(\Omega)$ são as funções $\mathcal{C}^k(\Omega)$ tais que as derivadas parciais de ordem k estão em $\mathcal{C}_{loc}^{0,\alpha}(\Omega)$;

- Para $1 \leq p < \infty$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists \ g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \ \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \mathrm{d}x = -\int_\Omega g_i \varphi \ \mathrm{d}x, \ \forall \ \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \ \text{ e } \ i = 1, \ldots, N \end{array} \right\}$$

com norma dada por

$$\|u\|_{1,p} = \left[\int_\Omega (|\nabla u|^p + |u|^p) \mathrm{d}x\right]^{1/p}$$

e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o fecho do espaço $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ com respeito à norma acima. Quando $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) \doteq H^1(\Omega)$ e $W_0^{1,2}(\Omega) \doteq H_0^1(\Omega)$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i \doteq \partial u / \partial x_i$;

- Para $m \geq 2$ inteiro e $1 \leq p < \infty$,

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{ para todo } \ i = 1, \ldots, N \right\};$$

- Para $1 \leq p < \infty$, $W^{-1,p'}(\Omega)$ denota o dual de $W^{1,p}(\Omega)$ onde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = 1$;

- O expoente crítico de Sobolev é dado por

$$p^* = \begin{cases} \dfrac{Np}{N-p} & \text{se} \quad 1 \leq p < N \\ \infty & \text{se} \quad p \geq N; \end{cases}$$

- $\mathcal{D}'(\Omega)$ denota o espaços das distribuições;

- Se E é um espaço de Banach e $A \subset E$ denotamos $A^\delta = \{x \in E : \text{dist}(x, A) \leq \delta\}$ e $A_\delta = \{x \in E : \delta x \in A\}$ para qualquer $\delta > 0$.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Nos últimos anos vários pesquisadores têm se dedicado ao estudo de questões relacionadas com existência e concentração de soluções positivas para equações elípticas quase-lineares do tipo

$$-\varepsilon^2\Delta u - \kappa\varepsilon^2\Delta(u^2)u + V(x)u = h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{1}$$

quando o parâmetro positivo ε tende a zero, onde $\Delta u = \sum_{i=1}^N u_{x_j x_j}$ é o operador laplaciano, o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ e a não linearidade $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ são funções contínuas e satisfazem algumas hipóteses adicionais. Há uma busca constante por hipóteses sobre o potencial V e a não linearidade h que sejam necessárias e suficientes para provar tais resultados.

Estes problemas estão relacionados à obtenção de ondas estacionárias para uma equação de Schrödinger não linear dada por

$$i\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\varepsilon^2\Delta\psi + W(x)\psi - \eta(|\psi|^2)\psi - \varepsilon^2\kappa\Delta\rho(|\psi|^2)\rho'(|\psi|^2)\psi \tag{2}$$

onde i é a unidade imaginária, $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$, κ é uma constante não negativa, $W : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é um potencial dado e $\eta, \rho : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções adequadas. Equações quase-lineares da forma (2) surgem em várias áreas da física em correspondência com diferentes tipos de funções ρ. Para motivações físicas e desenvolvimento dos aspectos físicos nos referimos a [15, 21, 48, 51] e referências lá citadas. Considerando o caso $\rho(s) = s$ e procurando por soluções do tipo onda estacionária para (2) define-se $\psi(t,x) = e^{-i\xi t/\varepsilon}u(x)$, onde $\xi \in \mathbb{R}$ e $u > 0$ é uma função real. Então obtém-se uma correspondente equação elíptica, a qual tem a estrutura variacional dada por (1), onde $V(x) := W(x) - \xi$ é o novo potencial e $h(u) = \eta(u^2)u$.

Voltando à equação (1), para $\kappa = 0$ obtemos uma equação semilinear,

$$-\varepsilon^2 \Delta u + V(x)u = h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{3}$$

a qual vem sendo extensivamente estudada. Em [48] Rabinowitz, usando o Teorema do Passo da Montanha, provou a existência de soluções positivas para (3) para $\varepsilon > 0$ pequeno supondo, entre outras hipóteses,

$$\liminf_{|x|\to\infty} V(x) > \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) > 0.$$

Wang [55] mostrou que estas soluções se concentram em torno dos pontos de mínimo global de V quando ε tende a zero. Mais tarde, para $N \geq 3$, del Pino e Felmer [25], introduzindo uma abordagem de penalização, provaram uma versão localizada dos resultados de Rabinowitz e Wang (veja também [2] e [38] para resultados relacionados). Eles mostraram a existência de soluções do tipo "single peak"para (3) concentrando-se em torno dos pontos de mínimo de V em Ω. Neste artigo os autores assumiram as seguintes hipóteses sobre o potencial:

(V_1**)** V é limitado inferiormente por uma constante positiva, isto é,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) = V_0 > 0;$$

(V_2**)** existe um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^N$ tal que

$$m \equiv \inf_{x\in\Omega} V(x) < \inf_{x\in\partial\Omega} V(x).$$

Também assumiram que a não linearidade h satisfaz:

(h_1) $\lim_{t\to 0^+} h(t)/t = 0$;

(h_2) existem $q \in (1, 2^* - 1)$ e $c > 0$ tais que $h(t) \leq c(1 + t^q)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$, onde $2^* = 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev;

e a conhecida condição de Ambrosetti-Rabinowitz, a saber,

$$\exists\, \theta > 2 \quad \text{tal que} \quad 0 < \theta H(t) \leq h(t)t \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R},$$

onde

$$H(t) := \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s.$$

A monotonicidade da função $h(t)/t$ também é exigida. Sem usar monotonicidade e a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, Byeon e Jeanjean [15] provaram resultados de existência e concentração de soluções para a equação (3) supondo que V satisfaz $(V_1)-(V_2)$ e que h satisfaz além de $(h_1)-(h_2)$ a seguinte condição:

(h_3) existe $T>0$ tal que $2H(T)>mT^2$.

Tais hipóteses sobre h são as menos restritivas encontradas na literatura até o momento. São hipóteses "quase"necessárias para a obtenção de soluções de energia mínima de um problema limite associado a (3) de acordo com [9].

Para o caso $\kappa>0$, sem perda de generalidade pode-se considerar $\kappa=1$. Devido aos aspectos físicos, a equação (1) tem atraído muita atenção recentemente e vários resultados de existência tem sido obtidos nos casos de potenciais limitados, simétricos ou coercivos. Métodos variacionais, por meio de argumentos de minimização com vínculos, foram usados em [47] e então estendidos em [44] para provar existência de soluções positivas usando um Multiplicador de Lagrange. Posteriormente um resultado geral para (1) foi fornecido em [43]. Para superar o problema de que o funcional "natural"associado a esta equação não está bem definido, a nova ideia em [43] é introduzir uma mudança de variáveis e reescrever o funcional nesta nova variável o que transfere a questão para encontrar soluções de um equação elíptica semilinear auxiliar. Então pontos críticos podem ser encontrados num espaço de Orlicz associado e resultados de existência são obtidos no caso de potenciais limitados, coercivos ou radiais. Seguindo a estratégia desenvolvida em [22] em um problema relacionado, os autores em [23] também fazem uso desta mudança de variáveis e definem uma equação associada a qual eles chamam de "dual". Além disso, uma prova mais simples e mais curta do resultados de [43] é apresentada para alguns potenciais limitados. Prova esta que não usa espaços de Orlicz e então permite cobrir uma classe diferente de não linearidades. Em [21], ainda usando espaços de Orlicz, resultados de existência e concentração são obtidos com não linearidades e potenciais mais gerais. Em [30] o termo não linear envolve uma combinação de termos côncavos e convexos. Quando a não linearidade h exibe crescimento crítico em dimensão dois, sob algumas hipóteses adicionais, em [28] e [29] existência e concentração de soluções também são estudados.

Equações quase-lineares envolvendo o operador p-laplaciano também têm sido consideradas. Mencionamos os trabalhos [26, 37]. Em [26], com hipóteses similares às de [25], o autor prova existência e concentração de soluções positivas para a seguinte equação envolvendo crescimento crítico

$$-\varepsilon^p \Delta_p v + V(x)|v|^{p-2}v = h(v) + v^{p^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Nesta tese provaremos existência e concentração de soluções para alguns dos problemas citados acima. Trabalharemos com o operador p-laplaciano, com um sistema gradiente de equações semilineares e com uma equação quase-linear, sendo que esta última será considerada separadamente no caso N maior ou igual a três e no caso unidimensional. Para provar nossos resultados usaremos as técnicas desenvolvidas em [15] e [19] e as sugestões dadas em [17], fazendo algumas alterações nas demonstrações e acrescentando alguns resultados a fim de adequá-los ao estudo dos problemas aqui abordados.

No primeiro capítulo estudamos equações elípticas quase-lineares da seguinte forma

$$-\varepsilon^p \Delta_p u + V(x)|u|^{p-2}u = h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro real pequeno, $\Delta_p v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$ é o p-laplaciano e $1 < p < N$. O potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as condições $(V_1) - (V_2)$ acima, introduzidas em [25]. Neste e nos próximos capítulos denotamos

$$\mathcal{M} = \{x \in \Omega : V(x) = m\}.$$

Supomos também que a não linearidade $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz:

$(\bar{h}_1)$ $\lim_{t\to 0^+} h(t)/t^{p-1} = 0$;

$(\bar{h}_2)$ existem $q \in (p-1, p^*-1)$ e $c > 0$ tais que $h(t) \leq c(1+t^q)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$;

$(\bar{h}_3)$ existe $T > 0$ tal que $pH(T) > mT^p$.

O principal objetivo deste capítulo é estudar existência e comportamento assintótico de soluções para a equação quase-linear (4). Em particular estendemos para esta classe de problemas o resultado principal em [15] e complementamos os resultados de [26] no caso sub-crítico uma vez que não supomos a condição Ambrosetti-Rabinowitz e nem a monotonicidade da função $h(t)/t$. Sequer exigimos que h seja uma função não-negativa. A seguir apresentamos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 0.1. *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o problema* (4) *possui uma solução positiva v_ε, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Além disso, v_ε satisfaz:*

(i) v_ε admite um ponto de máximo x_ε tal que $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{M}) = 0$, e $w_\varepsilon(x) := v_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$ converge (a menos de subsequência), quando ε tende a zero, uniformemente em compactos a uma solução de energia mínima de

$$-\Delta_p u + m u^{p-1} = h(u), \quad u > 0, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \tag{5}$$

(ii) existem constantes positivas C e c independentes de ε tais que

$$v_\varepsilon(x) \le C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon|)\right) \quad \textit{for all} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Observação 0.2. *Hipóteses como $(\bar{h}_1) - (\bar{h}_3)$ já foram usadas por Berestycki e Lions em [9], para $p = 2$, e por J. M. do Ó e Medeiros em [27], para o caso $1 < p \le N$, a fim de provar existência de uma solução de energia mínima para o problema limite* (5)*.*

Observação 0.3. *A principal dificuldade em trabalhar com uma classe de equações quase-lineares do tipo* (4) *é a perda de compacidade das imersões de Sobolev devido à não limitação do domínio além do fato de que as nossas condições sobre o termo não linear $h(t)$ são menos restritivas do que as hipóteses usualmente encontradas na literatura.*

Para provar o Teorema 0.1, motivados pelos argumentos usados em [15] e [25], modificamos a não linearidade $h(t)$ transformando-a numa mais apropriada e usamos uma mudança de variáveis para reformular o problema a fim de obter um novo, cujo funcional associado está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^1$ num espaço adequado. Dizemos que um funcional $I \in \mathcal{C}^1(E, \mathbb{R})$, onde E é um espaço de Banach, satisfaz a condição de Palais-Smale no nível c, ou de forma abreviada, que I satisfaz $(PS)_c$, se toda sequência de Palais-Smale, isto é, $(u_n) \subset E$ tal que

$$I(u_n) \to c \quad \text{e} \quad \|I'(u_n)\|_{E'} \to 0,$$

possui uma subsequência convergente. Dizemos que I satisfaz a condição de Palais-Smale, ou simplesmente que I satisfaz (PS), se satisfaz $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$. A condição de Ambrosetti-Rabinowitz é a mais utilizada para provar a limitação de uma sequência de Palais-Smale, o que possibilita provar a condição (PS) para um funcional I. A condição (PS) é requerida para garantir a existência de pontos críticos para I através de teoremas do tipo mini-max, tais como o Teorema do passo da montanha (veja [6]). Como não podemos garantir que o funcional associado ao nosso problema satisfaz a condição de compacidade de Palais-Smale, atingimos os resultados de existência de solução, para ε pequeno, por meio da construção de uma sequência de Palais-Smale limitada em um conjunto adequado. Este conjunto envolve soluções do problema limite (5). Provamos que esta sequência é fortemente convergente e então o limite é uma solução para o problema modificado. Depois disso mostraremos algumas propriedades destas soluções o que implicará na existência de soluções para o problema original.

No Capítulo 2 estudamos a seguinte classe de sistemas gradientes

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V(x)u_1 &= H_{u_1}(u_1, u_2, \ldots, u_k) \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V(x)u_2 &= H_{u_2}(u_1, u_2, \ldots, u_k) \\ \qquad\vdots & \quad\vdots \\ -\varepsilon^2\Delta u_k + V(x)u_k &= H_{u_k}(u_1, u_2, \ldots, u_k) \end{cases} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{6}$$

onde $N \geq 3$, $\varepsilon > 0$ e $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Hölder contínua satisfazendo $(V_1) - (V_2)$. Denotando $\mathbb{R}^k_+ := [0,\infty)^k$, consideramos $H : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $H \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}\left((0,\infty)^k\right)$ e $H(0) = 0$. Supomos ainda que H satisfaz:

(H_1) para $u \in (0,\infty)^k$ vale $\displaystyle\lim_{|u|\to 0} \frac{|\nabla H(u)|}{|u|} = 0$;

(H_2) existe $p \in (1, 2^*-1)$ tal que

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{|\nabla H(u)|}{|u|^p} < \infty;$$

(H_3) existe $\zeta_0 \in \mathbb{R}^k_+$ tal que $H(\zeta_0) > (m/2)|\zeta_0|^2$;

(H_4) se $u_n \to u$ em $\mathbb{R}^k$ com $\{u_n\} \subset (0,\infty)^k$ e $u \in \partial\mathbb{R}^k_+$ então

$$\nabla H(u_n) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^k;$$

(H_5) se χ_j denota a função característica do conjunto $\{u \in \mathbb{R}^k_+ : H_{u_j}(u) < 0\}$, então

$$\frac{H_{u_j}(u)\chi_j}{u_j} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^k_+), \quad j = 1, \ldots, k.$$

O principal objetivo deste capítulo é mostrar existência e concentração de soluções positivas para o sistema (6). Em particular estendemos para esta classe de problemas o resultado de

[15] e também complementamos o Teorema 1.1 em [5] porque consideramos uma classe mais geral de não linearidades. Para este propósito precisamos mostrar que as soluções de energia mínima de um problema limite estão no nível do passo da montanha do funcional associado a este problema. O principal resultado deste capítulo é o próximo teorema.

Teorema 0.4. *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$*, o problema* (6) *possui uma solução positiva* $u_\varepsilon = (u_{\varepsilon,1}, \dots, u_{\varepsilon,k})$ *satisfazendo:*

(i) $u_{\varepsilon,j}$ *admite um ponto de máximo* x_ε^j *tal que* $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{dist}(x_\varepsilon^j, \mathcal{M}) = 0$*, para* $j = 1, \dots, k$*.*

(ii) existem constantes positivas C *e* c *tais que*

$$u_{\varepsilon,j}(x) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon^j|)\right) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \textit{e} \quad j = 1, \dots, k.$$

No Capítulo 3 estudamos a equação (1) para $N \geq 2$. Supomos que V é uma função contínua que satisfaz $(V_1) - (V_2)$ e que $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as condições (h_1), (h_3) e a seguinte

(h_2') para $q = 22^* - 1$ se $N \geq 3$ ou $3 < q < \infty$ se $N = 2$, vale

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|h(t)|}{t^q} = 0.$$

O principal resultado deste capítulo é descrito a seguir.

Teorema 0.5. *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *o problema* (1) *tem uma solução positiva* $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo o seguinte:*

(i) u_ε *admite um ponto de máximo* x_ε *tal que* $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{M}) = 0$ *e para qualquer sequência* $\varepsilon_n \to 0$ *existem* $z_0 \in \mathcal{M}$ *e uma solução* u_0 *de*

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u + mu = h(u), \quad u > 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{7}$$

tais que, a menos de subsequências,

$$x_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad \textit{e} \quad u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n \cdot + x_{\varepsilon_n}) \to u_0 \quad \textit{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N) \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

(ii) Existem constantes positivas C *e* c *tais que*

$$u_\varepsilon(x) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon|)\right) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

A prova do Teorema 0.5 é baseada no estudo de uma equação semilinear obtida depois de uma mudança de variáveis introduzida em [43]. A fim de obter resultados de existência para esta equação estudamos algumas propriedades das soluções de energia mínima para uma equação limite obtida a partir de (7) pela mesma mudança de variáveis. Usando tais propriedades, depois de alguns lemas técnicos, encontramos uma sequência de Palais-Smale limitada num espaço adequado para o funcional associado. Assim, obtemos uma solução para a equação semilinear o que nos fornece uma solução para o problema original (1).

No Capítulo 4 estudamos a equação (1) no caso unidimensional, ou seja,

$$-\varepsilon^2 u'' + V(x)u - \varepsilon^2 (u^2)'' u = h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{8}$$

Aqui também assumiremos que $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ satisfaz $(V_1) - (V_2)$. Supomos ainda que $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz contínua satisfazendo (h_1) acima e

(h_2'') existe $T > 0$ tal que

$$h(T) > mT, \quad H(T) = \frac{m}{2}T^2 \quad \text{e} \quad H(t) < \frac{m}{2}t^2 \quad \text{para todo} \quad t \in (0, T).$$

Hipóteses similares sobre a não linearidade foram usadas em [19] para o caso semilinear. Seguindo a estratégia lá desenvolvida, usando métodos variacionais provaremos existência e concentração de soluções positivas para (8) sem assumir a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e sem exigir monotonicidade de h. Em particular melhoramos os resultados em [4] onde h é uma potência pura. O principal resultado deste capítulo é o seguinte.

Teorema 0.6. *Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o problema (8) tem uma solução positiva $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, satisfazendo:*

(i) u_ε admite um ponto de máximo x_ε tal que $\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{M}) = 0$ e para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existe $x_0 \in \mathcal{M}$ e uma solução u_0 de

$$-u'' - (u^2)'' u + mu = h(u), \quad u > 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}) \tag{9}$$

tal que, a menos de subsequências,

$$x_{\varepsilon_n} \to x_0 \quad e \quad u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n \cdot + x_{\varepsilon_n}) \to u_0 \quad em \quad H^1(\mathbb{R}) \quad quando \quad n \to \infty.$$

(ii) existem constantes positivas C e c tais que

$$u_\varepsilon(x) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon|)\right) \quad para\ todo \quad x \in \mathbb{R}.$$

A fim de provar este teorema, embora o funcional energia associado ao problema (8) esteja bem definido num subespaço de $H^1(\mathbb{R}^N)$, novamente fazemos uso da mudança de variáveis introduzida em [43] e trabalhamos com uma equação semilinear. Isto nos permite tratar com uma classe diferente de não linearidades.

No Capítulo 5 consideramos uma classe de equações elípticas quase-lineares da forma

$$-\varepsilon^2\Delta u - \varepsilon^2\Delta(u^2)u + V(x)u = K(x)h(u), \quad u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{10}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro real pequeno e $N \geq 3$. Assumimos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo a condição (V_1) e a seguinte:

(V_2') existem l domínios limitados Ω^j em $\mathbb{R}^N$ cujos fechos são disjuntos tais que

$$m_j := \inf_{x\in\Omega^j} V(x) < \inf_{x\in\partial\Omega^j} V(x), \quad j = 1, \ldots, l.$$

Usaremos a seguinte notação:

$$\mathcal{M}_j = \{x \in \Omega^j : V(x) = m_j\}, \quad \mathcal{M} = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{M}_j, \quad \Omega = \bigcup_{j=1}^{l} \Omega^j \quad \text{e } m = \max_{1\leq j\leq l} m_j.$$

Assumimos que a função $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfaz:

(k_1) existe $z_j \in \mathcal{M}_j$ tal que $K(z_j) = \max_{x\in\mathbb{R}^N} K(x)$ para todo $j \in \{1, \ldots, l\}$;

(k_2) $k_0 = \inf_{x\in\Omega} K(x) > 0$.

Para $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ supomos que é uma função contínua e satisfaz $(h_1) - (h_2')$ e ainda

(h_3') existe $t_0 > 0$ tal que $H(t_0) > (m/2k_0)t_0^2$.

Hipóteses similares sobre a não linearidade h foram usadas em [16] para o caso semilinear e $K \equiv 1$. Seguindo a estratégia lá desenvolvida provaremos existência de soluções do tipo "multi-peak"para (10) concentrando-se nos $\Omega^{j's}$, sem assumir a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e a monotonicidade da função $h(t)/t$. Além disso permitimos $q = 2(2^*) - 1$. Mencionamos aqui também [46] e referências lá citadas, onde estuda-se existência e concentração de soluções do tipo "single-peak"para a equação semilinear com hipóteses mais gerais sobre as funções V e K mas considera-se h uma potência pura ou uma função satisfazendo a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e tal que $h(t)/t$ é monótona. O principal resultado é o seguinte.

Teorema 0.7. *Existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que o problema* (10) *tem uma solução positiva* $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) u_ε *admite* l *pontos de máximo local* x^j_ε *tais que* $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{dist}(x^j_\varepsilon, \mathcal{M}_j) = 0$ *e para cada sequência* $\varepsilon_n \to 0$ *e* $j \in \{1, \dots, l\}$ *existem* $x_j \in \mathcal{M}_j$ *e uma solução* u_j *de*

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u + m_j u = h(u), \quad u > 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{11}$$

tais que, a menos de subsequência,

$$x^j_{\varepsilon_n} \to x_j \quad e \quad u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n \cdot + x^j_{\varepsilon_n}) \to u_j \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^N) \quad quando \quad n \to \infty.$$

(ii) *existem constantes positivas* C *e* ζ *tais que*

$$u_\varepsilon(x) \le C \exp\left(-\frac{\zeta}{\varepsilon} \min_{j\in\{1,\dots,l\}} (|x - x^j_\varepsilon|)\right) \quad para\ todo \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Aqui também faremos a mudança de variáveis e trabalhamos na construção de uma sequência de Palais-Smale limitada para o funcional associado à equação semilinear obtida.

CAPÍTULO 1

SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES DE SCHRÖDINGER COM O P-LAPLACIANO EM $\mathbb{R}^N$

1.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos existência e concentração de soluções positivas para uma classe de equações elípticas quase-lineares em $\mathbb{R}^N$ da forma

$$-\varepsilon^p \Delta_p v + V(x)|v|^{p-2}v = h(v), \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{1.1}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro pequeno, $\Delta_p v = \operatorname{div}(|\nabla v|^{p-2}\nabla v)$ é o p-laplaciano e $1 < p < N$. O potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(V_1) V é limitado inferiormente por uma constante positiva, isto é,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) = V_0 > 0;$$

(V_2) existe um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^N$ tal que

$$m := \inf_{x\in\Omega} V(x) < \inf_{x\in\partial\Omega} V(x).$$

A partir daqui usaremos a seguinte notação:

$$\mathcal{M} := \{x \in \Omega : V(x) = m\}$$

e sem perda de generalidade assumiremos que $0 \in \mathcal{M}$. Denotando $p^* = Np/(N-p)$ o expoente crítico de Sobolev, vamos supor também que a não linearidade $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua e satisfaz:

($\bar{h}_1$) $\lim_{t\to 0^+} h(t)/t^{p-1} = 0$;

($\bar{h}_2$) existem $q \in (p-1, p^*-1)$ e $c > 0$ tais que $h(t) \leq c(1+t^q)$ para todo $t \in \mathbb{R}_+$;

($\bar{h}_3$) existe $T > 0$ tal que $pH(T) > mT^p$ onde

$$H(t) := \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s.$$

No caso semilinear, o qual corresponde a $p = 2$, problemas elípticos do tipo (1.1) têm recebido considerável atenção nos últimos anos. Para a equação quase-linear acima há poucas referências na literatura. Para existência de soluções positivas para uma classe de equações envolvendo o operador p-laplaciano mencionamos [26, 37]. Em [26], com hipóteses similares às usadas por [25] no caso semilinear, o autor prova existência e concentração de soluções positivas para a seguinte equação envolvendo crescimento crítico

$$-\varepsilon^p \Delta_p v + V(x)|v|^{p-2}v = h(v) + v^{p^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

O nosso principal objetivo neste capítulo é estudar existência e comportamento assintótico de soluções para a equação quase-linear (1.1) com hipóteses menos restritivas. Estendemos para esta classe de problemas o resultado principal obtido em [15] e complementamos os resultados de [26] no caso sub-crítico uma vez que não supomos a condição Ambrosetti-Rabinowitz e nem a monotonicidade da função $h(t)/t$. Sequer exigimos que h seja uma função não-negativa.

A seguir apresentamos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 1.1. *Suponha que o potencial V satisfaz $(V_1)-(V_2)$ e h satisfaz $(\bar{h}_1)-(\bar{h}_3)$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o problema* (1.1) *possui uma solução positiva v_ε, para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. Além disso, v_ε satisfaz:*

(i) v_ε *admite um ponto de máximo* x_ε *tal que* $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{M}) = 0$*, e* $w_\varepsilon(x) := v_\varepsilon(\varepsilon x + x_\varepsilon)$ *converge (a menos de subsequência), quando* ε *tende a zero, uniformemente em compactos a uma solução de energia mínima de*

$$-\Delta_p u + m u^{p-1} = h(u), \quad u > 0, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N); \tag{1.2}$$

(ii) existem constantes positivas C *e* c *tais que*

$$v_\varepsilon(x) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon|)\right).$$

Hipóteses como $(\bar{h}_1) - (\bar{h}_3)$ já foram usadas por Berestycki e Lions em [9], para $p = 2$, e por J. M. do Ó e Medeiros em [27], para o caso $1 < p \leq N$, a fim de provar existência de uma solução de energia mínima para o problema (1.2).

A fim de provar o Teorema 1.1, motivados pelos argumentos usados em [25] e [15], nós modificamos a não linearidade $h(t)$ transformando-a numa mais apropriada e usamos uma mudança de variáveis para reformular o problema a fim de obter um novo cujo funcional associado está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^1$ num espaço adequado. Como não podemos garantir que este funcional satisfaça a condição de compacidade de Palais-Smale nós atingimos os resultados de existência de solução, para ε pequeno, por meio da construção de uma sequência P-S limitada em um conjunto adequado. Este conjunto envolve soluções do problema limite (1.2) e por isso se faz necessário um estudo prévio de tais soluções. Provamos que esta sequência P-S é fortemente convergente e então o limite é uma solução para o problema modificado. Depois disso mostraremos algumas propriedades destas soluções o que implicará na existência de soluções para o problema original.

Este capítulo está organizado da seguinte maneira: na próxima seção apresentamos a reformulação do problema e alguns resultados preliminares incluindo o espaço apropriado no qual vamos buscar por soluções. Na Seçao 1.3 estudaremos importantes propriedades das soluções de energia mínima para o problema limite (1.2) e na Seção 1.4 provamos que o nível mini-max do funcional associado ao problema modificado converge ao nível de energia mínima do funcional associado ao problema limite quando ε tende a zero. Na Seção 1.5 provamos a existência da sequência P-S desejada e finalmente na Seção 1.6 concluímos a prova do Teorema 1.1.

1.2 O problema modificado

Uma vez que condição $(\bar{h}_1)$ implica que $h(0) = 0$ e estamos buscando por soluções positivas para (1.1), é conveniente definirmos $h(t) = 0$ para $t \leq 0$. Precisamos modificar a não linearidade h a fim de que o funcional associado esteja bem definido e seja de classe $\mathcal{C}^1$. Seguindo ideias de [9], definimos $\hat{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como segue:

(i) se $h(t) > 0$ para qualquer $t \geq \tilde{T}$, seja $\hat{h} = h$;

(ii) se existe $s_0 \geq \tilde{T}$ tal que $h(s_0) = 0$, seja

$$\hat{h}(t) = \begin{cases} h(t) & \text{para} \quad t < s_0 \\ 0 & \text{para} \quad t \geq s_0, \end{cases}$$

onde $\tilde{T} := \sup\{t \in [0, T] : h(t) - mt^{p-1} > 0\}$. Observe que $\hat{h}(t)$ satisfaz as mesmas condições que $h(t)$ e ainda

$(\hat{h}_2)$ $0 \leq \liminf_{t\to\infty} \hat{h}(t)/t^q \leq \limsup_{t\to\infty} \hat{h}(t)/t^q < \infty$.

Além disso, se (ii) ocorre e u é uma solução para o problema (1.1) com $\hat{h}(t)$ que tende a zero no infinito então

$$\phi(x) := \max\{u(x) - s_0, 0\} \in W_0^{1,p}(B(0, R))$$

para algum $R > 0$. Usando ϕ como função teste obtemos

$$\int_{B(0,R)} \left(\varepsilon^p |\nabla\phi|^p + V(x)u^{p-1}\phi\right) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Assim $\phi = 0$ e $u \leq s_0$ em $\mathbb{R}^N$. Portanto u é também uma solução de (1.1) com a não linearidade original $h(t)$. Neste capítulo vamos substituir h por $\hat{h}$ mas continuaremos usando a mesma notação $h(t)$. A fim de obtermos alguns resultados de convergência e consequentemente resultados de existência para $\varepsilon > 0$ pequeno nós precisamos modificar $h(t)$ mais uma vez. Consideramos a seguinte função:

$$g(x, t) = \chi_\Omega(x)h(t) + (1 - \chi_\Omega(x))\widetilde{h}(t)$$

onde χ_Ω denota a função característica de Ω e

$$\widetilde{h}(t) = \begin{cases} h(t) & \text{se} \quad t \leq a \\ \min\{h(t), \frac{V_0}{2}t^{p-1}\} & \text{se} \quad t > a \end{cases}$$

onde $a \in (0, s_0)$ é tal que $|h(t)| \leq (V_0/2)t^{p-1}$ para $0 < t \leq a$. É fácil checar que $g(x,t)$ é uma função de Carathéodory que satisfaz as seguintes propriedades:

(g_1) $\lim_{t\to 0} g(x,t)/t^{p-1} = \lim_{t\to 0} h(t)/t^{p-1} = 0$, uniformemente em $x \in \mathbb{R}^N$;

(g_2) $0 \leq \limsup_{t\to\infty} g(x,t)/t^q \leq \limsup_{t\to\infty} h(t)/t^q < \infty$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Então buscaremos soluções positivas para a equação

$$-\varepsilon^p \Delta_p v + V(x)|v|^{p-2}v = g(x,v), \quad v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{1.3}$$

que tendam a zero fora de Ω, implicando $g(x, v(x)) = h(v(x))$ em $\mathbb{R}^N$. Observamos que fazendo a mudança de variáveis $u(x) = v(\varepsilon x)$, equação (1.3) torna-se equivalente a

$$-\Delta_p u + V(\varepsilon x)|u|^{p-2}u = g(\varepsilon x, u), \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.4}$$

Portanto nosso objetivo é encontrar soluções para esta última equação com determinadas propriedades, o que nos fornecerá soluções para o problema original.

Vejamos agora o espaço adequado para buscarmos soluções bem como o funcional associado ao problema (1.4). Seja W_ε o completamento de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito à norma

$$\|u\|_\varepsilon^p = \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^p + V(\varepsilon x)|u|^p] \, \mathrm{d}x$$

e defina uma norma em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ por

$$\|u\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V_0|u|^p) \, \mathrm{d}x.$$

Graças a (V_1) vemos que a imersão $W_\varepsilon \hookrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é contínua. No decorrer deste trabalho, para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}^N$ e $\varepsilon > 0$ denotamos $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon x \in A\}$. Seja

$$P_\varepsilon(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u|^p + V(\varepsilon x)|u|^p] \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(\varepsilon x, u) \, \mathrm{d}x, \quad u \in W_\varepsilon$$

onde $G(x,t) = \int_0^t g(x,s) \, \mathrm{d}s$. Definimos

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \Omega_\varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & \text{se} \quad x \notin \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

e

$$Q_\varepsilon(u) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x)|u|^p \, \mathrm{d}x - 1\right)_+^p.$$

O funcional Q_ε atuará como uma penalização para forçar o fenômeno de concentração a ocorrer dentro de Ω. Este tipo de penalização foi introduzido in [20] para o caso $p = 2$. Finalmente seja $J_\varepsilon : W_\varepsilon \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(u) + Q_\varepsilon(u).$$

O funcional J_ε está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^1$ com derivada de Fréchet dada por

$$\begin{aligned}\langle J'_\varepsilon(u), v\rangle &= \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v + V(\varepsilon x)|u|^{p-2}uv\right] \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} g(\varepsilon x, u)v \,\mathrm{d}x \\ &\quad + p^2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x)|u|^p \,\mathrm{d}x - 1\right)_+^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x)|u|^{p-2}uv \,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

para $u, v \in W_\varepsilon$. Claramente um ponto crítico de P_ε corresponde a uma solução de (1.4). Com o intuito de encontrar soluções que se concentrem em Ω quando ε tende a zero, iremos procurar pontos críticos de J_ε para os quais Q_ε é zero.

1.3 O problema limite

Inicialmente vamos estudar algumas propriedades das soluções de energia mínima da equação (1.2). O funcional energia associado ao problema limite (1.2) é dado por

$$L_m(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + m|u|^p\right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) \,\mathrm{d}x, \quad u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Dizemos que U é uma solução de menor energia (ou de energia mínima) para o problema limite se U é uma solução e $L_m(U) = E_m$, onde

$$E_m := \min\left\{L_m(u) : u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \text{ é uma solução de (1.2)}\right\} \tag{1.5}$$

é dito ser o nível de menor energia. Em [27] J. M. do Ó e E. Medeiros provaram que cada solução u satisfaz a identidade de Pohozaev

$$\frac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \frac{N}{p}\int_{\mathbb{R}^N} m|u|^p \,\mathrm{d}x = N\int_{\mathbb{R}^N} H(u) \,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

e que existe uma solução de energia mínima de (1.2) se $(\bar{h}_1) - (\bar{h}_3)$ são satisfeitas. Para isso mostraram que L_m tem a geometria do passo da montanha e assim o nível mini-max

$$C_m = \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} L_m(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in \mathcal{C}\left([0,1], W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\right) : \gamma(0) = 0 \text{ e } L_m(\gamma(1)) < 0 \right\},$$

está bem definido. Além disso provaram que C_m coincide com E_m. A partir de um resultado de Gongbao e Shusen ([37], Teorema 3.1) sabemos que qualquer solução u satisfaz

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0.$$

Então pelos resultados de Maris [45] e Byeon, Jeanjean e Maris [18] (veja também [39]) sabemos que qualquer solução de energia mínima é, a menos de translação, radialmente simétrica e monótona com respeito a $r = |x| \in [0, \infty)$. Observamos que graças a $(\bar{h}_3)$ todos estes resultados citados acima valem para qualquer valor c suficientemente próximo de m.

Seja $\mathbf{S}_m$ o conjunto das soluções de energia mínima de (1.2) tais que

$$\max_{x \in \mathbb{R}^N} U(x) = U(0).$$

Então obtemos o seguinte resultado de compacidade de $\mathbf{S}_m$.

Proposição 1.2. *$\boldsymbol{S}_m$ é compacto em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, existem $C, c > 0$ independentes de $U \in \boldsymbol{S}_m$ tais que*

$$U(x) + |\nabla U(x)| \leq C \exp(-c|x|) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.7}$$

Prova. Usando (1.6) vemos que para qualquer $U \in \mathbf{S}_m$ vale a igualdade

$$\frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^p \, \mathrm{d}x = L_m(U). \tag{1.8}$$

Assim, $\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^p \, \mathrm{d}x : U \in \mathbf{S}_m\}$ é limitado. By $(\bar{h}_1) - (\hat{h}_2)$ vemos que existe $C > 0$ tal que para qualquer $U \in \mathbf{S}_m$

$$m \int_{\mathbb{R}^N} U^p \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(U)U \, \mathrm{d}x \leq \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^N} U^p \, \mathrm{d}x + C \int_{\mathbb{R}^N} U^{p^*} \, \mathrm{d}x.$$

Então usando a desigualdade de Sobolev,

$$\|u\|_{L^{p^*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall\, u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N),$$

obtemos $\{\int_{\mathbb{R}^N} U^p \, \mathrm{d}x : U \in \mathbf{S}_m\}$ também limitado. Daí segue que $\mathbf{S}_m$ é limitado em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Usando um método iterativo devido a Moser vemos que esta limitação implica que $\mathbf{S}_m$ é também limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ (a prova é análoga à da Proposição 1.14). Pelo Lema Radial ([9], Lema Radial A.IV) temos

$$U(x) \le C\frac{\|U\|_{L^p}}{|x|^{N/p}} \quad \text{para todo} \quad x \neq 0,$$

onde $C = C(N,p)$. Assim $\lim_{|x|\to\infty} U(x) = 0$ uniformemente para $U \in \mathbf{S}_m$. Então devido a $(\bar{h}_1)$ existe $R > 0$ suficientemente grande tal que

$$|h(U(x))| \le \frac{m}{2}[U(x)]^{p-1} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N\backslash B(0,R) \quad \text{e} \quad U \in \mathbf{S}_m.$$

Com esta convergência para zero uniforme em $U \in \mathbf{S}_m$ vemos que o Teorema 3.1 em [37] se aplica e assim, existem c_0, C_0 tais que $\|U\|_\infty \le C_0\exp(-c_0R)$ e $U(x) \le C_0\exp(-c_0|x|)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N\backslash B(0,R)$ e $U \in \mathbf{S}_m$. Se $x \in B(0,R)$ então

$$U(x) \le C_0\exp(-c_0R) \le C_0\exp(-c_0|x|)$$

o que prova o decaimento exponencial uniforme para U. Para o decaimento de $|\nabla U|$ veja ([27], Teorema 1.9). Portanto (1.7) é válido. Agora seja $\{U_n\}$ uma sequência em $\mathbf{S}_m$. Assumimos que $U_n \rightharpoonup U$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $U_n \to U$ em $L^p_{loc}(\mathbb{R}^N)$ e $U_n(x) \to U(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ (a menos de subsequência). Temos

$$-\Delta_p U_n = h(U_n) - mU_n^{p-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

com $h(U_n) - mU_n^{p-1} \to h(U) - mU^{p-1}$ em $W^{-1,p'}(B(0,k))$ para cada $k \in \mathbb{N}$, onde $p' = p/(p-1)$ e

$$[h(U_n) - mU_n^{p-1}]\phi = \int_{B(0,k)} [h(U_n) - mU_n^{p-1}]\phi\,\mathrm{d}x \quad \text{para} \quad \phi \in W_0^{1,p}(B(0,k)).$$

Então podemos aplicar os resultados clássicos de convergência devido a Boccardo e Murat (veja [11], Teorema 2.1 e Observação 2.1) para obter $\nabla U_n(x) \to \nabla U(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue de (1.7) que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_n|^p\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^p\,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} U_n^p\,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} U^p\,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Assim $U_n \to U$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente U é também uma solução de (1.2) e $L_m(U) = E_m$. Já que U_n é radialmente simétrica para todo n, obtemos U radialmente simétrica e assim $U \in \mathbf{S}_m$. Este é o fim da prova. ∎

1.4 O nível mini-max

Fixado $U \in \mathbf{S}_m$ definamos $U_t(x) = U(x/t)$ para $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$. Usando a identidade de Pohozaev vemos que

$$\begin{aligned}
L_m(U_t) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left[\frac{|\nabla U(x/t)|^p}{t^p} + mU^p(x/t)\right]\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(U(x/t))\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left[t^{N-p}|\nabla U(x)|^p + t^N mU^p(x)\right]\mathrm{d}x - t^N\int_{\mathbb{R}^N} H(U(x))\,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{t^{N-p}}{p} - \frac{t^N}{p^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla U(x)|^p\,\mathrm{d}x. \qquad (1.9)
\end{aligned}$$

Como $\left(t^{N-p}/p - t^N/p^*\right) \to -\infty$ quando $t \to \infty$ existe $t_0 > 1$ tal que

$$L_m(U_t) < -2 \quad \text{para} \quad t \geq t_0. \qquad (1.10)$$

Graças à condição $(\bar{h}_3)$ podemos escolher $\beta \leq \operatorname{dist}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^N\backslash\Omega)/10$ suficientemente pequeno tal que

$$H(T) > \frac{V(x)}{p}T^p \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{M}^{5\beta}, \qquad (1.11)$$

onde $A^\delta := \{x \in \mathbb{R}^N : \operatorname{dist}(x, A) \leq \delta\}$ para qualquer $A \subset \mathbb{R}^N$ e $\delta > 0$. Em particular os resultados de [27] valem para $L_{V(x)}$ no lugar de L_m para todo $x \in \mathcal{M}^{5\beta}$. Agora escolhemos uma função $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ se $|x| \leq \beta$ e $\varphi(x) = 0$ se $|x| \geq 2\beta$. Além disso, pedimos que $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ se $|y| \leq |x|$. Definimos $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ e para $z \in \mathcal{M}^\beta$ e $U \in \mathbf{S}_m$

$$U_\varepsilon^z(x) = \varphi_\varepsilon(x - z/\varepsilon)U(x - z/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Para ε suficientemente pequeno iremos encontrar uma solução para a equação (1.4) próxima ao conjunto

$$X_\varepsilon = \{U_\varepsilon^z : \ z \in \mathcal{M}^\beta, \ U \in \mathbf{S}_m\}.$$

Afirmação 1.3. *O conjunto X_ε é compacto em W_ε.*

De fato, seja $\{u_n\}$ uma sequência em X_ε. Por definição

$$u_n(x) = \varphi_\varepsilon(x - z_n/\varepsilon)U_n(x - z_n/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N$$

onde $\{z_n\} \subset \mathcal{M}^\beta$ e $\{U_n\} \subset \mathbf{S}_m$. Pela compacidade de $\mathbf{S}_m$ e $\mathcal{M}^\beta$, a menos de subsequência, existem $U_0 \in \mathbf{S}_m$ e $z_0 \in \mathcal{M}^\beta$ satisfazendo

$$U_n \to U_0 \quad \text{em} \quad W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad z_n \to z_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Denotando $u_0(x) := \varphi_\varepsilon(x - z_0/\varepsilon)U_0(x - z_0/\varepsilon)$ temos que $u_0 \in X_\varepsilon$. Além disso,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x &\leq c\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla[\varphi_\varepsilon(x - z_n/\varepsilon)U_0(x - z_n/\varepsilon)]|^p \, \mathrm{d}x \\
&\quad + c\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla[\varphi_\varepsilon(x - z_n/\varepsilon)U_0(x - z_n/\varepsilon)] - \nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&\leq c\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla[\varphi_\varepsilon(x)\,(U_n - U_0)]|^p \, \mathrm{d}x \\
&\quad + c\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left[(\varphi_\varepsilon(x) - \varphi_\varepsilon(x - (z_0 - z_n)/\varepsilon))\,U_0\right]|^p \, \mathrm{d}x \\
&\quad + c\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\left[\varphi_\varepsilon(x)\,(U_0(x - (z_n - z_0)/\varepsilon) - U_0(x))\right]|^p \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Já que $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ e $|\nabla\varphi_\varepsilon(x)| = \varepsilon|\nabla\varphi(\varepsilon x)| \leq C(\varepsilon)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&\qquad \leq C\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla U_n - \nabla U_0|^p + |U_n - U_0|^p + |\nabla\varphi(\varepsilon x) - \nabla\varphi(\varepsilon x - z_0 + z_n)|^p\, U_0^p\right] \mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + C\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\varphi(\varepsilon x) - \varphi(\varepsilon x - z_0 + z_n)|^p\, |\nabla U_0|^p + |U_0(x - (z_n - z_0)/\varepsilon) - U_0|^p\right] \mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + C\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_0(x - (z_n - z_0)/\varepsilon) - \nabla U_0|^p \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Usando a continuidade destas funções, a convergência de $\{z_n\}$ e de $\{U_n\}$ e o decaimento exponencial de $U_0 + |\nabla U_0|$ segue do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_0|^p \, \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.12}
$$

Por outro lado, já que $|z_0|, |z_n| \leq c$ e a função φ tem suporte compacto temos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)|u_n - u_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x + z_n)\left[\varphi^p(\varepsilon x)\,|U_n - U_0|^p + |\varphi(\varepsilon x) - \varphi(\varepsilon x - z_0 + z_n)|^p U_0^p\right] \mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x + z_0)\varphi^p(\varepsilon x)|U_0(x - (z_n - z_0)/\varepsilon) - U_0|^p \, \mathrm{d}x \\
&\qquad \leq C\int_{\mathbb{R}^N} \left[|U_n - U_0|^p + |\varphi(\varepsilon x) - \varphi(\varepsilon x - z_0 + z_n)|^p U_0^p\right] \mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + C\int_{\mathbb{R}^N} |U_0(x - (z_n - z_0)/\varepsilon) - U_0|^p \, \mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)|u_n - u_0|^p \, \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.13}$$

Por (1.12) e (1.13), deduzimos que $u_n \to u_0$ em W_ε e consequentemente X_ε é compacto.

Lema 1.4. *Denotando $U_0 \equiv w_{\varepsilon,0} \equiv 0$ e $w_{\varepsilon,t}(x) = \varphi_\varepsilon(x)U_t(x)$ para $t > 0$ temos*

$$\sup_{t\in[0,t_0]} |J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Prova. Já que $\operatorname{supp}(w_{\varepsilon,t}) \subset \Omega_\varepsilon$ e $\operatorname{supp}(\chi_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\varepsilon$ para $\varepsilon > 0$, temos $Q_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) = 0$ e $G(\varepsilon x, w_{\varepsilon,t}) = H(w_{\varepsilon,t})$ para todo $t \geq 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Então para $t \in (0, t_0]$ obtemos

$$\begin{aligned} |P_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| \;\; &\leq \;\; \frac{1}{p}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left[(|\nabla w_{\varepsilon,t}|^p - |\nabla U_t|^p) + (V(\varepsilon x)\varphi_\varepsilon^p - m)\, U_t^p\right] \mathrm{d}x\right| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |H(w_{\varepsilon,t}) - H(U_t)| \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando uma mudança de variáveis e o decaimento exponencial de U vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{\varepsilon,t} - \nabla U_t|^p \, \mathrm{d}x \;\; &= \;\; \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla[(1-\varphi_\varepsilon)U_t]|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq \;\; c\int_{\mathbb{R}^N} \left[\varepsilon^p|U_t|^p + (1-\varphi_\varepsilon)^p|\nabla U_t|^p\right] \mathrm{d}x \\ &\leq \;\; c\int_{\mathbb{R}^N} \left[t_0^N \varepsilon^p U^p + t_0^{N-p}(1-\varphi_\varepsilon(t_0x))^p|\nabla U|^p\right] \mathrm{d}x \\ &\leq \;\; C\int_{\mathbb{R}^N} \left[t_0^N \varepsilon^p + t_0^{N-p}(1-\varphi_\varepsilon(t_0x))^p\right] \exp(-cp|x|) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

para todo $t \in (0, t_0]$. Então $\nabla w_{\varepsilon,t} \to \nabla U_t$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$ quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente em $t \in [0, t_0]$. Por outro lado, para $t \in [0, t_0]$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |V(\varepsilon x)\varphi_\varepsilon^p - m|U_t^p \, \mathrm{d}x \;\; \leq \;\; C\int_{\mathbb{R}^N} |V(\varepsilon x)\varphi_\varepsilon^p - m| \exp(-2c|x|/t_0) \, \mathrm{d}x.$$

Agora, lembrando que

$$H(a+b) - H(a) \;\; = \;\; b\int_0^1 h(a+sb) \, \mathrm{d}s, \tag{1.14}$$

de $(\bar{h}_1) - (\hat{h}_2)$ concluímos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |H(w_{\varepsilon,t}) - H(U_t)| \, \mathrm{d}x \;\; &\leq \;\; \int_{\mathbb{R}^N} |w_{\varepsilon,t} - U_t| \int_0^1 |h\left(U_t + s(w_{\varepsilon,t} - U_t)\right)| \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}x \\ &\leq \;\; C\int_{\mathbb{R}^N} (1-\varphi_\varepsilon)\left(U_t^p + U_t^{q+1}\right) \mathrm{d}x \\ &\leq \;\; C\int_{\mathbb{R}^N} (1-\varphi_\varepsilon) \exp\left(-(cp/t_0)|x|\right) \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

para $t \in [0, t_0]$. Portanto $J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) \to L_m(U_t)$ quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente em $t \in [0, t_0]$. ■

Usando (1.10) concluímos a partir do Lema 1.4 que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$|J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t_0}) - L_m(U_{t_0})| \leq -L_m(U_{t_0}) - 1 \quad \text{e} \quad J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t_0}) < -1 \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Definimos então para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ o nível mini-max do funcional J_ε

$$C_\varepsilon = \inf_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon} \max_{s \in [0,1]} J_\varepsilon(\gamma(s)), \tag{1.15}$$

onde

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], W_\varepsilon) : \gamma(0) = 0 \text{ e } \gamma(1) = w_{\varepsilon,t_0}\}.$$

A próxima proposição mostra que o nível mini-max de J_ε converge para o nível mini-max de L_m quando ε tende a zero.

Proposição 1.5. *Para E_m e C_ε definidos em* (1.5) *e* (1.15) *respectivamente obtemos*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon = E_m.$$

Prova. Primeiramente provaremos que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon \leq E_m. \tag{1.16}$$

Observamos que se $t \to t_1$ onde $t_1 \in (0, t_0)$ então $w_{\varepsilon,t} \to w_{\varepsilon,t_1}$ em W_ε. Analogamente,

$$\begin{aligned} \|w_{\varepsilon,t}\|_\varepsilon^p &\leq c \int_{\mathbb{R}^N} [\, |\nabla \varphi_\varepsilon|^p U_t^p + \varphi_\varepsilon^p |\nabla U_t|^p + V(\varepsilon x) \varphi_\varepsilon^p U_t^p \,] \, \mathrm{d}x \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left(t^N U^p + t^{N-p} |\nabla U|^p \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

implica que $w_{\varepsilon,t} \to w_{\varepsilon,0} = 0$ em W_ε quando $t \to 0^+$. Assim, definindo

$$\gamma_\varepsilon(s) = w_{\varepsilon, st_0}, \quad s \in [0,1] \tag{1.17}$$

obtemos $\gamma_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$ e

$$C_\varepsilon \leq \max_{s \in [0,1]} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) = \max_{t \in [0,t_0]} J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) := D_\varepsilon. \tag{1.18}$$

Pelo Lema 1.4 vemos que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \max_{t \in [0,t_0]} J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) \leq \max_{t \in [0,t_0]} L_m(U_t).$$

Usando (1.8) e (1.9) obtemos

$$\begin{aligned}\max_{t\in[0,t_0]} L_m(U_t) &= \max_{t\in[0,t_0]} \left(\frac{t^{N-p}}{p} - \frac{t^N}{p^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^p \,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U(x)|^p \,\mathrm{d}x = L_m(U) = E_m,\end{aligned} \tag{1.19}$$

e então (1.16) está provado. A seguir provaremos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \geq E_m. \tag{1.20}$$

Suponhamos por contradição que $\liminf_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon < E_m$. Então existem $\alpha, \varepsilon > 0$ e $\gamma \in \Gamma_\varepsilon$ satisfazendo

$$\max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma(s)) < E_m - \alpha \quad \text{e} \quad \frac{m}{p}\varepsilon\left[1 + (1+E_m)^{1/p}\right] < \min\{\alpha, 1\}.$$

Já que $P_\varepsilon(\gamma(0)) = 0$ e $P_\varepsilon(\gamma(1)) < -1$ podemos encontrar $s_0 \in (0,1)$ tal que

$$P_\varepsilon(\gamma(s_0)) = -1 \quad \text{e} \quad P_\varepsilon(\gamma(s)) > -1 \quad \text{para} \quad s \in [0, s_0].$$

Então

$$Q_\varepsilon(\gamma(s)) \leq J_\varepsilon(\gamma(s)) + 1 < E_m - \alpha + 1 < E_m + 1 \quad \text{para todo} \quad s \in [0, s_0].$$

Isto implica

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\varepsilon} |\gamma(s)|^p \,\mathrm{d}x \leq \varepsilon\left[1 + (1+E_m)^{1/p}\right] \quad \text{para} \quad s \in [0, s_0].$$

Uma vez que $G(x,t) \leq H(t)$, segue que

$$\begin{aligned} P_\varepsilon(\gamma(s)) &= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla\gamma(s)|^p + m|\gamma(s)|^p\right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} G(\varepsilon x, \gamma(s)) \,\mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (V(\varepsilon x) - m)|\gamma(s)|^p \,\mathrm{d}x \\ &\geq L_m(\gamma(s)) - \frac{m}{p}\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\varepsilon} |\gamma(s)|^p \,\mathrm{d}x \\ &\geq L_m(\gamma(s)) - \frac{m}{p}\varepsilon\left[1 + (1+E_m)^{1/p}\right] \quad \text{para} \quad s \in [0, s_0]. \end{aligned}$$

Assim,

$$L_m(\gamma(s_0)) \leq \frac{m}{p}\varepsilon\left[1 + (1+E_m)^{1/p}\right] - 1 < 0$$

e lembrando que $E_m = C_m$, o nível do passo da montanha para L_m, (veja [27]) temos

$$\max_{s\in[0,s_0]} L_m(\gamma(s)) \geq E_m.$$

Pelas estimativas acima, lembrando que $Q_\varepsilon(\gamma(s)) \geq 0$, obtemos

$$E_m - \alpha \quad > \quad \max_{s\in[0,s_0]} P_\varepsilon(\gamma(s)) > E_m - \frac{m}{p}\varepsilon\left[1 + (1+E_m)^{1/p}\right] > E_m - \alpha.$$

Esta contradição mostra que (1.20) vale e portanto

$$\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = E_m. \tag{1.21}$$

Isto conclui a prova da proposição. ■

1.5 Existência de um ponto crítico para o funcional energia

Para qualquer $A \subset W_\varepsilon$ e $\alpha > 0$ definimos

$$J_\varepsilon^\alpha = \{u \in W_\varepsilon : J_\varepsilon(u) \leq \alpha\} \quad \text{e} \quad A^\alpha = \{u \in W_\varepsilon : \inf_{v\in A} \|u - v\|_\varepsilon \leq \alpha\}.$$

Com estas notações em mente, temos a seguinte proposição.

Proposição 1.6. *Sejam $\varepsilon_n \to 0$ e $u_n \in X_{\varepsilon_n}^d$ tais que*

$$\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \leq E_m \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_* = 0^1.$$

Então, para $d \in (0, d_0)$, existem $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $z_0 \in \mathcal{M}$ e $U_0 \in \boldsymbol{S}_m$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n y_n - z_0| = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} = 0,$$

a menos de subsequências, se d_0 é suficientemente pequeno.

Prova. Pela definição de $X_{\varepsilon_n}^d$ e pela compacidade de X_{ε_n} existem $\{Z_n\} \subset \mathbf{S}_m$ e $\{z_n\} \subset \mathcal{M}^\beta$ tais que

$$\|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z_n(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \leq d.$$

Pela compacidade de $\mathbf{S}_m$ e $\mathcal{M}^\beta$, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $Z_n \to Z$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $z_n \to z_0$ em $\mathbb{R}^N$ para $Z \in \mathbf{S}_m$ e $z_0 \in \mathcal{M}^\beta$. Então temos a seguinte desigualdade.

[1]Denotamos por $\|J'_\varepsilon(u)\|_*$ a norma de $J'_\varepsilon(u)$ no dual de W_ε.

Afirmação 1.7. *Para n suficientemente grande segue que*

$$\|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \leq 2d. \tag{1.22}$$

Com efeito, é suficiente mostrar que

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z_n(\cdot - z_n/\varepsilon_n) - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} = 0. \tag{1.23}$$

Já que $(y + z_n) \in \Omega$ para todo $y \in B(0, 2\beta)$ e $n \in \mathbb{N}$, vemos que

$$\begin{aligned}
&\|\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z_n(\cdot - z_n/\varepsilon_n) - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n}^p \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla[\varphi_{\varepsilon_n}(y)(Z_n - Z)]|^p + V(\varepsilon_n y + z_n)\varphi_{\varepsilon_n}^p(y)\,|Z_n - Z|^p\right] \mathrm{d}y \\
&\quad \leq c\int_{\mathbb{R}^N} [\varepsilon_n^p|\nabla\varphi(\varepsilon_n y)|^p|Z_n - Z|^p + |\nabla(Z_n - Z)|^p + |Z_n - Z|^p]\,\mathrm{d}y \\
&\quad \leq c\,\|Z_n - Z\|^p.
\end{aligned}$$

Uma vez que $Z_n \to Z$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ esta desigualdade implica (1.23), o que prova a afirmação.

Dividimos a prova desta proposição em cinco passos.

Passo 1: Para qualquer $R > 0$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{y\in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{B(y,R)} |u_n|^p\,\mathrm{d}x = 0$$

onde $A(y; r_1, r_2) := \{x \in \mathbb{R}^N : \ r_1 \leq |x - y| \leq r_2\}$ para $y \in \mathbb{R}^N$ e $0 < r_1 < r_2$.
De fato, suponha que isto não vale. Então existem $R > 0$ e uma sequência $\{\tilde{z}_n\}$ satisfazendo

$$\tilde{z}_n \in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n}; \frac{\beta}{2\varepsilon_n}, \frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{B(\tilde{z}_n,R)} |u_n|^p\,\mathrm{d}x > 0.$$

Podemos assumir que $\varepsilon_n \tilde{z}_n \to \tilde{z}_0$ e que $\tilde{w}_n := u_n(\cdot + \tilde{z}_n) \rightharpoonup \tilde{w}$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\tilde{z}_0 \in A(z_0; \beta/2, 3\beta)$ e $\tilde{w} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Devido ao Teorema de Rellich-Kondrachov (veja [52], Teorema A.5) temos a compacidade da imersão $W^{1,p}(B(0,R)) \hookrightarrow L^p(B(0,R))$ o que implica

$$\int_{B(0,R)} |\tilde{w}|^p\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{B(0,R)} |\tilde{w}_n|^p\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{B(\tilde{z}_n,R)} |u_n|^p\,\mathrm{d}x > 0$$

e então $\tilde{w} \neq 0$. Agora fixemos $k \geq 1$. Já que $\tilde{z}_0 \in \Omega$, existe $n_0 = n_0(k) \in \mathbb{N}$ tal que $\varepsilon_n(x + \tilde{z}_n) \in \Omega$ para todo $x \in B(0, k)$ e $n \geq n_0$. Pela definição de χ_ε e $g(x, t)$ segue que

$$Q'_{\varepsilon_n}(u_n)\phi(\cdot - \tilde{z}_n) = 0 \quad \text{e} \quad g(\varepsilon_n(\cdot + \tilde{z}_n), t)\phi = h(t)\phi$$

para todo $n \geq n_0$ e $\phi \in W_0^{1,p}(B(0,k))$. Assim

$$\left| \int_{B(0,k)} \left[|\nabla \tilde{w}_n|^{p-2} \nabla \tilde{w}_n \nabla \phi + V(\varepsilon_n(x+\tilde{z}_n)) |\tilde{w}_n|^{p-2} \tilde{w}_n \phi \right] \mathrm{d}x - \int_{B(0,k)} h(\tilde{w}_n) \phi \, \mathrm{d}x \right|$$
$$= |J'_{\varepsilon_n}(u_n)\phi(\cdot - \tilde{z}_n)| \leq C \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_* \|\phi\|_{W^{1,p}(B(0,k))} \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Uma vez que $\lim_{n\to\infty} \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_* = 0$ podemos escrever

$$-\Delta_p \tilde{w}_n = h(\tilde{w}_n) - V(\varepsilon_n(\cdot + \tilde{z}_n)) |\tilde{w}_n|^{p-2} \tilde{w}_n + f_n \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(B(0,k)) \tag{1.24}$$

onde $f_n \to 0$ em $W^{-1,p'}(B(0,k))$. Vemos também que

$$[h(\tilde{w}_n) - V(\varepsilon_n(\cdot + \tilde{z}_n)) |\tilde{w}_n|^{p-2} \tilde{w}_n] \to [h(\tilde{w}) - V(\tilde{z}_0) |\tilde{w}|^{p-2} \tilde{w}] \quad \text{em} \quad W^{-1,p'}(B(0,k)).$$

Assim, podemos aplicar o resultado de convergência de Boccardo e Murat (veja [11], Teorema 2.1 e Observação 2.1) o que nos dá

$$\begin{cases} \nabla \tilde{w}_n(x) & \to & \nabla \tilde{w}(x) \quad \text{q.t.p. em} \quad B(0,k) \\ |\nabla \tilde{w}_n|^{p-2} \nabla \tilde{w}_n & \rightharpoonup & |\nabla \tilde{w}|^{p-2} \nabla \tilde{w} \quad \text{em} \quad \left(L^{p'}(B(0,k))\right)^N \end{cases}$$

e nos permite passar o limite em (1.24), obtendo que $\tilde{w}$ satisfaz

$$-\Delta_p \tilde{w} + V(\tilde{z}_0) |\tilde{w}|^{p-2} \tilde{w} = h(\tilde{w}) \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(B(0,k)).$$

Sendo k arbitrário temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla \tilde{w}|^{p-2} \nabla \tilde{w} \nabla \phi + V(\tilde{z}_0) |\tilde{w}|^{p-2} \tilde{w} \phi \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(\tilde{w}) \phi \, \mathrm{d}x$$

para qualquer $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente

$$-\Delta_p \tilde{w} + V(\tilde{z}_0) |\tilde{w}|^{p-2} \tilde{w} = h(\tilde{w}) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Já que $h(t) = 0$ para $t \leq 0$, tomando $\tilde{w}^-$ como função teste, vemos que $\tilde{w}^- \equiv 0$ e portanto $\tilde{w} \geq 0$. Assim segue da desigualdade de Harnack que $\tilde{w} > 0$. Usando (1.11) e a definição de nível de menor energia, temos $L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}) \geq E_{V(\tilde{z}_0)}$. Como a imersão $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é contínua temos $\tilde{w}_n \rightharpoonup \tilde{w}$ em $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Daí para cada $r > 0$ vale

$$\int_{B(0,r)} |\nabla \tilde{w}|^p \, \mathrm{d}x = \|\tilde{w}\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}(B(0,r))} \leq \liminf_{n\to\infty} \|\tilde{w}_n\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}(B(0,r))} = \liminf_{n\to\infty} \int_{B(0,r)} |\nabla \tilde{w}_n|^p \, \mathrm{d}x.$$

Logo, sendo $p>1$, para R suficientemente grande temos

$$\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\tilde{w}|^p\,\mathrm{d}x\leq\liminf_{n\to\infty}\int_{B(0,R)}|\nabla\tilde{w}_n|^p\,\mathrm{d}x=\liminf_{n\to\infty}\int_{B(\tilde{z}_n,R)}|\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x.$$

Usando o fato de que $V(\tilde{z}_0)\geq m$ e os níveis de menor energia dos funcionais L_m e $L_{V(\tilde{z}_0)}$ coincidem com seus respectivos níveis do passo da montanha, temos $E_{V(\tilde{z}_0)}\geq E_m$. Graças à identidade de Pohozaev vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\tilde{w}|^p\,\mathrm{d}x=NL_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}).$$

Logo obtemos

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{B(\tilde{z}_n,R)}|\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x\geq\frac{N}{p}L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w})\geq\frac{N}{p}E_m>0.$$

Lembrando que $|\tilde{z}_n-z_n/\varepsilon_n|\geq\beta/2\varepsilon_n$, a partir de (1.22) vemos que existe $n_0=n_0(d)$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{B(\tilde{z}_n,R)}|\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x &\leq 2^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u_n-\nabla\left(\varphi_{\varepsilon_n}(x-z_n/\varepsilon_n)Z(x-z_n/\varepsilon_n)\right)|^p\,\mathrm{d}x\\ &\quad+2^{p-1}\int_{B(\tilde{z}_n,R)}|\nabla(\varphi_{\varepsilon_n}(x-z_n/\varepsilon_n)Z(x-z_n/\varepsilon_n))|^p\,\mathrm{d}x\\ &\leq 2^{p-1}(2d)^p+\varepsilon_n c\|Z\|_{L^p}^p+c\int_{B(\tilde{z}_n-z_n/\varepsilon_n,R)}|\nabla Z|^p\,\mathrm{d}x\\ &\leq 2^{2p}d^p\quad\text{para todo}\quad n\geq n_0.\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que $(a+b)^p\leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$ para todo $a,b\geq 0$ e $p>1$. Então

$$\frac{N}{p}E_m\leq\liminf_{n\to\infty}\int_{B(\tilde{z}_n,R)}|\nabla u_n|^p\,\mathrm{d}x\leq 2^{2p}d^p$$

o que é uma contradição para $d\in\left(0,(NE_m/(p2^{2p}))^{1/p}\right)$. Isto prova o *Passo 1.*

Passo 2: Definindo $u_{n,1}=\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-z_n/\varepsilon_n)u_n$ *e* $u_{n,2}=u_n-u_{n,1}$ *temos*

$$J_{\varepsilon_n}(u_n)\geq J_{\varepsilon_n}(u_{n,1})+J_{\varepsilon_n}(u_{n,2})+o(1).^2 \tag{1.25}$$

De fato, como $\operatorname{supp}(\chi_{\varepsilon_n})\cap\operatorname{supp}\left(\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-z_n/\varepsilon_n)\right)=\emptyset$ segue da definição de $u_{n,1}$ e $u_{n,2}$ que $Q_{\varepsilon_n}(u_{n,1})=0$ e $Q_{\varepsilon_n}(u_n)=Q_{\varepsilon_n}(u_{n,2})$. Então

$$\begin{aligned}J_{\varepsilon_n}(u_n) &= J_{\varepsilon_n}(u_{n,1})+J_{\varepsilon_n}(u_{n,2})+o(1)-\int_{\mathbb{R}^N}\left[G(\varepsilon_n x,u_n)-G(\varepsilon_n x,u_{n,1})-G(\varepsilon_n x,u_{n,2})\right]\mathrm{d}x\\ &\quad-\frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\varphi_{\varepsilon_n}^p(x-z_n/\varepsilon_n)+[1-\varphi_{\varepsilon_n}(x-z_n/\varepsilon_n)]^p-1\right\}\left[|\nabla u_n|^p+V(\varepsilon_n x)|u_n|^p\right]\mathrm{d}x\\ &\geq J_{\varepsilon_n}(u_{n,1})+J_{\varepsilon_n}(u_{n,2})+o(1)-\int_{\mathbb{R}^N}\left[G(\varepsilon_n x,u_n)-G(\varepsilon_n x,u_{n,1})-G(\varepsilon_n x,u_{n,2})\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

[2] Denotamos $o(1)$ a qualquer sequência $\{a_n\}\subset\mathbb{R}$ tal que $\lim_{n\to\infty}a_n=0$

A fim de concluir a prova do *Passo 2* precisamos estimar esta última integral. Temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} [G(\varepsilon_n x, u_n) \; - \; & G(\varepsilon_n x, u_{n,1}) - G(\varepsilon_n x, u_{n,2})] \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} [G(\varepsilon_n x, u_n) - G(\varepsilon_n x, u_{n,1}) - G(\varepsilon_n x, u_{n,2})] \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} [H(u_n) - H(u_{n,1}) - H(u_{n,2})] \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Escolhemos $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em $A(0;\beta,2\beta)$ e $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \backslash A(0;\beta/2,3\beta)$. Definindo $\psi_n(x) = \psi(\varepsilon_n x - z_n) u_n(x)$, para n grande obtemos

$$\sup_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{B(z,R)} |u_n|^p \, \mathrm{d}x \geq \sup_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{B(z,R)} |\psi_n|^p \, \mathrm{d}x = \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B(z,R)} |\psi_n|^p \, \mathrm{d}x$$

e pelo *Passo 1* segue que

$$\lim_{n \to \infty} \left(\sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B(z,R)} |\psi_n|^p \, \mathrm{d}x \right) = 0.$$

Então, usando um resultado de Lions (veja [42], Lema 1.1) temos que $\psi_n \to 0$ em $L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$. Uma vez que $\psi_n = u_n$ em $A(z_n/\varepsilon_n; \beta/\varepsilon_n, 2\beta/\varepsilon_n)$ obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} |u_n|^{q+1} \, \mathrm{d}x = 0.$$

Finalmente, por $(\bar{h}_1) - (\hat{h}_2)$ vemos que dado $\sigma > 0$ existe $C_\sigma > 0$ satisfazendo

$$|H(t)| \leq (\sigma/6\tilde{c})|t|^p + C_\sigma |t|^{q+1} \quad \text{para todo} \quad t \in \mathbb{R},$$

onde $\tilde{c}$ é uma constante positiva tal que $\|u_n\|_{L^p}^p \leq \tilde{c}$. Como $|u_{n,1}|, |u_{n,2}| \leq |u_n|$ temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |G(\varepsilon_n x, u_n) - G(\varepsilon_n x, u_{n,1}) \; - \; & G(\varepsilon_n x, u_{n,2})| \, \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} (|H(u_n)| + |H(u_{n,1})| + |H(u_{n,2})|) \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{\sigma}{2\tilde{c}} \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p \, \mathrm{d}x + 3C_\sigma \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} |u_n|^{q+1} \, \mathrm{d}x \\ &\leq \sigma\end{aligned}$$

para n grande. Assim (1.25) fica provado.

Passo 3: Dado $d > 0$ suficientemente pequeno existe $n_0 = n_0(d)$ tal que

$$J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \geq \frac{1}{4p}\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n}^p \quad \textit{para qualquer} \quad n \geq n_0. \tag{1.26}$$

Com efeito, vemos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $u \in W_{\varepsilon_n}$ vale

$$\begin{aligned} \|\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)u\|_{\varepsilon_n}^p &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left[2^{p-1}\left(\varepsilon_n^p|\nabla\varphi(\varepsilon_n x - z_n)|^p|u|^p + |\nabla u|^p\right) + V(\varepsilon_n x)|u|^p\right] \mathrm{d}x \\ &\leq c\|u\|_{\varepsilon_n}^p \end{aligned}$$

para algum $c > 0$. Então, usando a desigualdade (1.22) vemos que existe $n_0 = n_0(d)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n} &\leq \|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} + \|u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}^2(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \\ &\quad + \|\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n) - \varphi_{\varepsilon_n}^2(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \\ &\leq (c+2)2d = Cd \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \end{aligned}$$

Usando $(\bar{h}_1) - (\hat{h}_2)$ e a desigualdade de Sobolev temos

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) &\geq P_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \geq \frac{1}{p}\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n}^p - \frac{V_0}{2p}\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n,2}|^p \,\mathrm{d}x - C\int_{\mathbb{R}^N} |u_{n,2}|^{p^*} \mathrm{d}x \\ &\geq \frac{1}{2p}\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n}^p - Cc\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n}^{p^*} \geq \|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n}^p\left(\frac{1}{2p} - \tilde{C}d^{p^*-p}\right) \\ &\geq \frac{1}{4p}\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n}^p \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0 \end{aligned}$$

desde que $d > 0$ seja suficientemente pequeno satisfazendo $\tilde{C}d^{p^*-p} < 1/4p$.

Passo 4: Temos $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = E_m$ *e* $z_0 \in \mathcal{M}$.
De fato, definamos $w_n := u_{n,1}(\cdot + z_n/\varepsilon_n)$. Podemos assumir que $w_n \rightharpoonup w$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Vejamos que $w \neq 0$. Usando $(\bar{h}_1) - (\hat{h}_2)$ vemos que dado $\sigma > 0$ existe $C_\sigma > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla Z|^p + mZ^p) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(Z)Z \,\mathrm{d}x \leq C_\sigma \int_{\mathbb{R}^N} Z^p \,\mathrm{d}x + \sigma\int_{\mathbb{R}^N} Z^{p^*} \mathrm{d}x$$

para todo $Z \in \mathbf{S}_m$. Usando a desigualdade de Sobolev e (1.8) obtemos

$$NE_m - c\sigma(NE_m)^{p^*/p} = \|\nabla Z\|_{L^p}^p - c\sigma\|\nabla Z\|_{L^p}^{p^*} \leq (C_\sigma - m)\int_{\mathbb{R}^N} Z^p \,\mathrm{d}x.$$

Tomando $\sigma > 0$ pequeno vemos que existe $c_0 > 0$ tal que $\|Z\|_{L^p} \geq 2c_0$ para qualquer $Z \in \mathbf{S}_m$ e por (1.7) existe $R > 0$ tal que $\|Z\|_{L^p(B(0,R))} \geq c_0$ para qualquer $Z \in \mathbf{S}_m$. Para este R existe n_1 tal que $|\varepsilon_n x| \leq \beta$ para todo $x \in B(0,R)$ e $n \geq n_1$. Então $\varphi_{\varepsilon_n}Z = Z$ em $B(0,R)$ e

$$\begin{aligned} cd &\geq \|u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \geq V_0^{1/p}\|w_n - \varphi_{\varepsilon_n}Z\|_{L^p(B(0,R))} \\ &\geq V_0^{1/p}\left[\|\varphi_{\varepsilon_n}Z\|_{L^p(B(0,R))} - \|w_n\|_{L^p(B(0,R))}\right] \end{aligned}$$

para algum $c > 0$ e para n suficientemente grande. Então para $d \in \left(0, V_0^{1/p} c_0/2c\right)$ temos

$$\|w_n\|_{L^p(B(0,R))} \geq \|\varphi_{\varepsilon_n} Z\|_{L^p(B(0,R))} - V_0^{-1/p} cd \geq \frac{c_0}{2}$$

se $n \geq n_1$ é grande. Daí, pela compacidade da imersão $W^{1,p}(B(0,R)) \hookrightarrow L^p(B(0,R))$ temos $\|w\|_{L^p(B(0,R))} > 0$ e portanto $w \neq 0$. Além disso, para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ segue que

$$u_{n,1}(y + z_n/\varepsilon_n) = u_n(y + z_n/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad K$$

para n grande. Então, assim como no *Passo 1* concluímos que w satisfaz

$$-\Delta_p w + V(z_0)|w|^{p-2} w = h(w), \quad w > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Agora devemos considerar dois casos:

$$\text{Case 1}: \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |w_n - w|^p \, \mathrm{d}x = 0. \tag{1.27}$$

$$\text{Case 2}: \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{y\in\mathbb{R}^N} \int_{B(y,1)} |w_n - w|^p \, \mathrm{d}x > 0. \tag{1.28}$$

Se o Caso 1 ocorre temos $w_n \to w$ em $L^{q+1}(\mathbb{R}^N)$ (veja Teorema **??**) . Agora usando (1.14), de $(\bar{h}_1) - (\hat{h}_2)$ segue que dado $\sigma > 0$ existe $C_\sigma > 0$ tal que

$$\begin{aligned} |H(w_n) - H(w)| \;&\leq\; |w_n - w| \int_0^1 \sigma \left(|w|^{p-1} + t^{p-1}|w_n - w|^{p-1}\right) \mathrm{d}t \\ &\quad + C_\sigma |w_n - w| \int_0^1 \left(|w|^q + t^q |w_n - w|^q\right) \mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Pela limitação de $\{w_n\}$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |H(w_n) - H(w)| \, \mathrm{d}x \leq c\left[\sigma + C_\sigma \left(\|w_n - w\|_{L^{q+1}} + \|w_n - w\|_{L^{q+1}}^{q+1}\right)\right] \leq \tilde{C}\sigma$$

para n grande. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(w_n) \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} H(w) \, \mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.29}$$

Suponhamos por absurdo que o Caso 2 ocorra. Então existe $\{\hat{z}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n - w|^p \, \mathrm{d}x > 0.$$

Uma vez que $w_n \rightharpoonup w$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ devemos ter

$$|\hat{z}_n| \to \infty. \tag{1.30}$$

Consequentemente

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w|^p \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{e daí} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n|^p \, \mathrm{d}x > 0.$$

Já que $w_n(x) = \varphi_{\varepsilon_n}(x)u_n(x + z_n/\varepsilon_n)$, se $x \in \mathrm{supp}(w_n)$ deve-se ter $|\varepsilon_n x| \leq 2\beta$. Pelo limite anterior vemos que existe $x_n \in \mathrm{supp}(w_n) \cap B(\hat{z}_n, 1)$ para n grande e assim

$$|\hat{z}_n| \leq |\hat{z}_n - x_n| + |x_n| \leq 1 + \frac{2\beta}{\varepsilon_n} \leq \frac{3\beta}{\varepsilon_n}$$

para n grande. Se $|\hat{z}_n| \geq \beta/2\varepsilon_n$ para alguma subsequência segue do *Passo 1* que

$$\begin{aligned} 0 < \lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n|^p \, \mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n,1)} |u_n|^p \, \mathrm{d}x \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{y\in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{B(y,1)} |u_n|^p \, \mathrm{d}x = 0 \end{aligned}$$

o que é impossível. Então $|\hat{z}_n| \leq \beta/2\varepsilon_n$ para n grande. Podemos então assumir que

$$\varepsilon_n \hat{z}_n \to \hat{z}_0 \quad \text{e} \quad u_{n,1}(\cdot + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) \rightharpoonup \tilde{w} \tag{1.31}$$

e vemos que $\hat{z}_0 \in \overline{B(0,\beta/2)}$ e $\tilde{w} \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. Então, dado um compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, temos $\varepsilon_n(x + \hat{z}_n) \in B(0,\beta)$ e $\varphi_{\varepsilon_n}(x + \hat{z}_n) = 1$ para todo $x \in K$ se n é grande. Ou seja,

$$w_n(x + \hat{z}_n) = u_{n,1}(x + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) = u_n(x + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad K$$

para n grande. Consequentemente, como no *Passo 1*, segue que $\tilde{w}$ satisfaz

$$-\Delta_p \tilde{w} + V(\hat{z}_0 + z_0)|\tilde{w}|^{p-2}\tilde{w} = h(\tilde{w}), \quad \tilde{w} > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Análogo ao *Passo 1*, por causa de (1.30) chegamos a uma contradição com (1.22) se $d > 0$ é suficientemente pequeno. Até agora provamos que o Caso 2 não pode ocorrer e portanto o Caso 1 vale de modo que (1.29) é verdadeiro.

Então, sendo $H(w_n) = G(\varepsilon_n x, w_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue de (1.29) que

$$\begin{aligned} \liminf_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) &\geq \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w_n|^p + V(\varepsilon_n x + z_n)|w_n|^p] \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(w_n) \, \mathrm{d}x \right\} \\ &\geq \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^p + V(z_0)w^p] \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(w) \, \mathrm{d}x \\ &\geq L_{V(z_0)}(w) \geq E_{V(z_0)} \geq E_m. \end{aligned}$$

Por outro lado, usando os *Passos 2, 3* obtemos

$$E_m \geq \limsup_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq \limsup_{n\to\infty} [J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) + J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) + o(1)] \geq \limsup_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}).$$

Logo $E_{V(z_0)} = E_m$ e $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = L_{V(z_0)}(w) = E_m$. Além disso, pelo Teorema 1.8 em [27] vemos que $a > b$ implica $E_a > E_b$. Portanto $V(z_0) = m$ e o *Passo 4* está provado.

Passo 5: Conclusão

Segue do *Passo 4* que w é uma solução de energia mínima para (1.2). Tomando $z_1 \in \mathbb{R}^N$ tal que $w(z_1) = \max_{\mathbb{R}^N} w(x)$ e definindo $U_0(x) = w(x + z_1)$ temos $U_0 \in \mathbf{S}_m$. Finalmente, a condição (V_2) aliada ao *Passo 4* nos fornece

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w|^p + mw^p]\, \mathrm{d}x &= E_m + \int_{\mathbb{R}^N} H(w)dx \geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_{n,1}|^p + V(\varepsilon_n x)|u_{n,1}|^p]\, \mathrm{d}x \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_{n,1}|^p + m|u_{n,1}|^p]\, \mathrm{d}x \\
&= \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla w_n|^p + m|w_n|^p]\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Isto prova que $\|w_n\| \to \|w\|$ e sendo $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ um espaço uniformemente convexo segue que $w_n \to w$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Então, definindo $y_n = z_n/\varepsilon_n + z_1$ vemos que

$$\|u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado, usando os *Passos 2,3* e *4*, obtemos

$$E_m \geq \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq \lim_{n\to\infty} \left[J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) + \frac{1}{4p}\|u_{n,2}\|^p_{\varepsilon_n} + o(1) \right] = E_m + \frac{1}{4p} \limsup_{n\to\infty} \|u_{n,2}\|^p_{\varepsilon_n},$$

o que implica $\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n} \to 0$. Isto completa a prova da proposição. ∎

Observamos que o resultado da Proposição 1.6 vale para $d_0 > 0$ suficientemente pequeno independente das sequências satisfazendo as hipóteses.

Corolário 1.8. *Para qualquer $d \in (0, d_0)$ existem constantes $\omega > 0$ e $\varepsilon_d > 0$ tais que*

$$\|J'_\varepsilon(u)\|_* \geq \omega \quad \textit{para todo} \quad u \in J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^d) \quad \textit{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_d).$$

Prova. Suponhamos por absurdo que este resultado não é válido. Então, para algum $d \in (0, d_0)$ existem sequências $\{\varepsilon_n\}$ e $\{u_n\}$ tais que

$$\varepsilon_n \in (0, 1/n), \quad u_n \in J_{\varepsilon_n}^{D_{\varepsilon_n}} \cap (X_{\varepsilon_n}^{d_0} \backslash X_{\varepsilon_n}^d) \quad \text{e} \quad \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_* < \frac{1}{n}.$$

Segue da Proposição 1.6 a existência de $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N,\ z_0 \in \mathcal{M}$ e $U_0 \in \mathbf{S}_m$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n y_n - z_0| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} = 0.$$

Então para n grande temos $\varepsilon_n y_n \in \mathcal{M}^\beta$ e daí, por definição de X_{ε_n} e $X^d_{\varepsilon_n}$, obtemos $\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n) \in X_{\varepsilon_n}$ e $u_n \in X^d_{\varepsilon_n}$. Isto contradiz o fato de que $u_n \in X^{d_0}_{\varepsilon_n} \backslash X^d_{\varepsilon_n}$ e completa a prova. ■

Os próximos lemas são necessários para a obtenção de uma sequência de Palais-Smale limitada num conjunto adequado.

Lema 1.9. *Dado $\delta > 0$ existem $\varepsilon_0 > 0$ e $d_0 > 0$ suficientemente pequenos tais que*

$$J_\varepsilon(u) > E_m - \delta \quad \textit{para todo} \quad u \in X^{d_0}_\varepsilon \quad \textit{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Prova. Para $u \in X_\varepsilon$ temos $u(x) = \varphi_\varepsilon(x - z/\varepsilon)Z(x - z/\varepsilon),\ x \in \mathbb{R}^N$, para algum $z \in \mathcal{M}^\beta$ e $Z \in \mathbf{S}_m$. Usando a condição (V_2) e o fato de que $Q_\varepsilon(u) = 0$ e $L_m(Z) = E_m$ obtemos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) - E_m &\geq \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla(\varphi_\varepsilon Z)|^p - |\nabla Z|^p]\,\mathrm{d}x + \frac{m}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi^p_\varepsilon - 1)\,Z^p\,\mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |H(\varphi_\varepsilon Z) - H(Z)|\,\mathrm{d}x \\ &:= I_1 + I_2 - I_3 \end{aligned}$$

independente de $z \in \mathcal{M}^\beta$. Precisamos estimar estas integrais. Por (1.7) vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi_\varepsilon Z) - \nabla Z|^p\,\mathrm{d}x &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla(1-\varphi_\varepsilon)|^p\,Z^p + (1-\varphi_\varepsilon)^p|\nabla Z|^p]\,\mathrm{d}x \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} [\varepsilon^p\,|\nabla\varphi(\varepsilon x)|^p\,Z^p + (1-\varphi_\varepsilon)^p|\nabla Z|^p]\,\mathrm{d}x \\ &\leq C\int_{\mathbb{R}^N} [\varepsilon^p + (1-\varphi_\varepsilon)^p]\exp(-c|x|)\,\mathrm{d}x \to 0 \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$ o que implica que $I_1 \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$. Para I_2 temos

$$|I_2| = \frac{m}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\varphi^p_\varepsilon)Z^p\,\mathrm{d}x \leq \frac{Cm}{p}\int_{\mathbb{R}^N}(1-\varphi^p_\varepsilon)\exp(-c|x|)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

A seguir, usando (1.14) estimamos I_3

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |H(\varphi_\varepsilon Z) - H(Z)|\,\mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_\varepsilon Z - Z|\int_0^1 |h(Z + t(\varphi_\varepsilon Z - Z))|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x \\ &\leq c\int_{\mathbb{R}^N} (1-\varphi_\varepsilon)\,(Z^p + Z^{q+1})\,\mathrm{d}x \\ &\leq c\int_{\mathbb{R}^N} (1-\varphi_\varepsilon)\exp(-c|x|)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0. \end{aligned}$$

Estas estimativas são uniformes em $Z \in \mathbf{S}_m$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $I_1 + I_2 - I_3 > -\delta/2$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ independentemente de $Z \in \mathbf{S}_m$ e $z \in \mathcal{M}^\beta$. Assim,

$$J_\varepsilon(u) - E_m > -\frac{\delta}{2} \quad \text{para todo} \quad u \in X_\varepsilon \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Agora, se $v \in X_\varepsilon^d$ existe $u \in X_\varepsilon$ tal que $\|u - v\|_\varepsilon \leq d$. Temos $v = u + w$ com $\|w\|_\varepsilon \leq d$. Desde que $Q_\varepsilon(u) = 0$ e $Q_\varepsilon(v) \geq 0$ vemos que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u) \geq\ & \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u + \nabla w|^p - |\nabla u|^p + V(\varepsilon x)(|u + w|^p - |u|^p)] \, \mathrm{d}x \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} [G(\varepsilon x, u + w) - G(\varepsilon x, u)] \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Uma vez que existe $C > 0$ tal que $\|u\|_\varepsilon \leq C$ para todo $u \in X_\varepsilon$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\|w\|_\varepsilon \leq d$ e $h(t) = t^p$ é uma função uniformemente contínua em $[0, C + 10]$, existe $\sigma > 0$ tal que $| \, \|u + w\|_\varepsilon^p - \|u\|_\varepsilon^p \, | \leq \delta/4$ se $d < \sigma$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |G(\varepsilon x, u + w) - G(\varepsilon x, u)| \, \mathrm{d}x & \leq c \int |w| \left(|u|^{p-1} + |w|^{p-1} + |u|^{p^*-1} + |w|^{p^*-1} \right) \mathrm{d}x \\ & \leq c \left(\|u\|_\varepsilon^{p-1} \|w\|_\varepsilon + \|w\|_\varepsilon^p + \|u\|_\varepsilon^{p^*-1} \|w\|_\varepsilon + \|w\|_\varepsilon^{p^*} \right) \\ & < \frac{\delta}{4} \end{aligned}$$

para d suficientemente pequeno. Portanto existe $d_0 > 0$ tal que

$$J_\varepsilon(v) > J_\varepsilon(u) - \frac{\delta}{2} > E_m - \delta \quad \text{para todo} \quad v \in X_\varepsilon^{d_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

e o lema está provado. ∎

Seguindo Corolário 1.8 e Lema 1.9, fixamos $d_1 \in (0, d_0/3)$ e correspondentes $\omega > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\begin{aligned} & \|J_\varepsilon'(u)\| \geq \omega \quad \text{para todo} \quad u \in J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \ \text{ e} \\ & J_\varepsilon(u) > E_m/2 \quad \text{para todo} \quad u \in X_\varepsilon^{d_0} \end{aligned} \tag{1.32}$$

para qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Assim, obtemos o seguinte resultado.

Lema 1.10. *Para $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno existe $\alpha > 0$ tal que*

$$|s - 1/t_0| \leq \alpha \quad \textit{implica que} \quad \gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1},$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, onde t_0 foi escolhido em (1.10) e γ_ε foi definido em (1.17).

Prova. Primeiramente observamos que existe $C_0 > 0$ independente de $\varepsilon \in (0, 10)$ tal que

$$\|\varphi_\varepsilon v\|_\varepsilon \leq C_0 \|v\| \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0, 10) \quad \text{e} \quad v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{1.33}$$

Como $l : [0, t_0] \to W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dada por $l(t) = U_t$ é uma função contínua, existe $\sigma > 0$ tal que

$$|t - 1| \leq \sigma \quad \text{implica que} \quad \|U_t - U\| < \frac{d_1}{C_0}.$$

Assim, se $|st_0 - 1| \leq \sigma$ segue que

$$\|\gamma_\varepsilon(s) - \varphi_\varepsilon U\|_\varepsilon = \|\varphi_\varepsilon(U_{st_0} - U)\|_\varepsilon \leq C_0 \|U_{st_0} - U\| < d_1 \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Já que $\varphi_\varepsilon U \in X_\varepsilon$ temos $\gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1}$. Tomando $\alpha = \sigma/t_0$ completamos a prova do lema. ■

Lema 1.11. *Para α dado no Lema 1.10 existem $\rho > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ satisfazendo*

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) < E_m - \rho \quad \text{para qualquer} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \text{e} \quad |s - 1/t_0| \geq \alpha.$$

Prova. Desde que $t = 1$ é o único ponto de máximo de $\left(t^{N-p}/p - t^N/p^*\right)$ em $[0, t_0]$, devido a (1.8) e (1.9) vemos que existe $\rho > 0$ tal que

$$L_m(U_t) < E_m - 2\rho \quad \text{para} \quad |t - 1| \geq t_0\alpha.$$

Por outro lado, graças ao Lema 1.4 deduzimos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{t \in [0, t_0]} |J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| < \rho \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Juntando estes duas desigualdades, para $s \in [0, 1]$ tal que $|s - 1/t_0| \geq \alpha$ obtemos

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) = J_\varepsilon(w_{\varepsilon,st_0}) \leq L_m(U_{st_0}) + |J_\varepsilon(w_{\varepsilon,st_0}) - L_m(U_{st_0})| < E_m - \rho$$

o que conclui a prova do lema. ■

Proposição 1.12. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe uma sequência $\{u_n\} \subset X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ tal que $\|J'_\varepsilon(u_n)\|_* \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Prova. Suponhamos que a Proposição 1.12 é falsa. Então, para $\varepsilon > 0$ pequeno existe $a(\varepsilon) > 0$ tal que $\|J'_\varepsilon(u)\|_* \geq a(\varepsilon)$ em $X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$. Por (1.32) sabemos que $\|J'_\varepsilon(u)\|_* \geq \omega$ em $(X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ onde ω é independente de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Então existe um campo vetorial pseudo-gradiente, T_ε, em uma vizinhança Z_ε de $X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D\varepsilon}$ para J_ε (veja [52] para detalhes). Seja $\tilde{Z}_\varepsilon \subset Z_\varepsilon$ outra vizinhança na qual $\|J'_\varepsilon(u)\|_* \geq a(\varepsilon)/2$. Então tomamos η_ε uma função Lipschitz contínua em W_ε tal que

$$0 \leq \eta_\varepsilon \leq 1, \quad \eta_\varepsilon \equiv 1 \quad \text{em} \quad X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \quad \text{e} \quad \eta_\varepsilon \equiv 0 \quad \text{em} \quad W_\varepsilon \backslash \tilde{Z}_\varepsilon.$$

Tomamos também $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitz contínua tal que

$$0 \leq \xi \leq 1, \quad \xi(a) = 1 \quad \text{se} \quad |a - E_m| \leq E_m/2 \quad \text{e} \quad \xi(a) = 0 \quad \text{se} \quad |a - E_m| \geq E_m.$$

Definindo agora

$$e_\varepsilon(u) = \begin{cases} -\eta_\varepsilon(u)\xi(J_\varepsilon(u))T_\varepsilon(u) & \text{se} \quad u \in Z_\varepsilon \\ 0 & \text{se} \quad u \in W_\varepsilon \backslash Z_\varepsilon, \end{cases}$$

vemos que e_ε é uma função localmente Lipschitz contínua e limitada em W_ε. Portanto sabemos que existe uma única solução global $\Psi_\varepsilon : W_\varepsilon \times \mathbb{R} \to W_\varepsilon$ do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Psi_\varepsilon(u,t) &= e_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(u,t)) \\ \Psi_\varepsilon(u,0) &= u. \end{cases}$$

Já que por (1.21) temos $\lim_{\varepsilon \to 0} D_\varepsilon = E_m$, para $\varepsilon > 0$ pequeno temos

$$D_\varepsilon \leq E_m + \frac{1}{2} \min\left\{E_m, \omega^2 d_1\right\}.$$

Então, pela escolha de d_0 e d_1, vemos que Ψ_ε satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\Psi_\varepsilon(u,t) = u$ se $t = 0$ ou $u \in W_\varepsilon \backslash Z_\varepsilon$ ou ainda $J_\varepsilon(u) \notin (0, 2E_m)$.

(ii) $\left\|\frac{d}{dt}\Psi_\varepsilon(u,t)\right\|_\varepsilon \leq 2$ para todo (u,t).

(iii) $\frac{d}{dt}\left(J_\varepsilon\left(\Psi_\varepsilon(u,t)\right)\right) \leq 0$ para todo (u,t).

(iv) $\frac{d}{dt}\left(J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(u,t))\right) \leq -\omega^2$ se $\Psi_\varepsilon(u,t) \in (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$.

(v) $\frac{d}{dt}(J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(u,t))) \leq -(a(\varepsilon))^2$ se $\Psi_\varepsilon(u,t) \in X_\varepsilon^{d_1} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$.

Definimos $\tilde{\gamma}_\varepsilon(s) = \Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t_\varepsilon)$ para t_ε a ser escolhido. Uma vez que $J_\varepsilon(0) = 0$ e $J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(1)) < -1$ não pertencem a $(0, 2E_m)$, por (i) temos

$$\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(0), t) = \gamma_\varepsilon(0) = 0 \quad \text{e} \quad \Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(1), t) = \gamma_\varepsilon(1) = w_{\varepsilon, t_0}$$

para qualquer $t > 0$. Então $\tilde{\gamma}_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$. Devemos escolher t_ε tal que

$$J_\varepsilon(\tilde{\gamma}_\varepsilon(s)) \leq E_m - \min\left\{\rho, \frac{\omega^2 d_1}{2}\right\} \quad \text{para todo} \quad s \in [0,1]. \tag{1.34}$$

Note que se $|s - 1/t_0| > \alpha$, pelo Lema 1.11 e por (iii) acima segue que

$$J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t)) \leq J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) < E_m - \rho \leq E_m - \min\left\{\rho, \frac{\omega^2 d_1}{2}\right\} \quad \text{para todo} \quad t > 0.$$

Assim, (1.34) vale para $|s - 1/t_0| > \alpha$, independente da escolha de t_ε. Por outro lado, se $s \in I := [1/t_0 - \alpha, 1/t_0 + \alpha]$ segue do Lema 1.10 que $\gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1}$. Então temos dois casos a considerar:

(a) $\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t) \in X_\varepsilon^{d_0}$ para todo $t \in [0, \infty)$.

(b) $\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t_s) \notin X_\varepsilon^{d_0}$ para algum $t_s > 0$.

Se $s \in I$ satisfaz (a), por $(i), (iv)$ e (v) segue que

$$J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t)) \;=\; J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) + \int_0^t \frac{d}{d\tau}\left(J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), \tau))\right) \mathrm{d}\tau \leq D_\varepsilon - \min\left\{\omega^2, a(\varepsilon)^2\right\} t$$

de modo que $J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t)) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Mas isto está em contradição com (1.32). Assim, qualquer $s \in I$ satisfaz a condição (b). Fixamos $s_0 \in I$ e uma vizinhança $I_\varepsilon^{s_0}$ de s_0 em I tal que $\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t_{s_0}) \notin X_\varepsilon^{d_0}$ para todo $s \in I_\varepsilon^{s_0}$. Uma vez que $\gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1}$ para todo $s \in I_\varepsilon^{s_0}$, de $(i) - (v)$ observamos que existe um intervalo $[t_s^1, t_s^2] \subset [0, t_{s_0}]$ satisfazendo

$$\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t) \in X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1} \quad \text{para} \quad t \in [t_s^1, t_s^2] \quad \text{e} \quad |t_s^1 - t_s^2| \geq d_1.$$

Então, por $(i) - (iv)$ segue que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon\left(\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t_{s_0})\right) \;&\leq\; J_\varepsilon\left(\gamma_\varepsilon(s)\right) + \int_{t_s^1}^{t_s^2} \frac{d}{d\tau}\left(J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), \tau))\right) \mathrm{d}\tau \;\leq\; D_\varepsilon - \omega^2\left(t_s^2 - t_s^1\right) \\ &\leq\; E_m - \frac{1}{2}\omega^2 d_1 \quad \text{para todo} \quad s \in I_\varepsilon^{s_0}. \end{aligned}$$

Assim, para cada $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ temos $I = \{\bigcup I_\varepsilon^s : s \in I\}$ e pela compacidade de I existem $s_1, \cdots, s_k \in I$ tais que $I = \bigcup_{i=1}^k I_\varepsilon^{s_i}$. Seja $t_\varepsilon = \max_{1 \leq i \leq k} t_{s_i}$. Então, para cada $s \in I$ temos $s \in I_\varepsilon^{s_i}$ para algum i e

$$J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t_\varepsilon)) \leq J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s), t_{s_i})) \leq E_m - \frac{1}{2}\omega^2 d_1.$$

Portanto (1.34) é válido. Já que $\tilde{\gamma}_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$ obtemos

$$C_\varepsilon \leq \max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\tilde{\gamma}_\varepsilon(s)) \leq E_m - \min\left\{\rho, \frac{\omega^2 d_1}{2}\right\},$$

o que está em contradição com a Proposição 1.5. Isto conclui a prova desta proposição. ∎

Proposição 1.13. *Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno então existe um ponto crítico não trivial $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ para J_ε.*

Prova. Seja $\{u_n\}$ a sequência dada na Proposição 1.12. Já que $X_\varepsilon^{d_0}$ é limitado em W_ε, podemos extrair uma subsequência (ainda denotada u_n) tal que $u_n \rightharpoonup u_\varepsilon$ em W_ε para algum $u_\varepsilon \in W_\varepsilon$. Pela definição de $X_\varepsilon^{d_0}$ e pela compacidade de X_ε, vemos que existem $z \in \mathcal{M}^\beta$ e $Z \in \mathbf{S}_m$ tais que

$$\|u_n - \varphi_\varepsilon(\cdot - z/\varepsilon)Z(\cdot - z/\varepsilon)\|_\varepsilon \leq 2d_0,$$

para n grande. Como no *Passo 4* da Proposição 1.6 vemos que existem $c, R > 0$ tais que

$$\|u_\varepsilon\|_{L^p(B(z/\varepsilon,R))} = \lim_{n\to\infty} \|u_n\|_{L^p(B(z/\varepsilon,R))} \geq c$$

o que implica $u_\varepsilon \neq 0$. Provaremos que $u_n \to u_\varepsilon$ em W_ε. A fim de provarmos esta convergência forte mostraremos que

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,R)} [|\nabla u_n|^p + V(\varepsilon x)|u_n|^p] \, \mathrm{d}x \right\} = 0. \tag{1.35}$$

Seja $\sigma > 0$. Tomando $C > 0$ tal que $\|u_n\|^p \leq C$ para $n \in \mathbb{N}$ e $D > 0$ satisfazendo

$$\Omega \subset B(0, D) \quad \text{e} \quad R > \max\left\{\frac{D}{\varepsilon}, \frac{8C}{\sigma}\right\},$$

escolhemos $\psi_R \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi_R \leq 1$, $\psi_R(x) = 0$ se $|x| \leq R$, $\psi_R(x) = 1$ se $|x| \geq 2R$ e $|\nabla\psi_R| \leq 2/R$. Temos $\lim_{n\to\infty}\langle J_\varepsilon'(u_n), (\psi_R u_n)\rangle = 0$ e desde que $Q_\varepsilon'(u_n)(\psi_R u_n) \geq 0$ vemos que

$$\langle J_\varepsilon'(u_n), (\psi_R u_n)\rangle \geq \int_{\mathbb{R}^N} \left[(|\nabla u_n|^p + V(\varepsilon x)|u_n|^p - g(\varepsilon x, u_n)u_n)\,\psi_R + u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_R\right] \mathrm{d}x.$$

Sendo $\psi_R = 0$ em Ω_ε, pela definição de $g(x,t)$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_n|^p + V(\varepsilon x)|u_n|^p\right]\psi_R \,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad \leq \langle J_\varepsilon'(u_n), (\psi_R u_n)\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} u_n|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\psi_R \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\varepsilon} \tilde{h}(u_n)u_n\psi_R \,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad \leq \langle J_\varepsilon'(u_n), (\psi_R u_n)\rangle + \frac{2}{R}\int_{\mathbb{R}^N} (|u_n|^p + |\nabla u_n|^p)\,\mathrm{d}x + \frac{V_0}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^p\psi_R \,\mathrm{d}x \\
&\qquad\qquad \leq \langle J_\varepsilon'(u_n), (\psi_R u_n)\rangle + \frac{2C}{R} + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)|u_n|^p\psi_R \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,2R)} \left[|\nabla u_n|^p + V(\varepsilon x)|u_n|^p\right]\,\mathrm{d}x \leq 2\langle J_\varepsilon'(u_n), (\psi_R u_n)\rangle + \frac{\sigma}{2} \leq \sigma$$

para todo $n > n_0$. Por outro lado, para $1 \leq n \leq n_0$ existe $R_n > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,R_n)} \left[|\nabla u_n|^p + V(\varepsilon x)|u_n|^p\right]\,\mathrm{d}x \leq \sigma.$$

Tomando $\tilde{R} = \max\{R_1, R_2, \ldots, R_{n_0}, 2R\}$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,\tilde{R})} \left[|\nabla u_n|^p + V(\varepsilon x)|u_n|^p\right]\,\mathrm{d}x \leq \sigma \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

e isto prova (1.35). Usando este resultado veremos que $\|u_n\|_\varepsilon \to \|u_\varepsilon\|_\varepsilon$ quando $n \to \infty$. De fato, dado $\sigma > 0$ existe $R > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,R)} \left[|\nabla u_n|^p + |\nabla u_\varepsilon|^p + V(\varepsilon x)(|u_n|^p + |u_\varepsilon|^p)\right]\,\mathrm{d}x < \frac{\sigma}{10}, \tag{1.36}$$

para todo n. Escolhemos $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em $B(0,R)$, $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\setminus B(0,2R)$ e $|\nabla\psi| \leq 1$. Temos $\lim_{n\to\infty}\langle J_\varepsilon'(u_n), (u_n - u_\varepsilon)\psi\rangle = 0$ já que $\|J_\varepsilon'(u_n)\|_* \to 0$ e $\|(u_n - u_\varepsilon)\psi\|_\varepsilon \leq c$. Observamos que

$$\begin{aligned}
\langle J_\varepsilon'(u_n), (u_n - u_\varepsilon)\psi\rangle \;=\; & \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u_\varepsilon) + V(\varepsilon x)|u_n|^{p-2}u_n(u_n - u_\varepsilon)\right]\psi \,\mathrm{d}x \\
& + \int_{\mathbb{R}^N} \left[(u_n - u_\varepsilon)|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n\nabla\psi - g(\varepsilon x, u_n)(u_n - u_\varepsilon)\psi\right]\,\mathrm{d}x \\
& + p^2\left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon|u_n|^p\,\mathrm{d}x - 1\right)_+^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon|u_n|^{p-2}u_n(u_n - u_\varepsilon)\psi \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Usando (1.36), a compacidade da imersão $W^{1,p}(\text{supp}(\psi)) \hookrightarrow L^r(\text{supp}(\psi))$ para $1 \leq r < p^*$ e a limitação de $\{u_n\}$ e $\{Q_\varepsilon(u_n)\}$ vemos que

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{B(0,R)} \left[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla(u_n - u_\varepsilon) + V(\varepsilon x)|u_n|^{p-2}u_n(u_n - u_\varepsilon)\right] \mathrm{d}x \right| \\
&\quad \leq \ |\langle J_\varepsilon'(u_n), (u_n - u_\varepsilon)\psi\rangle| + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,R)} \left[2|\nabla u_n|^p + |\nabla u_\varepsilon|^p + V(\varepsilon x)\left(|u_n|^p + |u_\varepsilon|^p\right)\right] \mathrm{d}x \\
&\qquad + \int_{\text{supp}(\psi)} \left[|u_n - u_\varepsilon|^p + c\,|g(\varepsilon y, u_n)|\,|u_n - u_\varepsilon| + \tilde{c}\chi_\varepsilon |u_n|^{p-1}|u_n - u_\varepsilon|\right] \mathrm{d}x \\
&\quad \leq \ \frac{\sigma}{4}
\end{aligned}$$

para n grande. Por outro lado, já que $\|J_\varepsilon'(u_n)\|_* \to 0$, usando argumentos como no *Passo 1* obtemos $|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u_\varepsilon|^{p-2}\nabla u_\varepsilon$ em $(L^{p'}(B(0,R)))^N$. Então

$$\left| \int_{B(0,R)} \left[|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla u_\varepsilon - |\nabla u_\varepsilon|^p + V(\varepsilon x)\left(|u_n|^{p-2}u_n u_\varepsilon - |u_\varepsilon|^p\right)\right] \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\sigma}{4}$$

para n grande. Devido a estas duas desigualdades obtemos

$$\left| \int_{B(0,R)} \left\{ \left[|\nabla u_n|^p + V(\varepsilon x)|u_n|^p\right] - \left[|\nabla u|^p + V(\varepsilon x)|u|^p\right]\right\} \mathrm{d}x \right| \leq \frac{\sigma}{2} \tag{1.37}$$

desde que n seja grande o suficiente. Assim, por (1.36) e (1.37) concluímos que

$$\left| \|u_n\|_{W_\varepsilon}^p - \|u\|_{W_\varepsilon}^p \right| \leq \sigma$$

para n grande. Portanto $\|u_n\|_\varepsilon \to \|u\|_\varepsilon$ quando $n \to \infty$ e sendo W_ε um espaço uniformemente convexo, temos que $u_n \to u_\varepsilon$ em W_ε. Finalmente, isto implica que $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ e $J_\varepsilon'(u_\varepsilon) = 0$ o que conclui a prova da proposição. ∎

A partir da Proposição 1.13 vemos que existe $d_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que J_ε tem um ponto crítico não trivial $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Já que u_ε satisfaz

$$-\Delta_p u_\varepsilon + V(\varepsilon x)|u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon = g(\varepsilon x, u_\varepsilon) - p^2\left(\int \chi_\varepsilon |u_\varepsilon|^p \mathrm{d}y - 1\right)_+^{p-1} \chi_\varepsilon |u_\varepsilon|^{p-2}u_\varepsilon \tag{1.38}$$

em $\mathbb{R}^N$ e $g(x,t) = 0$ para $t \leq 0$, usando u_ε^- como função teste vemos que $u_\varepsilon^- \equiv 0$ e consequentemente $u_\varepsilon \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$. Usando um método iterativo devido a Moser e algumas ideias de Byeon (veja [14], Proposição 3.5) provaremos que $\{\|u_\varepsilon\|_{L^\infty}\}_\varepsilon$ é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Então $u_\varepsilon \in \mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e segue da desigualdade de Harnack que $u_\varepsilon > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Além disso, graças a (g_1) e (1.38) vemos que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \geq c$ para algum $c > 0$ e para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Proposição 1.14. *O conjunto* $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ *é limitado em* $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Prova. Uma vez que $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ existe $C > 0$ tal que $\|u_\varepsilon\|_\varepsilon \leq C$ para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$. Seja $u_{\varepsilon,l} = \min\{u_\varepsilon, l\}$. Para qualquer $s, l > 0$ temos $u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^s \in W_\varepsilon$ e

$$\nabla(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^s) = u_{\varepsilon,l}^s \nabla u_\varepsilon + s u_{\varepsilon,l}^{s-1} u_\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,l} = \begin{cases} (1+s) u_{\varepsilon,l}^s \nabla u_\varepsilon & \text{se} \quad u_\varepsilon \leq l \\ u_{\varepsilon,l}^s \nabla u_\varepsilon & \text{se} \quad u_\varepsilon > l. \end{cases}$$

Então

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^s)|^p \mathrm{d}x \\
= \; & \int_{\{u_\varepsilon < l\}} (1+s)^p u_{\varepsilon,l}^{ps} |\nabla u_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x + \int_{\{u_\varepsilon > l\}} u_{\varepsilon,l}^{ps} |\nabla u_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x \\
\leq \; & (1+s)^{p-2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(u_{\varepsilon,l}^{ps} |\nabla u_\varepsilon|^p + 2s u_{\varepsilon,l}^{ps} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla u_{\varepsilon,l} \right) \mathrm{d}x + \frac{s^2}{(1+s)^2} \int_{\{u_\varepsilon < l\}} |\nabla u_\varepsilon^{s+1}|^p \,\mathrm{d}x \\
\leq \; & \max\left\{1, \frac{2}{p}\right\} (1+s)^{p-2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{ps}) \,\mathrm{d}x + \frac{s^2}{(1+s)^2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^s)|^p \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Consequentemente

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^s)|^p \,\mathrm{d}x \leq \max\left\{1, \frac{2}{p}\right\} \frac{(1+s)^p}{2s+1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^{p-2} \nabla u_\varepsilon \nabla(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{ps}) \,\mathrm{d}x.$$

Já que $Q'_\varepsilon(u_\varepsilon)(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{ps}) \geq 0$ e que a partir de $(g_1)-(g_2)$ existe $c > 0$ tal que $g(x,t) \leq V_0 t^{p-1} + ct^q$ para qualquer $x \in \mathbb{R}^N$ e $t \in \mathbb{R}$, usando $u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{ps}$ como uma função teste em (1.38) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^s)|^p \,\mathrm{d}x \leq c \max\left\{1, \frac{2}{p}\right\} \frac{(1+s)^p}{2s+1} \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{q+1} u_{\varepsilon,l}^{ps} \,\mathrm{d}x.$$

Pela desigualdade de Sobolev obtemos

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N} (u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^s)^{p^*} \,\mathrm{d}x \right)^{p/p^*} \leq c(1+s)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{q+1} u_{\varepsilon,l}^{ps} \,\mathrm{d}x. \tag{1.39}$$

Vemos que para qualquer $k > 0$ vale

$$\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{q+1} u_{\varepsilon,l}^{ps} \,\mathrm{d}x \leq k^{q-p+1} \int_{\{u_\varepsilon \leq k\}} u_\varepsilon^p u_{\varepsilon,l}^{ps} \,\mathrm{d}x + \int_{\{u_\varepsilon > k\}} u_\varepsilon^{q-p+1} (u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^s)^p \,\mathrm{d}x.$$

Uma vez que $p < q+1 < p^*$ temos $N(q-p+1)/p < p^*$. Daí, tomando $\sigma = N(q-p+1)/pp^*$

e $\eta = N/(N-p)$ segue que $\sigma \in (0,1)$, $1/\eta + p/N = 1$ e

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{q+1} u_{\varepsilon,l}^{ps}\,\mathrm{d}x \\
\leq\ & k^{q-p+1}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p} u_{\varepsilon,l}^{ps}\,\mathrm{d}x + \left(\int_{\{u_\varepsilon>k\}} u_\varepsilon^{\sigma p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{p/N}\left(\int_{\{u_\varepsilon>k\}} (u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^{p\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{1/\eta} \\
\leq\ & k^{q-p+1}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p} u_{\varepsilon,l}^{ps}\,\mathrm{d}x + \|(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^p\|_{L^\eta}\left(\int_{\{u_\varepsilon>k\}} u_\varepsilon^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{\sigma p/N} |\{u_\varepsilon>k\}|^{(1-\sigma)p/N}.
\end{aligned}
$$

Sendo

$$
\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p^*}\,\mathrm{d}x \geq \int_{\{u_\varepsilon>k\}} u_\varepsilon^{p^*}\,\mathrm{d}x > k^{p^*}|\{u_\varepsilon>k\}|
$$

segue que

$$
\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{q+1} u_{\varepsilon,l}^{ps}\,\mathrm{d}x \leq k^{q-p+1}\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p} u_{\varepsilon,l}^{ps}\,\mathrm{d}x + \|(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^p\|_{L^\eta}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{p/N}\left(\frac{1}{k}\right)^{(1-\sigma)pp^*/N}.
$$

Agora, tomando

$$
k_\varepsilon = \left[2c(1+s)^{p-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p^*}\,\mathrm{d}x\right)^{p/N}\right]^{N/(pp^*(1-\sigma))}
$$

e usando (1.39) temos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^N} (u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^{p\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{1/\eta} \leq\ & c\,(1+s)^{p-1}\left[2c(1+s)^{p-1}\right]^{\sigma/(1-\sigma)}\|u_\varepsilon\|_{L^{p\eta}}^{(q-p+1)/(1-\sigma)}\int_{\mathbb{R}^N}(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^{p}\,\mathrm{d}x \\
&+\frac{1}{2}\|(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^p\|_{L^\eta}.
\end{aligned}
$$

Então

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^N} (u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^{p\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{1/\eta} \leq 2c(1+s)^{p-1}\left[2c(1+s)^{p-1}\right]^{\sigma/(1-\sigma)}\int_{\mathbb{R}^N}(u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^{p}\,\mathrm{d}x.
$$

Assim,

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^N} (u_\varepsilon u_{\varepsilon,l}^{s})^{p\eta}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p\eta(1+s)} \leq \left[c(1+s)^{p-1}\right]^{c/p(1+s)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p(1+s)}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p(1+s)}
$$

para todo $l > 0$. Pelo Lema de Fatou obtemos

$$
\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p\eta(1+s)}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p\eta(1+s)} \leq \left[c(1+s)^{p-1}\right]^{c/p(1+s)}\left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p(1+s)}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p(1+s)} \qquad (1.40)
$$

para qualquer $s > 0$ e $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, onde $c > 0$ é independente de ε. Escolhendo $s_0 > 0$ tal que $p(1+s_0) = p^*$, já que $u_\varepsilon \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e $s_0 + 1 = \eta$, segue que $u_\varepsilon \in L^{p\eta^2}(\mathbb{R}^N)$. Tomando

$s_n = \eta^{n+1} - 1$ temos $\lim_{n\to\infty} s_n = \infty$ e como $u_\varepsilon \in L^{p(1+s_n)}(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $n \in \mathbb{N}$ obtemos $u_\varepsilon \in L^r(\mathbb{R}^N)$ para todo $r \in [p, \infty)$. Além disso, denotando $\Gamma(n) = \|u_\varepsilon\|_{L^{p(1+s_n)}}$, de (1.40) vemos que

$$\begin{aligned}
\Gamma(n) &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p(1+s_n)}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p(1+s_n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p\eta(1+s_{n-1})}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p\eta(1+s_{n-1})} \\
&\le \left[c(1+s_{n-1})^{p-1}\right]^{c/p(1+s_{n-1})} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u_\varepsilon^{p(1+s_{n-1})}\,\mathrm{d}x\right)^{1/p(1+s_{n-1})} \\
&= \left[c(1+s_{n-1})^{p-1}\right]^{c/p(1+s_{n-1})} \Gamma(n-1).
\end{aligned}$$

Então por recorrência concluímos que

$$\Gamma(n) \le \prod_{i=0}^{n-1} \left[c(1+s_i)^{p-1}\right]^{c/p(1+s_i)} \Gamma(0) \le \prod_{i=1}^{\infty} \left(c\eta^i\right)^{c/\eta^i} \Gamma(0).$$

Pelo teste da Razão temos

$$\log\left(\prod_{i=1}^{\infty} \left(c\eta^i\right)^{\frac{c}{\eta^i}}\right) = c\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\log(c\eta^i)}{\eta^i} < \infty$$

e consequentemente

$$\Gamma(n) \le c\Gamma(0) = c\|u_\varepsilon\|_{L^{p^*}} \le C \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}$$

independentemente de ε. Portanto

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \le \lim_{n\to\infty} \Gamma(n) \le C \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

como queríamos demonstrar. ■

Agora estamos prontos para provar nosso resultado principal.

1.6 Prova do Teorema 1.1

Observamos que pela Proposição 1.6 existe $\{y_\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\varepsilon y_\varepsilon \in \mathcal{M}^{2\delta}$ e para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existem $z_0 \in \mathcal{M}$ e $U_0 \in \mathbf{S}_m$ satisfazendo

$$\varepsilon_n y_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_{\varepsilon_n})U_0(\cdot - y_{\varepsilon_n})\|_{\varepsilon_n} \to 0,$$

e então

$$\|u_{\varepsilon_n}(\cdot + y_{\varepsilon_n}) - U_0\| \to 0.$$

Consequentemente, usando (1.7) vemos que dado $\sigma > 0$ existem $R > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,R)} u_\varepsilon^p(x+y_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \le \sigma. \tag{1.41}$$

Denotando $w_\varepsilon = u_\varepsilon(\cdot + y_\varepsilon)$ devido a (1.38) e Proposição 1.14 obtemos

$$-\Delta_p w_\varepsilon \le C w_\varepsilon^{p-1} \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N.$$

A partir de ([53], Teorema 1.3) vemos que existe $C_0 = C_0(N, p, C)$ tal que

$$\sup_{B(y,1)} w_\varepsilon \le C_0 \left\|w_\varepsilon\right\|_{L^p(B(y,2))} \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Então, por (1.41) e (g_1) existem $R, \varepsilon_0 > 0$ tais que $g(\varepsilon x, w_\varepsilon(x)) \le (V_0/2)w_\varepsilon(x)^{p-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}^N\setminus B(0,R)$ e $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Devido a (1.38) como em ([37], Teorema 3.1) provamos o decaimento exponencial de w_ε uniformemente em $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$. Agora consideramos $\zeta_\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ um ponto de máximo de w_ε. Desde que

$$w_\varepsilon(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty \quad \text{e} \quad \|w_\varepsilon\|_\infty \ge c > 0 \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$$

concluímos que $\{\zeta_\varepsilon\}$ é limitado. Temos então $\tilde{x}_\varepsilon := \zeta_\varepsilon + y_\varepsilon$ um ponto de máximo para u_ε e o decaimento exponencial

$$u_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x - y_\varepsilon) \le C\exp\left(-c|x - \tilde{x}_\varepsilon + \zeta_\varepsilon|\right) \le C\exp\left(-c|x - \tilde{x}_\varepsilon|\right) \tag{1.42}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$ onde as constantes $C, c > 0$ não dependem de ε. Usaremos este decaimento para provar que $Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$. A limitação de $\{\zeta_\varepsilon\}$ implica que $\{\varepsilon\tilde{x}_\varepsilon\} \subset \mathcal{M}^{5\beta}$ para $\varepsilon > 0$ pequeno. Lembrando que $\operatorname{dist}\left(\mathbb{R}^N\setminus\Omega, \mathcal{M}^{5\beta}\right) \ge 5\beta > 0$ e $\mathcal{M}^{5\beta}$ é um conjunto compacto, afirmamos que existe $c_1 > 0$ tal que

$$|x| \le c_1 \operatorname{dist}\left(x, \mathcal{M}^{5\beta}\right) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N\setminus\Omega.$$

De fato, caso contrário para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{R}^N\setminus\Omega$ tal que $|x_n| > n\operatorname{dist}\left(x_n, \mathcal{M}^{5\beta}\right)$. Então $|x_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Por outro lado, sendo $\mathcal{M}^{5\beta}$ compacto existe $y_n \in \mathcal{M}^{5\beta}$ tal que $\operatorname{dist}\left(x_n, \mathcal{M}^{5\beta}\right) = |x_n - y_n|$. Consequentemente

$$|x_n| > n|x_n - y_n| \ge n(|x_n| - |y_n|) \ge n|x_n| - cn.$$

Como $n/(n-1) \to 1$ obtemos $|x_n| \leq cn/(n-1) \leq \tilde{c}$ o que é um absurdo e então a afirmação é válida. Então fazendo uma mudança de variáveis e usando (1.42) obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon u_\varepsilon^p \,\mathrm{d}x &= \varepsilon^{-(N+1)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} u_\varepsilon^p(x/\varepsilon) \,\mathrm{d}x \\
&\leq C\varepsilon^{-(N+1)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega} \exp\left(\frac{-cp}{\varepsilon} \operatorname{dist}\left(x, \mathcal{M}^{5\beta}\right) \right) \mathrm{d}x \\
&\leq C\varepsilon^{-(N+1)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\beta)} \exp\left(\frac{-c'}{\varepsilon} |x| \right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

pois $B(0,\beta) \subset \Omega$. Depois de alguns cálculos vemos que

$$C\varepsilon^{-(N+1)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,\beta)} \exp\left(\frac{-c'}{\varepsilon} |x| \right) \mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Portanto $Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ para ε pequeno e consequentemente u_ε é um ponto crítico para P_ε. Assim u_ε satisfaz (1.4) e $v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x/\varepsilon)$ satisfaz (1.3). Além disso, por (1.42) vemos que

$$v_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x/\varepsilon) \leq C \exp\left(-c|x/\varepsilon - \tilde{x}_\varepsilon|\right) = C \exp\left(\frac{-c}{\varepsilon} |x - \varepsilon \tilde{x}_\varepsilon| \right)$$

e assim, $g(x, v_\varepsilon) = h(v_\varepsilon)$ para ε pequeno e para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Isto prova que v_ε é uma solução positiva para (1.1) e que satisfaz (ii) em Teorema 1.1 com $x_\varepsilon = \varepsilon \tilde{x}_\varepsilon$. Pela escolha de $\{y_\varepsilon\}$, para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existem $z_0 \in \mathcal{M}$, $U_0 \in \mathbf{S}_m$ e $\zeta_0 \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$\zeta_{\varepsilon_n} \to \zeta_0, \quad \varepsilon_n \tilde{x}_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n}(\cdot + \tilde{x}_{\varepsilon_n}) - U_0(\cdot + \zeta_0)\| \to 0, \tag{1.43}$$

a menos de subsequência. Observamos que $U_0(\cdot + \zeta_0)$ é também uma solução de menor energia de (1.2). Isto prova que v_ε satisfaz (i) no Teorema 1.1 e conclui a prova do teorema.

CAPÍTULO 2

SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE SCHRÖDINGER EM $\mathbb{R}^N$

2.1 Introdução

Neste capítulo provaremos existência e concentração de soluções positivas para a seguinte classe de sistemas em $\mathbb{R}^N$

$$\begin{array}{rcl} -\varepsilon^2\Delta u_1 + V(x)u_1 & = & H_{u_1}(u_1, u_2, \ldots, u_k) \\ -\varepsilon^2\Delta u_2 + V(x)u_2 & = & H_{u_2}(u_1, u_2, \ldots, u_k) \\ \vdots & & \vdots \\ -\varepsilon^2\Delta u_k + V(x)u_k & = & H_{u_k}(u_1, u_2, \ldots, u_k) \\ u_j(x) \to 0 & \text{as} & |x| \to \infty, \end{array} \tag{2.1}$$

onde $N \geq 3$, $\varepsilon > 0$ é um parâmetro real pequeno e $k \geq 1$. O potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função Hölder contínua e $H : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $C^{1,\alpha}_{loc}$. Uma motivação básica para estudar esta classe de sistemas vem do fato de que ela é satisfeita por soluções do tipo ondas estacionárias para uma classe de sistemas de equações de Schrödinger

$$i\varepsilon\frac{\partial \psi_j}{\partial t} = -\varepsilon^2\Delta\psi_j + W(z)\psi_j - l(|\psi_j|^2)\psi_j, \quad j = 1, \ldots, k, \tag{2.2}$$

a saber, soluções da forma $\psi_j(t,x) = e^{-i\xi t/\varepsilon}u_j(x),\ j = 1,\dots,k$, onde $\xi \in \mathbb{R}$ e $u_j > 0$ é uma função real. Obtém-se um correspondente sistema de equações elípticas do tipo (2.1) o qual tem a estrutura variacional formal acima, cuja amplitude $u_j(x),\ j = 1,\dots,k$, tende a zero no infinito.

Supomos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Hölder contínua que satisfaz as mesmas condições do capítulo anterior, a saber:

(V_1) V é limitado inferiormente por uma constante positiva, isto é,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) = V_0 > 0;$$

(V_2) existe um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^N$ tal que

$$m := \inf_{x\in\Omega} V(x) < \inf_{x\in\partial\Omega} V(x).$$

Continuaremos usando a notação

$$\mathcal{M} := \{x \in \Omega : V(x) = m\}$$

e sem perda de generalidade assumindo que $0 \in \mathcal{M}$. Denotamos $\mathbb{R}^k_+ := [0,\infty)^k$ e consideramos $H : \mathbb{R}^k_+ \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $H \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}\left((0,\infty)^k\right)$ e $H(0) = 0$. Supomos ainda que H satisfaz:

(H_1) para $u \in (0,\infty)^k$ vale $\displaystyle\lim_{|u|\to 0} \frac{|\nabla H(u)|}{|u|} = 0;$

(H_2) existe $p \in (1, 2^* - 1)$ tal que

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{|\nabla H(u)|}{|u|^p} < \infty;$$

(H_3) existe $\zeta_0 \in \mathbb{R}^k_+$ tal que $H(\zeta_0) > (m/2)|\zeta_0|^2$;

(H_4) se $u_n \to u$ em $\mathbb{R}^k$ com $\{u_n\} \in (0,\infty)^k$ e $u \in \partial\mathbb{R}^k_+$ então

$$\nabla H(u_n) \to 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^k;$$

(H_5) se χ_j denota a função característica do conjunto $\{u \in \mathbb{R}^k_+ : H_{u_j}(u) < 0\}$, então

$$\frac{H_{u_j}(u)\chi_j}{u_j} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^k_+), \quad j = 1,\dots,k.$$

Observamos que definindo $v(x) = u(\varepsilon x)$ o sistema (2.1) torna-se equivalente ao seguinte sistema, o qual apresentamos na forma vetorial

$$-\Delta v + V(\varepsilon x)v = \nabla H(v) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{2.3}$$

cujas soluções serão encontradas na Seção 2.6. Aqui $\Delta u = (\Delta u_1, \ldots, \Delta u_k)$. A fim de obtermos estes resultados precisamos estudar o comportamento das soluções do problema limite

$$-\Delta u + mu = \nabla H(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{2.4}$$

O estudo de equações do tipo (2.1) quando $k = 1$ tem recebido considerável atenção nos recentes anos. Maiores informações a respeito de equações do tipo (2.2) podem ser encontradas em [48, 51] e referências lá contidas.

O principal objetivo deste capítulo é mostrar existência e concentração de soluções positivas para o sistema (2.1). Em particular estendemos para esta classe de problemas o resultado obtido em [15] para o caso escalar. Estendemos também o resultado de Alves e Soares de [5], que consideraram uma classe de sistemas da forma

$$\begin{cases} -\varepsilon^2\Delta u + V(x)u &= Q_u(u,v) \\ -\varepsilon^2\Delta v + W(x)v &= Q_v(u,v) \\ u(x), v(x) \to 0 & \text{as} \quad |x| \to \infty \end{cases} \tag{2.5}$$

onde os potenciais satisfazem

$$0 < \inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) < \liminf_{|x|\to\infty} V(x) \quad \text{e} \quad 0 < \inf_{x\in\mathbb{R}^N} W(x) < \liminf_{|x|\to\infty} W(x),$$

e a função $Q \in \mathcal{C}^2((0,\infty)\times(0,\infty), \mathbb{R}^+)$ é homogênea de grau $p \in (2, 2^*)$. Sob algumas hipóteses adicionais, os autores provaram existência e concentração de soluções positivas para este sistema.

Observação 2.1. *Observamos que, fazendo pequenas modificações nas demonstrações, o resultado deste Capítulo 2 é válido também se considerarmos potenciais $V_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:*

(V_1') $\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V_j(x) > 0$ *para todo* $j \in \{1, \ldots, k\}$;

(V_2') *existe um domínio limitado* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *tal que*

$$m_j := \inf_{x\in\Omega} V_j(x) < \inf_{x\in\partial\Omega} V_j(x);$$

(V_3') *o conjunto* $\tilde{\mathcal{M}} := \{x \in \Omega : V_j(x) = m_j$ *para todo* $j \in \{1, \ldots, k\}\}$ *é não vazio.*

Após a submissão de nosso artigo [36] tomamos conhecimento do trabalho de Alves, Figueiredo e Furtado, [3], o qual trata do sistema (2.5) quando os potencias satisfazem as condições $(V_1') - (V_3')$. Nosso resultado ainda é mais geral porque permite cobrir uma classe mais geral de não linearidades.

Para estudar o sistema (2.1) precisamos trabalhar com o problema limite e mostrar que suas soluções de energia mínima, as quais sabemos que existem graças a [13], estão no nível do passo da montanha do funcional associado a este problema. No caso escalar tal resultado foi provado em [41].

A seguir descrevemos nosso resultado deste capítulo de maneira mais precisa.

Teorema 2.2. *Suponha que o potencial* V *satisfaz* $(V_1) - (V_2)$ *e* H *satisfaz* $(H_1) - (H_5)$. *Então existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que o problema* (2.1) *possui uma solução positiva* $u_\varepsilon = (u_{\varepsilon,1}, \ldots, u_{\varepsilon,k})$ *para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *satisfazendo:*

(i) $u_{\varepsilon,j}$ *admite um ponto de máximo* x_ε^j *tal que* $\lim_{\varepsilon \to 0} \operatorname{dist}(x_\varepsilon^j, \mathcal{M}) = 0$, *para* $j = 1, \ldots, k$.

(ii) existem constantes positivas C *e* c *tais que*

$$u_{\varepsilon,j}(x) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon^j|)\right) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Observação 2.3. *Um exemplo típico de funções satisfazendo as hipóteses* $(H_1) - (H_5)$ *é dado por*

$$H(u_1, \ldots, u_k) = c_1 \prod_{j=1}^{k} u_j^{\alpha_j} + c_2 \prod_{j=1}^{k} u_j^{\beta_j}$$

onde

$$\alpha_j, \beta_j > 1, \quad 2 < \sum_{j=1}^{k} \alpha_j, \sum_{j=1}^{k} \beta_j < 2^* \quad \text{e} \quad c_1 > 0.$$

Se $c_2 < 0$ *também supomos que*

$$(c_1 + c_2) > \frac{mk}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_j < \beta_j \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, k.$$

Observamos que o número de equações, k, *depende da dimensão* N *já que* $k < 2^*$ *pelas condições acima.*

Organizamos este capítulo da seguinte maneira: Na Seção 2.2 modificamos o funcional a fim de provar o Teorema 2.2 e definimos o espaço onde este novo funcional está bem definido. Na Seção 2.3 mostramos algumas propriedades importantes das soluções do problema limite (2.4). Na Seção 2.4 estimamos os níveis mini-max do funcional modificado e o nível do funcional associado ao problema limite. Na Seção 2.5 provamos a existência de um ponto crítico não trivial para o funcional modificado e a Seção 2.6 é destinada à prova do Teorema 2.2.

2.2 O problema modificado

Uma vez que estamos procurando soluções positivas para (2.1), é conveniente estender a função H para todo o espaço $\mathbb{R}^k$ da seguinte forma

$$\tilde{H}(u) = \begin{cases} H(u) & \text{se} \quad u \in \mathbb{R}^k_+ \\ 0 & \text{se} \quad u \notin \mathbb{R}^k_+, \end{cases}$$

procedimento este que é bem conhecido. Graças a (H_4) vemos que $\tilde{H}$ é uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em $\mathbb{R}^k$. Então consideramos o problema (2.3) com $\tilde{H}$ ao invés de H mas continuaremos usando a mesma notação H.

Definimos em $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$ uma norma dada por

$$\|u\|^2 = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^{k} \left(|\nabla u_j|^2 + V_0 (u_j)^2\right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_0|u|^2\right) \mathrm{d}x,$$

onde $u = (u_1, \ldots, u_k)$ e $\nabla u = (\nabla u_1, \ldots, \nabla u_k)$. Agora consideramos

$$H_\varepsilon = \left\{ u \in (H^1(\mathbb{R}^N))^k : \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)|u|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

munido com o seguinte produto interno

$$< u, v >_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{j=1}^{k} (\nabla u_j \nabla v_j + V(\varepsilon x) u_j v_j) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u \nabla v + V(\varepsilon x) uv) \mathrm{d}x.$$

Pela condição (V_1) vemos que a imersão $H_\varepsilon \hookrightarrow (H^1(\mathbb{R}^N))^k$ é contínua e que H_ε é um espaço de Hilbert. Assim como no Capítulo 1, para qualquer $A \subset \mathbb{R}^N$ denotamos $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon x \in A\}$,

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \Omega_\varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & \text{se} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

e

$$Q_\varepsilon(u) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x)|u|^2 \, dx - 1 \right)_+^2, \quad u \in H_\varepsilon.$$

Consideremos

$$P_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)|u|^2 \right) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) \, dx$$

e finalmente definimos $J_\varepsilon : H_\varepsilon \to \mathbb{R}$ por

$$J_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(u) + Q_\varepsilon(u).$$

O funcional J_ε é de classe $\mathcal{C}^1$ com derivada de Fréchet dada por

$$\begin{aligned} J'_\varepsilon(u)v \;\; &= \;\; \int_{\mathbb{R}^N} \left(\nabla u \nabla v + V(\varepsilon x) uv - \nabla H(u) v \right) \, dx \\ &\quad +4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x)|u|^2 \, dx - 1 \right)_+ \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x) uv \, dx \end{aligned}$$

onde $u, v \in H_\varepsilon$. Claramente um ponto crítico de P_ε corresponde a uma solução de (2.3). A fim de encontrar soluções se concentrando em Ω quando ε tende a zero, iremos procurar pontos críticos para J_ε para os quais Q_ε é zero. Para isto estudaremos detalhadamente o problema limite.

2.3 O problema limite

Inicialmente estudaremos algumas propriedades das soluções para o problema limite

$$-\Delta u + mu = \nabla H(u) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N.$$

O funcional energia associado a (2.4) é dado por

$$L_m(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + m|u|^2 \right) \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} H(u) \, dx.$$

Em [13] Brezis e Lieb provaram que existe uma solução de energia mínima para (2.4) com hipóteses sobre H mais gerais que $(H_1) - (H_3)$. Tal solução pertence ao conjunto

$$\mathcal{C} = \left\{ u \in \left(D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \right)^k : [H(u) - (m/2)|u|^2] \in \left(L^1(\mathbb{R}^N) \right)^k \right\}.$$

Isto significa que existe uma solução não trivial $u \in \mathcal{C}$ tal que

$$L_m(u) = E_m = \inf\{ L_m(v) : v \in \mathcal{C} \backslash \{0\} \text{ é uma solução de } (2.4) \}. \tag{2.6}$$

Com as hipóteses de [13] a solução encontrada poderia ter $(k-1)$ componentes triviais. Uma vez que estamos procurando soluções positivas, ou seja $u_j > 0$ em $\mathbb{R}^N$, $j = 1, \ldots, k$, precisamos de hipóteses mais fortes sobre H. Sob as condições $(H_1) - (H_3)$, a partir de ([13], Lema 2.4 e Teorema 2.3) sabemos que qualquer solução de (2.4) $u \in \mathcal{C}$ decai exponencialmente quando $|x| \to \infty$, $u \in L^\infty \cap W^{2,q}_{loc}$, para todo $q < \infty$ e satisfaz a identidade de Pohozaev

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} \Big(H(u) - \frac{m}{2}|u|^2 \Big) \, \mathrm{d}x. \tag{2.7}$$

Assim $u \in (H^1(\mathbb{R}^N))^k \cap \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}$. Além disso, se supormos que $u_i \equiv 0$ para algum $i \in \{1, \ldots, k\}$ devido à condição (H_4) temos $\nabla H(u_1, \ldots u_i, \ldots, u_k) \equiv (0, \ldots, 0)$. Então

$$-\Delta u_j + m u_j = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad \text{para todo} \quad j = 1, \ldots, k$$

e daí $u_j \equiv 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ o que implica $u \equiv 0$. Portanto qualquer solução não trivial $u = (u_1, \ldots, u_k)$ para (2.4) é tal que $u_j \not\equiv 0$ para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$ e, já que $u_j(x) < 0$ implica $\nabla H(u(x)) = (0, \ldots, 0)$, usando $\tilde{u}(x) = (0, \ldots, u_j^-(x), \ldots, 0)$ como função teste concluímos que $u_j \geq 0$. Agora se existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $u_j(x_0) = 0$ para algum j, fixando $R > 0$ por (H_5) temos $h_j(x) := H_{u_j}(u)\chi_j / u_j(x) \in L^\infty(B(x_0, R))$ e

$$\begin{cases} -\Delta u_j + (m + \|h_j\|_\infty - h_j(x))u_j \geq \|h_j\|_\infty u_j \geq 0 & \text{em} \quad B(x_0, R) \\ \hfill u_j \geq 0 & \text{em} \quad \partial B(x_0, R). \end{cases}$$

Assim segue do princípio do máximo para soluções fortes (veja [32], Teorema 9.6) que $u_j \equiv 0$ em $B(x_0, R)$, e consequentemente o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}^N : u_j(x) = 0\}$$

é aberto e fechado em $\mathbb{R}^N$ que é conexo, logo é todo $\mathbb{R}^N$, o que é uma contradição. Portanto $u_j > 0$ para $j = 1, \ldots, k$.

Por um resultado de Byeon, Jeanjean e Maris ([18], Proposição 3) sabemos que cada solução de energia mínima é, a menos de translação em $\mathbb{R}^N$, radialmente simétrica. Seja $\mathbf{S}_m \subset (H^1(\mathbb{R}^N))^k$ o conjunto das soluções de energia mínima simétricas de (2.4). Temos o seguinte resultado de compacidade.

Proposição 2.4. *$\boldsymbol{S}_m$ é compacto in $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$. Além disso, existem constantes $C, c > 0$, independentes of $u \in \boldsymbol{S}_m$, tais que*

$$|u(x)| + |\nabla u(x)| \leq C \exp(-c|x|), \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{2.8}$$

Prova. Pela identidade de Pohozaev obtemos

$$L_m(u) = \frac{1}{N}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad u \in \mathbf{S}_m$$

o que implica que $\left\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x : u \in \mathbf{S}_m\right\}$ é limitado. Sendo u uma solução para (2.4), por $(H_1) - (H_2)$ temos

$$m\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, \mathrm{d}x < \int_{\mathbb{R}^N} \nabla H(u)u \, \mathrm{d}x \leq \frac{m}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, \mathrm{d}x + c\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \, \mathrm{d}x.$$

Então pela desigualdade de Sobolev obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 \, \mathrm{d}x \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x\right)^{2^*/2} \leq C \quad \text{para todo} \quad u \in \mathbf{S}_m$$

e daí $\mathbf{S}_m$ é limitado em $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$. Consequentemente, assim como no Capítulo 1, usando um método iterativo devido a Moser vemos que $\mathbf{S}_m$ é limitado em $\left(L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)^k$. Pelo lema radial ([9],Lema Radial A.II) segue que

$$|u(x)| \leq C_N |x|^{(1-N)/2} \|u\| \quad \text{para} \quad |x| \geq \alpha_N$$

onde C_N e α_N dependem apenas da dimensão N. A partir daí vemos que

$$\lim_{|x|\to\infty} |u(x)| = 0$$

uniformemente para $u \in \mathbf{S}_m$. Desta forma por $(H_1) - (H_2)$ existe $R_0 > 0$ tal que

$$|\nabla H(u(x))| \leq \frac{m}{2}|u(x)| \quad \text{para todo} \quad |x| \geq R_0 \quad \text{e} \quad u \in \mathbf{S}_m.$$

Agora, para $u \in \mathbf{S}_m$ tomamos $\tilde{u}(x) = \sum_{j=1}^k u_j(x)$ e $c > 0$ satisfazendo $c^2 < m/2$. Segue que

$$-\Delta \tilde{u} + c^2 \tilde{u} = \sum_{j=1}^k \left(H_{u_j}(u) - m u_j\right) + c^2 \tilde{u} \leq |\nabla H(u)| - \frac{m}{2}\tilde{u} \leq 0 \quad \text{para} \quad |x| \geq R_0.$$

Seja C_0 tal que $\|\tilde{u}\|_\infty \leq C_0 \exp(-cR_0)$ para todo $u \in \mathbf{S}_m$ e definamos $\varphi(x) = C_0 \exp(-c|x|)$ para $x \in \mathbb{R}^N$. Então $\varphi \in H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$-\Delta\varphi(x) + c^2\varphi(x) = c\frac{(N-1)}{|x|}\varphi(x) > 0 \quad \text{para} \quad |x| \geq R_0.$$

Desta forma obtemos

$$\begin{cases} -\Delta(\tilde{u}-\varphi)+c^2(\tilde{u}-\varphi) & \leq & 0 & \text{em} & \mathbb{R}^N\backslash B(0,R_0) \\ (\tilde{u}-\varphi) & \leq & 0 & \text{em} & \partial B(0,R_0). \end{cases}$$

Como $\tilde{u}(x) \leq \varphi(x)$ em $B(0,R_0)$, para $w=(\tilde{u}-\varphi)^+ \in H_0^1(\mathbb{R}^N\backslash B(0,R_0))$ temos

$$0 \geq \int_{\mathbb{R}^N} [\nabla(\tilde{u}-\varphi)\nabla w + m(\tilde{u}-\varphi)w]\,\mathrm{d}x \geq \int_{\{x:\tilde{u}(x)>\varphi(x)\}} \left[|\nabla(\tilde{u}-\varphi)|^2 + m(\tilde{u}-\varphi)^2\right]\,\mathrm{d}x \geq 0$$

de modo que $|\{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{u}(x) > \varphi(x)\}| = 0$. Sendo $\tilde{u}$ e φ funções contínuas segue que $\tilde{u}(x) \leq \varphi(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Assim,

$$|u(x)| \leq k\tilde{u}(x) \leq kC_0 \exp(-c|x|) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u \in \mathbf{S}_m.$$

Para estimar as derivadas usaremos os mesmos argumentos de Lema 2 em [9]. Lembrando que $u=(u_1,\ldots,u_k)$ é simétrica e para cada $j \in \{1,\ldots,k\}$ a função u_j satisfaz

$$-\Delta u_j + mu_j = H_{u_j}(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

vemos que

$$\left(r^{N-1}u_j'(r)\right)' = -r^{N-1}\left(H_{u_j}(u(r)) - mu_j(r)\right). \tag{2.9}$$

Graças ao decaimento exponencial uniforme de u em $\mathbf{S}_m$ existe $r_0 > 0$ grande tal que $|\nabla H(u(r))| \leq m|u(r)|$ para todo $r > r_0$ e daí para $R > r$ obtemos

$$\begin{aligned} |R^{N-1}u_j'(R) - r^{N-1}u_j'(r)| &\leq \int_r^R s^{N-1}|H_{u_j}(u(s)) - mu_j(s)|\,\mathrm{d}s \leq 2m\int_r^\infty s^{N-1}|u(s)|\,\mathrm{d}s \\ &\leq Cr^{N-1}\exp(-cr/2)\int_1^\infty \exp(-cs/2)\,\mathrm{d}s \to 0 \end{aligned}$$

quando r tende ao infinito. Logo existe o $\lim_{r\to\infty} r^{N-1}u_j'(r) = a$. Uma vez que

$$(r^{N-1}u_j(r))' = (N-1)r^{N-2}u_j(r) + r^{N-1}u_j'(r) \quad \text{e} \quad \lim_{r\to\infty} r^{N-2}u_j(r) = 0$$

temos $\lim_{r\to\infty}(r^{N-1}u_j(r))' = a$ o que implica por (2.9) que $a=0$. Portanto fazendo $R \to \infty$ na desigualdade acima obtemos

$$|u_j'(r)| \leq C\exp(-cr/2) \quad \text{para todo} \quad r \geq r_0$$

independentemente de $j \in \{1, \ldots, k\}$ e $u \in \mathbf{S}_m$. Como $\mathbf{S}_m$ é limitado em $\mathcal{C}^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$ obtemos (2.8). Para provar a compacidade seja $\{v_n\}$ uma sequência em $\mathbf{S}_m$. Sendo $\{v_n\}$ limitada podemos assumir que $v_n \rightharpoonup v$ em $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$, v radialmente simétrica e $v_n(x) \to v(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então vemos que v é também uma solução para (2.4). Devido a $(H_1) - (H_2)$ e ao uniforme decaimento exponencial de v_n obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla H(v_n) v_n \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} \nabla H(v) v \,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Desde que v_n e v são soluções temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^2 + m|v_n|^2 - \nabla H(v_n) v_n \right) \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + m|v|^2 - \nabla H(v) v \right) \mathrm{d}x$$

e então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^2 + m|v_n|^2 \right) \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v|^2 + m|v|^2 \right) \mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto $v_n \to v$ e daí $v \in \mathbf{S}_m$. Isto prova a compacidade de $\mathbf{S}_m$. ■

Assim como provado em [41] para o caso escalar, provaremos a seguir que o nível de energia mínima para o funcional L_m, E_m, coincide com o nível do passo da montanha. Começamos mostrando que L_m tem a geometria do passo da montanha, isto é,

(i) $L_m(0) = 0$;

(ii) existem $r_0 > 0$ e $\rho_0 > 0$ tais que $L_m(u) \geq \rho_0$ para todo $\|u\| = r_0$;

(iii) existe $u_0 \in H$ tal que $\|u_0\| > r_0$ e $L_m(u_0) < 0$.

Então o nível do passo da montanha

$$c_m := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{0 \leq t \leq 1} L_m(\gamma(t)), \tag{2.10}$$

onde

$$\Gamma = \left\{ \gamma \in \mathcal{C}\left([0,1], H\right) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad L_m(\gamma(1)) < 0 \right\},$$

está bem definido e é positivo. Além disso, devemos provar que $c_m = E_m$. Estes resultados são obtidos da mesma forma que em [41] e apresentamos aqui para deixar o trabalho mais completo.

Lema 2.5. *Assuma $(H_1) - (H_2)$. Então L_m satisfaz $(i) - (ii)$ acima.*

Prova. Uma vez que $H(0) = 0$ a condição (i) é trivialmente satisfeita. Por $(H_1) - (H_2)$ existe $C > 0$ tal que

$$H(\xi) \leq \frac{m}{4}|\xi|^2 + C|\xi|^{2^*} \quad \text{para todo} \quad \xi \in \mathbb{R}^k.$$

Em vista da imersão $H^1(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, existe $\tilde{C} > 0$ tal que

$$\begin{aligned} L_m(u) &\geq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V_0|u|^2\right) \mathrm{d}x - C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} \mathrm{d}x \\ &\geq \|u\|^2 \left(\frac{1}{4} - \tilde{C}\|u\|^{2^*-2}\right) \quad \text{para todo} \quad u \in H. \end{aligned}$$

Assim, escolhendo r_0 pequeno obtemos (ii). ■

A prova de (iii) será feita em alguns lemas a seguir. Devemos provar a existência de $u_0 \in (H^1(\mathbb{R}^N))^k$ tal que $\|u_0\| > r_0$ e $L_m(u_0) < 0$, o que é equivalente a mostrar que $\Gamma \neq \emptyset$.

Lema 2.6. *Seja w uma solução de energia mínima para (2.4). Se H satisfaz $(H_1) - (H_4)$, então existe $\gamma \in \Gamma$ tal que*

$$w \in \gamma([0,1]) \quad e \quad \max_{s\in[0,1]} L_m(\gamma(s)) = L_m(w) = E_m.$$

Prova. Considere $l(t)(x) = w(x/t)$ para $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$ e $l(0) \equiv 0$. Temos

$$\|l(t)\|^2 = t^{N-2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x + t^N V_0 \int_{\mathbb{R}^N} |w|^2 \, \mathrm{d}x,$$

então $l(t) \to 0$ quando $t \to 0$. Além disso, pela identidade de Pohozaev (2.7) obtemos

$$\begin{aligned} L_m(l(t)) &= \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x - t^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(H(w) - \frac{m}{2}|w|^2\right) \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{t^N}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Escolhendo $t_1 > 1$ suficientemente grande tal que $L_m(l(t_1)) < 0$ e tomando $\gamma(s) = l(st_1)$ temos $\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H)$, $\gamma(1/t_1) = w$ e

$$\max_{s\in[0,1]} L_m(\gamma(s)) = \max_{t\in[0,t_1]} L_m(l(t)) = L_m(l(1)) = L_m(w).$$

■

A partir deste resultado segue diretamente o próximo corolário.

Corolário 2.7. $c_m \leq E_m$.

A fim de obter a outra desigualdade, como em [41] definimos

$$\mathcal{P} = \left\{ u \in (H^1(\mathbb{R}^N))^k \backslash \{0\} : \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} \left(H(u) - \frac{m}{2}|u|^2 \right) \, \mathrm{d}x \right\}$$

e

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in (H^1(\mathbb{R}^N))^k : \int_{\mathbb{R}^N} \left(H(u) - \frac{m}{2}|u|^2 \right) \, \mathrm{d}x = 1 \right\}.$$

Lema 2.8. *Usando as definições acima vemos que*

$$E_m = \inf_{u \in \mathcal{P}} L_m(u).$$

Prova. Consideramos a bijeção $\Phi : \mathcal{S} \to \mathcal{P}$ entre $\mathcal{S}$ e $\mathcal{P}$ dada por

$$(\Phi(u))(x) = u(x/t_u), \quad \text{onde} \quad t_u = \|\nabla u\|_{L^2}/\sqrt{2^*}.$$

Para $u \in \mathcal{S}$ temos

$$\begin{aligned} L_m(\Phi(u)) &= \frac{t_u^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x - t_u^N \int_{\mathbb{R}^N} \left(H(u) - \frac{m}{2}|u|^2 \right) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2^*} \right)^{(N-2)/2} \|\nabla u\|_{L^2}^N \end{aligned}$$

e então

$$\inf_{u \in \mathcal{P}} L_m(u) = \inf_{u \in \mathcal{S}} L_m(\Phi(u)) = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{2^*} \right)^{(N-2)/2} \inf_{u \in \mathcal{S}} \|\nabla u\|_{L^2}^N.$$

Por [13] sabemos que

$$T = \inf_{u \in \mathcal{S}} \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2$$

é atingido em algum u_0 e o correspondente $\Phi(u_0)$ é uma solução de energia mínima para (2.4). Assim temos

$$\inf_{u \in \mathcal{P}} L_m(u) = L_m(\Phi(u_0)) = E_m.$$

■

Lema 2.9. *Temos* $\gamma([0,1]) \cap \mathcal{P} \neq \emptyset$ *para todo* $\gamma \in \Gamma$.

Prova. Como na prova da geometria do passo da montanha para L_m, é facilmente visto que existe $r_0 > 0$ tal que

$$P(u) = \frac{N-2}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - N\int_{\mathbb{R}^N} \Big(H(u) - \frac{m}{2}|u|^2\Big)\,\mathrm{d}x > 0 \quad \text{para} \quad 0 < \|u\| \le r_0.$$

Agora, para qualquer $\gamma \in \Gamma$ temos $\gamma(0) = 0$ e

$$P(\gamma(1)) = NL_m(\gamma(1)) - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \gamma(1)|^2 \,\mathrm{d}x \le NL_m(\gamma(1)) < 0.$$

Logo existe $s_0 \in (0,1)$ tal que $\|\gamma(s_0)\| > r_0$ e $P(\gamma(s_0)) = 0$. Portanto $\gamma(s_0) \in \mathcal{P}$ o que conclui a prova. ∎

Corolário 2.10. *Temos $c_m \ge E_m$.*

Portanto, provamos que $c_m = E_m$ o que era um dos principais resultados desta seção.

2.4 Propriedades do nível mini-max

Usando (H_3) podemos escolher $0 < \beta < \mathrm{dist}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^N \backslash \Omega)/10$ tal que

$$H(\zeta_0) > \frac{V(x)}{2}|\zeta_0|^2 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{M}^{5\beta} \tag{2.11}$$

o que implica que os resultados da seção anterior valem com $V(x)$ no lugar de m para todo $x \in \mathcal{M}^{5\beta}$. Aqui $A^\alpha = \{x \in \mathbb{R}^N : \mathrm{dist}(x, A) \le \alpha\}$ para $A \subset \mathbb{R}^N$. Fixamos uma função corte $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi(x) = 1$ para $|x| \le \beta$ e $\varphi(x) = 0$ para $|x| \ge 2\beta$, com $\varphi(x) \le \varphi(y)$ se $|y| \le |x|$. Definimos $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ e para $z \in \mathcal{M}^\beta$ e $u \in \mathbf{S}_m$

$$u_\varepsilon^z(x) := \varphi_\varepsilon(x - z/\varepsilon)u(x - z/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno encontraremos uma solução para (2.3) perto do conjunto

$$X_\varepsilon = \big\{u_\varepsilon^z : \ z \in \mathcal{M}^\beta, \ u \in \mathbf{S}_m\big\} \subset H_\varepsilon.$$

Como no capítulo anterior vemos que X_ε é compacto para cada $\varepsilon > 0$ e é uniformemente limitado para ε em conjuntos limitados. Fixando $U \in \mathbf{S}_m$ definimos $U_t(x) = U(x/t)$ para $x \in \mathbb{R}^N$, $t > 0$ e $U_0 \equiv 0$. Por (2.7) temos

$$L_m(U_t) = \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{t^N}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \,\mathrm{d}x = NE_m\left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{t^N}{2^*}\right). \tag{2.12}$$

Assim existe $t_0 > 1$ tal que $L_m(U_t) < -2$ para todo $t \ge t_0$. Denotando $W_{\varepsilon,t}(x) = \varphi_\varepsilon(x)U_t(x)$ temos o seguinte lema.

Lema 2.11. *Para U_t e $W_{\varepsilon,t}$ definidos acima temos*

$$\sup_{t\in[0,t_0]} |J_\varepsilon(W_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Prova. Como $\operatorname{supp}(W_{\varepsilon,t}) \subset \Omega_\varepsilon$ e $\operatorname{supp}(\chi_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^N \backslash \Omega_\varepsilon$ temos $Q_\varepsilon(W_{\varepsilon,t}) = 0$. Então

$$\begin{aligned} |J_\varepsilon(W_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| \ &\leq \ \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla W_{\varepsilon,t}|^2 - |\nabla U_t|^2 + \big(V(\varepsilon x)\varphi_\varepsilon^2 - m\big)\,|U_t|^2\right] \mathrm{d}x\right| \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |H(W_{\varepsilon,t}) - H(U_t)|\ \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando uma mudança de variáveis e (2.8) obtemos as seguintes desigualdades

$$\int_{\mathbb{R}^N} |V(\varepsilon x)\varphi_\varepsilon^2 - m||U_t|^2\,\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}^N} |V(\varepsilon x)\varphi_\varepsilon^2 - m|\exp(-2c|x|/t_0)\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla W_{\varepsilon,t} - \nabla U_t|^2\,\mathrm{d}x \leq \ C\int_{\mathbb{R}^N} \left[t_0^N\varepsilon^2 + t_0^{N-2}(1-\varphi_\varepsilon(t_0x))^2\right]\exp(-2c|x|)\,\mathrm{d}x$$

para todo $t \in (0, t_0]$. Agora relembrando que pelo teorema fundamental do cálculo, dados ξ, $\zeta \in \mathbb{R}^k$ existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$H(\xi) - H(\zeta) = \nabla H(\theta\xi + (1-\theta)\zeta)(\xi - \zeta), \tag{2.13}$$

por $(H_1) - (H_2)$ vemos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |H(W_{\varepsilon,t}) - H(U_t)|\ \mathrm{d}x \ &\leq \ \int_{\mathbb{R}^N} |W_{\varepsilon,t} - U_t|\,(|U_t| + |U_t|^p)\,\mathrm{d}x \\ &\leq \ C\int_{\mathbb{R}^N} (1-\varphi_\varepsilon)\exp\left(-(2c/t_0)|x|\right)\ \mathrm{d}x, \end{aligned}$$

para qualquer $t \in (0, t_0]$. Portanto $J_\varepsilon(W_{\varepsilon,t}) \to L_m(U_t)$ quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente em $t \in [0, t_0]$ como queríamos demonstrar. ∎

Consequentemente existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $J_\varepsilon(W_{\varepsilon,t_0}) < -1$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e podemos definir o nível mini-max de J_ε

$$C_\varepsilon = \inf_{\gamma\in\Gamma_\varepsilon}\max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma(s)), \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \tag{2.14}$$

onde $\Gamma_\varepsilon := \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H_\varepsilon) : \gamma(0) = 0 \quad \text{e} \quad \gamma(1) = W_{\varepsilon,t_0}\}$. A próxima proposição mostra que o nível mini-max do funcional J_ε converge ao nível de energia mínima do funcional L_m quando ε tende a zero.

Proposição 2.12. *Para E_m dado por (2.6) e C_ε definido em (2.14) temos*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = E_m.$$

Prova. Uma vez que $w_{\varepsilon,t} \to 0$ em H_ε quando $t \to 0$, definindo

$$\gamma_\varepsilon(s) = W_{\varepsilon,st_0}, \quad s \in [0,1] \tag{2.15}$$

temos $\gamma_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$. Então por (2.12) e Lema 2.11 obtemos

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \max_{t\in[0,t_0]} J_\varepsilon(W_{\varepsilon,t}) \leq \max_{t\in[0,t_0]} L_m(U_t) = E_m.$$

Por outro lado, já que o nível do passo da montanha de L_m coincide com o nível de menor energia, como na Proposição 1.5 provamos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \geq E_m,$$

o que completa a prova da proposição. ■

Neste momento, denotando

$$D_\varepsilon := \max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)), \tag{2.16}$$

onde γ_ε foi definido em (2.15), vemos que $C_\varepsilon \leq D_\varepsilon$ e $\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = E_m$.

2.5 Existência de um ponto crítico para o funcional energia

Definimos

$$J_\varepsilon^\alpha := \{u \in H_\varepsilon : J_\varepsilon(u) \leq \alpha\} \quad \text{e} \quad A^\alpha := \{u \in H_\varepsilon : \inf_{v\in A} \|u - v\|_\varepsilon \leq \alpha\}$$

para qualquer $A \subset H_\varepsilon$ e $\alpha > 0$. Além disso, nas próximas proposições para $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ consideramos o funcional J_ε restrito ao espaço $\left(H_0^1(B(0,R/\varepsilon))\right)^k$ munido com a norma

$$\|\varphi\|_\varepsilon^2 = \int_{B(0,R/\varepsilon)} \left(|\nabla\varphi|^2 + V(\varepsilon x)\varphi^2\right) \mathrm{d}x$$

e a partir daqui denotaremos tal espaço por H_ε^R.

Proposição 2.13. *Sejam* $\varepsilon_n \to 0$, $R_n \to \infty$ *e* $u_n \in X^d_{\varepsilon_n} \cap H^{R_n}_{\varepsilon_n}$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \le E_m \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(H^{R_n}_{\varepsilon_n})'} = 0.$$

Então, para $d \in (0, d_0)$ *existem* $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $z_0 \in \mathcal{M}$ *e* $u_0 \in \boldsymbol{S}_m$ *satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n y_n - z_0| = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)u_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} = 0,$$

a menos de subsequências, se d_0 *é suficientemente pequeno.*

Prova. Pela definição de $X^d_{\varepsilon_n}$ existem sequências $\{Z_n\} \subset \mathbf{S}_m$ e $\{z_n\} \subset \mathcal{M}^\beta$ tais que

$$\|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z_n(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \le d.$$

Pela compacidade de $\mathbf{S}_m$ e $\mathcal{M}^\beta$, a menos de subsequências, podemos assumir que $Z_n \to Z$ em $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$ e $z_n \to z_0$ em $\mathbb{R}^N$ para algum $Z \in \mathbf{S}_m$ e $z_0 \in \mathcal{M}^\beta$. Então para n grande temos

$$\|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \le 2d. \tag{2.17}$$

Dividimos a prova desta proposição em cinco passos.

Passo 1: Temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{B(z,R)} |u_n|^2 \,\mathrm{d}y = 0 \quad \textit{para qualquer} \quad R > 0.$$

De fato, suponha que existem $R > 0$ e uma sequência $\{\tilde{z}_n\}$ satisfazendo

$$\tilde{z}_n \in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right) \quad \text{e} \quad \liminf_{n\to\infty} \int_{B(\tilde{z}_n,R)} |u_n|^2 \,\mathrm{d}x > 0. \tag{2.18}$$

Podemos assumir que $\varepsilon_n\tilde{z}_n \to \tilde{z}_0$ para algum $\tilde{z}_0 \in A(z_0;\beta/2,3\beta)$. Uma vez que X_ε é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$, também podemos assumir que $\tilde{w}_n := u_n(\cdot + \tilde{z}_n) \rightharpoonup \tilde{w}$ em $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$. Pela compacidade da imersão $H^1(B(0,R)) \hookrightarrow L^2(B(0,R))$ e (2.18) vemos que $\tilde{w} \neq 0$. Agora dado $\phi \in \left(\mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)\right)^k$ seja $\phi_n(x) = \phi(x - \tilde{z}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Por (2.18) temos $\varepsilon_n\tilde{z}_n \in \mathcal{M}^{4\beta}$ e daí para n grande obtemos $\phi_n \in H^{R_n}_{\varepsilon_n}$. Desde que $\lim_{n\to\infty} \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(H^{R_n}_{\varepsilon_n})'} = 0$ e $\|\phi_n\|_{\varepsilon_n} \le C$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_{\varepsilon_n}(u_n), \phi_n\rangle = 0.$$

Consequentemente, a limitação de $\mathrm{supp}(\phi)$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} (\nabla\tilde{w}\nabla\phi + V(\tilde{z}_0)\tilde{w}\phi)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla H(\tilde{w})\phi\,\mathrm{d}x.$$

Sendo ϕ arbitrária concluímos que $\tilde{w}$ verifica

$$-\Delta\tilde{w} + V(\tilde{z}_0)\tilde{w} = \nabla H(\tilde{w}) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Usando (2.11) e a definição do nível de energia mínima temos $L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}) \geq E_{V(\tilde{z}_0)}$. Além disso para $R > 0$ suficientemente grande temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\tilde{w}|^2\,\mathrm{d}x \leq \int_{B(0,R)} |\nabla\tilde{w}|^2\,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{B(0,R)} |\nabla\tilde{w}_n|^2\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty}\int_{B(\tilde{z}_n,R)} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x.$$

Como $V(\tilde{z}_0) \geq m$ e graças à igualdade entre os níveis de energia mínima e mini-max temos $E_{V(\tilde{z}_0)} \geq E_m$. Assim, usando (2.7) vemos que

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{B(\tilde{z}_n,R)} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{N}{2}L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}) \geq \frac{N}{2}E_m > 0.$$

Observamos que esta estimativa não depende de $d > 0$. Isto será importante para o próximo argumento. A partir de (2.17) temos $\int_{B(\tilde{z}_n,R)} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \leq 8d^2$ para n grande. Então

$$\frac{N}{2}E_m \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{B(\tilde{z}_n,R)} |\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \leq 8d^2$$

e tomando $d > 0$ suficientemente pequeno temos uma contradição. Isto prova o *Passo* 1.

Passo 2: Definindo $u_n^1 = \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)u_n$ *e* $u_n^2 = u_n - u_n^1$, *temos*

$$J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq J_{\varepsilon_n}(u_n^1) + J_{\varepsilon_n}(u_n^2) + o(1). \tag{2.19}$$

De fato, é facilmente visto que $Q_{\varepsilon_n}(u_n^1) = 0$ e $Q_{\varepsilon_n}(u_n) = Q_{\varepsilon_n}(u_n^2)$. Então

$$\begin{aligned}
J_{\varepsilon_n}(u_n) &= J_{\varepsilon_n}(u_n^1) + J_{\varepsilon_n}(u_n^2) + o(1) - \int_{\mathbb{R}^N}\left[H(u_n) - H(u_n^1) - H(u_n^2)\right]\mathrm{d}x \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\varphi_{\varepsilon_n}^2(x - z_n/\varepsilon_n) + [1 - \varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n)]^2 - 1\right\}|\nabla u_n|^2\mathrm{d}x \\
&\quad -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\varphi_{\varepsilon_n}^2(x - z_n/\varepsilon_n) + [1 - \varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n)]^2 - 1\right\}V(\varepsilon_n x)|u_n|^2\mathrm{d}x \\
&\geq J_{\varepsilon_n}(u_n^1) + J_{\varepsilon_n}(u_n^2) + o(1) - \int_{\mathbb{R}^N}\left[H(u_n) - H(u_n^1) - H(u_n^2)\right]\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

A fim de concluir o *Passo* 2 precisamos estimar esta última integral. Temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\left[H(u_n) - H(u_n^1) - H(u_n^2)\right]\,\mathrm{d}x = \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)}\left[H(u_n) - H(u_n^1) - H(u_n^2)\right]\,\mathrm{d}x.$$

Como no capítulo anterior vemos que o *Passo* 1 implica que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)}|u_n|^{p+1}\,\mathrm{d}x=0$$

o que, juntamente com $(H_1)-(H_2)$ e a limitação de $\{\|u_n\|_{\varepsilon_n}\}_n$, nos fornece

$$\int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)}\left|H(u_n)-H(u_n^1)-H(u_n^2)\right|\,\mathrm{d}x\to 0\quad\text{quando}\quad n\to\infty.$$

Passo 3: Dado $d>0$ *suficientemente pequeno existe* $n_0=n_0(d)$ *tal que*

$$J_{\varepsilon_n}(u_n^2)\geq\frac{1}{8}\|u_n^2\|_{\varepsilon_n}^2\quad\textit{para qualquer}\quad n\geq n_0.$$

De fato, existe $c>0$ tal que $\|\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-z_n/\varepsilon_n)u\|_{\varepsilon_n}\leq c\|u\|_{\varepsilon_n}$ para qualquer $n\in\mathbb{N}$ e $u\in H_{\varepsilon_n}$. Então graças a (2.17) vemos que existe $n_0=n_0(d)$ tal que

$$\begin{aligned}\|u_n^2\|_{\varepsilon_n} &\leq \|[1-\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-z_n/\varepsilon_n)]\,(u_n-v_n)\,\|_{\varepsilon_n}+\|[1-\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-z_n/\varepsilon_n)]v_n\|_{\varepsilon_n}\\ &\leq (c+2)2d=Cd\quad\text{para todo}\quad n\geq n_0 \end{aligned}\tag{2.20}$$

onde $v_n=\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot-z_n/\varepsilon_n)$. Então pela identidade de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned}J_{\varepsilon_n}(u_n^2) &\geq P_{\varepsilon_n}(u_n^2)\geq\frac{1}{2}\|u_n^2\|_{\varepsilon_n}^2-\frac{V_0}{4}\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^2|^2\,\mathrm{d}x-C\int_{\mathbb{R}^N}|u_n^2|^{2^*}\,\mathrm{d}x\\ &\geq \frac{1}{4}\|u_n^2\|_{\varepsilon_n}^2-Cc\|u_n^2\|_{\varepsilon_n}^{2^*}\geq\|u_n^2\|_{\varepsilon_n}^2\left(\frac{1}{4}-\tilde{C}d^{2^*-2}\right)\\ &\geq \frac{1}{8}\|u_n^2\|_{\varepsilon_n}^2\quad\text{para todo}\quad n\geq n_0\end{aligned}$$

desde que $d>0$ seja pequeno satisfazendo $\tilde{C}d^{2^*-2}<1/8$.

Passo 4: Temos $\lim_{n\to\infty}J_{\varepsilon_n}(u_n^1)=E_m$ *e* $z_0\in\mathcal{M}$.

Com efeito, seja $w_n:=u_n^1(\cdot+z_n/\varepsilon_n)$. Extraindo uma subsequência se necessário podemos assumir que $w_n\rightharpoonup w$ em $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$. Por $(H_1)-(H_2)$ vemos que existe $c_0>0$ tal que $\|Z\|_{L^2}\geq 3c_0$ para qualquer $Z\in\mathbf{S}_m$ e pelo decaimento exponencial uniforme em $\mathbf{S}_m$ existe $R>0$ satisfazendo $\|Z\|_{L^2(B(0,R))}\geq 2c_0$, $Z\in\mathbf{S}_m$. Para este R, existe n_1 tal que $|\varepsilon_n x|\leq\beta$ para qualquer $x\in B(0,R)$ e $n\geq n_1$. Então $\varphi_{\varepsilon_n}Z=Z$ em $B(0,R)$ e assim

$$cd\geq\|u_n^1-\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot-z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n}\geq V_0^{1/2}\|w_n-\varphi_{\varepsilon_n}Z\|_{L^2(B(0,R))}$$

para algum $c > 0$. Daí $\|w_n\|_{L^2(B(0,R))} \geq c_0$ para $d > 0$ pequeno e qualquer $n \geq n_1$. Consequentemente $\|w\|_{L^2(B(0,R))} \geq c_0$ e $w \neq 0$. Além disso, se $K \subset \mathbb{R}^N$ é um compacto em $\mathbb{R}^N$ temos

$$u_n^1(\cdot + z_n/\varepsilon_n) = u_n(\cdot + z_n/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad K$$

para n grande. Por causa de $\|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(H^{R_n}_{\varepsilon_n})'} \to 0$ podemos ver, como no *Passo* 1, que w satisfaz

$$-\Delta w + V(z_0)w = \nabla H(w), \quad w_j > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Consideramos agora dois casos:

$$\text{Caso 1:} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B(z,1)} |w_n - w|^2 \,\mathrm{d}x = 0.$$

$$\text{Caso 2:} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{R}^N} \int_{B(z,1)} |w_n - w|^2 \,\mathrm{d}x > 0.$$

Se o Caso 1 ocorre temos $w_n \to w$ em $\left(L^{p+1}(\mathbb{R}^N)\right)^k$. Usando a limitação de $\{w_n\}$, por $(H_1) - (H_2)$ e (2.13) vemos que dado $\sigma > 0$ existe $C_\sigma > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |H(w_n) - H(w)| \,\mathrm{d}x \quad \leq \quad \frac{\sigma}{2} + C_\sigma \left(\|w_n - w\|_{L^{p+1}} + \|w_n - w\|_{L^{p+1}}^{p+1}\right) \leq \sigma$$

para n grande. Assim

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(w_n) \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} H(w) \,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.21}$$

Agora se o Caso 2 ocorre então existe $\{\hat{z}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n - w|^2 \,\mathrm{d}x > 0.$$

Já que $w_n \rightharpoonup w$ em $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$ temos

$$|\hat{z}_n| \to \infty. \tag{2.22}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{e daí} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n|^2 \,\mathrm{d}x > 0.$$

Sendo $w_n(x) = \varphi_{\varepsilon_n}(x) u_n(x + z_n/\varepsilon_n)$ é fácil ver que $|\hat{z}_n| \leq 3\beta/\varepsilon_n$ para n grande.

Se $|\hat{z}_n| \geq \beta/2\varepsilon_n$ para uma subsequência, pelo *Passo* 1 temos

$$0 < \lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n|^2 \,\mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{B(z,1)} |u_n|^2 \,\mathrm{d} = 0$$

o que é impossível. Então $|\hat{z}_n| \leq \beta/2\varepsilon_n$ para n grande. Podemos assumir que

$$\varepsilon_n \hat{z}_n \to \hat{z}_0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \quad \text{e} \quad u_n^1(\cdot + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) \rightharpoonup \tilde{w} \quad \text{em} \quad (H^1(\mathbb{R}^N))^k,$$

onde $\hat{z}_0 \in \overline{B(0,\beta/2)} \subset \Omega$ e $\tilde{w} \in (H^1(\mathbb{R}^N))^k \backslash \{0\}$. Então, dado qualquer conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ temos $u_n^1(\cdot + z_n + \hat{z}_n/\varepsilon_n) = u_n(\cdot + z_n + \hat{z}_n/\varepsilon_n)$ em K para n grande. Consequentemente segue de $\|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(H^{R_n}_{\varepsilon_n})'} \to 0$ que $\tilde{w}$ satisfaz

$$-\Delta \tilde{w} + V(\hat{z}_0 + z_0)\tilde{w} = \nabla H(\tilde{w}), \quad \tilde{w}_j > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Análogo ao *Passo* 1, (2.22) nos leva a uma contradição com (2.17) se $d > 0$ é suficientemente pequeno. Portanto o Caso 2 não vale e assim o Caso 1 ocorre. Então por (2.21) temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n^1) &= \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon_n x + z_n)|w_n|^2 \right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(w_n)\,\mathrm{d}x \right\} \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^2 + V(z_0)|w|^2 \right) \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(w)\,\mathrm{d}x \\
&= L_{V(z_0)}(w) \geq E_{V(z_0)} \geq E_m.
\end{aligned}$$

Por outro lado, sendo $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \leq E_m$, $J_{\varepsilon_n}(u_n^2) \geq 0$ por causa de (2.19) obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n^1) \leq E_m.$$

Então $E_{V(z_0)} = E_m$ e $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n^1) = E_m$. Além disso, graças a (2.11) e Lema 2.6 vemos que $V(z_0) > m$ implica $E_{V(z_0)} > E_m$. Assim $V(z_0) = m$ e o *Passo* 4 está provado.

Passo 5: Conclusão

Usando *Passo* 4 e o fato de que $V(x) \geq m$ em Ω obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^2 + m|w|^2 \right) \mathrm{d}x &\geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n^1|^2 + V(\varepsilon_n x)|u_n^1|^2 \right) \mathrm{d}x \\
&\geq \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n^1|^2 + m|u_n^1|^2 \right) \mathrm{d}x \\
&= \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w_n|^2 + m|w_n|^2 \right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Isto prova que $w_n \to w$ em $(H^1(\mathbb{R}^N))^k$. Já que w é uma solução de energia mínima para (2.4), de [18] sabemos que existe $z \in \mathbb{R}^N$ tal que $u_0 := w(\cdot + z)$ é radialmente simétrica e daí $u_0 \in \mathbf{S}_m$. Então denotando $y_n = z_n/\varepsilon_n + z$ vemos que

$$\|u_n^1 - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)u_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado, usando *Passos* $2, 3$ e 4 obtemos

$$E_m \geq \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq E_m + \frac{1}{8} \limsup_{n\to\infty} \|u_n^2\|_{\varepsilon_n}^2,$$

o que implica que $\|u_n^2\|_{\varepsilon_n} \to 0$. Isto completa a prova da proposição. ■

Observamos que o resultado da proposição anterior vale para $d_0 > 0$ suficientemente pequeno independentemente das sequências tomadas satisfazendo as hipóteses.

Corolário 2.14. *Para qualquer $d \in (0, d_0)$ existem constantes $a_d\,, R_d\,, \varepsilon_d > 0$ tais que*

$$\|J_\varepsilon'(u)\|_{(H_\varepsilon^R)'} \geq a_d \quad \textit{para todo} \quad u \in H_\varepsilon^R \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^d), \quad R \geq R_d \quad e \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_d).$$

Prova. Por contradição supomos que para algum $d \in (0, d_0)$ a afirmação acima é falsa. Então para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existem $R_n \geq n$, $\varepsilon_n \in (0, 1/n)$ e $u_n \in H_{\varepsilon_n}^{R_n} \cap J_{\varepsilon_n}^{D_{\varepsilon_n}} \cap (X_{\varepsilon_n}^{d_0} \backslash X_{\varepsilon_n}^d)$ tais que

$$\|J_{\varepsilon_n}'(u_n)\|_{(H_{\varepsilon_n}^{R_n})'} < \frac{1}{n}.$$

Pela Proposição 2.13 existem $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N,\ z_0 \in \mathcal{M}$ e $u_0 \in \mathbf{S}_m$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n y_n - z_0| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)u_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} = 0.$$

Daí para n grande temos $\varepsilon_n y_n \in \mathcal{M}^\beta$. Consequentemente, pela definição de X_{ε_n} e $X_{\varepsilon_n}^d$ obtemos $\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)u_0(\cdot - y_n) \in X_{\varepsilon_n}$ e $u_n \in X_{\varepsilon_n}^d$. Isto contradiz o fato de que $u_n \in X_{\varepsilon_n}^{d_0} \backslash X_{\varepsilon_n}^d$ e completa a prova. ■

Os seguintes lemas são necessários para a obtenção de uma sequência de Palais-Smale adequada no espaço H_ε. As provas de tais resultados são análogas às provas de Lema 1.9, Lema 1.10 e Lema 1.11.

Lema 2.15. *Dado $\lambda > 0$ existem ε_0 e $d_0 > 0$ pequenos o suficiente tais que*

$$J_\varepsilon(u) > E_m - \lambda \quad \textit{para todo} \quad u \in X_\varepsilon^{d_0} \quad e \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Seguindo Corolário 2.14 e Lema 2.15 fixamos $d_0 > 0$, $d_1 \in (0, d_0/3)$ e correspondentes R_0, a_0, $\varepsilon_0 > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \|J_\varepsilon'(u)\|_{(H_\varepsilon^R)'} \geq a_0 \quad & \text{para todo} \quad u \in H_\varepsilon^R \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \quad \text{e} \\ J_\varepsilon(u) > E_m/2 \quad & \text{para todo} \quad u \in X_\varepsilon^{d_0}, \end{aligned} \tag{2.23}$$

para qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Assim obtemos o seguinte resultado.

Lema 2.16. *Para γ_ε dado por (2.15) existem $\alpha, \rho, \varepsilon_0 > 0$ tais que*

$$\begin{aligned} |s - 1/t_0| \ &\leq \ \alpha \quad \Rightarrow \quad \gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1} \\ |s - 1/t_0| \ &\geq \ \alpha \quad \Rightarrow \quad J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) < E_m - \rho \end{aligned}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.

Na próxima proposição mostraremos que o funcional $J_\varepsilon|_{H_\varepsilon^R}$ possui uma sequência de Palais-Smale limitada se ε é suficientemente pequeno e R é grande.

Proposição 2.17. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $R > 0$ grande existe uma sequência $\{u_n\} \subset H_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ tal que $\|J_\varepsilon'(u_n)\|_{(H_\varepsilon^R)'} \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Prova. Tomamos R_0 tal que $\Omega \subset B(0, R_0)$. Então $\gamma_\varepsilon([0,1]) \subset H_\varepsilon^R$ para todo $R \geq R_0$. Suponhamos por absurdo que a afirmação da Proposição 2.17 é falsa. Então para $\varepsilon > 0$ pequeno e $R > R_0$ grande existe $a(\varepsilon, R) > 0$ tal que

$$\|J_\varepsilon'(u)\|_{(H_\varepsilon^R)'} \geq a(\varepsilon, R) \quad \text{em} \quad H_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}.$$

Graças a (2.23) sabemos que existe a_0 independente de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $R > R_0$ tal que

$$\|J_\varepsilon'(u)\|_{(H_\varepsilon^R)'} \geq a_0 \quad \text{em} \quad H_\varepsilon^R \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}.$$

Assim existe um campo vetorial pseudo-gradiente, T_ε^R, definido sobre uma vizinhança Z_ε^R de $H_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ para $J_\varepsilon|_{H_\varepsilon^R}$. Citamos [52] para detalhes. Seja η_ε^R uma função Lipschitz contínua sobre H_ε^R tal que

$$0 \leq \eta_\varepsilon^R \leq 1, \quad \eta_\varepsilon^R \equiv 1 \text{ em } H_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \quad \text{e} \quad \eta_\varepsilon^R \equiv 0 \text{ em } H_\varepsilon^R \backslash Z_\varepsilon^R.$$

Tomando $\xi : \mathbb{R} \to [0,1]$ uma função Lipschitz contínua tal que

$$\xi(a) = 1 \quad \text{se} \quad |a - E_m| \leq E_m/2 \quad \text{e} \quad \xi(a) = 0 \quad \text{se} \quad |a - E_m| \geq E_m$$

e definindo

$$e_\varepsilon^R(u) = \begin{cases} -\eta_\varepsilon^R(u)\xi(J_\varepsilon(u))T_\varepsilon^R(u) & \text{se} \quad u \in Z_\varepsilon^R \\ 0 & \text{se} \quad u \in H_\varepsilon^R \backslash Z_\varepsilon^R, \end{cases}$$

existe uma solução global $\Psi_\varepsilon^R : H_\varepsilon^R \times \mathbb{R} \to H_\varepsilon^R$, a qual é única, do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Psi_\varepsilon^R(u,t) &= e_\varepsilon^R(\Psi_\varepsilon^R(u,t)) \\ \Psi_\varepsilon^R(u,0) &= u. \end{cases} \tag{2.24}$$

Desde que $\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = E_m$, temos $D_\varepsilon \leq E_m + (1/2)\min\{E_m, a_0^2 d_1\}$ para $\varepsilon > 0$ pequeno. Então, pela escolha de d_0 e d_1, a função Ψ_ε^R satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $\Psi_\varepsilon^R(u,t) = u$ se $t = 0$ ou $u \in H_\varepsilon^R \backslash Z_\varepsilon^R$ ou $J_\varepsilon(u) \notin (0, 2E_m)$.

(ii) $\left\|\frac{d}{dt}\Psi_\varepsilon^R(u,t)\right\| \leq 2$ para todo (u,t).

(iii) $\frac{d}{dt}\left(J_\varepsilon\left(\Psi_\varepsilon^R(u,t)\right)\right) \leq 0$ para todo (u,t).

(iv) $\frac{d}{dt}\left(J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon^R(u,t))\right) \leq -a_0^2$ se $\Psi_\varepsilon^R(u,t) \in H_\varepsilon^R \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$.

(v) $\frac{d}{dt}(J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon^R(u,t))) \leq -(a(\varepsilon,R))^2$ se $\Psi_\varepsilon^R(u,t) \in H_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_1} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$.

Como na Proposição 1.12 vemos que para $\varepsilon > 0$ pequeno existe $t_\varepsilon^R > 0$ grande tal que para $\gamma_\varepsilon^R(s) := \Psi_\varepsilon^R(\gamma_\varepsilon(s), t_\varepsilon^R)$ tem-se

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R(s)) \leq E_m - \min\left\{\rho, \frac{a_0^2 d_1}{2}\right\} \quad \text{para todo} \quad s \in [0,1], \tag{2.25}$$

onde $\rho > 0$ é dado no Lema 2.16. Já que $J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R(0)) = 0$ e $J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R(1)) < -1$ temos $\gamma_\varepsilon^R \in \Gamma_\varepsilon$. Portanto

$$C_\varepsilon \leq \max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R(s)) \leq E_m - \min\left\{\rho, \frac{a_0^2 d_1}{2}\right\},$$

o que é uma contradição com a Proposição 2.12 e logo completa a prova desta proposição. ■

Proposição 2.18. *Existe um ponto crítico $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ de J_ε se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno.*

Prova. Pela Proposição 2.17 existem $\varepsilon_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tais que para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ existe uma sequência $\{u_n\}_n \subset H_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ satisfazendo $\|J_\varepsilon'(u_n)\|_{(H_\varepsilon^R)'} \to 0$ quando $n \to \infty$. Sendo $\{u_n\}_n$ limitada em H_ε^R podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ em H_ε^R e

$u_n(x) \to u(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$ quando $n \to \infty$. Claramente $u = u(R, \varepsilon)$. Pela compacidade da imersão $H_0^1(B(0, R/\varepsilon)) \hookrightarrow L^q(B(0, R/\varepsilon))$ para $q \in [1, 2^*)$ vemos que u é uma solução não negativa para

$$- \Delta u + V(\varepsilon x)u - \nabla H(u) = -4 \left(\int_{B(0,R/\varepsilon)} \chi_\varepsilon |u|^2 \, \mathrm{d}x - 1 \right)_+ \chi_\varepsilon u \quad \text{em} \quad B(0, R/\varepsilon). \tag{2.26}$$

Então podemos verificar que $u_n \to u$ em H_ε^R quando $n \to \infty$ e daí $u \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$. Por $(H_1) - (H_2)$ existe $C > 0$ tal que

$$- \Delta \left(\sum_{j=1}^{k} u_j \right) \leq C |u|^p \leq C \left(\sum_{j=1}^{k} u_j \right)^p \quad \text{em} \quad B(0, R/\varepsilon) \tag{2.27}$$

e usando um método iterativo devido a Moser provamos que $\{u(R, \varepsilon)\}$ é limitado em $\left(L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)^k$ uniformemente em $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Por (2.27) obtemos

$$-\Delta \left(\sum_{j=1}^{k} u_j \right) \leq C \left(\sum_{j=1}^{k} u_j \right)^{p-1} \sum_{j=1}^{k} u_j \leq \tilde{C} \sum_{j=1}^{k} u_j \quad \text{em} \quad B(0, R/\varepsilon).$$

Desta forma, a partir de ([32], Teorema 9.26) existe $C_0 = C_0(N, \tilde{C})$ tal que

$$\sup_{B(y,1)} \left(\sum_{j=1}^{k} u_j \right) \leq C_0 \, \| |u| \|_{L^2(B(y,2))} \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}^N. \tag{2.28}$$

Devido à limitação de $\{\|u(R, \varepsilon)\|_\varepsilon\}$ e $\{J_\varepsilon(u(R, \varepsilon))\}$ obtemos $\{Q_\varepsilon(u(R, \varepsilon))\}$ uniformemente limitado em $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Então existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R_0/\varepsilon)} |u|^2 \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon} |u|^2 \, \mathrm{d}x = \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |u|^2 \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon C_1 \tag{2.29}$$

para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Por (H_1) exist $\tau > 0$ tal que $|\nabla H(u)| \leq (V_0/2)|u|$ para $|u| \leq \tau$. Tomamos ε_0 suficientemente pequeno satisfazendo $(\varepsilon_0 C_1)^{1/2} \leq \tau / C_0$ e fixamos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Seja $R_l \to \infty$ e denote $u_l = u(R_l, \varepsilon)$. Usando (2.28) e (2.29) obtemos

$$\sup_{B(y,1)} \left(\sum_{j=1}^{k} u_{l,j} \right) \leq \tau \quad \text{para todo} \quad |y| \geq \left(\frac{R_0}{\varepsilon} + 2 \right) \quad \text{e} \quad l \in \mathbb{N}.$$

Então, depois de alguns cálculos, obtemos

$$\lim_{A \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,A)} \left(|\nabla u_l|^2 + V(\varepsilon x)|u_l|^2 \right) \, \mathrm{d}x = 0 \tag{2.30}$$

uniformemente em $l \in \mathbb{N}$. Uma vez que $\{u_l\}_l$ é uma sequência limitada em H_ε podemos assumir que $u_l \rightharpoonup u_\varepsilon$ e $u_l(x) \to u_\varepsilon(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ quando $l \to \infty$. Temos em particular $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ limitada em L^∞. Sendo u_l uma solução para (2.26) em $B(0, R_l/\varepsilon)$, usando (2.30) vemos que $\|u_l\|_\varepsilon \to \|u_\varepsilon\|_\varepsilon$ e daí $u_l \to u_\varepsilon$ em H_ε. Isto implica que $J'_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ em H_ε e $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ já que $\{u_l\} \subset X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$. ∎

Agora estamos prontos para provar o principal resultado deste capítulo.

2.6 Prova do resultado principal

Pela Proposição 2.18 vemos que existe $d_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que J_ε tem um ponto crítico $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Além disso, $\{\|u_\varepsilon\|_\infty\}_\varepsilon$ é limitado. Pela definição de $X_\varepsilon^{d_0}$ temos $u_\varepsilon \neq 0$ para $\varepsilon > 0$ pequeno. Uma vez que u_ε satisfaz

$$-\Delta u_\varepsilon + V(\varepsilon x) u_\varepsilon - \nabla H(u_\varepsilon) = -4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |u_\varepsilon|^2 \mathrm{d}x - 1 \right)_+ \chi_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N,$$

por $(H_4) - (H_5)$ e pelo princípio do máximo deduzimos que u_ε é positiva em $\mathbb{R}^N$. Pela Proposição 2.13 provamos a existência de $\{y_\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$y_\varepsilon \in \mathcal{M}_\varepsilon^{2\beta} \quad \text{e} \quad \liminf_{\varepsilon \to 0} \int_{B(y_\varepsilon, 1)} |u_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x > 0$$

para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ se ε_0 pequeno o suficiente. Mais ainda, para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existem $z_0 \in \mathcal{M}$ e $u_0 \in \mathbf{S}_m$ tais que

$$\varepsilon_n y_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_{\varepsilon_n}) u_0(\cdot - y_{\varepsilon_n})\|_{\varepsilon_n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Denotamos $w_\varepsilon = u_\varepsilon(\cdot + y_\varepsilon)$. Por estimativas elípticas, usando o decaimento exponencial uniforme em $\mathbf{S}_m$, obtemos a existência de $R_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ satisfazendo

$$|\nabla H(w_\varepsilon(x))| \leq \frac{V_0}{2} |w_\varepsilon(x)| \quad \text{para qualquer} \quad |x| \geq R_0 \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Pelo princípio de comparação obtemos

$$|w_\varepsilon(x)| \leq C \exp(-c|x|) \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{2.31}$$

onde $C, c > 0$ são independentes de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Em outras palavras, obtemos o seguinte decaimento uniforme para $|u_\varepsilon|$

$$|u_\varepsilon(x)| \leq C \exp(-c|x - y_\varepsilon|) \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Consequentemente vemos que $Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ para ε pequeno e daí u_ε é uma solução positiva para o problema (2.3). Então verificamos que $\{u_\varepsilon\}$ é limitado longe da origem em $\left(L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)^k$. Pela definição de w_ε, existe $\rho > 0$ tal que $\|w_\varepsilon\|_{L^\infty} \geq \rho$ para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Logo, se tomamos p_ε^j como um ponto de máximo para $w_{\varepsilon,j}$ podemos provar que $w_{\varepsilon,j}(p_\varepsilon^j) \geq \tilde{\rho} > 0$ para $j = 1, \ldots, k$. De fato, já que V é Hölder contínua e H é $\mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^k_+)$ vemos que u_ε é uma solução clássica e então

$$\rho V_0 \leq V_0 \sum_{j=1}^k w_{\varepsilon,j}(p_\varepsilon^j) \leq -\sum_{j=1}^k \Delta w_{\varepsilon,j}(p_\varepsilon^j) + V_0 \sum_{j=1}^k w_{\varepsilon,j}(p_\varepsilon^j) \leq \sum_{j=1}^k H_{u_j}(w_\varepsilon(p_\varepsilon^j))$$

e se supormos $\|w_{\varepsilon_n,j}\|_{L^\infty} \to 0$ para algum $\varepsilon_n \to 0$, por (H_4) obtemos uma contradição. Assim, por (2.31) obtemos $|p_\varepsilon^j| \leq C$ independentemente de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $j = 1, \ldots, k$. Portanto $x_\varepsilon^j := y_\varepsilon + p_\varepsilon^j$ é um ponto de máximo para $u_{\varepsilon,j}$ e para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$, a menos de subsequência, obtemos que $p_{\varepsilon_n}^j \to p^j$,

$$\varepsilon_n x_{\varepsilon_n}^j \to z_0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n,j}(\cdot + x_{\varepsilon_n}^j) - u_{0,j}(\cdot + p^j)\|_{(H^1)^k} \to 0, \quad j = 1, \ldots, k,$$

para algum $z_0 \in \mathcal{M}$ e $u_0 \in \mathbf{S}_m$. Além disso, a limitação de $\{p_\varepsilon^j\}$ implica no decaimento exponencial desejado para u_ε. Isto completa a prova do Teorema 2.2.

CAPÍTULO 3

EXISTÊNCIA E CONCENTRAÇÃO DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES QUASE-LINEARES EM $\mathbb{R}^N$

3.1 Introdução

Neste capítulo consideramos uma classe de equações elípticas quase-lineares da forma

$$-\varepsilon^2\Delta u-\varepsilon^2\Delta(u^2)u+V(x)u=h(u),\quad u>0\quad \text{em}\quad \mathbb{R}^N \tag{3.1}$$

onde $\varepsilon>0$ é um parâmetro real pequeno e $N\geq 2$. Aqui nossa meta é provar, usando métodos variacionais, existência e concentração de soluções fracas positivas. Soluções de equações do tipo (3.1) estão relacionadas com existência de ondas estacionárias para equações quase-lineares da forma

$$i\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\varepsilon^2\Delta\psi+W(x)\psi-\eta(|\psi|^2)\psi-\varepsilon^2\kappa\Delta\rho(|\psi|^2)\rho'(|\psi|^2)\psi \tag{3.2}$$

onde $\psi:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{C}$, κ é uma constante positiva , $W:\mathbb{R}^N\longrightarrow\mathbb{R}$ é um potencial dado e $\eta,\rho:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ são funções adequadas. Equações quase-lineares da forma (3.2) surgem em várias áreas da física em correspondência com diferentes tipos de funções ρ. Para motivações físicas e desenvolvimento dos aspectos físicos nos referimos a [21] e referências lá citadas.

Consideraremos aqui o caso onde $\rho(s) = s$. Procurando por soluções do tipo onda estacionária para (3.2) definimos $\psi(t,x) = e^{-i\xi t/\varepsilon}u(x)$, onde $\xi \in \mathbb{R}$ e $u > 0$ é uma função real. Então obtém-se uma correspondente equação elíptica a qual tem a estrutura variacional dada por (3.1), onde $V(x) := W(x) - \xi$ é o novo potencial, $h(u) = \eta(u^2)u$ e, sem perda de generalidade, tomamos $\kappa = 1$.

Devido aos aspectos físicos, a equação (3.1) tem atraído muita atenção recentemente e vários resultados de existência tem sido obtidos nos casos de potenciais limitados, simétricos ou coercivos. Métodos variacionais, por meio de argumentos de minimização com vínculos, foram usados em [47] e então estendidos em [44] para provar existência de soluções positivas usando um Multiplicador de Lagrange. Posteriormente um resultado geral para (3.1) foi fornecido em [43]. Para superar o problema de que o funcional "natural"associado a esta equação não está bem definido, a nova ideia em [43] é introduzir uma mudança de variáveis e reescrever o funcional nesta nova variável o que transfere a questão para encontrar soluções de um equação elíptica semilinear auxiliar. Então pontos críticos podem ser encontrados num espaço de Orlicz associado e resultados de existência são obtidos no caso de potenciais limitados, coercivos ou radiais. Seguindo a estratégia desenvolvida em [22] em um problema relacionado, os autores em [23] também fazem uso desta mudança de variáveis e definem uma equação associada a qual eles chamam de "dual". Além disso, uma prova mais simples e mais curta do resultados de [43] é apresentada para alguns potenciais limitados. Prova esta que não usa espaços de Orlicz e então permite cobrir uma classe diferente de não linearidades. Em [21], ainda usando espaços de Orlicz, resultados de existência e concentração são obtidos com não linearidades e potenciais mais gerais. Em [30] o termo não linear envolve uma combinação de termos côncavos e convexos. Quando a não linearidade h exibe crescimento exponencial crítico em dimensão dois, sob algumas hipóteses adicionais, em [28] e [29] existência e concentração de soluções também são estudados.

Assim como nos capítulos anteriores, aqui supomos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(V_1) V é limitado inferiormente por uma constante positiva, isto é,

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^N} V(x) = V_0 > 0;$$

(V_2) existe um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}^N$ tal que

$$m := \inf_{x \in \Omega} V(x) < \inf_{x \in \partial\Omega} V(x).$$

Continuamos usando a notação

$$\mathcal{M} := \{x \in \Omega : V(x) = m\}$$

e supondo que $0 \in \mathcal{M}$. Enfatizamos que além da condição local (V_2), introduzida em [25] e bem conhecida no caso de problemas elípticos semilineares, não requeremos qualquer condição global sobre V a não ser (V_1). Estas hipóteses já foram usadas para equações quase-lineares em [21].

Supomos também que $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo:

(h_1) $\lim_{t\to 0^+} h(t)/t = 0$;

(h_2') para $q = 2(2^*) - 1$ se $N \geq 3$ ou $3 < q < \infty$ se $N = 2$, vale

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|h(t)|}{t^q} = 0;$$

(h_3) existe $T > 0$ tal que

$$H(T) > \frac{m}{2}T^2 \quad \text{onde} \quad H(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s.$$

Hipóteses análogas sobre a não linearidade foram usadas em [15] para o caso semilinear, com $N \geq 3$ e $q \in (1, 2^* - 1)$. Seguindo a estratégia lá desenvolvida provaremos existência e concentração de soluções positivas para (3.1) sem assumir a condição de Ambrosetti-Rabinowitz, a saber

$$0 < \theta H(t) \leq h(t)t \quad \text{para todo} \quad t > t_0, \quad \text{para algum} \quad t_0 \geq 0 \quad \text{e} \quad \theta > 4 \tag{3.3}$$

e sem nenhuma hipótese de monotonicidade sobre $h(t)/t$. Em particular melhoramos os resultados encontrados em [21] uma vez que tais hipóteses de crescimento, comuns na literatura, são aí exigidas.

Um exemplo de função satisfazendo as hipóteses $(h_1) - (h_3)$ é dado por $h(t) = t^\alpha \ln(t)$ para $t > 0$ onde $\alpha \in (1, 3]$. Observamos que para tal h não vale (3.3) e $h(t)/t$ não é monótona.

A seguir estabelecemos nosso resultado de forma mais precisa.

Teorema 3.1. *Suponha* $(V_1) - (V_2)$ *e* $(h_1) - (h_2') - (h_3)$. *Então existe* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que o problema* (3.1) *tem uma solução positiva* $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ *para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *satisfazendo o seguinte:*

(i) u_ε *admite um ponto de máximo* x_ε *tal que* $\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{dist}(x_\varepsilon,\mathcal{M}) = 0$ *e para qualquer sequência* $\varepsilon_n \to 0$ *existem* $z_0 \in \mathcal{M}$ *e uma solução* u_0 *de*

$$-\Delta u - \Delta(u^2)u + mu = h(u), \quad u > 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{3.4}$$

tais que, a menos de subsequências,

$$x_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad e \quad u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n \cdot + x_{\varepsilon_n}) \to u_0 \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^N) \quad quando \quad n \to \infty.$$

(ii) Existem constantes positivas C *e* c *tais que*

$$u_\varepsilon(x) \le C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon|)\right) \quad para\ todo \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

A prova do Teorema 3.1 é baseada no estudo de uma equação semilinear obtida depois de uma mudança de variáveis introduzida em [43]. A fim de obter resultados de existência para esta equação nós estudamos algumas propriedades das soluções de energia mínima para uma equação limite obtida a partir de (3.4) pela mesma mudança de variáveis. Usando estas propriedades, depois de alguns lemas técnicos, nós encontramos uma sequência de Palais-Smale limitada em um espaço adequado para o funcional associado. Assim, obtemos uma solução para a equação semilinear o que nos fornece uma solução para o problema original (3.1).

Observação 3.2. *Provaremos o Teorema 3.1 no caso* $N \geq 3$. *A prova deste resultado para o caso* $N = 2$ *segue a mesma linha do que faremos neste capítulo, usando a técnica desenvolvida em [19] de modo mais simples uma vez que neste artigo a não linearidade tem crescimento subcrítico exponencial e aqui estamos considerando apenas crescimento polinomial. Os resultados de [8] garantem a existência de uma solução de energia mínima não trivial para o problema limite* (3.10) *a seguir e que as soluções satisfazem a identidade de Pohozaev,*

$$\int_{\mathbb{R}^2} G(u)\mathrm{d}x = 0.$$

Aqui também valem os resultados de [41] sobre a igualdade entre os níveis do passo da montanha e de energia mínima para o funcional associado a (3.10) *e de [18] sobre a simetria e monotonicidade das soluções de energia mínima.*

Este capítulo é organizado da seguinte forma: na próxima seção fazemos a mudança de variáveis e estudamos algumas propriedades do funcional, J_ε, associado à nova equação semilinear obtida a partir de (3.1), e do espaço onde este funcional está definido. Também provamos algumas propriedades qualitativas das soluções de energia mínima para uma equação limite. Seção 3.3 é destinada a provar que o nível do passo da montanha de J_ε está bem definido e converge ao nível de menor energia do funcional associado ao problema limite. Na seção 3.4 provamos a existência de um ponto crítico não trivial para J_ε e finalmente a Seção 3.5 completa a prova do Teorema 3.1.

3.2 Resultados preliminares

Uma vez que estamos procurando por soluções (fracas) positivas e $h(0) = 0$, definimos $h(t) = 0$ para $t < 0$.

Definição 3.3. *Dizemos que $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução (fraca) para (3.1) se*

$$\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2)\nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x + 2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 u\varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x)u\varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} h(u)\varphi \,\mathrm{d}x \tag{3.5}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$.

Primeiramente observamos que definindo $v(x) = u(\varepsilon x)$, encontrar solução para a equação (3.1) torna-se equivalente a encontrar solução para o seguinte problema

$$-\Delta v - \Delta(v^2)v + V(\varepsilon x)v = h(v), \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{3.6}$$

O funcional energia natural associado a (3.6), a saber

$$I_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[(1 + 2v^2)|\nabla v|^2 + V(\varepsilon x)v^2\right] \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(v)\,\mathrm{d}x,$$

em geral não está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e isto é verdade mesmo no caso do espaço

$$H_\varepsilon := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)v^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

por causa do termo $(1 + 2v^2)|\nabla v|^2$. A fim de superar este problema, seguindo a estratégia desenvolvida em [21], [23], [30] e [43] em problemas relacionados, introduzimos uma mudança de variáveis $u = f^{-1}(v)$ onde f é uma função $\mathcal{C}^\infty$ definida por

$$f'(t) = \left(1 + 2f^2(t)\right)^{-1/2} \quad \text{se} \quad t > 0, \quad f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(t) = -f(-t) \quad \text{se} \quad t < 0.$$

Depois desta mudança de variáveis, a partir de I_ε obtemos um novo funcional

$$P_\varepsilon(u) = I_\varepsilon(f(u)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x) f^2(u)\right]\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(u))\,\mathrm{d}x,$$

o qual está bem definido sobre o espaço

$$E_\varepsilon := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Vemos que E_ε é um espaço de Banach quando munido da norma

$$\|u\|_\varepsilon := \|\nabla u\|_2 + \inf_{\lambda>0} \lambda \left\{ 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(\lambda^{-1} u)\,\mathrm{d}x \right\} := \|\nabla u\|_2 + |\|u\||_\varepsilon$$

e que a imersão $E_\varepsilon \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Além disso, o espaço $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E_ε (veja [21], [29], [30] e [43] para detalhes). Observamos que pontos críticos não triviais para P_ε em $E_\varepsilon \cap L^\infty_{loc}$ são soluções fracas para a seguinte equação

$$-\Delta u = f'(u)\left[h(f(u)) - V(\varepsilon x) f(u)\right] \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{3.7}$$

Na Proposição 3.7 abaixo relacionamos as soluções de (3.7) com as soluções de (3.6). Lembrando a notação $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N : \varepsilon x \in A\}$, definimos

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \Omega_\varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & \text{se} \quad x \notin \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

como anteriormente e

$$Q_\varepsilon(u) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x) u^2\,\mathrm{d}x - 1 \right)_+^2.$$

O funcional $Q_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ com derivada de Fréchet dada por

$$\langle Q'_\varepsilon(u), \varphi \rangle = 4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x) u^2\,\mathrm{d}x - 1 \right)_+ \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x) u \varphi\,\mathrm{d}x.$$

Este irá atuar como uma penalização para forçar o fenômeno de concentração a ocorrer dentro de Ω. Este tipo de penalização foi introduzido em [20] para o caso semilinear. Finalmente seja $J_\varepsilon : E_\varepsilon \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(u) + Q_\varepsilon(u).$$

Iremos procurar pontos críticos para J_ε para os quais Q_ε é zero. Com o intuito de facilitar a referência listamos aqui algumas propriedades da função $f(t)$.

Lema 3.4. *A função $f(t)$ satisfaz:*

(1) f é $\mathcal{C}^\infty$, invertível e unicamente definida;

(2) $|f'(t)| \leq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(3) $|f(t)| \leq |t|$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(4) $f(t)/t \to 1$ quando $t \to 0$;

(5) $f(t)/\sqrt{t} \to 2^{1/4}$ quando $t \to +\infty$;

(6) $f(t)/2 \leq tf'(t) \leq f(t)$ para todo $t \geq 0$;

(7) $|f(t)| \leq 2^{1/4}|t|^{1/2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(8) a função $f^2(t)$ é estritamente convexa;

(9) existe uma constante positive C tal que

$$|f(t)| \geq \begin{cases} C|t|, & |t| \leq 1 \\ C|t|^{1/2}, & |t| \geq 1; \end{cases}$$

(10) $|f(t)f'(t)| \leq 1/\sqrt{2}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

(11) para cada $\lambda > 1$ temos $f^2(\lambda t) \leq \lambda^2 f^2(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Prova. As provas de $(1) - (10)$ podem ser encontradas em [30], Lema 2.1 (veja também [23] e [43]). A fim de provar (11), usando (6) vemos que

$$\frac{(f^2)'(t)t}{f^2(t)} = \frac{2f(t)f'(t)t}{f^2(t)} \leq \frac{2f^2(t)}{f^2(t)} = 2 \quad \text{para todo } t > 0.$$

Então

$$\ln\left(\frac{f^2(\lambda t)}{f^2(t)}\right) = \int_t^{\lambda t} \frac{(f^2)'(s)}{f^2(s)}\, \mathrm{d}s \leq 2\ln\lambda = \ln\lambda^2$$

e daí $f^2(\lambda t) \leq \lambda^2 f^2(t)$ para $t > 0$. Sendo f^2 uma função par esta desigualdade vale para todo $t \in \mathbb{R}$. Isto conclui a prova do lema. ∎

3.2.1 Propriedades do novo funcional energia

A próxima proposição é crucial para provar resultados de convergência.

Proposição 3.5. *Existe $C > 0$ independente of $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x \leq C \|\|u\|\|_\varepsilon \left\{ 1 + \left[\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x \right]^{1/2} \right\} \quad \textit{para todo} \quad u \in E_\varepsilon. \tag{3.8}$$

Prova. A prova é análoga à da Proposição 2.1 em [30] já que a constante que lá aparece depende apenas da função f. Apresentamos aqui a prova para deixar o trabalho mais completo. Para $u \in E_\varepsilon$ e $\lambda > 0$, definamos

$$\mathcal{A}_\lambda = \left\{ x \in \mathbb{R}^N : \lambda |u(x)| \leq 1 \right\}.$$

Pelas propriedades (3) e (7) do Lema 3.4, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x &= \int_{\mathcal{A}_\lambda} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x + \int_{\mathcal{A}_\lambda^c} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\mathcal{A}_\lambda} V(\varepsilon x) |f(u)||u|\, \mathrm{d}x + 2^{1/2} \int_{\mathcal{A}_\lambda^c} V(\varepsilon x) |u|\, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder e (9) do Lema 3.4, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}_\lambda} V(\varepsilon x) |f(u)||u|\, \mathrm{d}x &\leq \left[\int_{\mathcal{A}_\lambda} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x \right]^{1/2} \left[\int_{\mathcal{A}_\lambda} V(\varepsilon x) u^2\, \mathrm{d}x \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x \right]^{1/2} \frac{C}{\lambda} \left[\int_{\mathcal{A}_\lambda} V(\varepsilon x) f^2(\lambda u)\, \mathrm{d}x \right]^{1/2} \\ &\leq \left[\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x \right]^{1/2} \frac{C}{\lambda} \left[1 + \int_{\mathcal{A}_\lambda} V(\varepsilon x) f^2(\lambda u)\, \mathrm{d}x \right], \end{aligned}$$

onde, na última estimativa, usamos a desigualdade $s^{1/2} \leq 1 + s$ para todo $s \geq 0$. Pela estimativa (9) do Lema 3.4, obtemos

$$\int_{\mathcal{A}_\lambda^c} V(\varepsilon x) |u|\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \int_{\mathcal{A}_\lambda^c} V(\varepsilon x) |\lambda u|\, \mathrm{d}x \leq \frac{C}{\lambda} \left[1 + \int_{\mathcal{A}_\lambda^c} V(\varepsilon x) f^2(\lambda u)\, \mathrm{d}x \right].$$

Logo concluímos que para todo $\lambda > 0$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x \quad \leq \quad \left\{ \left[\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\, \mathrm{d}x \right]^{1/2} + 1 \right\} \frac{C}{\lambda} \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(\lambda u)\, \mathrm{d}x \right],$$

e assim (3.8) segue. ■

Agora seguem alguns resultados de regularidade sobre o funcional P_ε. A prova de resultados análogos pode ser encontrada em [21] (Proposição 2.5), [29] (Proposição 8) e [30] (Proposição 5).

Proposição 3.6. *O funcional P_ε satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) *P_ε é contínuo in E_ε.*

(ii) *P_ε é Gâteaux diferenciável sobre E_ε e, para cada $\varphi \in E_\varepsilon$, temos*

$$\langle P'_\varepsilon(u), \varphi\rangle \;=\; \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} f'(u)\,[V(\varepsilon x) f(u) - h(f(u))]\,\varphi \,\mathrm{d}x.$$

(iii) *P'_ε é contínuo da topologia da norma de E_ε para a topologia fraca-$*$ de E'_ε, i.e. se $u_n \to u$ em E_ε então*

$$\langle P'_\varepsilon(u_n), \varphi\rangle \to \langle P'_\varepsilon(u), \varphi\rangle \quad \textit{para cada} \quad \varphi \in E_\varepsilon.$$

Esta próxima proposição relaciona as soluções de (3.6) e (3.7).

Proposição 3.7. *(i) Se $u \in E_\varepsilon \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é um ponto crítico de P_ε então $v = f(u) \in E_\varepsilon \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução fraca de (3.6);*

(ii) Se u é uma solução clássica de (3.7) então $v = f(u)$ é uma solução clássica de (3.6).

Prova. O item (ii) foi provada em [23] e para provar (i) seguimos a mesma ideia. Se $v = f(u)$ pelo Lema 3.4 temos $|v| \le |u|$ e $|\nabla v| = f'(u)|\nabla u| \le |\nabla u|$ o que implica $v \in E_\varepsilon \cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$. Já que u é um ponto crítico para P_ε, u é uma solução fraca de (3.7). Então

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f'(u)\,[h(f(u)) - V(\varepsilon x) f(u)]\,\varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad \varphi \in E_\varepsilon. \tag{3.9}$$

Sendo $(f^{-1})'(t) = [f'(f^{-1}(t))]^{-1}$, segue que

$$(f^{-1})'(t) = \left[1 + 2f^2(f^{-1}(t))\right]^{1/2} = (1 + 2t^2)^{1/2} \quad \text{e} \quad (f^{-1})''(t) = \frac{2t}{(1+2t^2)^{1/2}}$$

o que nos fornece

$$\nabla u = (f^{-1})'(v)\nabla v = (1 + 2v^2)^{1/2} \nabla v.$$

Para cada $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos $\varphi := (f'(u))^{-1}\psi = (f^{-1})'(v)\psi \in E_\varepsilon$ com

$$\nabla\varphi = \frac{2v\psi}{(1+2v^2)^{1/2}}\nabla v + (1+2v^2)^{1/2}\nabla\psi.$$

Então por (3.9) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[2|\nabla v|^2 v\psi + (1+2v^2)\nabla v\nabla\psi\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \left[h(v) - V(\varepsilon x)v\right]\psi\, \mathrm{d}x$$

o que conclui a prova de (i). ∎

3.2.2 O problema limite

Nesta seção estudaremos algumas propriedades das soluções de (3.4), a saber

$$-\Delta v - \Delta(v^2)v + mv = h(v), \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Para isto, usando a mesma mudança de variáveis f estudaremos o problema

$$-\Delta u = g(u), \quad u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{3.10}$$

onde $g(t) = f'(t)\left[h(f(t)) - mf(t)\right]$ para $t \geq 0$ e $g(t) = -g(-t)$ para $t < 0$. Como na Proposição 3.7 vemos que se $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de (3.10) então $v = f(u)$ é uma solução para (3.4). Pelas hipóteses sobre h e Lema 3.4 podemos ver que a função $h(f(t))$ é contínua e satisfaz:

$(\tilde{h}_1)$ $\lim_{t\to 0^+} f'(t)h(f(t))/t = 0$;

$(\tilde{h}_2)$ for $p = (q-1)/2 = 2^* - 1$ vale $\lim_{t\to\infty} f'(t)|h(f(t))|/t^p = 0$.

Então as propriedades de $f(t)$ implicam nas seguintes para a função $g(t)$:

(g_1) $\lim_{t\to 0} g(t)/t = -m$;

(g_2) $\lim_{t\to\infty} \frac{|g(t)|}{t^p} = 0$;

(g_3) $G(f^{-1}(T)) > 0$ onde $G(t) = \int_0^t g(s)\, \mathrm{d}s$.

Assim, por [9] sabemos que o funcional associado a (3.10), dado por

$$L_m(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + mf^2(u)\right)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(u))\,\mathrm{d}x$$

para $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$, está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^1$. Dizemos que v é uma solução de energia mínima (ou ground state) para (3.10) se

$$L_m(v) = \inf\left\{L_m(u) : u \in H^1(\mathbb{R}^N) \text{ é uma solução de } (3.10)\right\} := E_m$$

e E_m é dito ser o nível de menor energia de (3.10). O seguinte teorema também segue de [9].

Teorema 3.8. *Suponha $(g_1)-(g_3)$. Então*

(i) o problema (3.10) tem uma solução de menor energia $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ a qual é radialmente simétrica e monótona com respeito a $r = |x| \in [0,\infty)$;

(ii) cada solução u de (3.10) satisfaz a identidade de Pohozaev

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} G(u)\,\mathrm{d}x = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} \left[H(f(u)) - \frac{m}{2}f^2(u)\right]\,\mathrm{d}x.$$

Devido a um resultado de Jeanjean e Tanaka [41] sabemos que as soluções de menor energia tem uma caracterização do passo da montanha, isto é

$$L_m(U) = c_m := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} L_m(\gamma(t))$$

onde $\Gamma = \left\{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } L_m(\gamma(1)) < 0\right\}$. Além disso, os autores provaram que para cada solução de menor energia U existe um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(t) > 0$ em $\mathbb{R}^N$ para $t > 0$ satisfazendo $U \in \gamma([0,1])$ e

$$\max_{t\in[0,1]} L_m(\gamma(t)) = L_m(U) = c_m. \tag{3.11}$$

Combinando resultados de [9] e [18] vemos que qualquer solução de energia mínima é, a menos de translação, radialmente simétrica e monótona com respeito a $r = |x| \in [0,\infty)$. Consideramos $\mathbf{S}_m$ o conjunto das soluções de energia mínima para (3.10) que são radialmente simétricas, de modo que

$$u(0) = \max_{x\in\mathbb{R}^N} u(x) \quad \text{para todo} \quad u \in \mathbf{S}_m.$$

Então obtemos o seguinte resultado de compacidade.

Proposição 3.9. *$\boldsymbol{S}_m$ é compacto em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, existem constantes $C, c > 0$ independentes de $U \in \boldsymbol{S}_m$ satisfazendo*

$$U(x) + |\nabla U(x)| \leq C \exp(-c|x|) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N. \tag{3.12}$$

Prova. Usando a identidade de Pohozaev vemos que para qualquer $U \in \mathbf{S}_m$

$$\frac{1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \, \mathrm{d}x = L_m(U). \tag{3.13}$$

Assim, $\{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \, \mathrm{d}x : U \in \mathbf{S}_m\}$ é um conjunto limitado. Pelo item (6) do Lema 3.4 temos

$$\frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(U) \, \mathrm{d}x \leq m \int_{\mathbb{R}^N} f(U) f'(U) U \, \mathrm{d}x$$

e sendo U uma solução de (3.10), por $(h_1) - (h_2')$ e Lema 3.4 vemos que

$$\begin{aligned} \frac{m}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(U) \, \mathrm{d}x &< \int_{\mathbb{R}^N} h(f(U)) f'(U) U \, \mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N} h(f(U)) f(U) \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{m}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(U) \, \mathrm{d}x + C \int_{\mathbb{R}^N} f^{2(2^*)}(U) \, \mathrm{d}x \\ &\leq \frac{m}{4} \int_{\mathbb{R}^N} f^2(U) \, \mathrm{d}x + 2^{2^*/2} C \int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Logo

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^2(U) \, \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} \, \mathrm{d}x \quad \text{for all } U \in \mathbf{S}_m.$$

A partir desta desigualdade obtemos para todo $U \in \mathbf{S}_m$

$$\int_{\mathbb{R}^N} U^2 \, \mathrm{d}x \leq C \int_{\{U \leq 1\}} f^2(U) \, \mathrm{d}x + \int_{\{U > 1\}} U^{2^*} \, \mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^N} U^{2^*} \, \mathrm{d}x.$$

Então pela desigualdade de Sobolev vemos que $\{\int_{\mathbb{R}^N} U^2 \, \mathrm{d}x : U \in \mathbf{S}_m\}$ é limitado. Segue que $\mathbf{S}_m$ é limitado em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Pelo Lema Radial ([9], Lema Radial A.IV) obtemos

$$U(x) \leq C \frac{\|U\|_{L^2}}{|x|^{N/2}} \quad \text{para} \quad x \neq 0,$$

onde $C = C(N)$. Assim, $\lim_{|x| \to \infty} U(x) = 0$ uniformemente para $U \in \mathbf{S}_m$. Como visto nos capítulos anteriores, por um princípio de comparação existem $C, c > 0$ independentes de $U \in \mathbf{S}_m$ satisfazendo

$$U(x) + |\nabla U(x)| \leq C \exp(-c|x|) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \backslash B(0, R)$$

para algum $R > 0$ (veja [9] para detalhes). Além disso, por (h_1) e identidade de Pohozaev vemos que $\mathbf{S}_m$ é limitado longe da origem em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $\{U_n\}$ uma sequência em $\mathbf{S}_m$. A menos de subsequências podemos assumir que $U_n \rightharpoonup U$ em $H^1_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $U_n \to U$ em $L^2(B(0,R))$ e $U_n(x) \to U(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$. Então U é também uma solução de (3.10). Usando $(g_1)-(g_2)$ e o decaimento exponencial uniforme de U_n temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} g(U_n)U_n \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} g(U)U \,\mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} U_n^2 \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} U^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Sendo U_n e U soluções obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla U_n|^2 - g(U_n)U_n\right] \,\mathrm{d}x = 0 = \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla U|^2 - g(U)U\right] \,\mathrm{d}x$$

e daí segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U_n|^2 \,\mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \,\mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

o que implica que $U_n \to U$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Isto prova a compacidade de $\mathbf{S}_m$. Usando este resultado vemos que dado $\sigma > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^N:[U(x)]^{2^*-2}>k\}} U^{2^*} \,\mathrm{d}x\right)^{2/N} < \sigma \quad \text{para todo} \quad U \in \mathbf{S}_m.$$

Por $(h_1)-(h_2')$ e Lema 3.4 existe $c > 0$ satisfazendo

$$-\Delta U \leq cU^{2^*-1} \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N$$

para qualquer solução de (3.10). Então segue de ([52], Lema B.3) que $\mathbf{S}_m$ é limitado em $L^r_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para todo $r \in [2,\infty)$ e

$$\|U\|_{L^r(B(0,2))} \leq C_r \|U\|_{L^2} \quad \text{para todo} \quad U \in \mathbf{S}_m$$

onde a constante C_r depende de r e N. Daí Teorema 9.20 em [32] implica que

$$\sup_{B(0,1)} U \leq C\left(\|U\|_{L^2(B(0,2))} + \|U^{2^*-1}\|_{L^N(B(0,2))}\right)$$

onde $C = C(N)$. Assim vemos que $\mathbf{S}_m$ é também limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Consequentemente obtemos (3.12) o que completa a prova. ■

3.3 O nível do passo da montanha

Fixando $U \in \mathbf{S}_m$ definimos $U_t(x) = U(x/t)$ para $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$. Então pela identidade de Pohozaev temos

$$\begin{aligned} L_m(U_t) &= \frac{t^{N-2}}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \,\mathrm{d}x - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G(U)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{t^N}{2^*}\right)\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla U|^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Assim existe $t_0 > 1$ tal que

$$L_m(U_t) < -2 \quad \text{para} \quad t \geq t_0. \tag{3.15}$$

Devido à hipótese (h_3) podemos escolher $\beta \in (0, \mathrm{dist}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^N \backslash \Omega)/10)$ suficientemente pequeno tal que

$$H(T) > \frac{V(x)}{2}T^2 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{M}^{5\beta}. \tag{3.16}$$

Desta forma vemos que o Teorema 3.8 e a igualdade entre os níveis de energia mínima e do passo da montanha também valem para $L_{V(x)}$ para cada $x \in \mathcal{M}^{5\beta}$, fato este que será de suma importância em resultados posteriores. Escolhemos uma função corte $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ se $|x| \leq \beta$ e $\varphi(x) = 0$ para $|x| \geq 2\beta$, com $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ se $|y| \leq |x|$. Denotamos então $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ e para $z \in \mathcal{M}^\beta$ e $U \in \mathbf{S}_m$

$$U_\varepsilon^z(x) := \varphi_\varepsilon(x - z/\varepsilon)U(x - z/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Para ε suficientemente pequeno iremos encontrar uma solução próxima ao conjunto

$$X_\varepsilon = \left\{U_\varepsilon^z : \ z \in \mathcal{M}^\beta, \ U \in \mathbf{S}_m\right\}.$$

Observação 3.10. *O conjunto X_ε é compacto em E_ε e além disso, é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0, 10)$. De fato, para $w \in X_\varepsilon$ temos $w = U_\varepsilon^z$ para algum $U \in \boldsymbol{S}_m$ e $z \in \mathcal{M}^\beta$. Daí*

$$\begin{aligned} \|w\|_\varepsilon &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi_\varepsilon U)|^2 \,\mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left\{1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x + z) f^2(\varphi_\varepsilon U)\,\mathrm{d}x\right\} \\ &\leq \left[2\int_{\mathbb{R}^N} \left(\varepsilon^2 |\nabla\varphi(\varepsilon x)|^2 U^2 + \varphi_\varepsilon^2 |\nabla U|^2\right] \mathrm{d}x\right)^{1/2} + \left\{1 + \sup_{x\in\Omega} V(x)\int_{\mathbb{R}^N} (\varphi_\varepsilon U)^2 \,\mathrm{d}x\right\} \\ &\leq c\|U\| + \tilde{c}\|U\|^2 + 1 \leq C \end{aligned}$$

devido a limitação de $\boldsymbol{S}_m$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$*. Isto prova que* X_ε *é limitado uniformemente em* $\varepsilon \in (0,10)$*. Agora seja* $\{w_n\}$ *uma sequência em* X_ε*. Existem* $\{U_n\} \subset \boldsymbol{S}_m$ *e* $\{z_n\} \subset \mathcal{M}^\beta$ *tais que* $w_n(x) = \varphi_\varepsilon(x - z_n/\varepsilon)U_n(x - z_n/\varepsilon)$*,* $x \in \mathbb{R}^N$*. A compacidade de* $\boldsymbol{S}_m$ *e* $\mathcal{M}^\beta$ *implica na existência de* $U_0 \in \boldsymbol{S}_m$ *e* $z_0 \in \mathcal{M}^\beta$ *tais que* $U_n \to U_0$ *em* $H^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $z_n \to z_0$ *em* $\mathbb{R}^N$*, a menos de subsequência. Definindo* $w_0(x) = \varphi_\varepsilon(x - z_0/\varepsilon)U_0(x - z_0/\varepsilon)$ *temos* $w_0 \in X_\varepsilon$ *e*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(w_n - w_0)|^2 \,\mathrm{d}x \;&\leq\; c\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla[(U_n - U_0)\varphi_\varepsilon](x - z_n/\varepsilon)|^2 \,\mathrm{d}x \\ &\quad + c\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left[\left(\varphi_\varepsilon(x - z_n/\varepsilon) - \varphi_\varepsilon(x - z_0/\varepsilon)\right)U_0(x - z_n/\varepsilon)\right]\right|^2 \mathrm{d}x \\ &\quad + c\int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla\left[\varphi_\varepsilon(x - z_0/\varepsilon)\left(U_0(x - z_n/\varepsilon) - U_0(x - z_0/\varepsilon)\right)\right]\right|^2 \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Devido ao decaimento exponencial uniforme em $\boldsymbol{S}_m$ *e as convergências citadas acima obtemos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(w_n - w_0)|^2 \,\mathrm{d}x \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

Analogamente temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n - w_0) \,\mathrm{d}x \leq \sup_{x\in\Omega} V(x) \int_{\mathbb{R}^N} |w_n - w_0|^2 \,\mathrm{d}x \to 0 \quad \textit{quando} \quad n \to \infty.$$

Então dado $\lambda \in (0,1)$ *por* (11) *em Lema 3.4 vemos que*

$$\lambda\left\{1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(\lambda^{-1}(w_n - w_0)) \,\mathrm{d}x\right\} \leq \lambda + \lambda^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2\left(w_n - w_0\right) \,\mathrm{d}x.$$

Estas duas últimas desigualdades implicam que existe $n_0 = n_0(\lambda)$ *tal que*

$$|\|w_n - w_0\||_\varepsilon \leq \lambda + \lambda^{-1}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(w_n - w_0) \,\mathrm{d}x \leq 2\lambda \quad \textit{para } n \geq n_0.$$

Portanto $w_n \to w_0$ *em* E_ε *quando* $n \to \infty$ *o que prova a compacidade de* X_ε*.*

Lema 3.11. *Denotando* $w_{\varepsilon,t}(x) = \varphi_\varepsilon(x)U_t(x)$ *para* $t > 0$ *e* $U_0 \equiv w_{\varepsilon,0} \equiv 0$ *temos*

$$\sup_{t\in[0,t_0]} |J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Prova. Desde que $\operatorname{supp}(w_{\varepsilon,t}) \subset \Omega_\varepsilon$ e $\operatorname{supp}(\chi_\varepsilon) \subset \mathbb{R}^N\backslash\Omega_\varepsilon$ temos $Q_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) = 0$ e daí $J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) = P_\varepsilon(w_{\varepsilon,t})$. Então para $t \in (0,t_0]$ vemos que

$$\begin{aligned}|P_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| \;&\leq\; \frac{1}{2}\left|\|\nabla w_{\varepsilon,t}\|_{L^2}^2 - \|\nabla U_t\|_{L^2}^2\right| + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left|V(\varepsilon x)f^2(w_{\varepsilon,t}) - mf^2(U_t)\right| \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} |H(f(w_{\varepsilon,t})) - H(f(U_t))| \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Devemos estimar estes termos do lado direito da desigualdade. Primeiramente, usando uma mudança de variáveis e o decaimento exponencial de U, obtemos $C > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w_{\varepsilon,t} - \nabla U_t|^2 \,\mathrm{d}x \le C \int_{\mathbb{R}^N} \left[t_0^N \varepsilon^2 + t_0^{N-2}(1-\varphi_\varepsilon(t_0 x))^2\right] \exp(-2c|x|)\,\mathrm{d}x$$

para todo $t \in (0, t_0]$. Logo $\|\nabla w_{\varepsilon,t}\|_{L^2} \to \|\nabla U_t\|_{L^2}$ quando $\varepsilon \to 0$ uniformemente em $t \in [0, t_0]$. Para o segundo termo, usando (10) de Lema 3.4 e (3.12) temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left|V(\varepsilon x) f^2(w_{\varepsilon,t}) - m f^2(U_t)\right| \mathrm{d}x \\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}^N} |V(\varepsilon x) - m|\, f^2(w_{\varepsilon,t})\,\mathrm{d}x + m \int_{\mathbb{R}^N} \left|f^2(w_{\varepsilon,t}) - f^2(U_t)\right| \mathrm{d}x \\
&\qquad \le 2^{1/2} C \int_{\mathbb{R}^N} \left[|V(\varepsilon x) - m| \chi_{\{|x| \le 2\beta/\varepsilon\}} + m(1-\varphi_\varepsilon)\right] \exp(-c|x|/t_0)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

para todo $t \in (0, t_0]$. Lembrando que

$$H(f(a+b)) - H(f(a)) = b \int_0^1 f'(a+sb) h(f(a+sb))\,\mathrm{d}s, \tag{3.17}$$

de $(\tilde{h}_1) - (\tilde{h}_2)$ obtemos a seguinte estimativa para o terceiro termo

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |H(f(w_{\varepsilon,t})) - H(f(U_t))|\,\mathrm{d}x &\le C \int_{\mathbb{R}^N} |w_{\varepsilon,t} - U_t| \left(U_t + w_{\varepsilon,t} + U_t^p + w_{\varepsilon,t}^p\right) \mathrm{d}x \\
&\le C \int_{\mathbb{R}^N} (1-\varphi_\varepsilon) \exp\left(-(2c/t_0)|x|\right) \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

para cada $t \in (0, t_0]$. Portanto $J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) \to L_m(U_t)$ quando $\varepsilon \to 0$, uniformemente in $t \in [0, t_0]$. Este é o fim da prova. ■

Observamos que devido a (3.15) e Lema 3.11 existe ε_0 suficientemente pequeno tal que

$$|J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t_0}) - L_m(U_{t_0})| \le -L_m(U_{t_0}) - 2 \quad \text{e então} \quad J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t_0}) < -2$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. A partir de agora consideraremos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e continuaremos a usar a notação ε_0 embora este seja necessariamente menor a cada passo. Definimos o nível mini-max

$$C_\varepsilon = \inf_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon} \max_{s \in [0,1]} J_\varepsilon(\gamma(s)),$$

onde

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], E_\varepsilon) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = w_{\varepsilon,t_0}\}.$$

Com estas definições temos o seguinte resultado de convergência.

Proposição 3.12. *O nível mini-max C_ε converge para E_m quando ε tende a zero.*

Prova. Usando argumentos semelhantes aos da Observação 3.10 vemos que $w_{\varepsilon,s} \to w_{\varepsilon,t}$ em E_ε quando $s \to t$, para $t \geq 0$. Então, definindo

$$\gamma_\varepsilon(s) = w_{\varepsilon,st_0} \quad \text{para} \quad s \in [0,1] \tag{3.18}$$

temos $\gamma_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$ e por (3.13), (3.14) e Lema 3.11 vemos que

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \leq \limsup_{\varepsilon\to 0} \max_{t\in[0,t_0]} J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) \leq \max_{t\in[0,t_0]} L_m(U_t) = E_m.$$

Por outro lado, usando (3) no Lema 3.4 e lembrando que o nível de energia mínima para L_m coincide com o nível do passo da montanha, repetindo a segunda parte da prova da Proposição 1.5 vemos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \geq E_m$$

o que conclui a prova. ■

Com o que vimos na demonstração da proposição anterior, denotando

$$D_\varepsilon := \max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s))$$

onde γ_ε doi definido em (3.18), temos que $C_\varepsilon \leq D_\varepsilon$ e $\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = E_m$.

3.4 Existência de um ponto crítico para o funcional modificado

Começamos esta seção com algumas definições. Para cada $A \subset E_\varepsilon$ e $\alpha > 0$ definimos

$$J_\varepsilon^\alpha := \{u \in E_\varepsilon : J_\varepsilon(u) \leq \alpha\} \quad \text{e} \quad A^\alpha := \{u \in E_\varepsilon : \inf_{v\in A} \|u-v\|_\varepsilon \leq \alpha\}.$$

Além disso, nas próximas proposições, para qualquer $\varepsilon > 0$ e $R > 0$, consideramos o funcional J_ε restrito ao espaço $H_0^1(B(0,R/\varepsilon))$ munido da norma

$$\|v\|_\varepsilon = \|\nabla v\|_{L^2(B(0,R/\varepsilon))} + \inf_{\lambda>0} \lambda \left\{1 + \int_{B(0,R/\varepsilon)} V(\varepsilon x) f^2(\lambda^{-1}v)\, \mathrm{d}x\right\}.$$

A partir daqui chamaremos este espaço de E_ε^R. Vemos que E_ε^R é um espaço de Banach e que J_ε é de classe $\mathcal{C}^1$ sobre E_ε^R.

Proposição 3.13. *Sejam* $\varepsilon_n \to 0$, $R_n \to \infty$ *e* $u_n \in X^d_{\varepsilon_n} \cap E^{R_n}_{\varepsilon_n}$ *tais que*

$$\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \leq E_m \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(E^{R_n}_{\varepsilon_n})'} = 0.$$

Então, a menos de subsequências existem $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $z_0 \in \mathcal{M}$ *e* $U_0 \in \boldsymbol{S}_m$ *satisfazendo*

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n y_n - z_0| = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} = 0,$$

se $d > 0$ *é suficientemente pequeno.*

Prova. Pela definição de $X^d_{\varepsilon_n}$ e compacidade de X_{ε_n} existem $\{Z_n\} \subset \mathbf{S}_m$ e $\{z_n\} \subset \mathcal{M}^\beta$ tais que

$$\|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z_n(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \leq d.$$

Pela compacidade de $\mathbf{S}_m$ e $\mathcal{M}^\beta$, passando a subsequência se necessário, podemos assumir que $Z_n \to Z$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $Z_n(x) \to Z(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $z_n \to z_0$ em $\mathbb{R}^N$ para algum $Z \in \mathbf{S}_m$ e $z_0 \in \mathcal{M}^\beta$. Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla\left(\varphi_{\varepsilon_n}(x)(Z_n - Z)\right)|^2 + V(\varepsilon_n x + z_n) f^2\left(\varphi_{\varepsilon_n}(x)(Z_n - Z)\right)\right] \mathrm{d}x \quad \leq \quad C\|Z_n - Z\|^2 \to 0$$

quando $n \to \infty$, como na Observação 3.10 vemos que

$$\|\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z_n(\cdot - z_n/\varepsilon_n) - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \to 0 \quad \text{quando } n \to \infty.$$

Então para n grande temos

$$\|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \leq 2d. \tag{3.19}$$

Dividiremos a prova desta proposição em cinco passos.

Passo 1: Temos $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{B(z,R)} |u_n|^2\,\mathrm{d}x = 0$ *para qualquer* $R > 0$.

De fato, suponha que existe $R > 0$ e uma sequência $\{\tilde{z}_n\}$ satisfazendo

$$\tilde{z}_n \in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n}; \frac{\beta}{2\varepsilon_n}, \frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{B(\tilde{z}_n,R)} |u_n|^2\,\mathrm{d}x > 0.$$

Já que $\|u\|_\varepsilon \leq C$ em X^d_ε para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $d \in (0, 10)$, devido à Proposição 3.5 temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^2(u_n)\,\mathrm{d}x \leq c\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x) f^2(u_n)\,\mathrm{d}x \leq C\|u_n\|_{\varepsilon_n} \leq C$$

visto que $s_n/(1+\sqrt{s_n}) \to \infty$ se $s_n \to \infty$. Então a desigualdade de Sobolev implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^N} f^2(u_n) \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \,\mathrm{d}x \leq C(\|u_n\|_{\varepsilon_n} + \|u_n\|_{\varepsilon_n}^{2^*}) \leq C.$$

Assim $\{u_n\}$ é limitado em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e podemos assumir que $\tilde{w}_n := u_n(\cdot + \tilde{z}_n) \rightharpoonup \tilde{w}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e que $\varepsilon_n \tilde{z}_n \to \tilde{z}_0$ para algum $\tilde{z}_0 \in A\,(z_0; \beta/2, 3\beta)$ e $\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Pela compacidade da imersão $H^1(B(0,R)) \hookrightarrow L^2(B(0,R))$ vemos que

$$\int_{B(0,R)} |\tilde{w}|^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{B(0,R)} |\tilde{w}_n|^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{B(\tilde{z}_n,R)} |u_n|^2 \,\mathrm{d}x > 0$$

e consequentemente $\tilde{w} \neq 0$. Agora para cada $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ seja $\phi_n(x) = \phi(x - \tilde{z}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Como $\varepsilon_n \tilde{z}_n \in \mathcal{M}^{4\beta}$ obtemos $\phi_n \in E_{\varepsilon_n}^{R_n}$ para n grande. Já que $\|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(E_{\varepsilon_n}^{R_n})'} \to 0$ e $\|\phi_n\|_{\varepsilon_n} \leq C$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_{\varepsilon_n}(u_n), \phi_n \rangle = 0.$$

Usando a limitação de $\mathrm{supp}(\phi)$ e a compacidade das imersões obtida pelo Teorema de Rellich-Kondrachov e ainda a definição de χ_ε, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla \tilde{w} \nabla \phi + V(\tilde{z}_0) f'(\tilde{w}) f(\tilde{w}) \phi]) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} f'(\tilde{w}) h(f(\tilde{w})) \phi \,\mathrm{d}x.$$

Uma vez que ϕ é arbitrária segue que $\tilde{w}$ é uma solução para o problema

$$-\Delta \tilde{w} = f'(\tilde{w})[h(f(\tilde{w})) - V(\tilde{z}_0) f(\tilde{w})] := g_0(\tilde{w}) \quad \text{in} \quad \mathbb{R}^N \tag{3.20}$$

e por (3.16) vemos que g_0 também satisfaz $(g_1) - (g_3)$ com $V(\tilde{z}_0)$ ao invés de m. Sendo $f(t) < 0$ para $t < 0$ e $h(t) = 0$ para $t < 0$, tomando $\tilde{w}^-$ como função teste em (3.20) vemos que $\tilde{w} \geq 0$. Além disso, $\tilde{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e segue do princípio do máximo que $\tilde{w} > 0$. Pela definição do nível de energia mínima temos $L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}) \geq E_{V(\tilde{z}_0)}$. Mais ainda, para $R > 0$ suficientemente grande

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{w}|^2 \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{B(0,R)} |\nabla \tilde{w}_n|^2 \,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_{B(\tilde{z}_n,R)} |\nabla u_n|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Como $V(\tilde{z}_0) \geq m$ e os níveis de menor energia para as equações (3.10) e (3.20) são iguais a seus níveis do passo da montanha, temos $E_{V(\tilde{z}_0)} \geq E_m$. Usando a identidade de Pohozaev vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{w}|^2 \,\mathrm{d}x = N L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}).$$

Assim obtemos

$$\liminf_{n\to\infty}\int_{B(\tilde{z}_n,R)}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{N}{2}L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}) \geq \frac{N}{2}E_m > 0.$$

Observamos que esta última estimativa não depende de $d \in (0,10)$. Isto será crucial no próximo argumento. Por (3.19) temos $\int_{B(\tilde{z}_n,R)}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \leq 5d^2$ para n grande ($n \geq n_0(d)$). Então

$$\frac{N}{2}E_m \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{B(\tilde{z}_n,R)}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \leq 5d^2$$

o que é uma contradição para $d > 0$ suficientemente pequeno. Isto prova *Passo 1.*

Passo 2: Definindo $u_{n,1} = \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)u_n$ *e* $u_{n,2} = u_n - u_{n,1}$ *temos*

$$J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) + J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) + o(1). \tag{3.21}$$

De fato, vemos que $Q_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = 0$ e $Q_{\varepsilon_n}(u_n) = Q_{\varepsilon_n}(u_{n,2})$. A limitação de $\{u_n\}$ implica que

$$\begin{aligned}J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) + J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\left\{\varphi^2_{\varepsilon_n}(y - z_n/\varepsilon_n) + [1-\varphi_{\varepsilon_n}(y - z_n/\varepsilon_n)]^2 - 1\right\}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon_n x)\left[f^2(u_{n,1}) + f^2(u_{n,2}) - f^2(u_n)\right]\mathrm{d}x + o(1)\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^N}[H(f(u_n)) - H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2}))]\,\mathrm{d}x + J_{\varepsilon_n}(u_n).\end{aligned}$$

Uma vez que $u_{n,2} = [1-\varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n)]u_n$ e $0 \leq \varphi \leq 1$ temos $\varphi^2 + (1-\varphi)^2 - 1 \leq 0$ e

$$f^2(u_{n,1}) + f^2(u_{n,2}) - f^2(u_n) \leq [\varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n) + (1-\varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n)) - 1]\,f^2(u_n) = 0,$$

onde usamos a convexidade de f^2. Logo, pelas desigualdades acima obtemos

$$J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) + J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \leq J_{\varepsilon_n}(u_n) + \int_{\mathbb{R}^N}[H(f(u_n)) - H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2}))]\,\mathrm{d}x + o(1).$$

A fim de concluir *Passo 2* precisamos estimar esta última integral. Temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}[H(f(u_n)) &- H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2}))]\,\mathrm{d}x\\ &= \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)}[H(f(u_n)) - H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2}))]\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Agora escolhemos $\psi \in \mathcal{C}^\infty_c(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em $A(0;\beta,2\beta)$ e $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\backslash A(0;\beta/2,3\beta)$. Definindo $\psi_n(x) = \psi(\varepsilon_n x - z_n)u_n(x)$, para n grande vemos que

$$\sup_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)}\int_{B(z,R)}|u_n|^2\,\mathrm{d}x \geq \sup_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)}\int_{B(z,R)}|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x = \sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B(z,R)}|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x.$$

Usando *Passo 1* e um resultado de Lions ([42], Lema 1.1) vemos que $\psi_n \to 0$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$ para todo $r \in (2, 2^*)$. Já que $\psi_n = u_n$ em $A(z_n/\varepsilon_n; \beta/\varepsilon_n, 2\beta/\varepsilon_n)$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} |u_n|^r \, \mathrm{d}x = 0.$$

Assim, usando o fato de que $|u_{n,1}|,\ |u_{n,2}| \leq |u_n|$, segue de $(\tilde{h}_1)-(\tilde{h}_2)$ e (7) em Lema 3.4 que dado $\sigma > 0$ existe $C_\sigma > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} &|H(f(u_n)) \ - \ H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2}))|\mathrm{d}x \\ &\leq \ \sigma(\|u_n\|_{L^2}^2 + \|u_n\|_{L^{2^*}}^{2^*}) + C_\sigma \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} |u_n|^{(2^*+2)/2} \, \mathrm{d}x \leq C\sigma\end{aligned}$$

para n grande. Logo (3.21) está provado.

Passo 3: Dado $d > 0$ suficientemente pequeno existe $n_0 = n_0(d)$ tal que

$$J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \geq \frac{1}{4}\left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_{n,2}|^2 + V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2})\right) \mathrm{d}x\right] \quad \textit{para todo} \quad n \geq n_0.$$

De fato, usando (3.19) vemos que existe $n_0 = n_0(d)$ tal que

$$\begin{aligned}\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n} \ &\leq \ \|u_n - v_n\|_{\varepsilon_n} + \|u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)v_n\|_{\varepsilon_n} \\ &\quad + \|[1 - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)]v_n\|_{\varepsilon_n} \leq 5d \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0\end{aligned}$$

onde $v_n = \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)Z(\cdot - z_n/\varepsilon_n)$. Então usando a desigualdade de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned}J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \ &\geq \ \frac{1}{2}\|\nabla u_{n,2}\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2}) \, \mathrm{d}x - C\int_{\mathbb{R}^N} f^{2(2^*)}(u_{n,2}) \, \mathrm{d}x \\ &\geq \ \left(\frac{1}{2} - 5Cd^{2^*-2}\right)\|\nabla u_n\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2}) \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

para $n \geq n_0$. Isto prova o *Passo 3* para $d > 0$ pequeno satisfazendo $5Cd^{2^*-2} < 1/4$.

Passo 4: Temos $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = E_m$ *e* $z_0 \in \mathcal{M}$.

De fato, seja $w_n := u_{n,1}(\cdot + z_n/\varepsilon_n)$. Extraindo uma subsequência se necessário, podemos assumir que $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para algum $w \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Agora, usando $(h_1)-(h_2')$ vemos que existe $c_0 > 0$ tal que $\|f(Z)\|_{L^2} \geq 3c_0$ para qualquer $Z \in \mathbf{S}_m$ e graças ao decaimento exponencial temos que existe $R > 0$ tal que $\|f(Z)\|_{L^2(B(0,R))} \geq 2c_0$ para cada $Z \in \mathbf{S}_m$. Para este R existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\varepsilon_n y| \leq \beta$ para todo $y \in B(0,R)$ e $n \geq n_1$. Isto implica $\varphi_{\varepsilon_n} Z = Z$ em $B(0,R)$. Pelo item (11) do Lema 3.4 e por (3.8) segue que

$$\begin{aligned}
3d &\geq \|u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n) Z(x - z_n/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \\
&\geq C \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x) f^2 \left(u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n) Z(x - z_n/\varepsilon_n)\right) \mathrm{d}x \\
&\geq CV_0 \int_{B(0,R)} f^2 \left(w_n - Z\right) \mathrm{d}x \geq CV_0 \int_{B(0,R)} \left[\frac{f^2\left(Z\right)}{2} - f^2\left(w_n\right)\right] \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

para $n > n_1$ grande. Então

$$\|f(w_n)\|^2_{L^2(B(0,R))} \geq 2{c_0}^2 - 3d(CV_0)^{-1} \geq c_0^2$$

para $d > 0$ pequeno e $n > n_1$ grande. Consequentemente $\|f(w)\|_{L^2(B(0,R))} \geq c_0$ e $w \neq 0$. Além disso, para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, segue que

$$u_{n,1}(y + z_n/\varepsilon_n) = u_n(y + z_n/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad K$$

para n grande. Como no *Passo 1* vemos que w satisfaz

$$-\Delta w(y) = f'(w)\left[h(f(w)) - V(z_0) f(w)\right], \quad w > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Temos dois casos a considerar:

$$\text{Caso 1:} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B(z,1)} |w_n - w|^2 \, \mathrm{d}x = 0.$$

$$\text{Caso 2:} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B(z,1)} |w_n - w|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Se o Caso 1 ocorre então $w_n \to w$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para $r \in (2, 2^*)$. Para $r = (2^* + 2)/2$, por $(\tilde{h}_1) - (\tilde{h}_2)$ e (3.17) vemos que dado $\sigma > 0$ existe $C_\sigma > 0$ tal que

$$|H(f(w_n)) - H(f(w))| \leq |w_n - w| \left[\sigma\left(|w| + |w_n| + |w|^p + |w_n|^p\right) + C_\sigma \left(|w|^{r-1} + |w_n - w|^{r-1}\right)\right].$$

Usando a limitação de $\{w_n\}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |H(f(w_n)) - H(f(w))| \mathrm{d}x \leq c\sigma + C_\sigma \left(\|w_n - w\|_{L^r} + \|w_n - w\|^r_{L^r}\right) \leq C\sigma$$

para n grande. Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(f(w_n)) \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} H(f(w)) \, \mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3.22}$$

Agora se o Caso 2 ocorre então existe $\{\hat{z}_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n - w|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Desde que $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, temos

$$|\hat{z}_n| \to \infty. \tag{3.23}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w|^2 \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{e então} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Sendo $w_n(x) = \varphi_{\varepsilon_n}(x) u_n(x + z_n/\varepsilon_n)$, vemos que $|\hat{z}_n| \leq 3\beta/\varepsilon_n$ para n grande. Além disso, se $|\hat{z}_n| \geq \beta/2\varepsilon_n$ para uma subsequência a partir do *Passo 1* teríamos

$$0 < \lim_{n\to\infty} \int_{B(\hat{z}_n,1)} |w_n|^2 \, \mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n}; \frac{\beta}{2\varepsilon_n}, \frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{B(z,1)} |u_n|^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

o que é impossível. Então $|\hat{z}_n| \leq \beta/2\varepsilon_n$ para n grande. Podemos assumir que

$$\varepsilon_n \hat{z}_n \to \hat{z}_0 \quad \text{e} \quad u_{n,1}(\cdot + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) \rightharpoonup \tilde{w}.$$

Vemos que $\hat{z}_0 \in \overline{B(0, \beta/2)} \subset \Omega$ e $\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^N) \backslash \{0\}$. Então, dado qualquer compacto $K \subset \mathbb{R}^N$, temos

$$u_{n,1}(\cdot + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) = u_n(\cdot + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad K$$

para n grande. Consequentemente, como no *Passo 1* segue que $\tilde{w}$ satisfaz

$$-\Delta \tilde{w} = f'(\tilde{w}) \left[h(f(\tilde{w})) - V(\hat{z}_0 + z_0) f(\tilde{w}) \right], \quad \tilde{w} > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Análogo ao *Passo 1*, (3.23) nos leva a uma contradição com (3.19) se $d > 0$ é suficientemente pequeno. Até este momento provamos que o Case 2 não vale e então o Case 1 deve ocorrer. Então, por (3.22) temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) &= \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n) \right] \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(w_n)) \, \mathrm{d}x \right\} \\
&\geq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w|^2 + V(z_0) f^2(w) \right] \, \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} H(f(w)) \, \mathrm{d}x \\
&\geq L_{V(z_0)}(w) \geq E_{V(z_0)} \geq E_m.
\end{aligned}$$

Por outro lado, já que $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \le E_m,\ J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \ge 0$ e devido a *Passo 2*, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) \le E_m.$$

Então $E_{V(z_0)} = E_m$ e $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = E_m$. Além disso, graças à igualdade entre os níveis do passo da montanha e de energia mínima e por (3.11), vemos que $a > b$ implica $E_a > E_b$. Assim, $V(z_0) = m$ e isto conclui a prova do *Passo 4*.

Passo 5: Conclusão.

Desde que w é uma solução de energia mínima para (3.10) existe $\xi \in \mathbb{R}^N$ tal que $U_0 := w(\cdot + \xi) \in \mathbf{S}_m$. A partir do *Passo 4* temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_n|^2 + V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n)\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w|^2 + m f^2(w)\right) \mathrm{d}x$$

e então seguem os seguintes resultados de convergência

$$\begin{aligned}
\int_A |\nabla w_n|^2 \,\mathrm{d}x &\to \int_A |\nabla w|^2 \,\mathrm{d}x, \\
\int_A V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n) \,\mathrm{d}x &\to \int_A m f^2(w) \,\mathrm{d}x \quad \text{e} \\
\int_A V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(\varphi_{\varepsilon_n}(x-\xi) w) \,\mathrm{d}x &\to \int_A m f^2(w) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}^N$. Consequentemente, dado $\sigma > 0$ existe $R > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} V(\varepsilon_n x + z_n) \left[f^2(w_n) + f^2(\varphi_{\varepsilon_n}(x-\xi) w)\right] \mathrm{d}x \le \frac{\sigma}{4}$$

para todo $n \ge n_0$. Por outro lado, pela compacidade da imersão $H^1(B(0,R)) \hookrightarrow L^2(B(0,R))$ temos que $w_n \to w$ em $L^2(B(0,R))$ e daí

$$\int_{B(0,R)} V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n - \varphi_{\varepsilon_n}(x-\xi) w) \,\mathrm{d}x \le \frac{\sigma}{2} \quad \text{para todo} \quad n \ge n_0.$$

para n_0 grande. Isto implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n - \varphi_{\varepsilon_n}(x-\xi) w) \,\mathrm{d}x \le \sigma \quad \text{para todo} \quad n \ge n_0.$$

Pela definição de $|||\cdot|||_{\varepsilon_n}$ (veja também Observação 3.10) obtemos

$$|||u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - \xi - z_n/\varepsilon_n) w(\cdot - z_n/\varepsilon_n)|||_{\varepsilon_n} \to 0.$$

Agora definimos $y_n = z_n/\varepsilon_n + \xi$. Uma vez que $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|\nabla w_n\|_{L^2} \to \|\nabla w\|_{L^2}$ segue que $\nabla w_n \to \nabla w$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e então $\nabla[u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n)] \to 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Assim,

$$\|u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado, usando *Passos 2,3* e *4*, obtemos

$$E_m \geq \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq E_m + \frac{1}{4} \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_{n,2}|^2 + V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2})] \, \mathrm{d}x,$$

o que implica $\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n} \to 0$ e completa a prova. ∎

Observamos que os resultados da Proposição 3.13 valem para $d_0 > 0$ suficientemente pequeno independentemente das sequências satisfazendo as hipóteses.

Corolário 3.14. *Para qualquer $d \in (0, d_0)$ existem constantes ω_d, R_d, $\varepsilon_d > 0$ tais que*

$$\|J'_\varepsilon(u)\|_{(E^R_\varepsilon)'} \geq \omega_d \quad \textit{para qualquer} \quad u \in E^R_\varepsilon \cap J^{D_\varepsilon}_\varepsilon \cap (X^{d_0}_\varepsilon \backslash X^d_\varepsilon), \;\; R \geq R_d \;\; e \;\; \varepsilon \in (0, \varepsilon_d).$$

Prova. Por contradição supomos que o corolário é falso. Então para algum $d \in (0, d_0)$ existem sequências $\{\varepsilon_n\}$, $\{R_n\}$ e $\{u_n\}$ tais que

$$R_n \geq n, \quad \varepsilon_n \leq 1/n, \quad u_n \in E^{R_n}_{\varepsilon_n} \cap J^{D_{\varepsilon_n}}_{\varepsilon_n} \cap (X^{d_0}_{\varepsilon_n} \backslash X^d_{\varepsilon_n}) \quad \text{e} \quad \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(E^{R_n}_{\varepsilon_n})'} < \frac{1}{n}.$$

Pela Proposição 3.13 existem $\{y_n\} \subset \mathbb{R}^N$, $z_0 \in \mathcal{M}$ e $U_0 \in \mathbf{S}_m$ tais que

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n y_n - z_0| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} = 0.$$

Então para n suficientemente grande temos $\varepsilon_n y_n \in \mathcal{M}^\beta$ e então, pela definição de X_{ε_n} e $X^d_{\varepsilon_n}$, obtemos $\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U(\cdot - y_n) \in X_{\varepsilon_n}$ e $u_n \in X^d_{\varepsilon_n}$. Isto contradiz o fato de que $u_n \in X^{d_0}_{\varepsilon_n} \backslash X^d_{\varepsilon_n}$ e completa a prova. ∎

Os próximos lemas são necessários para a obtenção de uma sequência de Palais-Smale limitada em um subconjunto de E^R_ε.

Lema 3.15. *Dado $\lambda > 0$ existem ε_0 e $d_0 > 0$ pequenos tais que*

$$J_\varepsilon(u) > E_m - \lambda \quad \textit{para todo} \quad u \in X^{d_0}_\varepsilon \quad e \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Prova. Para $u \in X_\varepsilon$ temos $u(x) = \varphi_\varepsilon(x - z/\varepsilon)U(x - z/\varepsilon),\ x \in \mathbb{R}^N$, para algum $z \in \mathcal{M}^\beta$ e $U \in \mathbf{S}_m$. Já que $L_m(U) = E_m$, por (V_2) temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) - E_m &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(|\nabla(\varphi_\varepsilon U)|^2 - |\nabla U|^2\right) + m\left(f^2(\varphi_\varepsilon U) - f^2(U)\right)\right] \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} |H(f(\varphi_\varepsilon U)) - H(f(U))| \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

independentemente de $z \in \mathcal{M}^\beta$. Usando o decaimento exponencial uniforme de $|U| + |\nabla U|$ para $U \in \mathbf{S}_m$ e (3.17) vemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$J_\varepsilon(u) - E_m > -\frac{\lambda}{2} \quad \text{para todo} \quad u \in X_\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Agora, se $v \in X_\varepsilon^d$ existe $u \in X_\varepsilon$ tal que $\|u - v\|_\varepsilon \leq d$. Temos $v = u + w$ com $\|w\|_\varepsilon \leq d$. Sendo $Q_\varepsilon(u) = 0$ vemos que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u) &\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla(u + w)|^2 - |\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)\left(f^2(u + w) - f^2(u)\right)\right] \mathrm{d}x \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}^N} [H(f(u + w)) - H(f(u))] \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando (3.8), Lema 3.4 e lembrando que X_ε é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, estimamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)\left|f^2(u + w) - f^2(u)\right| \mathrm{d}x &\leq \int_{\{|w| \leq 1\}} V(\varepsilon x)\,|f(u + w) - f(u)|\,|f(u + w) + f(u)| \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\{|w| > 1\}} V(\varepsilon x)\left|f^2(u + w) - f^2(u)\right| \mathrm{d}x \\ &\leq C(|||w|||_\varepsilon^{1/2} + |||w|||_\varepsilon) \leq Cd \leq \frac{\lambda}{6} \end{aligned}$$

desde que d seja pequeno o suficientemente. Com argumentos semelhantes aos usados anteriormente vemos que existe $d_0 > 0$ pequeno tal que

$$J_\varepsilon(v) > J_\varepsilon(u) - \frac{\lambda}{2} > E_m - \lambda \quad \text{para todo} \quad v \in X_\varepsilon^{d_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Este é o fim da prova. ■

Seguindo Corolário 3.14 e Lema 3.15, fixamos $d_0 > 0$, $d_1 \in (0, d_0/3)$ e correspondentes $\omega > 0$, $R_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \|J_\varepsilon'(u)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \geq \omega \quad &\text{para todo} \quad u \in E_\varepsilon^R \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \ \text{ e} \\ J_\varepsilon(u) > E_m/2 \quad &\text{para todo} \quad u \in X_\varepsilon^{d_0} \end{aligned} \tag{3.24}$$

para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Assim obtemos o seguinte resultado.

Lema 3.16. *Para γ_ε dado por* (3.18) *existe $\alpha > 0$ tal que*

$$|s - 1/t_0| \leq \alpha \quad \textit{implica} \quad \gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1} \quad \textit{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

Prova. Inicialmente observamos que

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon v\|_\varepsilon &\leq \|\nabla(\varphi_\varepsilon v)\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\left\{1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2\left(\|v\|_{L^2}^{-1}\varphi_\varepsilon v\right) \mathrm{d}x\right\} \\ &\leq \|\varepsilon\nabla\varphi(\varepsilon\cdot)v + \varphi_\varepsilon\nabla v\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\left(1 + \sup_\Omega V(x)\right) \\ &\leq C_0\|v\|_{H^1} \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \text{e} \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Uma vez que a função $l : [0, t_0] \to H^1(\mathbb{R}^N)$ dada por $l(t) = U_t$ é contínua, existe $\sigma > 0$ tal que

$$|t - 1| \leq \sigma \quad \Rightarrow \quad \|U_t - U\| < \frac{d_1}{C_0}.$$

Então, tomando $\alpha = \sigma/t_0$, vemos que para $|s - 1/t_0| \leq \alpha$ vale

$$\|\gamma_\varepsilon(s) - \varphi_\varepsilon U\|_\varepsilon = \|\varphi_\varepsilon(U_{st_0} - U)\|_\varepsilon \leq C_0\|U_{st_0} - U\| < d_1 \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Como $\varphi_\varepsilon U \in X_\varepsilon$ temos $\gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1}$ como desejado. ∎

Lema 3.17. *Para α dado no Lema 3.16 existem $\rho > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que*

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) < E_m - \rho \quad \textit{para qualquer} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \textit{e} \quad |s - 1/t_0| \geq \alpha.$$

Prova. Já que $t = 1$ é o único ponto de máximo de $\left(t^{N-2}/2 - t^N/2^*\right)$ em $[0, t_0]$ e devido a (3.13) e (3.14) podemos ver que existe $\rho > 0$ satisfazendo

$$L_m(U_t) < E_m - 2\rho \quad \text{para} \quad |t - 1| \geq t_0\alpha.$$

Pelo Lema 3.11 sabemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,t_0]} |J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| < \rho \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Então, para $|t - 1| \geq t_0\alpha$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ temos

$$J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) \leq L_m(U_t) + |J_\varepsilon(w_{\varepsilon,t}) - L_m(U_t)| < E_m - 2\rho + \rho = E_m - \rho$$

e a prova está completa. ∎

Proposição 3.18. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno e $R > 0$ grande existe uma sequência $\{u_n^R\} \subset E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ tal que $J_\varepsilon'(u_n^R) \to 0$ em $\left(E_\varepsilon^R\right)'$ quando $n \to \infty$.*

Prova. Supondo por absurdo que a afirmação da Proposição 3.18 é falsa, graças a (3.24), aos Lema 3.16 e Lema 3.17, como na Proposição 2.17 vemos que para ε pequeno e R grande existe $\gamma_\varepsilon^R \in \Gamma_\varepsilon$ tal que

$$C_\varepsilon \leq \max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R(s)) \leq E_m - \min\left\{\rho, \frac{\omega^2 d_1}{2}\right\},$$

o que está em contradição com a Proposição 3.12. Isto completa a prova. ∎

Proposição 3.19. *Se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno existe um ponto crítico $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ para J_ε.*

Prova. Pela Proposição 3.18 existem $\varepsilon_0 > 0$ e $R_0 > 0$ para os quais é possível encontrar $\{u_n\}_n \subset E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$, $u_n = u_n(\varepsilon, R)$, tal que $J_\varepsilon'(u_n) \to 0$ em $\left(E_\varepsilon^R\right)'$ quando $n \to \infty$, para cada $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Sendo $\{u_n\}_n$ limitada em E_ε^R vemos que é também limitada em $H_0^1(B(0, R/\varepsilon))$ com a norma usual. Assim, podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(B(0, R/\varepsilon))$ e $u_n(x) \to u(x)$ em quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ onde $u = u_{\varepsilon,R}$. Usando $\|J_\varepsilon'(u_n)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \to 0$ e a compacidade da imersão $H_0^1(B(0, R/\varepsilon)) \hookrightarrow L^r(B(0, R/\varepsilon))$ para $r \in [1, 2^*)$ vemos que u é uma solução não negativa para o problema

$$-\Delta u = f'(u)\,[h(f(u)) - V(\varepsilon x) f(u)] - 4\left(\int_{B(0,R/\varepsilon)} \chi_\varepsilon |u|^2 \,\mathrm{d}x - 1\right)_+ \chi_\varepsilon u \tag{3.25}$$

em $B(0, R/\varepsilon)$. Então vemos que $u_n \to u$ em $H_0^1(B(0, R/\varepsilon))$ o que implica

$$\int_{B(0,R/\varepsilon)} V(\varepsilon x) f^2(u_n - u)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e daí $u_n \to u$ em E_ε. Assim $u \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$. Por $(h_1) - (h_2')$ e Lema 3.4 existe $C > 0$ dependendo apenas de h tal que

$$-\Delta u \leq c f'(u) f(u)^{22^*-1} \leq C u^{2^*-1} \quad \text{em} \quad B(0, R/\varepsilon). \tag{3.26}$$

Pela Proposição 3.13 vemos que dado $\sigma > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$, ε_0 e $R_0 > 0$ dependendo de σ tais que

$$\left(\int_{\{x\in\mathbb{R}^N : [u_{\varepsilon,R}(x)]^{2^*-2} > k\}} u_{\varepsilon,R}^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{2/N} \leq \sigma \quad \text{para todo} \quad R \geq R_0 \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Então usando um método iterativo devido a Moser (veja [52], Lema B.3) provamos que $\{u_{\varepsilon,R}\}$ é limitada em $L^s_{loc}(\mathbb{R}^N)$ uniformemente em $R \geq R_s$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_s)$ para qualquer $s \in [2, \infty)$. Além disso

$$\|u_{\varepsilon,R}\|_{L^s(B(y,1))} \leq C_s \|u_{\varepsilon,R}\|_{L^2(B(y,r_s))} \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Por ([32], Teorema 9.26) sabemos que existe $C > 0$ dependendo de N tal que

$$\begin{aligned} \sup_{B(y,1)} u_{\varepsilon,R} &\leq C\left(\|u_{\varepsilon,R}\|_{L^2(B(y,2))} + \|cu_{\varepsilon,R}^{2^*-1}\|_{L^N(B(y,2))}\right) \\ &\leq C\|u_{\varepsilon,R}\|_{L^2(B(y,r_N))} \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}^N \end{aligned} \tag{3.27}$$

para qualquer $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $R \geq R_0$ onde R_0 e ε_0 dependem de N. Em particular isto implica que $\{u_{\varepsilon,R}\}_{\varepsilon,R}$ é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Devido à limitação de $\{\|u_{\varepsilon,R}\|_\varepsilon\}$ e $\{J_\varepsilon(u_{\varepsilon,R})\}$ obtemos $\{Q_\varepsilon(u_{\varepsilon,R})\}$ uniformemente limitada em $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Daí, uma vez que $\Omega \subset B(0, R_0)$, existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R_0/\varepsilon)} |u_{\varepsilon,R}|^2 \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |u_{\varepsilon,R}|^2 \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon C_1 \tag{3.28}$$

para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Desta forma, para ε_0 suficientemente pequeno e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ fixado, segue de (3.27), (3.28) e (h_1)

$$h(f(u_{\varepsilon,R}(x))) \leq \frac{V_0}{2} f(u_{\varepsilon,R}(x)) \quad \text{para} \quad |x| \geq \frac{R_0}{\varepsilon} + r_N \quad \text{e} \quad R \geq R_0.$$

Como no Capítulo 1, depois de alguns cálculos obtemos

$$\lim_{A \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,A)} \left[|\nabla u_{\varepsilon,R}|^2 + V(\varepsilon x) f^2(u_{\varepsilon,R})\right] \, \mathrm{d}x = 0 \tag{3.29}$$

uniformemente em $R \geq R_0$. Tomamos $R_k \to \infty$ e denotamos $u_k = u_{\varepsilon,R_k}$. Já que $\{u_k\}_k$ é uma sequência limitada em E_ε, é também limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e daí podemos assumir que $u_k \rightharpoonup u_\varepsilon$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u_k(x) \to u_\varepsilon(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ quando $k \to \infty$. Então $\|u_\varepsilon\|_\infty \leq C$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Sendo u_k uma solução para (3.25), usando (3.29) vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^2 \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u_k - u_\varepsilon) \, \mathrm{d}x \to 0$$

quando $k \to \infty$. A partir deste resultado temos

$$\|u_k - u_\varepsilon\|_\varepsilon \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty,$$

e assim $u_k \to u_\varepsilon$ em E_ε. Isto implica que $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$. Além disso, para qualquer $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ existe R_k tal que $\mathrm{supp}(\varphi) \subset B(0, R_k/\varepsilon)$. Logo, por (3.25) e Proposição 3.6 obtemos

$$0 = \langle (J_\varepsilon|_{H_0^1(B(0,R_k/\varepsilon))})'(u_k), \varphi\rangle = \langle J_\varepsilon'(u_k), \varphi\rangle \to \langle J_\varepsilon'(u_\varepsilon), \varphi\rangle.$$

Já que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E_ε obtemos $J_\varepsilon'(u_\varepsilon) = 0$ e completamos a prova. ∎

3.5 Prova do Teorema 3.1

Até este momento provamos a existência de um ponto crítico para J_ε, $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ com $\varepsilon_0 > 0$ e $d_0 > 0$ suficientemente pequenos. Também temos $u_\varepsilon \geq 0$ e $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq (E_m/2)$ o que implica $u_\varepsilon \neq 0$. Já que $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfaz

$$-\Delta u_\varepsilon = f'(u_\varepsilon)\,[h(f(u_\varepsilon)) - V(\varepsilon x) f(u_\varepsilon)] - 4\left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |u_\varepsilon|^2\,\mathrm{d}x - 1\right)_+ \chi_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{3.30}$$

por regularidade elíptica temos $u_\varepsilon \in \mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e segue do princípio do máximo que $u_\varepsilon > 0$. Além disso, vemos que existe $\delta > 0$ tal que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \geq \delta$ para $\varepsilon > 0$ pequeno.

Observamos que pela Proposição 3.13 existe $\{y_\varepsilon\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\varepsilon y_\varepsilon \in \mathcal{M}^{2\beta}$ e para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existe $z_0 \in \mathcal{M}$ e $U_0 \in \mathbf{S}_m$ satisfazendo

$$\varepsilon_n y_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_{\varepsilon_n}) U_0(\cdot - y_{\varepsilon_n})\|_{\varepsilon_n} \to 0,$$

e daí

$$\|u_{\varepsilon_n}(\cdot + y_{\varepsilon_n}) - U_0\|_{H^1} \to 0.$$

Consequentemente, usando (3.12) vemos que dado $\sigma > 0$ existem $R > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\sup_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} u_\varepsilon^2(x + y_\varepsilon)\,\mathrm{d}x \leq \sigma. \tag{3.31}$$

Denotando $w_\varepsilon = u_\varepsilon(\cdot + y_\varepsilon)$, a equação (3.30) e a limitação uniforme de $\{u_\varepsilon\}$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ nos fornecem

$$-\Delta w_\varepsilon \leq C w_\varepsilon \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Então por ([32], Teorema 8.17) existe $C_0 = C_0(N, C)$ tal que

$$\sup_{B(x,1)} w_\varepsilon \leq C_0 \|w_\varepsilon\|_{L^2(B(x,2))} \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

A partir desta desigualdade e por (3.31) podemos provar o decaimento exponencial de w_ε uniforme em $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Agora, consideramos $\xi_\varepsilon \in \mathbb{R}^N$ um ponto de máximo de w_ε. Uma vez que

$$w_\varepsilon(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty \quad \text{e} \quad \|w_\varepsilon\|_\infty \geq \delta \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

concluímos que $\{\xi_\varepsilon\}$ é limitada. Assim, temos $x_\varepsilon := \xi_\varepsilon + y_\varepsilon$ um ponto de máximo para u_ε e o decaimento exponencial

$$u_\varepsilon(x) \leq w_\varepsilon(x - y_\varepsilon) \leq C \exp\left(-c|x - x_\varepsilon|\right) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \tag{3.32}$$

para constantes $C, c > 0$ independentes de ε. Então $Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ para ε pequeno e consequentemente u_ε é um ponto crítico para P_ε. Pela Proposição 3.7 temos que $v_\varepsilon = f(u_\varepsilon)$ é uma solução positiva para (3.6). Sendo f crescente temos x_ε também um ponto de máximo para v_ε. Além disso, pela escolha de $\{y_\varepsilon\}$, para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existem $z_0 \in \mathcal{M}$, $U_0 \in \mathbf{S}_m$ e $\xi_0 \in \mathbb{R}^N$ tais que

$$\xi_{\varepsilon_n} \to \xi_0, \quad \varepsilon_n x_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n}(\cdot + x_{\varepsilon_n}) - U_0(\cdot + \xi_0)\|_{H^1} \to 0, \tag{3.33}$$

a menos de subsequências. Lembrando que $U_0(\cdot + \xi_0)$ é também uma solução de menor energia de (3.10) temos $v_0 = f(U_0(\cdot + \xi_0))$ uma solução para (3.4). Temos ainda

$$\begin{aligned} \|v_{\varepsilon_n}(\cdot + x_{\varepsilon_n}) - v_0\|_{H^1}^2 &\leq 2\|u_{\varepsilon_n}(\cdot + x_{\varepsilon_n}) - U_0(\cdot + \xi_0)\|_{H^1}^2 \\ &\quad + 2\int_{\mathbb{R}^N} |f'\left(u_{\varepsilon_n}(x + x_{\varepsilon_n})\right) - f'(U_0(x + \xi_0))|^2 |\nabla U_0(x + \xi_0)|^2 \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

e devido a (3.33) e as propriedades de f obtemos

$$v_{\varepsilon_n}(\cdot + x_{\varepsilon_n}) \to v_0 \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}^N) \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Temos então provado que, para ε pequeno, $\tilde{u}_\varepsilon(x) := v_\varepsilon(x/\varepsilon)$ é uma solução para a equação quase-linear (3.1) e satisfaz $(i) - (ii)$ do Teorema 3.1 com ponto de máximo $\tilde{x}_\varepsilon = \varepsilon x_\varepsilon$. Isto conclui a prova do Teorema 3.1.

CAPÍTULO 4

EXISTÊNCIA E CONCENTRAÇÃO DE SOLUÇÕES PARA EQUAÇÕES QUASE-LINEARES EM $\mathbb{R}$

4.1 Introdução

Estudaremos existência e concentração de soluções positivas para a seguinte equação elíptica quase-linear

$$-\varepsilon^2 u'' + V(x)u - \varepsilon^2 (u^2)'' u = h(u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro real pequeno. Nosso objetivo é provar a existência de soluções fracas. Soluções de equações do tipo (4.1) estão relacionadas com existência de soluções do tipo ondas estacionárias para equações quase-lineares da forma

$$i\varepsilon \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\varepsilon^2 \psi'' + W(x)\psi - \eta(|\psi|^2)\psi - \varepsilon^2 \kappa [\rho(|\psi|^2)]'' \rho'(|\psi|^2)\psi \tag{4.2}$$

onde $\psi : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, κ é uma constante positiva, $W : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é um potencial dado e $\eta, \rho : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções adequadas. Equações quase-lineares da forma (4.2) aparecem em muitas áreas da física em correspondência com diferentes tipos de funções ρ. Para motivações físicas e desenvolvimento de aspectos físicos citamos [47] e referências lá citadas.

Aqui consideramos o caso em que $\rho(s) = s$. Procurando por soluções do tipo onda estacionária para (4.2) definimos $\psi(t,x) = e^{-i\xi t/\varepsilon}u(x)$, onde $\xi \in \mathbb{R}$ e $u > 0$ é uma função real. Então obtém-se uma equação do tipo elíptica correspondente a qual tem a estrutura variacional dada por (4.1), onde sem perda de generalidade nós supomos que $\kappa = 1$.

Motivados pelos aspectos físicos, recentemente a equação (4.1) tem atraído muita atenção e vários resultados de existência têm sido obtidos nos casos de potenciais $V(x)$ limitados ou coercivos. Métodos variacionais diretos por meio de argumentos de minimização foram usados em [47] para provar existência de soluções positivas usando multiplicadores de Lagrange. Os autores estudaram o seguinte problema

$$-u'' + V(x)u - (u^2)''u = \theta|u|^{p-1}u, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Ambrosetti e Wang em [7], usando métodos variacionais, provaram a existência de soluções positivas para a seguinte classe de equações elíptica quase-lineares

$$-u'' + (1+\varepsilon a(x))u - (1+\varepsilon b(x))(u^2)''u = (1+\varepsilon c(x))u^p, \quad u \in H^1(\mathbb{R})$$

para $p > 1$ e $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, onde $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ são funções reais satisfazendo certas hipóteses. Posteriormente, um resultado de existência geral para (4.1) com $\varepsilon = 1$ foi obtido em [43]. Neste artigo, o qual também trata de dimensões maiores, é introduzida uma mudança de variáveis que transforma o problema numa equação semilinear auxiliar. Então pontos críticos são procurados em um espaço de Orlicz associado e resultados de existência são dados nos casos de potenciais limitados, coercivos ou radiais. Em [23] os autores também fazem uso dessa mudança de variáveis e definem uma equação associada a qual eles chamam dual. Uma prova simples e mais curta dos resultados de [43] é apresentada para potenciais limitados, a qual não usa espaços de Orlicz e permite cobrir uma classe diferente de não linearidades. Observamos que esta mudança de variáveis não é necessária em $\mathbb{R}$ uma vez que o funcional associado à equação está bem definido. Mencionamos alguns trabalhos que estudam o problema (4.1) sem fazer uso desta ferramenta, [1], [4] e [49] entre outros. Em [1] e [49] os autores estudam (4.3) para o p-laplaciano ou operadores mais gerais e $\theta = 1$. Em [4] os autores estudam existência e concentração de soluções positivas para a equação (4.1) com $h(t) = t^p$, $p \geq 3$. Lá o potencial $V : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(V_1) V e limitado inferiormente por uma constante positiva, isto é,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}} V(x) = V_0 > 0;$$

(V_2) existe um domínio limitado Ω em $\mathbb{R}$ tal que

$$m := \inf_{x\in\Omega} V(x) < \inf_{x\in\partial\Omega} V(x).$$

Aqui também assumiremos que $V \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfaz as condições $(V_1)-(V_2)$, denotamos

$$\mathcal{M} := \{x \in \Omega : V(x) = m\}$$

e sem perda de generalidade podemos assumir que $0 \in \mathcal{M}$. Também supomos que $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ é uma função localmente Lipschitz contínua satisfazendo:

(h_1) $\lim_{t\to 0^+} h(t)/t = 0$;

(h_2'') existe $T > 0$ tal que

$$h(T) > mT, \quad H(T) = \frac{m}{2}T^2 \quad \text{e} \quad H(t) < \frac{m}{2}t^2 \quad \text{para todo} \quad t \in (0,T)$$

onde $H(t) = \int_0^t h(s)\,\mathrm{d}s$.

Hipóteses similares sobre a não linearidade foram usadas em [19] para o caso semilinear. Seguindo a estratégia lá desenvolvida, usando métodos variacionais provaremos existência e concentração de soluções positivas para (4.1) sem assumir a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e sem exigir monotonicidade de h. Em particular melhoramos os resultados em [4] onde h é uma potência pura.

A seguir estabelecemos o principal resultado deste capítulo de forma mais precisa.

Teorema 4.1. *Suponha $(V_1)-(V_2)$ e $(h_1)-(h_2'')$. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que o problema (4.1) tem uma solução positiva $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$ para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, satisfazendo:*

(i) *u_ε admite um ponto de máximo x_ε tal que $\lim_{\varepsilon\to 0} \operatorname{dist}(x_\varepsilon, \mathcal{M}) = 0$ e para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existe $x_0 \in \mathcal{M}$ e uma solução u_0 de*

$$-u'' - (u^2)''u + mu = h(u), \quad u > 0, \quad u \in H^1(\mathbb{R}) \tag{4.4}$$

tal que, a menos de subsequências,

$$x_{\varepsilon_n} \to x_0 \quad e \quad u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n \cdot + x_{\varepsilon_n}) \to u_0 \quad em \quad H^1(\mathbb{R}) \quad quando \quad n \to \infty.$$

(ii) *existem constantes positivas C e c tais que*

$$u_\varepsilon(x) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon}(|x - x_\varepsilon|)\right) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A prova do Teorema 4.1 consiste no estudo de uma equação semilinear obtida depois de uma mudança de variáveis, introduzida em [43]. A fim de provar existência de soluções para esta equação estudamos algumas propriedades das soluções de energia mínima para uma equação limite obtida a partir de (4.4) pela mesma mudança de variáveis. Usando tais propriedades, depois de alguns lemas técnicos encontramos uma sequência de Palais-Smale limitada, em um espaço adequado para o funcional associado. Assim obtemos uma solução para o problema semilinear a qual nos dá uma solução para o problema original (4.1).

A organização deste capítulo é como segue: na Seção 4.2 faremos a mudança de variáveis e estudaremos algumas propriedades do funcional, J_ε, associado à nova equação semilinear obtida de (4.1), e também do espaço onde J_ε está definido. Seção 4.3 é destinada a provar que o nível mini-max de J_ε está bem definido e converge ao nível de menor energia do funcional associado ao problema limite. Na Seção 4.4 provaremos a existência de um ponto crítico não trivial para J_ε e finalmente Seção 4.5 traz os resultados que completam a prova do Teorema 4.1.

4.2 Resultados preliminares

Já que estamos procurando por soluções positivas definimos $h(t) = 0$ para $t < 0$. Dizemos que $u \in H^1(\mathbb{R})$ é uma solução (fraca) de (4.1) se

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} (1 + 2u^2) u' \varphi' \,\mathrm{d}x \quad &+ \quad 2\varepsilon^2 \int_{\mathbb{R}^N} |u'|^2 u \varphi \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} V(x) u \varphi \,\mathrm{d}x \\ &= \quad \int_{\mathbb{R}^N} h(u) \varphi \,\mathrm{d}x \quad \text{para todo} \quad \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Observamos que definindo $v(x) = u(\varepsilon x)$ a equação (4.1) torna-se equivalente à seguinte

$$-v'' - (v^2)'' v + V(\varepsilon x) v = h(v), \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

O funcional energia natural associado à equação (4.5), o qual é dado por

$$I_\varepsilon(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[(1 + 2v^2)|v'|^2 + V(\varepsilon x) v^2\right] \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} H(v) \,\mathrm{d}x,$$

está bem definido em

$$H_\varepsilon := \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) v^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$$

devido à imersão $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ e (V_1). Apesar disto, assim como fizemos no capítulo anterior seguindo a estratégia desenvolvida em [23], [43], [21] e [30] em um problema relacionado para dimensões mais altas, introduzimos uma mudança de variáveis $u = f^{-1}(v)$ onde f é uma função C^∞ definida por

$$f'(t) = \left(1 + 2f^2(t)\right)^{-1/2} \text{ se } t > 0, \quad f(0) = 0 \quad \text{e} \quad f(t) = -f(-t) \text{ se } t < 0.$$

Após esta mudança de variáveis, a partir de I_ε obtemos um novo funcional

$$P_\varepsilon(u) = I_\varepsilon(f(u)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left[|u'|^2 + V(\varepsilon x) f^2(u) \right] \mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} H(f(u)) \, \mathrm{d}x,$$

o qual está bem definido em

$$E_\varepsilon := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) f^2(u) \, \mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Usando as propriedades de $f(t)$, listadas no Lema 3.4, provamos que E_ε é um espaço vetorial normado com norma dada por

$$\|u\|_\varepsilon := \|u'\|_2 + \inf_{\lambda > 0} \lambda \left\{ 1 + \int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) f^2(\lambda^{-1} u) \, \mathrm{d}x \right\} := \|u'\|_2 + |||u|||_\varepsilon. \tag{4.6}$$

A seguinte proposição é crucial para provar resultados de convergência e a prova é a mesma da Proposição 3.8 uma vez que não depende da dimensão.

Proposição 4.2. *Existe $C > 0$ independente de $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) f^2(u) \, \mathrm{d}x \leq C |||u|||_\varepsilon \left[1 + \left(\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) f^2(u) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \right] \tag{4.7}$$

para todo $u \in E_\varepsilon$.

A partir deste resultado obtemos que E_ε é um espaço de Banach e a imersão $E_\varepsilon \hookrightarrow H^1(\mathbb{R})$ é contínua. Também verificamos que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ é denso em E_ε (veja [21], [29], [30] e [43] para detalhes). Além disso, graças à continuidade da imersão de $H^1(\mathbb{R})$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ vemos que o funcional P_ε é de classe $\mathcal{C}^1$ sobre E_ε, o que não ocorre em geral para dimensões mais altas como visto no capítulo anterior. A derivada de Fréchet de P_ε é dada por

$$\langle P'_\varepsilon(u), \varphi \rangle \quad = \quad \int_{\mathbb{R}} u'\varphi' \,\mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}} f'(u)\left[V(\varepsilon x)f(u) - h(f(u))\right]\varphi \,\mathrm{d}x$$

para u, $\varphi \in E_\varepsilon$. Observamos que pontos críticos não triviais para P_ε são soluções fracas para

$$-u'' = f'(u)\left[h(f(u)) - V(\varepsilon x)f(u)\right] \quad \text{in} \quad \mathbb{R}. \tag{4.8}$$

Assim como na Proposição 3.7 temos a seguinte relação entre as soluções dos problemas acima citados:

(i) Se $u \in E_\varepsilon$ é um ponto crítico de P_ε então $v = f(u) \in E_\varepsilon$ é uma solução fraca de (4.5);

(ii) Se u é uma solução clássica de (4.8) então $v = f(u)$ é uma solução clássica de (4.5).

Continuamos usando a notação $A_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R} : \varepsilon x \in A\}$ para $A \subset \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ e definimos

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \Omega_\varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & \text{se} \quad x \notin \Omega_\varepsilon, \end{cases}$$

e

$$Q_\varepsilon(u) = \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x)u^2 \,\mathrm{d}x - 1\right)_+^2.$$

O funcional $Q_\varepsilon : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ com derivada de Fréchet dada por

$$\langle Q'_\varepsilon(u), \varphi \rangle = 4\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x)u^2 \,\mathrm{d}x - 1\right)_+ \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon(x)u\varphi \,\mathrm{d}x$$

e irá atuar como uma penalização para forçar o fenômeno de concentração a ocorrer dentro de Ω. Este tipo de penalização foi introduzido em [20] para o caso semilinear em $\mathbb{R}^N$ com $N \geq 2$. Finalmente seja $J_\varepsilon : E_\varepsilon \to \mathbb{R}$ dado por

$$J_\varepsilon(u) = P_\varepsilon(u) + Q_\varepsilon(u).$$

A fim de provar existência de solução para o problema (4.1) iremos procurar por pontos críticos para J_ε para os quais Q_ε é zero. Inicialmente estudaremos o problema limite (4.4).

4.2.1 O problema limite

Nesta subseção estudaremos algumas propriedades das soluções da equação (4.4), a qual reescrevemos aqui

$$-v'' - (v^2)''v + mv = h(v), \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Usando a mesma mudança de variáveis f, lidaremos com soluções clássicas para o problema

$$-u'' = g(u), \quad \lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0 \quad \text{e} \quad u(x_0) > 0 \text{ para algum } x_0 \in \mathbb{R}, \tag{4.9}$$

onde $g(t) = f'(t)\,[h(f(t)) - mf(t)]$ para $t \geq 0$ e $g(t) = -g(-t)$ para $t < 0$. Assim como na Proposição 3.7 vemos que se $u \in H^1(\mathbb{R})$ é uma solução clássica de (4.9) então $v = f(u)$ é uma solução clássica para (4.4). Pelas hipóteses sobre h e Lema 3.4 vemos que a função $g(t)$ é localmente Lipschitz contínua e satisfaz:

(g_1) $\lim_{t\to 0} g(t)/t = -m < 0$;

(g_2) para $\tilde{T} = f^{-1}(T)$ e $G(t) = \int_0^t g(s)\,\mathrm{d}s$ vale $\tilde{T} > 0$ e

$$G(\tilde{T}) = 0, \quad g(\tilde{T}) > 0 \quad \text{e} \quad G(t) < 0 \quad \text{para todo} \quad t \in (0, \tilde{T}). \tag{4.10}$$

Em ([9], Teorema 5) os autores provaram que (4.10) é uma condição necessária e suficiente para a existência de uma solução de (4.9). Eles também mostraram alguma propriedades destas soluções no caso em que existam. Assim, pelo Teorema 5 e Observação 6.3 em [9] temos o seguinte resultado.

Teorema 4.3. *Assuma $(h_1) - (h_2'')$. Então o problema (4.9) tem uma solução $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, a qual é única a menos de translação, positiva e satisfaz:*

(i) $U(0) = \tilde{T}$, *U é radialmente simétrica e decresce com respeito a $|x|$;*

(ii) *U, U' e U'' têm decaimento exponencial no infinito*

$$0 \leq U(x) + |U'(x)| + |U''(x)| \leq C\exp(-c|x|) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R};$$

(iii) $-[U'(x)]^2 = 2G(U(x))$ *para todo $x \in \mathbb{R}$.*

Agora consideramos $L_m : H^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ o funcional associado à equação (4.9)

$$L_m(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left(|\nabla u|^2 + mf^2(u)\right)\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} H(f(u))\,\mathrm{d}x$$

o qual está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^1$. Seja

$$E_m := L_m(U).$$

Desde que U é única a menos de translação temos $L_m(w) = E_m$ para cada solução w de (4.9). Por um resultado de Jeanjean e Tanaka [40] sabemos que estas soluções tem uma caracterização do passo da montanha, isto é,

$$L_m(w) = c_m := \inf_{\gamma\in\Gamma}\max_{t\in[0,1]} L_m(\gamma(t)) \tag{4.11}$$

onde $\Gamma = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H^1(\mathbb{R})) : \gamma(0) = 0 \text{ e } L_m(\gamma(1)) < 0\}$. Usando os mesmos argumentos de ([19], Proposição 2) provamos o próximo resultado.

Proposição 4.4. *Existe $t_0 > 1$ e um caminho contínuo $\theta : [0, t_0] \to H^1(\mathbb{R})$ satisfazendo:*

(i) $\theta(0) = 0$, $L_m(\theta(t_0)) < -1$ *e* $\max_{t\in[0,t_0]} L_m(\theta(t)) = E_m$*;*

(ii) $\theta(1) = U$ *e* $L_m(\theta(t)) < E_m$ *para todo* $t \neq 1$*;*

(iii) *existem $C, c > 0$ tais que para qualquer $t \in [0, t_0]$ vale*

$$|\theta(t)(x)| + |[\theta(t)]'(x)| \leq C\exp(-c|x|) \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

4.3 O nível mini-max

No decorrer deste capítulo denotamos $\beta = \mathrm{dist}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^N\backslash\Omega)/10$ e escolhemos uma função corte $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ para $|x| \leq \beta$ e $\varphi(x) = 0$ para $|x| \geq 2\beta$. Definimos $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ e para $z \in \mathcal{M}^\beta$

$$U_\varepsilon^z(x) := \varphi_\varepsilon(x - z/\varepsilon)U(x - z/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Para ε pequeno encontraremos uma solução próxima ao conjunto

$$X_\varepsilon := \left\{U_\varepsilon^z : \ z \in \mathcal{M}^\beta\right\}.$$

Assim como na Observação 3.10 vemos que X_ε uniformemente limitado para ε em conjuntos limitados e para cada ε vemos que X_ε é compacto em E_ε. Comecemos provando uma convergência uniforme.

Lema 4.5. *Temos*

$$\sup_{t\in[0,t_0]} |J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t)) - L_m(\theta(t))| \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Prova. Já que $\mathrm{supp}(\varphi_\varepsilon\theta(t)) \subset \Omega_\varepsilon$ e $\mathrm{supp}(\chi_\varepsilon) \subset \mathbb{R}\backslash\Omega_\varepsilon$ segue que $Q_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t)) = 0$ e daí $J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t)) = P_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t))$. Então para $t \in (0, t_0]$ temos

$$\begin{aligned}
&|P_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t)) - L_m(\theta(t))| \\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\left|\int_{\mathbb{R}} \left[|\left(\varphi_\varepsilon\theta(t)\right)'|^2 - |\theta(t)'|^2 + V(\varepsilon x)f^2(\varphi_\varepsilon\theta(t)) - mf^2(\theta_t)\right] \mathrm{d}x\right| \\
&\qquad\quad + \int_{\mathbb{R}} |H(f(\varphi_\varepsilon\theta(t))) - H(f(\theta(t)))| \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Inicialmente, usando uma mudança de variáveis e o decaimento exponencial de $\theta(t)$, $\theta(t)'$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} |\left(\varphi_\varepsilon\theta(t)\right)' - \theta(t)'|^2 \,\mathrm{d}x \leq C\int_{\mathbb{R}} \left[\varepsilon^2 + (1-\varphi_\varepsilon)^2\right] \exp(-c|x|) \,\mathrm{d}x$$

para todo $t \in (0, t_0]$. Agora já que $f(t)f'(t) < 2^{-1/2}$ para todo $t \in [0, t_0]$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \left|V(\varepsilon x)f^2(\varphi_\varepsilon\theta(t)) - mf^2(\theta(t))\right| \mathrm{d}x \\
&\qquad \leq \int_{\mathbb{R}} |V(\varepsilon x) - m|\, f^2(\varphi_\varepsilon\theta(t)) \,\mathrm{d}x + m\int_{\mathbb{R}} \left|f^2(\varphi_\varepsilon\theta(t)) - f^2(\theta(t))\right| \mathrm{d}x \\
&\qquad \leq 2^{1/2}C\int_{\mathbb{R}} \left[|V(\varepsilon x) - m|\chi_{\{|x|\leq 2\beta/\varepsilon\}} + m(1-\varphi_\varepsilon)\right] \exp(-c|x|) \,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Lembrando que

$$H(f(a+b)) - H(f(a)) = b\int_0^1 f'(a+sb)h(f(a+sb)) \,\mathrm{d}s \tag{4.12}$$

devido à imersão $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$ e a limitação de $\{\theta(t)\}$ em $L^\infty(\mathbb{R})$ segue de (h_1) que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |H(f(\varphi_\varepsilon\theta(t))) - H(f(\theta(t)))| \,\mathrm{d}x &\leq C\int_{\mathbb{R}} |\varphi_\varepsilon\theta(t) - \theta(t)| \left[\theta(t) + \varphi_\varepsilon\theta(t)\right] \mathrm{d}x \\
&\leq C\int_{\mathbb{R}} (1-\varphi_\varepsilon) \exp\left(-c|x|\right) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

para $t \in (0, t_0]$. Portanto temos a convergência uniforme em $t \in [0, t_0]$. ■

Pelo Lema 4.5 existe ε_0 suficientemente pequeno tal que

$$|J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t_0)) - L_m(\theta(t_0))| \leq -L_m(\theta(t_0)) - 1 \quad \text{e daí} \quad J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t_0)) < -1$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Consideramos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e definimos o nível mini-max

$$C_\varepsilon = \inf_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon} \max_{s \in [0,1]} J_\varepsilon(\gamma(s)),$$

onde

$$\Gamma_\varepsilon = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], E_\varepsilon) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = \varphi_\varepsilon \theta(t_0)\}.$$

Proposição 4.6. *C_ε converge para E_m quando ε tende a zero.*

Prova. Desde que $\theta : [0, t_0] \to H^1(\mathbb{R})$ é uma função contínua provamos que $\gamma_\varepsilon : [0,1] \to E_\varepsilon$ dada por

$$\gamma_\varepsilon(s) := \varphi_\varepsilon \theta(s t_0) \quad \text{para} \quad s \in [0,1] \tag{4.13}$$

é contínua. Então $\gamma_\varepsilon \in \Gamma_\varepsilon$ e pelo Lema 4.5 e Proposição 4.4 obtemos

$$\begin{aligned} \limsup_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon &\leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \max_{s \in [0,1]} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) = \limsup_{\varepsilon \to 0} \max_{t \in [0,t_0]} J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon \theta(t)) \\ &\leq \max_{t \in [0,t_0]} L_m(\theta(t)) = E_m. \end{aligned}$$

Por outro lado, uma vez que o nível do passo da montanha para a equação (4.9) corresponde a E_m, (veja [40]), como na prova da Proposição 3.12 vemos que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon \geq E_m.$$

Isto completa a prova da proposição. ■

Denotando

$$D_\varepsilon := \max_{s \in [0,1]} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s))$$

onde γ_ε foi definido em (4.13) vemos que $C_\varepsilon \leq D_\varepsilon$ e vale também $\lim_{\varepsilon \to 0} D_\varepsilon = E_m$.

4.4 Existência de um ponto crítico para o funcional associado

Como nos capítulos anteriores definimos

$$J_\varepsilon^\alpha := \{u \in E_\varepsilon : J_\varepsilon(u) \leq \alpha\} \quad \text{e} \quad A^\alpha := \{u \in E_\varepsilon : \inf_{v \in A} \|u - v\|_\varepsilon \leq \alpha\}$$

para qualquer $A \subset E_\varepsilon$ e $\alpha > 0$. Além disso, nas próximas proposições, para cada $\varepsilon > 0$ e $R > 0$, consideramos o funcional J_ε restrito ao espaço $H_0^1((-R/\varepsilon, R/\varepsilon))$ munido da norma

$$\|v\|_\varepsilon = \|v'\|_{L^2((-R/\varepsilon,R/\varepsilon))} + \inf_{\lambda>0} \lambda \left\{ 1 + \int_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon} V(\varepsilon x) f^2(\lambda^{-1} v)\,\mathrm{d}x \right\}.$$

Denotaremos este espaço por E_ε^R. Vemos que E_ε^R é um espaço de Banach e J_ε é de classe $\mathcal{C}^1$ sobre E_ε^R.

Proposição 4.7. *Existe $d > 0$ suficientemente pequeno tal que se $\varepsilon_n \to 0$, $R_n \to \infty$ e $u_n \in X_{\varepsilon_n}^d \cap E_{\varepsilon_n}^{R_n}$ satisfaz*

$$\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \le E_m \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(E_{\varepsilon_n}^{R_n})'} = 0$$

então, a menos de subsequências, existem $\{y_n\} \subset \mathbb{R}$ e $z_0 \in \mathcal{M}$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n y_n - z_0| = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n) U(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} = 0.$$

Prova. A partir daqui supomos $d \in (0, 10)$. Uma vez que $u_n \in X_{\varepsilon_n}^d$, pela definição de $X_{\varepsilon_n}^d$ existe $v_n \in X_{\varepsilon_n}$ tal que

$$\|u_n - v_n\|_{\varepsilon_n} \le d. \tag{4.14}$$

Temos $v_n(x) = \varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n) U(x - z_n/\varepsilon_n)$, $x \in \mathbb{R}$, para $\{z_n\} \subset \mathcal{M}^\beta$. Sendo X_{ε_n} uniformemente limitado temos

$$\|u_n\|_{\varepsilon_n} \le C \quad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{e} \quad d \in (0, 10).$$

Pela compacidade de $\mathcal{M}^\beta$, passando a uma subsequência se necessário, podemos assumir que $z_n \to z_0$ em $\mathbb{R}$ para algum $z_0 \in \mathcal{M}^\beta$. Dividimos a prova desta proposição em cinco passos.

Passo 1: Para d pequeno temos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z \in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n}; \frac{\beta}{2\varepsilon_n}, \frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{z-R}^{z+R} |u_n|^2\,\mathrm{d}x = 0 \quad \textit{para qualquer} \quad R > 0.$$

De fato, suponha que existe $R > 0$ e uma sequência $\{\tilde{z}_n\}$ satisfazendo

$$\tilde{z}_n \in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n}; \frac{\beta}{2\varepsilon_n}, \frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right) \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\tilde{z}_n - R}^{\tilde{z}_n + R} |u_n|^2\,\mathrm{d}x > 0.$$

Uma vez que X_ε^d é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $d \in (0, 10)$, devido à Proposição 4.2 e à continuidade da imersão $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R})$ obtemos $\{u_n'\}_n$ limitada em $L^2(\mathbb{R})$ e

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} |u_n|^2 \,\mathrm{d}x &\leq C \int_{\mathbb{R}} \left[f^2(u_n) + f^4(u_n)\right] \,\mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) f^2(u_n) \,\mathrm{d}x + C\|f(u_n)\|_{H^1}^4 \\
&\leq C \left\{ \|u_n\|_{\varepsilon_n} + \left[\int_{\mathbb{R}} \left(|u_n'|^2 + V(\varepsilon x) f^2(u_n)\right) \,\mathrm{d}x \right]^2 \right\} \\
&\leq C \left(\|u_n\|_{\varepsilon_n} + \|u_n\|_{\varepsilon_n}^2 + \|u_n\|_{\varepsilon_n}^4\right) \leq \tilde{C}.
\end{aligned}$$

Consequentemente $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R})$. Então podemos assumir que $\varepsilon_n \tilde{z}_n \to \tilde{z}_0$ e que $\tilde{w}_n := u_n(\cdot + \tilde{z}_n) \rightharpoonup \tilde{w}$ em $H^1(\mathbb{R})$ para algum $\tilde{z}_0 \in A\,(z_0; \beta/2, 3\beta)$ e $\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R})$. Pela compacidade da imersão $H^1((-R, R)) \hookrightarrow \mathcal{C}([-R, R])$ temos

$$\int_{-R}^{R} |\tilde{w}|^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{-R}^{R} |\tilde{w}_n|^2 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{\tilde{z}_n - R}^{\tilde{z}_n + R} |u_n|^2 \,\mathrm{d}x > 0$$

e daí $\tilde{w} \neq 0$. Agora dada $\phi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ seja $\phi_n(x) = \phi(x - \tilde{z}_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Temos $\varepsilon_n \tilde{z}_n \in \mathcal{M}^{4\beta}$ e daí $\phi_n \in E_{\varepsilon_n}^{R_n}$ para n grande. Já que $\|J_{\varepsilon_n}'(u_n)\|_{(E_{\varepsilon_n}^{R_n})'} \to 0$ e $\|\phi_n\|_{\varepsilon_n} \leq C$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \langle J_{\varepsilon_n}'(u_n), \phi_n \rangle = 0.$$

Consequentemente, a limitação de $\operatorname{supp}(\phi)$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}} [\tilde{w}'\phi' + V(\tilde{z}_0) f'(\tilde{w}) f(\tilde{w})\phi]) \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f'(\tilde{w}) h(f(\tilde{w}))\phi \,\mathrm{d}x.$$

Uma vez que ϕ é arbitrária segue que $\tilde{w}$ satisfaz

$$-\tilde{w}'' = f'(\tilde{w})[h(f(\tilde{w})) - V(\tilde{z}_0) f(\tilde{w})] = g_0(\tilde{w}), \quad \tilde{w} \geq 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Pelas hipóteses sobre h vemos que g_0 é localmente Lipschitz contínua, $g_0(0) = 0$ e daí devido a ([9], Teorema 5) sabemos que a função g_0 deve satisfazer (4.10) para algum $T > 0$. Assim, Teorema 4.3 vale para o problema (4.15) e $\tilde{w}(x) = w_0(x + c)$ onde w_0 é radial. Então para $L_{V(\tilde{z}_0)}$ definido como L_m com $V(\tilde{z}_0)$ ao invés de m, denotamos $E_{V(\tilde{z}_0)} = L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w})$. Por ([11], Teorema 2.1) obtemos $\tilde{w}_n'(x) \to \tilde{w}'(x)$ para quase todo ponto em A para cada conjunto limitado $A \subset \mathbb{R}$. Então, usando o Lema de Fatou obtemos para $R > 0$ suficientemente grande

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} |\tilde{w}'|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{-R}^{R} |\tilde{w}'|^2 \,\mathrm{d}x \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{-R}^{R} |\tilde{w}_n'|^2 \,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_{\tilde{z}_n - R}^{\tilde{z}_n + R} |u_n'|^2 \,\mathrm{d}x.$$

Já que $V(\tilde{z}_0) \geq m$ e os níveis de energia mínima para as equações (4.9) e (4.15) coincidem com os níveis do passo da montanha (veja [40]) temos $E_{V(\tilde{z}_0)} \geq E_m$. Usando item (*iii*) do Teorema 4.3 vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{w}'|^2 \, \mathrm{d}x = L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}).$$

Daí obtemos

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\tilde{z}_n - R}^{\tilde{z}_n + R} |u_n'|^2 \, \mathrm{d}x \geq \frac{1}{2} L_{V(\tilde{z}_0)}(\tilde{w}) \geq \frac{1}{2} E_m > 0.$$

Por outro lado, por (4.14) temos

$$\int_{\tilde{z}_n - R}^{\tilde{z}_n + R} |u_n'|^2 \, \mathrm{d}x \leq 4d^2$$

para n grande ($n \geq n_0(d)$). Então

$$\frac{1}{2} E_m \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\tilde{z}_n - R}^{\tilde{z}_n + R} |u_n'|^2 \, \mathrm{d}x \leq 4d^2$$

o que é impossível para $d \in \left(0, \sqrt{E_m/8}\right)$. Isto prova o *Passo 1.*

Passo 2: Definindo $u_{n,1} = \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n) u_n$ *e* $u_{n,2} = u_n - u_{n,1}$ *temos*

$$J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) + J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) + o(1) \tag{4.16}$$

onde $o(1)$ *indica a quantidade que tende a zero quando* $n \to \infty$.

De fato, vemos que $Q_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = 0$ e $Q_{\varepsilon_n}(u_n) = Q_{\varepsilon_n}(u_{n,2})$. Então a limitação de $\{u_n\}$ e a convexidade de f^2 implicam que

$$\begin{aligned}
& J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) + J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \\
&= J_{\varepsilon_n}(u_n) + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \left\{ \varphi_{\varepsilon_n}^2(x - z_n/\varepsilon_n) + [1 - \varphi_{\varepsilon_n}(x - z_n/\varepsilon_n)]^2 - 1 \right\} |u_n'|^2 \, \mathrm{d}x \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon_n x) \left[f^2(u_{n,1}) + f^2(u_{n,2}) - f^2(u_n) \right] \mathrm{d}x \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}} \left[H(f(u_n)) - H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2})) \right] \mathrm{d}x + o(1) \\
&\leq J_{\varepsilon_n}(u_n) + \int_{\mathbb{R}} \left[H(f(u_n)) - H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2})) \right] \mathrm{d}x + o(1).
\end{aligned}$$

A fim de concluir *Passo 2* precisamos estimar esta última integral. Temos

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}} \left[H(f(u_n)) - H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2})) \right] \mathrm{d}x \\
&\qquad = \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n}; \frac{\beta}{\varepsilon_n}, \frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} \left[H(f(u_n)) - H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2})) \right] \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Escolha $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi \equiv 1$ em $A(0;\beta,2\beta)$ e $\psi \equiv 0$ em $\mathbb{R}\backslash A(0;\beta/2,3\beta)$. Tomando $\psi_n(x) = \psi(\varepsilon_n x - z_n)u_n(x)$, para n grande obtemos

$$\sup_{y\in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{y-R}^{y+R} |u_n|^2\,\mathrm{d}x \quad \geq \quad \sup_{y\in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{2\varepsilon_n},\frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{y-R}^{y+R} |\psi_n|^2\,\mathrm{d}x = \sup_{y\in\mathbb{R}} \int_{y-R}^{y+R} |\psi_n|^2\,\mathrm{d}x.$$

Usando *Passo 1* e um resultado de Lions, veja [42] Lema 1.1, vemos que $\psi_n \to 0$ em $L^p(\mathbb{R})$ quando $n \to \infty$ para todo $p \in (2,\infty)$. Desde que $\psi_n = u_n$ em $A(z_n/\varepsilon_n;\beta/\varepsilon_n,2\beta/\varepsilon_n)$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} |u_n|^4\,\mathrm{d}x = 0.$$

Assim, usando o fato de que $|u_{n,1}|$, $|u_{n,2}| \leq |u_n|$ e a condição (h_1) vemos que dado $\sigma > 0$ existe $c_\sigma > 0$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} & |H(f(u_n)) - H(f(u_{n,1})) - H(f(u_{n,2}))|\,\mathrm{d}x \\ & \leq \sigma\|u_n\|_{L^2} + c_\sigma \int_{A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n};\frac{\beta}{\varepsilon_n},\frac{2\beta}{\varepsilon_n}\right)} |u_n|^4\,\mathrm{d}x \leq C\sigma\end{aligned}$$

para n grande. Logo (4.16) está provado.

Passo 3: Dado $d > 0$ suficientemente pequeno existe $n_0 = n_0(d)$ tal que

$$J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \geq \frac{1}{8}\left[\int_{\mathbb{R}} \left(|u'_{n,2}|^2 + V(\varepsilon_n x)f^2(u_{n,2})\right)\mathrm{d}x\right] \quad \textit{para todo} \quad n \geq n_0.$$

De fato, usando (4.14) vemos que existe $n_0 = n_0(d)$ tal que

$$\begin{aligned}\|u'_{n,2}\|_{L^2} &\leq \|[1-\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)]'u_n\|_{L^2} + \|u'_n - v'_n\|_{L^2} + \|(1-\varphi_{\varepsilon_n})(\varphi_{\varepsilon_n}U)'\|_{L^2} \\ &\leq o(1) + d \leq 2d \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0\end{aligned}$$

onde $v_n = \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - z_n/\varepsilon_n)U(\cdot - z_n/\varepsilon_n)$. Além disso, pela Proposição 4.2 obtemos

$$\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon_n x)f^2(u_{n,2})\,\mathrm{d}x \leq c_0 d \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0$$

se n_0 é grande. Sendo $\{u_{n,2}\}$ limitada em $H^1(\mathbb{R})$ é também limitada em $L^\infty(\mathbb{R})$. Então por (h_1) temos

$$H(f(u_{n,2})) \leq (V_0/4)f^2(u_{n,2}) + Cf^4(u_{n,2}).$$

Graças à imersão $H^1(\mathbb{R}) \hookrightarrow L^4(\mathbb{R})$ e (V_1) vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} H(f(u_{n,2})) \leq \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) f^2(u_{n,2})\,\mathrm{d}x + C\left[\int_{\mathbb{R}} \left(|u_{n,2}'|^2 + V(\varepsilon x) f^2(u_{n,2})\right)\,\mathrm{d}x\right]^2.$$

Assim segue que

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) &\geq \frac{1}{2}\|u_{n,2}'\|_{L^2}^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2})\,\mathrm{d}x - C\|f(u_{n,2})\|_{H^1}^4 \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - C(2d)^2\right)\|u_{n,2}'\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{4} - C(c_0 d)\right)\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2})\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

para $n \geq n_0$. Isto prova *Passo 3* para $d > 0$ pequeno.

Passo 4: Temos $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = E_m$ *e* $z_0 \in \mathcal{M}$.

Com efeito, seja $w_n := u_{n,1}(\cdot + z_n/\varepsilon_n)$. Extraindo uma subsequência se necessário podemos assumir que $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R})$, $w_n(x) \to w(x)$ para quase todo $x \in \mathbb{R}$ e $w_n \to w$ em $L^2((0,1))$. Como visto no *Passo 3* usando (8) e (11) do Lema 3.4 e (4.7) segue de (4.14) que

$$\begin{aligned} &\frac{V_0}{2}\int_0^1 f^2(\varphi_{\varepsilon_n} U)\,\mathrm{d}x - V_0\int_0^1 f^2(w_n)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\leq V_0\int_0^1 f^2(w_n - \varphi_{\varepsilon_n} U)\,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,1} - v_n)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\leq 2\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon_n x)\left[f^2(u_n - v_n) + f^2(u_{n,2})\right]\,\mathrm{d}x \leq c_0 d \end{aligned}$$

para n grande. Sendo $\varphi_{\varepsilon_n} U = U$ em $[0,1]$ para n grande, obtemos

$$\int_0^1 f^2(w)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 f^2(w_n)\,\mathrm{d}x \geq c\int_0^1 f^2(U)\,\mathrm{d}x - cd > 0$$

para d pequeno. Consequentemente $w \neq 0$. Além disso, para qualquer $r > 0$ segue que

$$u_{n,1}(x + z_n/\varepsilon_n) = u_n(x + z_n/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad (-r, r)$$

para n grande. Então, como no *Passo 1* vemos que w satisfaz

$$-w'' = f'(w)\left[h(f(w)) - V(z_0) f(w)\right], \quad w > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Agora devemos considerar dois casos:

$$\text{Caso 1:} \qquad \lim_{n\to\infty}\sup_{z\in\mathbb{R}}\int_{z-1}^{z+1} |w_n - w|^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

$$\text{Caso 2:} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in\mathbb{R}} \int_{z-1}^{z+1} |w_n - w|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Se Caso 1 ocorre temos $w_n \to w$ em $L^p(\mathbb{R})$ para todo $p \in (2,\infty)$. Por (h_1), (4.12) e a limitação de $\|w_n\|_\infty$ vemos que dado $\sigma > 0$ existe $C = C(\sigma)$ tal que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |H(f(w_n)) - H(f(w))| \mathrm{d}x &\leq \int_{\mathbb{R}} |w_n - w| \left[\sigma\left(|w| + |w_n|\right) + C\left(|w|^3 + |w_n - w|^3\right)\right] \mathrm{d}x \\ &\leq c\sigma + C\left(\|w_n - w\|_{L^4} + \|w_n - w\|_{L^4}^4\right) \leq (c+1)\sigma\end{aligned}$$

para n grande. Assim

$$\int_{\mathbb{R}} H(f(w_n)) \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} H(f(w)) \, \mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{4.17}$$

Agora se Caso 2 ocorre existe $\{\hat{z}_n\} \subset \mathbb{R}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\hat{z}_n - 1}^{\hat{z}_n + 1} |w_n - w|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Já que $w_n \rightharpoonup w$ em $H^1(\mathbb{R})$ temos

$$|\hat{z}_n| \to \infty. \tag{4.18}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\hat{z}_n - 1}^{\hat{z}_n + 1} |w|^2 \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{e daí} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{\hat{z}_n - 1}^{\hat{z}_n + 1} |w_n|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Sendo $w_n(x) = \varphi_{\varepsilon_n}(x) u_n(x + z_n/\varepsilon_n)$, é facilmente visto que $|\hat{z}_n| \leq 3\beta/\varepsilon_n$ para n grande. Se $|\hat{z}_n| \geq \beta/2\varepsilon_n$ para alguma subsequência pelo *Passo 1* teríamos

$$0 < \lim_{n\to\infty} \int_{\hat{z}_n - 1}^{\hat{z}_n + 1} |w_n|^2 \, \mathrm{d}x \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in A\left(\frac{z_n}{\varepsilon_n}; \frac{\beta}{2\varepsilon_n}, \frac{3\beta}{\varepsilon_n}\right)} \int_{z-1}^{z+1} |u_n|^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

o que é impossível. Então $|\hat{z}_n| \leq \beta/2\varepsilon_n$ para n grande. Podemos assumir que

$$\varepsilon_n \hat{z}_n \to \hat{z}_0 \quad \text{e} \quad u_{n,1}(\cdot + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) \rightharpoonup \hat{w},$$

e vemos que $|\hat{z}_0| \leq \beta/2$ e $\hat{w} \in H^1(\mathbb{R}) \backslash \{0\}$. Então, dado $r > 0$ temos

$$u_{n,1}(\cdot + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) = u_n(\cdot + \hat{z}_n + z_n/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad [-r, r]$$

para n grande. Consequentemente como no *Passo 1* segue que $\hat{w}$ satisfaz

$$-\hat{w}'' = f'(\hat{w}) \left[h(f(\hat{w})) - V(\hat{z}_0 + z_0) f(\hat{w})\right], \quad \hat{w} > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Análogo ao *Passo 1*, (4.18) nos leva à uma contradição com (4.14) se $d > 0$ é suficientemente pequeno. Portando Case 2 não ocorre e daí Case 1 é válido. Agora por ([11], Teorema 2.1) vemos que $w_n'(x) \to w'(x)$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}$. Então por (4.17) e Lema de Fatou temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) &= \liminf_{n\to\infty} \left\{ \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[|w_n'|^2 + V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n)\right] \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} H(f(w_n))\,\mathrm{d}x \right\} \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[|w'|^2 + V(z_0) f^2(w)\right] \,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}} H(f(w))\,\mathrm{d}x \\
&\geq L_{V(z_0)}(w) \geq E_{V(z_0)} \geq E_m.
\end{aligned}$$

Por outro lado, já que $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \leq E_m$ e $J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \geq 0$ devido a (4.16) temos

$$\limsup_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) \leq E_m.$$

Então $E_{V(z_0)} = E_m$ e $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = E_m$. Além disso, graças à caracterização do passo da montanha para as soluções de energia mínima e à Proposição 4.4 vemos que $a > b$ implica $E_a > E_b$. Logo $V(z_0) = m$ e isto conclui a prova do *Passo 4*.

Passo 5: Conclusão

Pelo *Passo 4* temos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} \left[|w_n'|^2 + V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n)\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \left(|w'|^2 + m f^2(w)\right) \,\mathrm{d}x.$$

Desde que w é uma solução para (4.9) existe $\zeta \in \mathbb{R}$ tal que $w = U(\cdot - \zeta)$. Temos $w_n(x) \to w(x)$ e $w_n'(x) \to w'(x)$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}$ o que implica nas seguintes convergências

$$\begin{aligned}
&\int_A |w_n'|^2 \,\mathrm{d}x \to \int_A |w'|^2 \,\mathrm{d}x, \quad \int_A V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n) \,\mathrm{d}x \to \int_A m f^2(w) \,\mathrm{d}x \\
\text{e}\quad &\int_A V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(\varphi_{\varepsilon_n}(x-\zeta) w) \,\mathrm{d}x \to \int_A m f^2(w) \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}$. Então dado $\sigma > 0$ existem $R > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\int_{\{|x|\geq R\}} V(\varepsilon_n x + z_n) \left[f^2(w_n) + f^2(\varphi_{\varepsilon_n}(x-\zeta) w)\right] \,\mathrm{d}x \leq \frac{\sigma}{4}$$

para todo $n \geq n_0$. Por outro lado, devido à convergência $w_n \to w$ em $L^2((-R,R))$ obtemos

$$\int_{-R}^{R} V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n - \varphi_{\varepsilon_n}(x-\zeta) w) \,\mathrm{d}x \leq \frac{\sigma}{2} \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0$$

para n_0 grande. Isto implica

$$\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon_n x + z_n) f^2(w_n - \varphi_{\varepsilon_n}(x-\zeta)w)\,\mathrm{d}x \leq \sigma \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Pela definição de $|\|\cdot\||_{\varepsilon_n}$ (veja também Observação 3.10) obtemos

$$|\|u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - \zeta - z_n/\varepsilon_n)w(\cdot - z_n/\varepsilon_n)\||_{\varepsilon_n} \to 0.$$

Agora seja $y_n := z_n/\varepsilon_n + \zeta$. Já que $w_n'(x) \to w'(x)$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}$ e $\|w_n'\|_{L^2} \to \|w'\|_{L^2}$ pelo lema de Brezis-Lieb (veja [12]) segue que $w_n' \to w'$ em $L^2(\mathbb{R})$. Consequentemente $[u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U(\cdot - y_n)]' \to 0$ em $L^2(\mathbb{R})$. Então

$$\|u_{n,1} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n)U_0(\cdot - y_n)\|_{\varepsilon_n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado, usando *Passos 2,3* e *4*, vemos que

$$E_m \geq \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq E_m + \frac{1}{8}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}} [|u_{n,2}'|^2 + V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2})]\,\mathrm{d}x,$$

o que implica que $\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n} \to 0$ e completa a prova. ■

Observamos que o resultado da Proposição 4.7 vale para $d_0 > 0$ suficientemente pequeno independente das sequências satisfazendo as hipóteses. Temos então o seguinte corolário, cuja prova é a mesma do Corolário 3.14.

Corolário 4.8. *Para qualquer $d \in (0, d_0)$ existem constantes ω_d, R_d, $\varepsilon_d > 0$ tais que*

$$\|J_\varepsilon'(u)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \geq \omega_d \quad \textit{para qualquer} \quad u \in E_\varepsilon^R \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^d), \;\; R \geq R_d \;\; \textit{e} \;\; \varepsilon \in (0, \varepsilon_d).$$

Os próximos lemas são necessários para obter uma adequada sequência de Palais-Smale em E_ε^R.

Lema 4.9. *Dado $\lambda > 0$ existem ε_0 e $d_0 > 0$ pequenos o suficiente tais que*

$$J_\varepsilon(u) > E_m - \lambda \quad \textit{para todo} \quad u \in X_\varepsilon^{d_0} \quad \textit{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Prova. Para $u \in X_\varepsilon$ temos $u(x) = \varphi_\varepsilon(x - z/\varepsilon)U(x - z/\varepsilon)$, $x \in \mathbb{R}$, para algum $z \in \mathcal{M}^\beta$. Já que $L_m(U) = E_m$ por (V_2) temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) - E_m \;\; \geq \;\; & \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[\left(|(\varphi_\varepsilon U)'|^2 - |U'|^2\right) + m\left(f^2(\varphi_\varepsilon U) - f^2(U)\right)\right] \mathrm{d}x \\ & - \int_{\mathbb{R}} |H(f(\varphi_\varepsilon U)) - H(f(U))|\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

independente de $z \in \mathcal{M}^\beta$. É facilmente visto que $\varphi_\varepsilon U \to U$ em $H^1(\mathbb{R})$ quando $\varepsilon \to 0$. Então usando (4.12) vemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$J_\varepsilon(u) - E_m > -\frac{\lambda}{2} \quad \text{para todo} \quad u \in X_\varepsilon \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Agora, se $v \in X_\varepsilon^d$ existe $u \in X_\varepsilon$ tal que $\|u - v\|_\varepsilon \leq d$ e podemos escrever $v = u + w$ com $\|w\|_\varepsilon \leq d$. Como $Q_\varepsilon(u) = 0$ temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u) \;\; &\geq \;\; \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \left[|(u+w)'|^2 - |u'|^2 + V(\varepsilon x)\left(f^2(u+w) - f^2(u)\right)\right] \mathrm{d}x \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}} \left[H(f(u+w)) - H(f(u))\right] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Por (4.7) e Lema 3.4 obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x)\big|f^2(u+w) - f^2(u)\big|\,\mathrm{d}x \;\; &\leq \;\; \int_{\{|w|\leq 1\}} V(\varepsilon x)\,|f(u+w) - f(u)|\,|f(u+w) + f(u)|\,\mathrm{d}x \\ & \quad + \int_{\{|w|>1\}} V(\varepsilon x)\,\big|f^2(u+w) - f^2(u)\big|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \;\; C(|\|w\||_\varepsilon^{1/2} + |\|w\||_\varepsilon) \leq Cd \leq \frac{\lambda}{6} \end{aligned}$$

desde que d seja pequeno. Com argumentos já usados anteriormente vemos que existe $d_0 > 0$ pequeno tal que

$$J_\varepsilon(v) > J_\varepsilon(u) - \frac{\lambda}{2} > E_m - \lambda \quad \text{para todo} \quad v \in X_\varepsilon^{d_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

o que completa a prova. ■

Seguindo Corolário 4.8 e Lema 4.9, fixamos $d_0 > 0$, $d_1 \in (0, d_0/3)$ e correspondentes $\omega > 0$, $R_0 > 0$ 4 $\varepsilon_0 > 0$ satisfazendo

$$\begin{aligned} \|J_\varepsilon'(u)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \geq \omega \quad &\text{para todo} \quad u \in E_\varepsilon^R \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \;\; \text{e} \\ J_\varepsilon(u) > E_m/2 \quad &\text{para todo} \quad u \in X_\varepsilon^{d_0} \end{aligned} \tag{4.19}$$

para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Assim obtemos o seguinte resultado.

Lema 4.10. *Existe $\alpha > 0$ tal que*

$$|s - 1/t_0| \leq \alpha \quad \textit{implica} \quad \gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1} \quad \textit{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

onde γ_ε é dado por (4.13).

Prova. Inicialmente observamos que

$$\begin{aligned}
\|\varphi_\varepsilon v\|_\varepsilon &\leq \|(\varphi_\varepsilon v)'\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\left\{1+\int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) f^2\left(\|v\|_{L^2}^{-1}\varphi_\varepsilon v\right)\, \mathrm{d}x\right\} \\
&\leq \|\varepsilon\varphi'(\varepsilon\cdot)v + \varphi_\varepsilon v'\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}\left(1+\sup_\Omega V(x)\right) \\
&\leq C_0\|v\|_{H^1} \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0) \quad \text{e} \quad v \in H^1(\mathbb{R}).
\end{aligned}$$

Já que a função $\theta : [0, t_0] \to H^1(\mathbb{R})$ dada pela Proposição 4.4 é contínua e $\theta(1) = U$ existe $\sigma > 0$ tal que

$$|t-1| \leq \sigma \quad \Rightarrow \quad \|\theta(t) - U\|_{H^1} < \frac{d_1}{C_0}.$$

Então se $|st_0 - 1| \leq \sigma$, o que significa $|s - 1/t_0| \leq \sigma/t_0 =: \alpha$, esta desigualdade nos leva a

$$\|\gamma_\varepsilon(s) - \varphi_\varepsilon U\|_\varepsilon = \|\varphi_\varepsilon[\theta(st_0) - U]\|_\varepsilon \leq C_0\|\theta(st_0) - U\| < d_1 \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Já que $\varphi_\varepsilon U \in X_\varepsilon$ temos $\gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1}$. ■

Lema 4.11. *Para α dado no Lema 4.10 existem $\rho > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que*

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) < E_m - \rho \quad \textit{para todo} \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0) \quad \textit{e} \quad |s - 1/t_0| \geq \alpha.$$

Prova. Pela Proposição 4.4 temos $L_m(\theta(t)) < E_m$ para qualquer $t \neq 1$. Logo existe $\rho > 0$ satisfazendo

$$L_m(\theta(t)) < E_m - 2\rho \quad \text{para todo} \quad t \in [0, t_0] \quad \text{tal que} \quad |t-1| \geq t_0\alpha.$$

Por Lema 4.5 sabemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,t_0]} |J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t)) - L_m(\theta(t))| < \rho \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0,\varepsilon_0).$$

Daí para $|t-1| \geq t_0\alpha$ e $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$ obtemos

$$J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t)) \leq L_m(\theta(t)) + |J_\varepsilon(\varphi_\varepsilon\theta(t)) - L_m(\theta(t))| < E_m - 2\rho + \rho = E_m - \rho$$

o que completa a prova. ■

Proposição 4.12. *Para $\varepsilon > 0$ pequeno e $R > 0$ grande existe uma sequência $\{u_n^R\} \subset E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ tal que $J'_\varepsilon(u_n^R) \to 0$ em $\left(E_\varepsilon^R\right)'$ quando $n \to \infty$.*

Prova. Supondo que a afirmação da Proposição 4.12 não vale e usando argumentos de deformação como na Proposição 5.9, graças a (4.19) e aos Lema 4.10 e Lema 4.11 vemos que para $\varepsilon > 0$ pequeno e R grande existe $\gamma_\varepsilon^R \in \Gamma_\varepsilon$ satisfazendo

$$C_\varepsilon \leq \max_{s\in[0,1]} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R(s)) \leq E_m - \min\left\{\rho, \frac{\omega^2 d_1}{2}\right\},$$

o que é uma contradição com Proposição 4.6 e completa a prova. ∎

Proposição 4.13. *Para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno existe um ponto crítico $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ de J_ε.*

Prova. Pela Proposição 4.12 existem $\varepsilon_0 > 0$ e $R_0 > 0$ tais que para cada $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ podemos encontrar uma sequência $\{u_n\}_n \subset E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ satisfazendo $J_\varepsilon'(u_n) \to 0$ em $\left(E_\varepsilon^R\right)'$ quando $n \to \infty$. Uma vez que $\{u_n\}_n$ é limitada em E_ε^R vemos que é também limitada em $H_0^1((-R/\varepsilon, R/\varepsilon))$ com a norma usual. Daí podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1((-R/\varepsilon, R/\varepsilon))$, $u_n \to u$ em $L^r((-R/\varepsilon, R/\varepsilon))$ para $r = 2, 4$ e $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo ponto em $\mathbb{R}$ onde $u = u_{\varepsilon,R}$. Porque $\|J_\varepsilon'(u_n)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \to 0$ vemos que u é uma solução não negativa para

$$-u'' = f'(u)\left[h(f(u)) - V(\varepsilon x) f(u)\right] - 4\left(\int_{-R/\varepsilon}^{R/\varepsilon} \chi_\varepsilon |u|^2\,\mathrm{d}x - 1\right)_+ \chi_\varepsilon u \quad \text{em} \quad (-R/\varepsilon, R/\varepsilon). \tag{4.20}$$

Então $u_n \to u$ em $H_0^1((-R/\varepsilon, R/\varepsilon))$ o que implica

$$\int_{B(0,R/\varepsilon)} \left[|u_n' - u'|^2 + V(\varepsilon x) f^2(u_n - u)\right]\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e daí $u_n \to u$ em E_ε. Logo $u \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$. Devido à limitação de $\{u_{\varepsilon,R}\}$ em $H^1(\mathbb{R})$ obtemos $\|u_{\varepsilon,R}\|_\infty \leq C_0$ para todo $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Então por (h_1) e Lema 3.4 existe $C > 0$ dependendo de C_0 tal que

$$-u'' \leq C f'(u) f(u)^2 \leq Cu \quad \text{em} \quad (-R/\varepsilon, R/\varepsilon).$$

Logo, por ([32], Teorema 9.26) existe $C_0 = C_0(N, C)$ tal que

$$\sup_{B(y,1)} u \leq C_0 \|u\|_{L^2(B(y,2))} \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}. \tag{4.21}$$

Devido à limitação de $\{\|u_{\varepsilon,R}\|_\varepsilon\}$ e $\{J_\varepsilon(u_{\varepsilon,R})\}$ obtemos $\{Q_\varepsilon(u_{\varepsilon,R})\}$ uniformemente limitada em $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Então existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\{|x| \geq R_0/\varepsilon\}} |u_{\varepsilon,R}|^2 \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon |u_{\varepsilon,R}|^2 \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon C_1 \tag{4.22}$$

para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Então para ε_0 suficientemente pequeno e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ fixado, segue de (4.21), (4.22) e (h_1) que

$$h(f(u_{\varepsilon,R}(x))) \leq \frac{V_0}{2} f(u_{\varepsilon,R}(x)) \quad \text{para todo} \quad |x| \geq \frac{R_0}{\varepsilon} + 2 \quad \text{e} \quad R \geq R_0.$$

Então depois de alguns cálculos obtemos

$$\lim_{A \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,A)} \left[|u'_{\varepsilon,R}|^2 + V(\varepsilon x) f^2(u_{\varepsilon,R}) \right] \, \mathrm{d}x = 0 \tag{4.23}$$

uniformemente em $R \geq R_0$. Tomamos $R_k \to \infty$ e denotamos $u_k = u_{\varepsilon,R_k}$. Podemos assumir que $u_k \rightharpoonup u_\varepsilon$ em $H^1(\mathbb{R})$ quando $k \to \infty$. Já que u_k é uma solução para (4.20), usando (4.23) e ([11], Teorema 2.1) vemos que

$$\int_{\mathbb{R}} |u'_k|^2 \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}} |u'_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} V(\varepsilon x) f^2(u_k - u_\varepsilon) \, \mathrm{d}x \to 0$$

quando $k \to \infty$, a menos de subsequências. Consequentemente $u_k \to u_\varepsilon$ em E_ε o que implica que $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ e $J'_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ em E'_ε. Isto completa a prova. ■

4.5 Prova do Teorema 4.1

Até este momento provamos a existência de um ponto crítico para J_ε, $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ com $\varepsilon_0 > 0$ e $d_0 > 0$ suficientemente pequeno. Também temos $u_\varepsilon \geq 0$ e $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq (E_m/2)$ o que implica $u_\varepsilon \neq 0$. A função u_ε satisfaz

$$-u''_\varepsilon = f'(u_\varepsilon)\left[h(f(u_\varepsilon)) - V(\varepsilon x) f(u_\varepsilon)\right] - 4\left(\int_{\mathbb{R}} \chi_\varepsilon |u|^2 \, \mathrm{d}x - 1\right)_+ \chi_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{em} \quad \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Já que $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R})$, pelo princípio do máximo temos $u_\varepsilon > 0$. Além disso, por (h_1) e (4.24) vemos que existe $\rho > 0$ tal que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \geq \rho$ para $\varepsilon > 0$ pequeno. Observamos que pela Proposição 4.7 existe $\{y_\varepsilon\} \subset \mathbb{R}$ tal que $\varepsilon y_\varepsilon \in \mathcal{M}^{2\beta}$ e para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existe $z_0 \in \mathcal{M}$ satisfazendo

$$\varepsilon_n y_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_{\varepsilon_n}) U(\cdot - y_{\varepsilon_n})\|_{\varepsilon_n} \to 0,$$

e daí

$$\|u_{\varepsilon_n}(\cdot + y_{\varepsilon_n}) - U\|_{H^1} \to 0.$$

Consequentemente, dado $\sigma > 0$ existem $A > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\sup_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)} \int_{\{|x| \geq A\}} u_\varepsilon^2(x + y_\varepsilon)\, \mathrm{d}x \leq \sigma. \tag{4.25}$$

Denotando $w_\varepsilon = u_\varepsilon(\cdot + y_\varepsilon)$, a equação (4.24) e a limitação uniforme de $\{u_\varepsilon\}$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$ nos fornecem

$$-w_\varepsilon'' \leq C w_\varepsilon \quad \text{em} \quad \mathbb{R}.$$

Assim, de ([32], Teorema 8.17) existe $C_0 = C_0(C)$ tal que

$$\sup_{(y-1,y+1)} w_\varepsilon(x) \leq C_0 \|w_\varepsilon\|_{L^2((y-2,y+2))} \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}.$$

A partir desta desigualdade e por (4.25) obtemos $\lim_{|x|\to\infty} w_\varepsilon(x) = 0$ uniforme em ε. Daí podemos provar o decaimento exponencial de w_ε

$$w_\varepsilon(x) \leq C \exp(-c|x|) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

para algum $C, c > 0$. Agora consideramos $\zeta_\varepsilon \in \mathbb{R}$ um ponto de máximo de w_ε. Já que

$$w_\varepsilon(x) \to 0 \quad \text{quando} \quad |x| \to \infty \quad \text{e} \quad \|w_\varepsilon\|_\infty \geq \rho \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$$

concluímos que $\{\zeta_\varepsilon\}$ é limitada em $\mathbb{R}$. Então obtemos $x_\varepsilon := \zeta_\varepsilon + y_\varepsilon$ um ponto de máximo para u_ε e o seguinte decaimento exponencial vale

$$u_\varepsilon(x) = w_\varepsilon(x - y_\varepsilon) \leq C \exp\left(-c|x - x_\varepsilon|\right) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.26}$$

Daí $Q_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ para ε pequeno e u_ε é um ponto crítico para P_ε. Pela Proposição 3.7 temos $v_\varepsilon = f(u_\varepsilon)$ uma solução positiva para (4.5). Desde que f é crescente, x_ε é também um ponto de máximo para v_ε. Além disso, pela escolha de $\{y_\varepsilon\}$ para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existem $z_0 \in \mathcal{M}$ e $\zeta_0 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\zeta_{\varepsilon_n} \to \zeta_0, \quad \varepsilon_n x_{\varepsilon_n} \to z_0 \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n}(\cdot + x_{\varepsilon_n}) - U(\cdot + \zeta_0)\|_{H^1} \to 0, \tag{4.27}$$

a menos de subsequências. Observamos que $U(\cdot + \zeta_0)$ é também uma solução de (4.9) e daí $v_0 = f(U(\cdot + \zeta_0))$ é uma solução de (4.4). Temos

$$\begin{aligned}\|v_{\varepsilon_n}(\cdot + x_{\varepsilon_n}) - v_0\|_{H^1}^2 &\leq 2\|u_{\varepsilon_n}(\cdot + x_{\varepsilon_n}) - U(\cdot + \zeta_0)\|_{H^1}^2 \\ &+2 \int_{\mathbb{R}} |f'\left(u_{\varepsilon_n}(x + x_{\varepsilon_n})\right) - f'(U(x + \zeta_0))|^2 |U'(x + \zeta_0)|^2\, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

e por (4.27) e pelas propriedades de f temos

$$v_{\varepsilon_n}(\cdot + x_{\varepsilon_n}) \to v_0 \quad \text{em} \quad H^1(\mathbb{R}) \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Até aqui provamos que, para ε pequeno, $\tilde{u}_\varepsilon(x) := v_\varepsilon(x/\varepsilon)$ é uma solução para a equação quase-linear (4.1) e satisfaz $(i) - (ii)$ no Teorema 4.1 com ponto de máximo $\tilde{x}_\varepsilon = \varepsilon x_\varepsilon$.

CAPÍTULO 5

SOLUÇÕES DO TIPO "MULTI-PEAK"PARA EQUAÇÕES QUASE-LINEARES

5.1 Introdução

Neste capítulo consideramos uma classe de equações elípticas quase-lineares da forma

$$-\varepsilon^2\Delta u - \varepsilon^2\Delta(u^2)u + V(x)u = K(x)h(u), \quad u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{5.1}$$

onde $\varepsilon > 0$ é um parâmetro real pequeno e $N \geq 3$. Nosso objetivo é provar a existência de soluções do tipo "multi-peak". Soluções de equações do tipo (5.1) estão relacionadas com existência de soluções do tipo ondas estacionárias para equações quase-lineares da forma

$$i\varepsilon\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\varepsilon^2\Delta\psi + W(x)\psi - \eta(|\psi|^2)\psi - \varepsilon^2\kappa\Delta\rho(|\psi|^2)\rho'(|\psi|^2)\psi \tag{5.2}$$

onde $\psi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{C}$, κ é uma constante positiva, $W : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ é um potencial dado e $\eta, \rho : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções adequadas. Equações Quase-lineares da forma (5.2) aparecem em várias áreas da física em correspondência com diferentes tipos de funções ρ. Para motivações e desenvolvimentos de aspectos físicos citamos [21] e referências lá contidas. Aqui consideramos o caso $\rho(s) = s$.

Neste capítulo assumimos que o potencial $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função contínua satisfazendo as seguintes condições:

(V_1) V é limitado inferiormente por uma constante positiva, isto é,

$$\inf_{x\in\mathbb{R}^N} V(x) = V_0 > 0;$$

(V_2') existem l domínios limitados Ω^j em $\mathbb{R}^N$ cujos fechos são disjuntos tais que

$$m_j := \inf_{x\in\Omega^j} V(x) < \inf_{x\in\partial\Omega^j} V(x), \quad j = 1, \dots, l.$$

A partir daqui usaremos a seguinte notação:

$$\mathcal{M}_j = \{x \in \Omega^j : V(x) = m_j\}, \quad \mathcal{M} = \bigcup_{j=1}^{l} \mathcal{M}_j, \quad \Omega = \bigcup_{j=1}^{l} \Omega^j \quad \text{e } m = \max_{1\le j\le l} m_j.$$

Enfatizamos que além da condição (V_1) não requeremos nenhuma condição global sobre o potencial.

Supomos que a função $K \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^+) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e satisfaz:

(k_1) existe $z_j \in \mathcal{M}_j$ tal que $K(z_j) = \max_{x\in\mathbb{R}^N} K(x)$ para todo $j \in \{1, \dots, l\}$;

(k_2) $k_0 = \inf_{x\in\Omega} K(x) > 0$.

Para $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ supomos que é uma função contínua que satisfaz:

(h_1) $\lim_{t\to 0^+} h(t)/t = 0$;

(h_2') para $q = 2(2^*) - 1$ vale

$$\lim_{t\to\infty} \frac{h(t)}{t^q} = 0;$$

(h_3') existe $t_0 > 0$ tal que

$$H(t_0) > \frac{m}{2k_0} t_0^2 \quad \text{onde} \quad H(t) = \int_0^t h(s)\, \mathrm{d}s.$$

Hipóteses similares sobre a não linearidade foram usadas em [16] para o caso semilinear e K constante igual a um. Seguindo a estratégia lá desenvolvida provaremos existência de soluções do tipo “multi-peak”para (5.1), mais precisamente, soluções que se concentram nos distintos $\Omega^{j's}$, sem assumir a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e a monotonicidade da função $h(t)/t$. Além disso permitimos $q = 2(2^*)-1$. Mencionamos também [46] e referências lá citadas, onde estuda-se existência e concentração de soluções do tipo "single-peak" para a equação semilinear com hipóteses mais gerais sobre as funções V e K mas considera-se h uma potência pura ou uma função satisfazendo a condição de Ambrosetti-Rabinowitz e tal que $h(t)/t$ é monótona.

A seguir apresentamos o principal resultado deste capítulo.

Teorema 5.1. *Suponha $(V_1)-(V_2)$, $(k_1)-(k_2)$ e $(h_1)-(h_3')$. Então existe $\varepsilon_0>0$ tal que o problema (5.1) tem uma solução positiva $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ para todo $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(i) u_ε admite l pontos de máximo local x^j_ε tais que $\lim_{\varepsilon\to 0}\operatorname{dist}(x^j_\varepsilon,\mathcal{M}_j)=0$ e para cada sequência $\varepsilon_n\to 0$ e $j\in\{1,\dots,l\}$ existe $x_j\in\mathcal{M}_j$ e uma solução u_j de

$$-\Delta u-\Delta(u^2)u+m_ju=h(u),\quad u>0,\quad u\in H^1(\mathbb{R}^N) \tag{5.3}$$

tais que, a menos de subsequência,

$$x^j_{\varepsilon_n}\to x_j \quad e \quad u_{\varepsilon_n}(\varepsilon_n\cdot+x^j_{\varepsilon_n})\to u_j \quad em \quad H^1(\mathbb{R}^N) \quad quando \quad n\to\infty.$$

(ii) existem constantes positivas C e ζ tais que

$$u_\varepsilon(x)\le C\exp\left(-\frac{\zeta}{\varepsilon}\min_{j\in\{1,\dots,l\}}(|x-x^j_\varepsilon|)\right)\quad para\ todo \quad x\in\mathbb{R}^N.$$

5.2 Resultados preliminares

Já que estamos procurando soluções positivas é conveniente definir $h(t)=0$ para $t<0$. Dizemos que $u\in H^1(\mathbb{R}^N)\cap L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N)$ é uma solução (fraca) de (5.1) se

$$\begin{aligned}\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^N}(1+2u^2)\nabla u\nabla\varphi\,\mathrm{d}x\ +\ 2\varepsilon^2\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^2u\varphi\,\mathrm{d}x+\int_{\mathbb{R}^N}V(x)u\varphi\,\mathrm{d}x\\ =\int_{\mathbb{R}^N}K(x)h(u)\varphi\,\mathrm{d}x\quad\text{para todo}\quad\varphi\in C^\infty_c(\mathbb{R}^N).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Observe que definindo $v(x)=u(\varepsilon x)$ a equação (5.1) torna-se equivalente à

$$-\Delta v-\Delta(v^2)v+V(\varepsilon x)v=K(\varepsilon x)h(v),\quad v>0\quad\text{in}\quad\mathbb{R}^N. \tag{5.5}$$

O funcional energia natural associado a (5.5), a saber

$$I_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[(1+2v^2)|\nabla v|^2 + V(\varepsilon x)v^2\right]\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} K(\varepsilon x)H(v)\,\mathrm{d}x,$$

não está bem definido em $H^1(\mathbb{R}^N)$ por causa do termo $(1+2v^2)|\nabla v|^2$. A fim de superar este problema, como fizemos nos capítulos anteriores, seguindo uma estratégia desenvolvida em [23] e [43] num problema relacionado, introduzimos uma mudança de variáveis $u = f^{-1}(v)$ onde f é uma função C^∞ definida por

$$f'(t) = \big(1+2f^2(t)\big)^{-1/2} \ \text{ se } \ t>0, \quad f(0)=0 \quad \text{e} \quad f(t) = -f(-t) \ \text{ se } \ t<0.$$

No Lema 3.4 temos algumas das propriedades da função $f(t)$. Após esta mudança de variáveis, a partir de I_ε obtemos um novo funcional

$$P_\varepsilon(u) = I_\varepsilon(f(u)) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla u|^2 + V(\varepsilon x)f^2(u)\right]\,\mathrm{d}x - \int_{\mathbb{R}^N} K(\varepsilon x)H(f(u))\,\mathrm{d}x,$$

o qual está bem definido sobre o espaço

$$E_\varepsilon := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u)\,\mathrm{d}x < \infty \right\}.$$

Vemos que E_ε é um espaço de Banach munido com a norma

$$\|u\|_\varepsilon := \|\nabla u\|_2 + \inf_{\lambda>0} \lambda \left\{ 1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(\lambda^{-1}u)\,\mathrm{d}x \right\} := \|\nabla u\|_2 + |\|u\||_\varepsilon \tag{5.6}$$

e que a imersão $E_\varepsilon \hookrightarrow H^1(\mathbb{R}^N)$ é contínua. Além disso, o espaço $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E_ε (veja [21], [29], [30] e [43] para detalhes). Observamos que pontos críticos não triviais para P_ε são soluções fracas para

$$-\Delta u = f'(u)\left[K(\varepsilon x)h(f(u)) - V(\varepsilon x)f(u)\right] \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{5.7}$$

Assim como na Proposição 3.7 temos a seguinte relação entre as soluções dos problemas acima citados:

(i) Se $u \in E_\varepsilon$ é um ponto crítico de P_ε então $v = f(u) \in E_\varepsilon$ é uma solução fraca de (5.5);

(ii) Se u é uma solução clássica de (5.7) então $v = f(u)$ é uma solução clássica de (5.5).

Definimos

$$\chi_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \Omega_\varepsilon \\ \varepsilon^{-1} & \text{se} \quad x \notin \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad , \quad \chi_\varepsilon^j(x) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad x \in \Omega_\varepsilon^j \\ \varepsilon^{-1} & \text{se} \quad x \notin \Omega_\varepsilon^j, \end{cases}$$

para $j = 1, \ldots, l$ e

$$Q_\varepsilon(u) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x) u^2 \, \mathrm{d}x - 1 \right)_+^2, \quad Q_\varepsilon^j(u) = \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon^j(x) u^2 \, \mathrm{d}x - 1 \right)_+^2.$$

Os funcionais $Q_\varepsilon, Q_\varepsilon^j : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ são de classe $\mathcal{C}^1$. Q_ε possui derivada de Fréchet dada por

$$\langle (Q_\varepsilon)'(u), \varphi \rangle = 4 \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x) u^2 \, \mathrm{d}x - 1 \right)_+ \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon(x) u \varphi \, \mathrm{d}x$$

e de forma análoga temos as derivadas de Q_ε^j para $j = 1, \ldots, l$. O funcional Q_ε, o qual foi introduzido em [20], atuará como uma penalização para forçar o fenômeno de concentração a ocorrer dentro de Ω. Finalmente sejam $J_\varepsilon, J_\varepsilon^j : E_\varepsilon \to \mathbb{R}$ dados por

$$J_\varepsilon^j(u) = P_\varepsilon(u) + Q_\varepsilon(u), \quad J_\varepsilon^j(u) = P_\varepsilon(u) + Q_\varepsilon^j(u), \quad j = 1, \ldots, l.$$

Buscaremos pontos críticos para J_ε para os quais Q_ε é zero.

5.2.1 Propriedades do funcional

Assim como na Proposição 3.5 vemos que existe $C > 0$ independente de $\varepsilon > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u) \, \mathrm{d}x \leq C |||u|||_\varepsilon \left[1 + \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u) \, \mathrm{d}x \right)^{1/2} \right] \tag{5.8}$$

para todo $u \in E_\varepsilon$. Mais ainda, neste caso também o funcional P_ε satisfaz as seguintes propriedades:

(i) P_ε é contínuo sobre E_ε.

(ii) P_ε é Gâteaux diferenciável sobre E_ε e para cada $\varphi \in E_\varepsilon$ temos

$$\langle P_\varepsilon'(u), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} f'(u) \left[V(\varepsilon x) f(u) - K(\varepsilon x) h(f(u)) \right] \varphi \, \mathrm{d}x.$$

(iii) P_ε' é contínuo da topologia da norma de E_ε para a topologia fraca-* de E_ε', i.e. se $u_n \to u$ fortemente em E_ε então

$$\langle P_\varepsilon'(u_n), \varphi \rangle \to \langle P_\varepsilon'(u), \varphi \rangle \quad \text{para cada} \quad \varphi \in E_\varepsilon.$$

Nos concentraremos agora no problema limite, cujas soluções e suas propriedades são de fundamental importância para a obtenção das soluções que estamos buscando.

5.2.2 O problema limite

Nesta subseção estudaremos algumas propriedades das soluções do problema limite (5.3), o qual reescrevemos aqui

$$-\Delta v - \Delta(v^2)v + V(z_j)v = K(z_j)h(v), \quad v > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \quad j = 1, \dots, l.$$

Usando a mesma mudança de variáveis f, faremos isto estudando o problema

$$-\Delta u = g_j(u), \quad u > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \tag{5.9}$$

onde $g_j(t) = f'(t)\,[K(z_j)h(f(t)) - V(z_j)f(t)]$ para $t \geq 0$ e $g(t) = -g(-t)$ para $t < 0$. Como na Proposição 3.7 vemos que se $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é uma solução de (5.9) então $v = f(u)$ é uma solução de (5.3). Pelas hipóteses sobre a função h e Lema 3.4 verificamos que a função $h(f(t))$ é contínua e satisfaz:

($\tilde{h}_1$) $\lim_{t\to 0^+} f'(t)h(f(t))/t = 0$;

($\tilde{h}_2$) para $p = (q-1)/2 = 2^* - 1$ vale $\lim_{t\to\infty} f'(t)h(f(t))/t^p = 0$.

Então as propriedades de $f(t)$ implicam nas seguintes para a função $g_j(t)$:

(g_1) $\lim_{t\to 0} g_j(t)/t = -V(z_j) = -m_j$;

(g_2) $\lim_{|t|\to\infty} |g_j(t)|/|t|^p = 0$;

(g_3) $G_j(f^{-1}(t_0)) > 0$ onde $G_j(t) = \int_0^t g_j(s)\, \mathrm{d}s$.

Assim, devido a [9] sabemos que o funcional $L_{z_j} : H^1(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{R}$ dado por

$$L_{z_j}(u) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^2 + V(z_j)f^2(u)\right)\, \mathrm{d}x - K(z_j)\int_{\mathbb{R}^N} H(f(u))\, \mathrm{d}x$$

está bem definido e é de classe $\mathcal{C}^1$. Para cada $j = 1, \dots, l$ seja

$$E_{z_j} := \inf\left\{L_{z_j}(u) : u \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\} \text{ é uma solução de (5.9)}\right\}.$$

Por uma solução de energia mínima de (5.9) entendemos um minimizante para E_{z_j}. Ainda devido a [9] temos o seguinte teorema.

Teorema 5.2. *Assuma* $(g_1) - (g_3)$. *Então*

(i) *o problema (5.9) tem uma solução de energia mínima positiva* $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^N) \cap H^1(\mathbb{R}^N)$ *a qual é radialmente simétrica e monótona com respeito a* $r = |x| \in [0, \infty)$*;*

(ii) *cada solução* u *de (5.9) satisfaz a identidade de Pohozaev*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} G_j(u) \,\mathrm{d}x = 2^* \int_{\mathbb{R}^N} \left[K(z_j)H(f(u)) - \frac{V(z_j)}{2} f^2(u)\right] \mathrm{d}x.$$

Por um resultado de Jeanjean e Tanaka [41] sabemos que as soluções de energia mínima tem uma caracterização do passo da montanha, isto é,

$$L_{z_j}(U) = E_{z_j} = \inf_{\gamma \in \Gamma_j} \max_{t \in [0,1]} L_{z_j}(\gamma(t))$$

onde $\Gamma_j = \left\{\gamma \in \mathcal{C}([0,1], H^1(\mathbb{R}^N)) : \gamma(0) = 0 \text{ e } L_{z_j}(\gamma(1)) < 0\right\}$. Além disso, os autores provaram que para cada solução de energia mínima positiva U existe um caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(t) > 0$ em $\mathbb{R}^N$ para $t > 0$ satisfazendo $U \in \gamma([0,1])$ e

$$\max_{t \in [0,1]} L_{z_j}(\gamma(t)) = L_{z_j}(U) = E_{z_j} \quad \text{e} \quad L_{z_j}(\gamma(t)) < L_{z_j}(U) \quad \text{para} \quad \gamma(t) \neq U. \tag{5.10}$$

Combinando os resultados de [9] e [18] vemos que qualquer solução de energia mínima tem sinal constante e é, a menos de translação, radialmente simétrica com respeito a $r = |x| \in [0, \infty)$. Consideramos $\mathbf{S}_j$ o conjunto das soluções de energia mínima positivas de (5.9) que são radialmente simétricas e então

$$U(0) = \max_{\mathbb{R}^N} U(x) \quad \text{para qualquer} \quad U \in \mathbf{S}_j \quad j = 1, \ldots, l.$$

Assim como visto no Capítulo 3, temos que $\mathbf{S}_j$ é compacto em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e que existem constantes positivas C, c independentes de $U \in \mathbf{S}_j$ e $j = 1, \ldots, l$ satisfazendo

$$U(x) + |\nabla U(x)| \leq C \exp(-c|x|) \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad U \in \mathbf{S}_j. \tag{5.11}$$

5.3 O nível do Passo da Montanha

Fixando $Z_j \in \mathbf{S}_j$ definimos $Z_{j,t}(x) = Z_j(x/t)$ para $x \in \mathbb{R}^N$ e $t > 0$. Pela identidade de Pohozaev temos

$$\begin{aligned} L_{z_j}(Z_{j,t}) &= \frac{t^{N-2}}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Z_j|^2 \,\mathrm{d}x - t^N \int_{\mathbb{R}^N} G_j(Z_j) \,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{t^N}{2^*}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla Z_j|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{t^N}{2^*}\right) N E_j. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Assim, para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$ existe $T_j > 1$ tal que

$$L_{z_j}(Z_{j,t}) < -2 \quad \text{para} \quad t \geq T_j. \tag{5.13}$$

Usando a condição (h_3') vemos que é possível escolher $\beta < \text{dist}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^N \backslash \Omega)/10$ pequeno o suficiente tal que

$$H(t_0) > \frac{V(x)}{2k_0} t_0^2 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathcal{M}^{5\beta}. \tag{5.14}$$

Escolhemos uma função $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 1$ para $|x| \leq \beta$ e $\varphi(x) = 0$ para $|x| \geq 2\beta$, com $\varphi(x) \leq \varphi(y)$ se $|y| \leq |x|$. Definimos $\varphi_\varepsilon(x) = \varphi(\varepsilon x)$ e para $\xi^j \in \mathcal{M}_j^\beta$ e $U_j \in \mathbf{S}_j$, $j = 1, \ldots, l$,

$$U_\varepsilon^{\xi^1, \ldots, \xi^l}(x) := \sum_{j=1}^{l} \varphi_\varepsilon(x - \xi^j/\varepsilon) U_j(x - \xi^j/\varepsilon), \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Para ε pequeno iremos procurar soluções próximas ao conjunto

$$X_\varepsilon = \left\{ U_\varepsilon^{\xi^1, \ldots, \xi^l} : \ \xi^j \in \mathcal{M}_j^\beta, \ U_j \in \mathbf{S}_j \right\}.$$

Assim como no Capítulo 3 vemos que X_ε é uniformemente limitado para ε em intervalos limitados e para cada $\varepsilon > 0$ temos X_ε compacto em E_ε. Definimos agora algumas funções às quais faremos referência em vários pontos deste capítulo. Para $j \in \{1, \ldots, l\}$ seja

$$[\gamma_\varepsilon^j(t)](x) = \begin{cases} \varphi_\varepsilon(x - z_j/\varepsilon) Z_{j,t}(x - z_j/\varepsilon), & \text{se} \quad t \in (0, T_j] \\ 0, & \text{se} \quad t = 0. \end{cases} \tag{5.15}$$

Lema 5.3. *Temos*

$$\sup_{t \in [0, T_j]} |P_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(t)) - L_{z_j}(Z_{j,t})| \to 0 \quad \textit{quando} \quad \varepsilon \to 0.$$

Prova. Para $t \in (0, T_j]$ vemos que

$$\begin{aligned} |P_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(t)) \, - \, L_{z_j}(Z_{j,t})| &\leq \frac{1}{2} \left| \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla(\varphi_\varepsilon Z_{j,t})|^2 - |\nabla Z_{j,t}|^2 \right) \mathrm{d}x \right| \\ &+ \ \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| V(\varepsilon x + z_j) f^2(\varphi_\varepsilon Z_{j,t}) - m_j f^2(Z_{j,t}) \right| \mathrm{d}x \\ &+ \ \int_{\mathbb{R}^N} |K(\varepsilon x + z_j) H(f(\varphi_\varepsilon Z_{j,t})) - K(z_j) H(f(Z_{j,t}))| \, \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Inicialmente, usando uma mudança de variáveis e o decaimento exponencial de Z_j, vemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\varphi_\varepsilon Z_{j,t}) - \nabla Z_{j,t}|^2 \,\mathrm{d}x \leq C \int_{\mathbb{R}^N} \left[T_j^N \varepsilon^2 + T_j^{N-2}(1-\varphi_\varepsilon(T_j x))^2\right] \exp(-2c|x|)\,\mathrm{d}x$$

para todo $t \in (0, T_j]$. Agora, já que $ff' < 2^{-1/2}$ em $\mathbb{R}$, para $t \in [0, T_j]$ obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} \left|V(\varepsilon x + z_j) f^2(\varphi_\varepsilon Z_{j,t}) - m_j f^2(Z_{j,t})\right| \mathrm{d}x \\
&\quad\leq \int_{\mathbb{R}^N} |V(\varepsilon x + z_j) - m_j|\, f^2(\varphi_\varepsilon Z_{j,t})\,\mathrm{d}x + m_j \int_{\mathbb{R}^N} \left|f^2(\varphi_\varepsilon Z_{j,t}) - f^2(Z_{j,t})\right| \mathrm{d}x \\
&\quad\leq 2^{1/2} C \int_{\mathbb{R}^N} \left[|V(\varepsilon x + z_j) - m_j| \chi_{\{|x| \leq 2\beta/\varepsilon\}} + m_j(1-\varphi_\varepsilon)\right] \exp(-c|x|/t_0)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Para a última integral, usando $(\tilde{h}_1) - (\tilde{h}_2)$ temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |K(\varepsilon x + z_j) H(f(\varphi_\varepsilon Z_{j,t})) - K(z_j) H(f(Z_{j,t}))| \mathrm{d}x \\
&\qquad\leq \int_{\mathbb{R}^N} |K(\varepsilon x + z_j) - K(z_j)|\, \chi_{\{|x| \leq 2\beta/\varepsilon\}} \exp(-c|x|/t_0)\,\mathrm{d}x \\
&\qquad\quad + K(z_j) \int_{\mathbb{R}^N} |H(f(\varphi_\varepsilon Z_{j,t})) - H(f(Z_{j,t}))|\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Relembrando que do teorema fundamental do cálculo temos

$$H(f(a+b)) - H(f(a)) = b \int_0^1 f'(a+tb) h(f(a+tb))\,\mathrm{d}t, \tag{5.16}$$

por $(\tilde{h}_1) - (\tilde{h}_2)$ obtemos para $t \in (0, T_j]$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |H(f(\varphi_\varepsilon Z_{j,t})) - H(f(Z_{j,t}))|\,\mathrm{d}x &\leq C \int_{\mathbb{R}^N} (1-\varphi_\varepsilon) Z_{j,t} \left(Z_{j,t} + Z_{j,t}^{2^*-1}\right) \mathrm{d}x \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} (1-\varphi_\varepsilon) \exp\left(-(c/T_j)|x|\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Portanto $P_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(t)) \to L_{z_j}(Z_{j,t})$ uniformemente em $t \in [0, T_j]$ quando $\varepsilon \to 0$. ■

Notemos que $Q_\varepsilon^j(\gamma_\varepsilon^j(t)) = Q_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(t)) = 0$ para todo $t \in [0, T_j]$ e $j = 1, \ldots, l$. Por (5.13) e Lema 5.3 existe ε_0 pequeno tal que

$$|P_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(T_j)) - L_{z_j}(Z_{j,T_j})| \leq -L_{z_j}(Z_{j,T_j}) - 1$$

e daí $J_\varepsilon^j(\gamma_\varepsilon(T_j)) < -1$ e $J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(T_j)) < -1$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $j = 1, \ldots, l$. A partir de agora consideraremos $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Definimos então o nível mini-max para J_ε^j por

$$C_\varepsilon^j = \inf_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon^j} \max_{t \in [0, T_j]} J_\varepsilon^j(\gamma(t)),$$

onde

$$\Gamma_\varepsilon^j = \{\gamma \in \mathcal{C}([0,T_j],E_\varepsilon) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(T_j) = \gamma_\varepsilon^j(T_j)\}.$$

Finalmente seja $E = \sum_{j=1}^{l} E_{z_j}$ e para $s = (s_1, \ldots, s_l) \in T := [0,T_1]\times, \ldots, \times[0,T_l]$ sejam $\gamma_\varepsilon(s) = \sum_{j=1}^{l} \gamma_\varepsilon^j(s_j)$ e

$$D_\varepsilon = \max_{s\in T} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)). \tag{5.17}$$

Proposição 5.4. *Usando as notações acima temos os seguintes resultados:*

(i) $\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = E$;

(ii) $\limsup_{\varepsilon\to 0} \max_{s\in\partial T} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) \le \tilde{E} := \max\{E - E_{z_j} : j = 1, \ldots, l\} < E$;

(iii) $\liminf_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon^j \ge E_{z_j}$, *para* $j = 1, \ldots, l$.

Prova. Devido a (5.12) e Lema 5.3 obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \max_{t\in[0,T_j]} P_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(t)) = \max_{t\in[0,T_j]} L_{z_j}(Z_{j,t}) = \max_{t\in[0,T_j]} \left(\frac{t^{N-2}}{2} - \frac{t^N}{2^*}\right) N E_{z_j} = E_{z_j}.$$

Desde que $\mathrm{supp}(\gamma_\varepsilon^j(s_j)) \cap \mathrm{supp}(\gamma_\varepsilon^i(s_i)) = \emptyset$ para $i \neq j$, temos $P_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) = \sum_{j=1}^{l} P_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(s_j))$ para $s = (s_1, \ldots, s_l)$. A partir disto deduzimos que (i) e (ii) valem. A prova de (iii) segue os mesmos passos que na Proposição 3.12 uma vez que $K(z_j) = \max_{\mathbb{R}^N} K(x)$ para todo $j = 1, \ldots, l$. ■

Na próxima seção, através de alguns lemas técnicos, provaremos a existência de um ponto crítico não trivial para o funcional J_ε pertencente a uma vizinhança de X_ε.

5.4 Existência de um ponto crítico para o funcional energia

Como nos capítulos anteriores denotamos

$$J_\varepsilon^\alpha := \{u \in E_\varepsilon : J_\varepsilon(u) \le \alpha\} \quad \text{e} \quad A^\alpha := \{u \in E_\varepsilon : \inf_{v\in A} \|u - v\|_\varepsilon \le \alpha\}$$

para qualquer $A \subset E_\varepsilon$ e $\alpha > 0$. Além disso, nas proposições seguintes para qualquer $\varepsilon > 0$ e $R > 0$ consideraremos o funcional J_ε restrito ao espaço $H_0^1(B(0,R/\varepsilon))$ munido da norma

$$\|v\|_\varepsilon = \|\nabla v\|_{L^2(B(0,R/\varepsilon))} + \inf_{\lambda>0} \lambda \left\{1 + \int_{B(0,R/\varepsilon)} V(\varepsilon x) f^2(\lambda^{-1} v)\, \mathrm{d}x\right\}.$$

Denotaremos este espaço por E_ε^R. Vemos que E_ε^R é um espaço de Banach e J_ε é de classe $\mathcal{C}^1$ em E_ε^R.

Proposição 5.5. *Sejam $\varepsilon_n \to 0$, $R_n \to \infty$ e $u_n \in X_{\varepsilon_n}^d \cap E_{\varepsilon_n}^{R_n}$ tais que*

$$\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \le E \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(E_{\varepsilon_n}^{R_n})'} = 0.$$

Então, para $d > 0$ pequeno existem $\{y_n^j\}_n \subset \mathbb{R}^N$, $\xi^j \in \mathcal{M}_j$ e $\tilde{U}_j \in \boldsymbol{S}_j$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} |\varepsilon_n y_n^j - \xi^j| = 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} \|u_n - \sum_{j=1}^{l} \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n^j)\tilde{U}_j(\cdot - y_n^j)\|_{\varepsilon_n} = 0,$$

a menos de subsequências.

Prova. Pela definição de $X_{\varepsilon_n}^d$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $v_n \in X_{\varepsilon_n}$ tal que $\|u_n - v_n\|_{\varepsilon_n} \le d$ onde $v_n = \sum_{j=1}^l \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n)U_{j,n}(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n)$ com $\{U_{j,n}\}_n \subset \mathbf{S}_j$ e $\{\xi_n^j\}_n \subset \mathcal{M}_j^\beta$. Pela compacidade de $\mathbf{S}_j$ e $\mathcal{M}_j^\beta$, a menos de subsequências podemos assumir que $U_{j,n} \to U_j$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$, $U_{j,n}(x) \to U_j(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$ e $\xi_n^j \to \xi^j$ em $\mathbb{R}^N$ quando $n \to \infty$ para algum $U_j \in \mathbf{S}_j$ e $\xi^j \in \mathcal{M}_j^\beta$. Temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x) f^2\left(\varphi_{\varepsilon_n}(x - \xi_n^j/\varepsilon_n)[U_{j,n}(x - \xi_n^j/\varepsilon_n) - U_j(x - \xi_n^j/\varepsilon_n)]\right) \mathrm{d}x \\
&\qquad \le \sup_{\Omega^j} V(x) \int_{\mathbb{R}^N} f^2\left(\varphi_{\varepsilon_n}(U_{j,n} - U_j)\right) \mathrm{d}x \le \sup_{\Omega} V(x) \int_{\mathbb{R}^N} |U_{j,n} - U_j|^2 \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

para cada $j = 1, \ldots, l$. Como na Observação 3.10 vemos que

$$\|\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n)U_{j,n}(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n) - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n)U_j(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \to 0$$

quando $n \to \infty$. Então para n grande temos

$$\|u_n - \sum_{j=1}^{l} \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n)U_j(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n)\|_{\varepsilon_n} \le 2d. \tag{5.18}$$

Dividimos a prova desta proposição em cinco passos.

Passo 1: Denotando $B_n = \cup_{j=1}^l B(\xi_n^j/\varepsilon_n, 3\beta/\varepsilon_n)\backslash B(\xi_n^j/\varepsilon_n, \beta/(2\varepsilon_n))$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{z\in B_n} \int_{B(z,R)} |u_n|^2 \,\mathrm{d}x = 0 \quad \textit{para qualquer} \quad R > 0.$$

De fato, suponha que exista $R > 0$ e $x_n \in B_n$ satisfazendo

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(x_n,R)} |u_n|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Já que $\|u\|_\varepsilon \le C$ em X_ε^d para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $d \in (0, 10)$, devido a (5.8) e à desigualdade de Sobolev obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^2 \, \mathrm{d}x \le C \int_{\mathbb{R}^N} f^2(u_n) \, \mathrm{d}x + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \, \mathrm{d}x \le C\|u_n\|_{\varepsilon_n} \le C$$

e daí $\{u_n\}$ é limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Então podemos assumir que $\varepsilon_n x_n \to x_0$ em $\mathbb{R}^N$ e que $u_n(\cdot + x_n) \rightharpoonup \tilde{w}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para algum x_0 no fecho de $\cup_{j=1}^l B(\xi^j, 3\beta)\backslash B(\xi^j, \beta/2)$ e $\tilde{w} \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. Agora, dada $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ seja $\psi_n(x) = \psi(x - x_n)$, $n \in \mathbb{N}$. Temos $\varepsilon_n x_n \in \mathcal{M}^{4\beta}$ e então obtemos $\psi_n \in E_{\varepsilon_n}^{R_n}$ para n grande. Já que $\|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(E_{\varepsilon_n}^{R_n})'} \to 0$ e $\|\psi_n\|_{\varepsilon_n} \le C$ temos

$$\lim_{n\to\infty} \langle J'_{\varepsilon_n}(u_n), \psi_n\rangle = 0.$$

Consequentemente a limitação de $\mathrm{supp}(\psi)$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [\nabla\tilde{w}\nabla\psi + V(x_0)f'(\tilde{w})f(\tilde{w})\psi]) \, \mathrm{d}x = K(x_0) \int_{\mathbb{R}^N} f'(\tilde{w})h(f(\tilde{w}))\psi \, \mathrm{d}x.$$

Sendo ψ arbitrária em $\mathcal{C}_c^\infty$ segue que $\tilde{w}$ satisfaz

$$-\Delta\tilde{w} = f'(\tilde{w})[K(x_0)h(f(\tilde{w})) - V(x_0)f(\tilde{w})] = g_0(\tilde{w}) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N \tag{5.19}$$

e por (5.14) vemos que g_0 também satisfaz as condições $(g_1) - (g_3)$ com $V(x_0)$ ao invés de m_j. Desde que $f(t) < 0$ para $t < 0$ e $h(t) = 0$ para $t < 0$, usando $\tilde{w}^-$ como função teste vemos que $\tilde{w}^- \equiv 0$ e daí $\tilde{w} \ge 0$. Sabemos que sendo solução $\tilde{w} \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e pelo princípio do máximo segue que $\tilde{w} > 0$. Então temos $L_{x_0}(\tilde{w}) \ge E_{x_0}$ onde E_x é o nível de energia mínima para L_x, quando este está bem definido. Além disso, para $R > 0$ suficientemente grande temos

$$\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\tilde{w}|^2 \, \mathrm{d}x \le \liminf_{n\to\infty} \int_{B(0,R)} |\nabla u_n(x + x_n)|^2 \, \mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_{B(x_n,R)} |\nabla u_n|^2 \, \mathrm{d}x.$$

Já que $V(x_0) \ge m_{j_0} = \min\{m_j : j = 1, \ldots, l\}$, $K(x_0) \le K(z_{j_0})$ e os níveis de energia mínima para as equações (5.9) e (5.19) são iguais aos respectivos níveis do passo da montanha, temos $E_{x_0} \ge E_{z_{j_0}}$. Usando a identidade de Pohozaev vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\tilde{w}|^2 \, \mathrm{d}x = NL_{x_0}(\tilde{w}).$$

Assim
$$\liminf_{n\to\infty}\int_{B(x_n,R)}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{N}{2}L_{x_0}(\tilde{w}) \geq \frac{N}{2}E_{z_{j_0}} > 0.$$
Por (5.18) temos $\int_{B(x_n,R)}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \leq 5d^2$ para n grande ($n \geq n_0(d)$). Então
$$\frac{N}{2}E_{z_{j_0}} \leq \liminf_{n\to\infty}\int_{B(x_n,R)}|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x \leq 5d^2$$
e tomando $d>0$ pequeno chegamos a uma contradição. Isto prova o *Passo 1.*

Passo 2: Definindo $u_{n,1}=\sum_{j=1}^{l}\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot-\xi_n^j/\varepsilon_n)u_n$ *e* $u_{n,2}=u_n-u_{n,1}$ *temos*
$$J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq J_{\varepsilon_n}(u_{n,1})+J_{\varepsilon_n}(u_{n,2})+o(1).$$
De fato, é fácil ver que $Q_{\varepsilon_n}(u_{n,1})=0$ e $Q_{\varepsilon_n}(u_n)=Q_{\varepsilon_n}(u_{n,2})$. Então
$$\begin{aligned}J_{\varepsilon_n}(u_{n,1})+J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) &= J_{\varepsilon_n}(u_n)-\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_{n,1}\nabla u_{n,2}\,\mathrm{d}x\\ &\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}V(\varepsilon_n x)\left[f^2(u_{n,1})+f^2(u_{n,2})-f^2(u_n)\right]\mathrm{d}x\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^N}K(\varepsilon_n x)\left[H(f(u_n))-H(f(u_{n,1}))-H(f(u_{n,2}))\right]\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
A limitação de $\{u_n\}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ implica
$$\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_{n,1}\nabla u_{n,2}\,\mathrm{d}x=\int_{\mathbb{R}^N}\sum_{j=1}^{l}\varphi_{\varepsilon_n}(x-\xi_n^j/\varepsilon_n)[1-\sum_{j=1}^{l}\varphi_{\varepsilon_n}(x-\xi_n^j/\varepsilon_n)]|\nabla u_n|^2\,\mathrm{d}x+o(1).$$
Sendo $\Omega^i\cap\Omega^j=\emptyset$ para $i\neq j$ temos $0\leq\sum_{j=1}^{l}\varphi_{\varepsilon_n}(x-\xi_n^j/\varepsilon_n)\leq 1$ em $\mathbb{R}^N$ e daí $\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u_{n,1}\nabla u_{n,2}\,\mathrm{d}x\geq o(1)$. Além disso, pela convexidade de f^2 obtemos
$$f^2(u_{n,1})+f^2(u_{n,2})\leq f^2(u_n).$$
Estimemos agora a última integral
$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^N}K(\varepsilon_n x)\left|H(f(u_n))-H(f(u_{n,1}))-H(f(u_{n,2}))\right|\mathrm{d}x=\\ &\int_{\cup_{j=1}^{l}B(\xi_n^j/\varepsilon_n,2\beta/\varepsilon_n)\setminus B(\xi_n^j/\varepsilon_n,\beta/\varepsilon_n)}K(\varepsilon_n x)\left|H(f(u_n))-H(f(u_{n,1}))-H(f(u_{n,2}))\right|\mathrm{d}x.\end{aligned}$$
Escolhemos $\psi\in\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0\leq\psi\leq 1$, $\psi\equiv 1$ em $B(0,2\beta)\setminus B(0,\beta)$ e $\psi\equiv 0$ em $\mathbb{R}^N\setminus B(0,3\beta)\setminus B(0,\beta/2)$. Denotando $\psi_n(x)=\sum_{j=1}^{l}\psi(\varepsilon_n x-\xi_n^j)u_n(x)$, para n grande temos
$$\sup_{B_n}\int_{B(z,R)}|u_n|^2\,\mathrm{d}x \;\;\geq\;\; \sup_{B_n}\int_{B(z,R)}|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x=\sup_{z\in\mathbb{R}^N}\int_{B(z,R)}|\psi_n|^2\,\mathrm{d}x.$$

Usando *Passo 1* e Lema 1.1 de [42] vemos que $\psi_n \to 0$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$ para todo $r \in (2, 2^*)$. Sendo $\psi_n = u_n$ em $\cup_{j=1}^l B(\xi_n^j/\varepsilon_n, 2\beta/\varepsilon_n) \backslash B(\xi_n^j/\varepsilon_n, \beta/\varepsilon_n)$ obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\cup_{j=1}^l B(\xi_n^j/\varepsilon_n, 2\beta/\varepsilon_n) \backslash B(\xi_n^j/\varepsilon_n, \beta/\varepsilon_n)} |u_n|^r \, \mathrm{d}x = 0.$$

Então, por $(\tilde{h}_1) - (\tilde{h}_2)$ concluímos a prova do *Passo 2*.

Passo 3: Dado $d > 0$ suficientemente pequeno existe $n_0 = n_0(d)$ tal que

$$J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \geq \frac{1}{4} \left[\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_{n,2}|^2 + V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2}) \right) \mathrm{d}x \right] \quad \textit{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Com efeito, devido a (5.8) e (5.18) e ao fato de que os $\Omega_j'^s$ são disjuntos, para $\tilde{v}_n(x) = \sum_{j=1}^l \varphi_{\varepsilon_n}(x - \xi_n^j/\varepsilon_n) U_j(x - \xi_n^j/\varepsilon_n)$ vemos que existe $n_0 = n_0(d)$ tal que

$$\begin{aligned} \|u_{n,1} - \tilde{v}_n\|_{\varepsilon_n} &\leq \|\tilde{v}_n - \sum_{j=1}^l \varphi_{\varepsilon_n}(x - \xi_n^j/\varepsilon_n)\tilde{v}_n\|_{\varepsilon_n} + \|\sum_{j=1}^l \varphi_{\varepsilon_n}(x - \xi_n^j/\varepsilon_n)(u_n - \tilde{v}_n)\|_{\varepsilon_n} \\ &\leq \|u_n - \tilde{v}_n\|_{\varepsilon_n} + o(1) \leq 3d \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0. \end{aligned}$$

Então $\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n} \leq 5d$ e segue da desigualdade de Sobolev que

$$\begin{aligned} J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) &\geq \frac{1}{2}\|\nabla u_{n,2}\|_2^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2}) \, \mathrm{d}x - C\int_{\mathbb{R}^N} f^{22^*}(u_{n,2}) \, \mathrm{d}x \\ &\geq \left(\frac{1}{2} - C(5d)^{2^*-2} \right) \|\nabla u_{n,2}\|_2^2 + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x) f^2(u_{n,2}) \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

para $n \geq n_0$. Isto prova o *Passo 3* para $d > 0$ pequeno satisfazendo $C(5d)^{2^*-2} < 1/4$.

Passo 4: Temos $\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) = E$, *$\xi^j \in \mathcal{M}_j$ e $K(\xi^j) = K(z_j)$ para $j = 1, \ldots, l$.*

De fato, para $j \in \{1, \ldots, l\}$ definimos

$$u_n^j(x) = \begin{cases} u_{n,1}(x) & \text{se} \quad x \in \Omega_{\varepsilon_n}^j \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \Omega_{\varepsilon_n}^j. \end{cases}$$

Seja $w_n^j(x) := u_n^j(x + \xi_n^j/\varepsilon_n)$ para $x \in \mathbb{R}^N$. Extraindo uma subsequência se necessário podemos assumir que $w_n^j \rightharpoonup w^j$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ para algum $w^j \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Usando $(h_1) - (h_2')$ vemos que existe $c_0 > 0$ tal que $\|f(Z)\|_{L^2} \geq 3c_0$ para qualquer $U \in \mathbf{S}_j$ e por (5.11) existe $R > 0$ satisfazendo $\|f(Z)\|_{L^2(B(0,R))} \geq 2c_0$, $Z \in \mathbf{S}_j$ para todo $j \in \{1, \ldots, l\}$. Para tal R

existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $|\varepsilon_n y| \leq \beta$ para qualquer $y \in B(0,R)$ e $n \geq n_1$. Então $\varphi_{\varepsilon_n} Z = Z$ em $B(0,R)$. Por (11) em Lema 3.4 e (5.8), para cada $j \in \{1,\ldots,l\}$ vale

$$
\begin{aligned}
3d \geq \|u_{n,1} - \tilde{v}_n\|_{\varepsilon_n} &= \| \sum_{j=1}^{l} \left[u_n^j - \varphi_{\varepsilon_n}(x - \xi_n^j/\varepsilon_n) U_j(x - \xi_n^j/\varepsilon_n) \right] \|_{\varepsilon_n} \\
&\geq C \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x) f^2 \left(u_n^j - \varphi_{\varepsilon_n}(x - \xi_n^j/\varepsilon_n) U_j(x - \xi_n^j/\varepsilon_n) \right) \mathrm{d}x \\
&\geq C V_0 \int_{B(0,R)} f^2 \left(w_n^j - U_j \right) \mathrm{d}x \geq C V_0 \int_{B(0,R)} \left[\frac{f^2(U_j)}{2} - f^2\left(w_n^j\right) \right] \mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

para $n > n_1$ grande. Daí

$$
\|f(w_n^j)\|^2_{L^2(B(0,R))} \geq 2{c_0}^2 - 3d(CV_0)^{-1} \geq c_0^2
$$

para $d > 0$ pequeno e $n > n_1$ grande. Consequentemente $\|f(w^j)\|_{L^2(B(0,R))} \geq c_0$ e $w^j \neq 0$. Além disso, para um conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^N$ segue que

$$
u_n^j(x + \xi_n^j/\varepsilon_n) = u_n(x + \xi_n^j/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad A
$$

para n grande. Então, como no *Passo 1* verificamos que w^j satisfaz

$$
-\Delta w^j(x) = f'(w^j) \left[K(\xi^j) h(f(w^j)) - V(\xi^j) f(w^j) \right], \quad w^j > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.
$$

Consideramos agora dois casos distintos:

$$
\text{Case 1:} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B(z,1)} |w_n^j - w^j|^2 \, \mathrm{d}x = 0.
$$

$$
\text{Case 2:} \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{z \in \mathbb{R}^N} \int_{B(z,1)} |w_n^j - w^j|^2 \, \mathrm{d}x > 0.
$$

Se o Caso 1 ocorre temos $w_n^j \to w^j$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para qualquer $r \in (2, 2^*)$. Tomando $r = (2+2^*)/2$ por $(\tilde{h}_1) - (\tilde{h}_2)$ e (5.16), dado $\sigma > 0$ existe $C_\sigma > 0$ tal que

$$
\begin{aligned}
|H(f(w_n^j)) - H(f(w^j))| \leq& \sigma |w_n^j - w^j| \left(|w^j| + |w_n^j| + |w^j|^{2^*-1} + |w_n^j|^{2^*-1} \right) \\
&+ C_\sigma |w_n^j - w^j| \left(|w^j|^{r-1} + |w_n^j - w^j|^{r-1} \right).
\end{aligned}
$$

Pela limitação de $\{w_n^j\}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^N} K(\varepsilon_n x + \xi_n^j) H(f(w_n^j)) \, \mathrm{d}x \to K(\xi^j) \int_{\mathbb{R}^N} H(f(w^j)) \, \mathrm{d}x \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{5.20}
$$

Suponhamos que o Caso 2 ocorra. Então existe $\{z_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(z_n,1)} |w_n^j - w^j|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Já que $w_n^j \rightharpoonup w^j$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ temos

$$|z_n| \to \infty. \tag{5.21}$$

Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(z_n,1)} |w^j|^2 \, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{e daí} \quad \lim_{n\to\infty} \int_{B(z_n,1)} |w_n^j|^2 \, \mathrm{d}x > 0.$$

Desde que $w_n^j(x) = \varphi_{\varepsilon_n}(x) u_n(x + \xi_n^j/\varepsilon_n)$, é facilmente visto que $|z_n| \le 3\beta/\varepsilon_n$ para n grande. Se $|z_n| \ge \beta/2\varepsilon_n$ para alguma subsequência, pelo *Passo 1* teríamos

$$0 < \lim_{n\to\infty} \int_{B(z_n,1)} |w_n^j|^2 \, \mathrm{d}x \le \lim_{n\to\infty} \sup_{z\in B_n} \int_{B(z,1)} |u_n|^2 \, \mathrm{d}x = 0$$

o que é impossível. Assim, $|z_n| \le \beta/2\varepsilon_n$ para n grande. Podemos assumir que

$$\varepsilon_n z_n \to z_0 \quad \text{e} \quad w_n^j(\cdot + z_n) \rightharpoonup \tilde{w}^j,$$

e vemos que $z_0 \in \overline{B(0,\beta/2)}$ e $\tilde{w}^j \in H^1(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$. Então, para cada conjunto compacto $A \subset \mathbb{R}^N$ temos

$$w_n^j(\cdot + z_n) = u_n(\cdot + z_n + \xi_n^j/\varepsilon_n) \quad \text{em} \quad A$$

para n grande. Consequentemente, como no *Passo 1*, segue que $\tilde{w}^j$ satisfaz

$$-\Delta \tilde{w}^j = f'(\tilde{w}^j)\left[K(z_0 + \xi^j) h(f(\tilde{w}^j)) - V(z_0 + \xi^j) f(\tilde{w}^j)\right], \quad \tilde{w}^j > 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Análogo ao *Passo 1*, (5.21) nos leva a uma contradição com (5.18) se $d > 0$ é suficientemente pequeno. Provamos portanto que o Caso 2 não pode ocorrer e então o Caso 1 vale. Logo, por (5.20) temos

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n^j) &= \liminf_{n\to\infty} P_{\varepsilon_n}(u_n^j) \\
&\ge \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w^j|^2 + V(\xi^j) f^2(w^j)\right] \mathrm{d}x - K(\xi^j) \int_{\mathbb{R}^N} H(f(w^j)) \, \mathrm{d}x \\
&\ge L_{\xi^j}(w^j) \ge E_{\xi^j} \ge E_{z_j}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, já que $J_{\varepsilon_n}(u_{n,2}) \ge 0$ e por causa de *Passo 2*, obtemos

$$\limsup_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{l} J_{\varepsilon_n}(u_n^j) = \limsup_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_{n,1}) \le \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \le E = \sum_{j=1}^{l} E_{z_j}.$$

Daí

$$\lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n^j) = L_{\xi^j}(w^j) = E_{\xi^j} = E_{z_j}.$$

Além disso, devido à caracterização do passo da montanha para as soluções de energia mínima, à identidade de Pohozaev e a (5.10), vemos que $V(\xi^j) > m_j$ ou $K(\xi^j) < K(z_j)$ implica $E_{\xi^j} > E_{z_j}$. Assim $V(\xi^j) = m_j$ e $K(\xi^j) = K(z_j)$ o que conclui a prova do *Passo 4*.

Passo 5: Conclusão

Já que w^j é uma solução de energia mínima para (5.9) sabemos que existe $\zeta^j \in \mathbb{R}^N$ tal que $\tilde{U}_j := w(\cdot + \zeta^j) \in \mathbf{S}_j$. Por *Passo 4*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla w_n^j|^2 + V(\varepsilon_n x + \xi_n^j) f^2(w_n^j)\right] \mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla w^j|^2 + m_j f^2(w^j)\right) \mathrm{d}x$$

e daí obtemos os seguintes resultados de convergência

$$\begin{aligned} \int_A |\nabla w_n^j|^2 \,\mathrm{d}x &\to \int_A |\nabla w^j|^2 \,\mathrm{d}x \\ \int_A V(\varepsilon_n x + \xi_n^j) f^2(w_n^j) \,\mathrm{d}x &\to \int_A m f^2(w^j) \,\mathrm{d}x \\ \int_A V(\varepsilon_n x + \xi_n^j) f^2(\varphi_{\varepsilon_n}(x - \zeta^j) w^j) \,\mathrm{d}x &\to \int_A m f^2(w^j) \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

para qualquer $A \subset \mathbb{R}^N$. Então dado $\sigma > 0$ existem $R > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,R)} V(\varepsilon_n x + \xi_n^j) \left[f^2(w_n^j) + f^2(\varphi_{\varepsilon_n}(x - \zeta^j) w^j)\right] \mathrm{d}x \le \frac{\sigma}{4}$$

para todo $n \ge n_0$ e $j \in \{1, \dots, l\}$. Por outro lado, pela compacidade da imersão $H^1(B(0,R)) \hookrightarrow L^2(B(0,R))$ temos $w_n^j \to w^j$ em $L^2(B(0,R))$ e daí

$$\int_{B(0,R)} V(\varepsilon_n x + \xi_n^j) f^2(w_n^j - \varphi_{\varepsilon_n}(x - \zeta^j) w^j) \,\mathrm{d}x \le \frac{\sigma}{2} \quad \text{para todo} \quad n \ge n_0$$

para n_0 grande. Isto implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon_n x + \xi_n^j) f^2(w_n^j - \varphi_{\varepsilon_n}(x - \zeta^j) w^j) \,\mathrm{d}x \le \sigma \quad \text{para todo} \quad n \ge n_0.$$

Pela definição de $|||\cdot|||_{\varepsilon_n}$ (veja também Observação 3.10) concluímos que

$$|||u_n^j - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - \zeta^j - \xi_n^j/\varepsilon_n) w^j(\cdot - \xi_n^j/\varepsilon_n)|||_{\varepsilon_n} \to 0.$$

Agora denotamos $y_n^j = \xi_n^j/\varepsilon_n + \zeta^j$. Já que $w_n^j \rightharpoonup w^j$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $\|\nabla w_n^j\|_{L^2} \to \|\nabla w^j\|_{L^2}$ segue que $\nabla w_n^j \to \nabla w^j$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e daí $\nabla[u_n^j - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n^j)\tilde{U}_j(\cdot - y_n^j)] \to 0$ em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Então para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$ obtemos

$$\|u_n^j - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n^j)\tilde{U}_j(\cdot - y_n^j)\|_{\varepsilon_n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

o que implica

$$\|u_{n,1} - \sum_{j=1}^{l} \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n^j)\tilde{U}_j(\cdot - y_n^j)\|_{\varepsilon_n} \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado, usando *Passos 2,3,4* vemos que

$$E \geq \lim_{n\to\infty} J_{\varepsilon_n}(u_n) \geq E + \frac{1}{4}\limsup_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N}[|\nabla u_{n,2}|^2 + V(\varepsilon_n x)f^2(u_{n,2})]\,\mathrm{d}x,$$

de modo que $\|u_{n,2}\|_{\varepsilon_n} \to 0$. Isto completa a prova da proposição. ■

Observamos que o resultado da Proposição 5.5 vale para $d_0 > 0$ suficientemente pequeno independentemente das sequências satisfazendo as hipóteses.

Corolário 5.6. *Para qualquer $d \in (0, d_0)$ existem constantes positivas ω_d, R_d, ε_d tais que*

$$\|J'_\varepsilon(u)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \geq \omega_d \quad \textit{para todo} \quad u \in E_\varepsilon^R \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0}\backslash X_\varepsilon^d), \;\; R \geq R_d \;\; e \;\; \varepsilon \in (0, \varepsilon_d).$$

Prova. Suponhamos por absurdo que este resultado é falso. Então, para algum $d \in (0, d_0)$ existem sequências $\{\varepsilon_n\}$, $\{R_n\}$ e $\{u_n\}$ tais que

$$R_n \geq n, \quad \varepsilon_n \leq 1/n, \quad u_n \in E_{\varepsilon_n}^{R_n} \cap J_{\varepsilon_n}^{D_{\varepsilon_n}} \cap (X_{\varepsilon_n}^{d_0}\backslash X_{\varepsilon_n}^d) \quad \text{e} \quad \|J'_{\varepsilon_n}(u_n)\|_{(E_{\varepsilon_n}^{R_n})'} < \frac{1}{n}.$$

Pela Proposição (5.5) existem $\{y_n^j\}_n \subset \mathbb{R}^N$, $\xi^j \in \mathcal{M}_j$ e $U_j \in \mathbf{S}_j$ tais que

$$\lim_{n\to\infty}|\varepsilon_n y_n^j - \xi^j| = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty}\|u_n - \sum_{j=1}^{l}\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n^j)U_j(\cdot - y_n^j)\|_{\varepsilon_n} = 0.$$

Desta forma, para n suficientemente grande temos $\varepsilon_n y_n^j \in \mathcal{M}_j^\beta$ e então, pela definição de X_{ε_n} e $X_{\varepsilon_n}^d$, obtemos $\sum_{j=1}^{l}\varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_n^j)U_j(\cdot - y_n^j) \in X_{\varepsilon_n}$ e $u_n \in X_{\varepsilon_n}^d$. Isto contradiz o fato de que $u_n \in X_{\varepsilon_n}^{d_0}\backslash X_{\varepsilon_n}^d$ e completa a prova. ■

Os próximos lemas são necessários para a obtenção de uma sequência de Palais-Smale limitada em E_ε^R.

Lema 5.7. *Dado $\lambda > 0$ existem ε_0 e $d_0 > 0$ pequenos o suficiente tais que*

$$J_\varepsilon(u) > E - \lambda \quad \textit{para todo} \quad u \in X_\varepsilon^{d_0} \quad \textit{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Prova. Para $u \in X_\varepsilon$ temos $u(x) = \sum_{j=1}^{l} \varphi_\varepsilon(x - \xi^j/\varepsilon) U_j(x - \xi^j/\varepsilon),\ x \in \mathbb{R}^N$, para algum $\xi^j \in \mathcal{M}_j^\beta$ e $U_j \in \mathbf{S}_j$. Já que $L_{z_j}(U_j) = E_{z_j}$ por (V_2) temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(u) - E \geq & \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{R}^N} \left[\left(|\nabla(\varphi_\varepsilon U_j)|^2 - |\nabla U_j|^2 \right) + m_j \left(f^2(\varphi_\varepsilon U_j) - f^2(U_j) \right) \right] \mathrm{d}x \\ & - \sum_{j=1}^{l} K(z_j) \int_{\mathbb{R}^N} |H(f(\varphi_\varepsilon U_j)) - H(f(U_j))| \, \mathrm{d}x \end{aligned}$$

independentemente de $\xi^j \in \mathcal{M}_j^\beta$. Usando (5.11) e (5.16) vemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$J_\varepsilon(u) - E > -\frac{\lambda}{2} \quad \text{para todo} \quad u \in X_\varepsilon, \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Agora, se $v \in X_\varepsilon^d$ existe $u \in X_\varepsilon$ tal que $\|u - v\|_\varepsilon \leq d$. Temos $v = u + w$ com $\|w\|_\varepsilon \leq d$. Já que $Q_\varepsilon(u) = 0$ segue que

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u) \geq & \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} \left[|\nabla(u + w)|^2 - |\nabla u|^2 + V(\varepsilon x) \left(f^2(u + w) - f^2(u) \right) \right] \mathrm{d}x \\ & - \int_{\mathbb{R}^N} K(\varepsilon x) \left[H(f(u + w)) - H(f(u)) \right] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.4 e (5.8) e lembrando que X_ε é uniformemente limitado para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, estimamos

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon y) \big| f^2(u + w) - f^2(u) \big| \, \mathrm{d}y \\ & \qquad \leq \int_{\{|w| \leq 1\}} V(\varepsilon y) \, |f(u + w) - f(u)| \, |f(u + w) + f(u)| \, \mathrm{d}y \\ & \qquad \quad + \int_{\{|w| > 1\}} V(\varepsilon y) \left| f^2(u + w) - f^2(u) \right| \, \mathrm{d}y \\ & \qquad \leq C(\||w\||_\varepsilon^{1/2} + \||w\||_\varepsilon) \leq C d \leq \frac{\lambda}{6} \end{aligned}$$

para d pequeno o suficiente. Com os mesmos argumentos usados anteriormente vemos que existe $d_0 > 0$ tal que

$$J_\varepsilon(v) > J_\varepsilon(u) - \frac{\lambda}{2} > E - \lambda \quad \text{for all} \quad v \in X_\varepsilon^{d_0} \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Este é o fim da prova. ■

Seguindo Corolário 5.6 e Lema 5.7, fixamos $d_0 > 0$, $d_1 \in (0, d_0/3)$ e correspondentes $\omega > 0$, $R_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ satisfazendo

$$\begin{array}{lll} \|J'_\varepsilon(u)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \geq \omega & \text{para todo} & u \in E_\varepsilon^R \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \ \text{ e} \\ J_\varepsilon(u) > (E + \tilde{E})/2 & \text{para todo} & u \in X_\varepsilon^{d_0} \end{array} \tag{5.22}$$

para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Assim obtemos o seguinte resultado.

Lema 5.8. *Existem constantes positivas $\alpha, \rho, \varepsilon_0$ tais que para $s = (s_1, \ldots, s_l) \in T$ tem-se*

$$\begin{array}{l} |s - (1, \ldots, 1)| \leq \alpha \ \Rightarrow \ \gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1} \\ |s - (1, \ldots, 1)| \leq \alpha \ \Rightarrow \ J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) < E - \rho \end{array}$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, onde $\gamma_\varepsilon(s) = \sum_{j=1}^l \gamma_\varepsilon^j(s_j)$ para γ_ε^j dado por (5.15).

Prova. Inicialmente observamos que para cada $j \in \{1, \ldots, l\}$

$$\begin{aligned} \|\varphi_\varepsilon(\cdot - z_j/\varepsilon)v(\cdot - z_j/\varepsilon)\|_\varepsilon &\leq \|\nabla(\varphi_\varepsilon v)\|_2 + \|v\|_2 \left[1 + \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x + z_j) f^2 \left(\frac{\varphi_\varepsilon v}{\|v\|_2}\right) \mathrm{d}x\right] \\ &\leq \|\varepsilon \nabla\varphi(\varepsilon \cdot)v + \varphi_\varepsilon \nabla v\|_2 + \|v\|_2 \left(1 + \sup_\Omega V(x)\right) \\ &\leq C_0 \|v\|_{H^1} \quad \text{para todo} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \text{e} \quad v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{aligned}$$

Já que a função $t \to Z_{j,t}$ de $[0, T_j]$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ é contínua, existe $\alpha > 0$ tal que

$$|t - 1| \leq \alpha \quad \Rightarrow \quad \|Z_{j,t} - Z_j\| < \frac{d_1}{lC_0} \quad \text{para todo} \quad j = 1, \ldots, l$$

e consequentemente

$$\begin{aligned} \|\gamma_\varepsilon^j(t) - \varphi_\varepsilon(\cdot - z_j/\varepsilon)Z_j(\cdot - z_j/\varepsilon)\|_\varepsilon &= \|\varphi_\varepsilon(\cdot - z_j/\varepsilon)[Z_{j,t}(\cdot - z_j/\varepsilon) - Z_j(\cdot - z_j/\varepsilon)]\|_\varepsilon \\ &\leq C_0 \|Z_{j,s_j} - Z_j\| < \frac{d_1}{l} \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0). \end{aligned}$$

Então se $|s - (1, \ldots, 1)| \leq \alpha$ temos $\|\gamma_\varepsilon(s) - \sum_{j=1}^l \varphi_\varepsilon(\cdot - z_j/\varepsilon)Z_j(\cdot - z_j/\varepsilon)\|_\varepsilon < d_1$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ o que implica $\gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1}$. Agora, já que $t = 1$ é o único ponto de máximo de $\left(t^{N-2}/2 - t^N/2^*\right)$ em $[0, T_j]$ e devido a (5.12), vemos que existe $\rho > 0$ satisfazendo

$$L_{z_j}(Z_{j,t}) < E_{z_j} - 3\rho \quad \text{para} \quad |t - 1| \geq \frac{\alpha}{l}.$$

Pelo Lema 5.3 sabemos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\sup_{t\in[0,T_j]} |J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(t) - L_{z_j}(Z_{j,t})| < \frac{\rho}{l} \quad \text{para} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \quad \text{e} \quad j = 1, \ldots, l.$$

Agora para $|s - (1, \ldots, 1)| \geq \alpha$ existe $i \in \{1, \ldots, l\}$ tal que $|s_i - 1| \geq \alpha/l$. Daí

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^i(s_i)) \leq L_{z_i}(Z_{i,s_i}) + |J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^i(s_i)) - L_{z_i}(Z_{i,s_i})| < E_{z_i} - 2\rho$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Já que $J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) = \sum_{j=1}^{l} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^j(s_j))$ obtemos

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) \leq \sum_{j\neq i} L_{z_j}(Z_{j,s_j}) + \rho + (E_{z_i} - 2\rho) < E - \rho$$

e completamos a prova. ■

Proposição 5.9. *Para $\varepsilon > 0$ pequeno e $R > 0$ grande existe uma sequência $\{u_n^R\} \subset E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ tal que $J'_\varepsilon(u_n^R) \to 0$ em $\left(E_\varepsilon^R\right)'$ quando $n \to \infty$.*

Prova. Tomamos $R_0 > 0$ tal que $\Omega \subset B(0, R_0)$. Então $\gamma_\varepsilon([0,1]) \subset E_\varepsilon^R$ para todo $R \geq R_0$. Suponha que a Proposição 5.9 é falsa. Então para $\varepsilon > 0$ pequeno e $R > R_0$ grande existe $a(\varepsilon, R) > 0$ tal que

$$\|J'_\varepsilon(u)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \geq a(\varepsilon, R) \quad \text{em} \quad E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}.$$

Por (5.22) existe ω independente de $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $R > R_0$ satisfazendo

$$\|J'_\varepsilon(u)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \geq \omega \quad \text{em} \quad E_\varepsilon^R \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}.$$

Daí existe um campo vetorial pseudo-gradiente, T_ε^R, para J_ε em uma vizinhança $Z_\varepsilon^R \subset E_\varepsilon^R$ de $E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D\varepsilon}$. Nos referimos a [52] para detalhes. Seja $\tilde{Z}_\varepsilon^R \subset Z_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{10d_0}$ outra vizinhança para a qual $\|J'_\varepsilon(u)\|_{(E_\varepsilon^R)'} > a(\varepsilon, R)/2$ e tomamos uma função Lipschitz contínua η_ε^R em E_ε^R tal que

$$0 \leq \eta_\varepsilon^R \leq 1, \quad \eta_\varepsilon^R \equiv 1 \text{ em } E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon} \quad \text{e} \quad \eta_\varepsilon^R \equiv 0 \text{ em } E_\varepsilon^R \backslash \tilde{Z}_\varepsilon^R.$$

Tomando $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função Lipschitz contínua tal que

$$\xi \leq 1, \quad \xi \equiv 1 \quad \text{em} \quad [(E + \tilde{E})/2, 3E/2] \quad \text{e} \quad \xi \equiv 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R} \backslash ((3\tilde{E} + E)/4, 2E)$$

e definindo

$$e_\varepsilon^R(u) = \begin{cases} -\eta_\varepsilon^R(u)\xi(J_\varepsilon(u))T_\varepsilon^R(u) & \text{se} \quad u \in Z_\varepsilon^R \\ 0 & \text{se} \quad u \in E_\varepsilon^R \backslash Z_\varepsilon^R, \end{cases}$$

existe uma solução global $\Psi_\varepsilon^R : E_\varepsilon^R \times \mathbb{R} \to E_\varepsilon^R$, a qual é única, do problema de valor inicial

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\Psi_\varepsilon^R(u,t) &= e_\varepsilon^R(\Psi_\varepsilon^R(u,t)) \\ \Psi_\varepsilon^R(u,0) &= u. \end{cases}$$

Já que $\lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon = E$ temos $D_\varepsilon \leq E + (1/2)\min\{E, \omega^2 d_1\}$ para $\varepsilon > 0$ pequeno. Então, pela escolha de d_0 e d_1, Ψ_ε^R tem as seguintes propriedades:

(i) $\Psi_\varepsilon^R(u,t) = u$ se $t = 0$ ou $u \in E_\varepsilon^R \backslash \tilde{Z}_\varepsilon^R$ ou ainda $J_\varepsilon(u) \notin ((3\tilde{E} + E)/4, 2E)$.

(ii) $\left\| \frac{d}{dt}\Psi_\varepsilon^R(u,t)\right\|_\varepsilon \leq 2$ para todo (u,t).

(iii) $\frac{d}{dt}\left(J_\varepsilon\left(\Psi_\varepsilon^R(u,t)\right)\right) \leq 0$ para todo (u,t).

(iv) $\frac{d}{dt}\left(J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon^R(u,t))\right) \leq -\omega^2$ se $\Psi_\varepsilon^R(u,t) \in E_\varepsilon^R \cap (X_\varepsilon^{d_0} \backslash X_\varepsilon^{d_1}) \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$.

(v) $\frac{d}{dt}(J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon^R(u,t))) \leq -(a(\varepsilon,R))^2$ se $\Psi_\varepsilon^R(u,t) \in E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_1} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$.

Devido ao Lema 5.8 existem $\alpha, \rho > 0$ tais que para $s \in T$

$$|s - (1,\ldots,1)| \leq \alpha \Longrightarrow \gamma_\varepsilon(s) \in X_\varepsilon^{d_1} \quad \text{e} \quad |s - (1,\ldots,1)| > \alpha \Longrightarrow J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(s)) < E - \rho$$

para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Como no Capítulo 3 provamos a existência de $t_\varepsilon^R > 0$ satisfazendo

$$J_\varepsilon(\Psi_\varepsilon^R(\gamma_\varepsilon(s), t_\varepsilon^R)) \leq E - \min\left\{\rho, \frac{\omega^2 d_1}{2}\right\} \quad \text{para todo} \quad s \in T. \tag{5.23}$$

Observamos que se $\gamma_\varepsilon(s) \in \tilde{Z}_\varepsilon$ então $\Psi_\varepsilon^R(\gamma_\varepsilon(s), t_\varepsilon^R)$ pertence ao fecho de $\tilde{Z}_\varepsilon \subset X_\varepsilon^{10d_0}$. Se $\gamma_\varepsilon(s) \notin \tilde{Z}_\varepsilon$ então $\Psi_\varepsilon^R(\gamma_\varepsilon(s), t_\varepsilon^R) = \gamma_\varepsilon(s)$ e daí $\|\Psi_\varepsilon^R(\gamma_\varepsilon(s), t_\varepsilon^R)\|_\varepsilon \leq c$ uniformemente em R e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Seja $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $0 \leq \psi \leq 1$, $\psi(x) = 1$ para $x \in \Omega^\beta$, $\psi(x) = 0$ para $x \notin \Omega^{2\beta}$ e $|\nabla\psi(x)| \leq 2/\beta$. Definimos $\gamma_\varepsilon^R(s) = \Psi_\varepsilon^R(\gamma_\varepsilon(s), t_\varepsilon^R)$, $\gamma^1(s) = \psi_\varepsilon \gamma_\varepsilon^R(s)$ e $\gamma^2(s) = (1 - \psi_\varepsilon)\gamma_\varepsilon^R(s)$ onde $\psi_\varepsilon(x) = \psi(\varepsilon x)$. Então, como no *Passo 2* da Proposição 5.5 temos

$$\begin{aligned} J_\varepsilon(\gamma^1) + J_{\varepsilon_n}(\gamma^2) &= J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R) + Q_\varepsilon(\gamma^1) + Q_\varepsilon(\gamma^2) - Q_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R) - \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\gamma^1 \nabla\gamma^2 \, \mathrm{d}x \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x)\left[f^2(\gamma^1) + f^2(\gamma^2) - f^2(\gamma_\varepsilon^R)\right] \mathrm{d}x \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^N} K(\varepsilon x)\left[H(f(\gamma_\varepsilon^R)) - H(f(\gamma^1)) - H(f(\gamma^2))\right] \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Precisamos estimar os termos do lado direito desta desigualdade. Primeiramente, já que para $a, b \geq 0$ vale $(a+b-1)_+ \geq (a-1)_+ + (b-1)_+$, obtemos

$$\begin{aligned} Q_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R) &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |\gamma^1 + \gamma^2|^2 \,\mathrm{d}x - 1\right)_+^2 \geq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon (|\gamma^1|^2 + |\gamma^2|^2) \,\mathrm{d}x - 1\right)_+^2 \\ &\geq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |\gamma^1|^2 \,\mathrm{d}x - 1\right)_+^2 + \left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |\gamma^2|^2 \,\mathrm{d}x - 1\right)_+^2 \\ &= Q_\varepsilon(\gamma^1) + Q_\varepsilon(\gamma^2). \end{aligned}$$

Para o segundo termo, a limitação de $\{\gamma_\varepsilon^R\}$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ implica que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\gamma^1 \nabla\gamma^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} \psi_\varepsilon (1-\psi_\varepsilon) |\nabla \gamma_\varepsilon^R|^2 \,\mathrm{d}x + o(1) \geq o(1)$$

onde $\lim_{\varepsilon\to 0} o(1) = 0$. Pela convexidade de f^2 vemos que

$$f^2(\gamma^1) + f^2(\gamma^2) \leq \psi_\varepsilon f^2(\gamma_\varepsilon^R) + (1-\psi_\varepsilon) f^2(\gamma_\varepsilon^R) = f^2(\gamma_\varepsilon^R).$$

Agora, devido à limitação de $\{\gamma_\varepsilon^R\}$ em L^{2^*} e às condições $(\tilde{h}_1) - (\tilde{h}_2)$ observamos que dado $\delta > 0$ existe $C_\delta > 0$ tal que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} K(\varepsilon x) \left| H(f(\gamma_\varepsilon^R)) - H(f(\gamma^1)) - H(f(\gamma^2)) \right| \mathrm{d}x \\ &\qquad = \int_{(\Omega^{2\beta})_\varepsilon \setminus (\Omega^\beta)_\varepsilon} K(\varepsilon x) \left| H(f(\gamma_\varepsilon^R)) - H(f(\gamma^1)) - H(f(\gamma^2)) \right| \mathrm{d}x \\ &\qquad \leq \frac{\delta}{2} + C_\delta \int_{(\Omega^{2\beta})_\varepsilon \setminus (\Omega^\beta)_\varepsilon} |\gamma_\varepsilon^R(s)|^2 \,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Já que γ_ε^R é limitado em E_ε obtemos $P_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R)$ limitado e por (5.23) vemos que $Q_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R)$ é uniformemente limitado em $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Então

$$\int_{(\Omega^{2\beta})_\varepsilon \setminus (\Omega^\beta)_\varepsilon} |\gamma_\varepsilon^R|^2 \,\mathrm{d}x \leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus \Omega_\varepsilon} |\gamma_\varepsilon^R|^2 \,\mathrm{d}x \leq c\varepsilon$$

o que implica

$$\int_{\mathbb{R}^N} K(\varepsilon x) \left| H(f(\gamma_\varepsilon^R)) - H(f(\gamma^1)) - H(f(\gamma^2)) \right| \mathrm{d}x = o(1)$$

quando ε tende a zero. Portanto

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R) \geq J_\varepsilon(\gamma^1) + J_\varepsilon(\gamma^2) + o(1).$$

Por outro lado, já que $\psi_\varepsilon \equiv 1$ em Ω_ε vemos que

$$J_\varepsilon(\gamma^2) \geq -\int_{\mathbb{R}^N} K(\varepsilon x) H(f(\gamma^2))\,\mathrm{d}x \geq -c\int_{\mathbb{R}^N\setminus\Omega_\varepsilon} H(f(\gamma^2))\,\mathrm{d}x = o(1).$$

Assim

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R) \geq J_\varepsilon(\gamma^1) + o(1).$$

Agora, para $j = 1, \ldots, l$ e $s \in T$ definimos

$$[\gamma^{1,j}(s)](x) = \begin{cases} [\gamma^1(s)](x) & \text{se} \quad x \in (\Omega^j)_\varepsilon^{2\beta} \\ 0 & \text{se} \quad x \in (\Omega^j)_\varepsilon^{2\beta} \end{cases}$$

e daí $[\gamma^1(s)](x) = \sum_{j=1}^{l}[\gamma^{1,j}(s)](x)$ para $x \in \mathbb{R}^N$. Uma vez que $(\Omega^i)^{2\beta} \cap (\Omega^j)^{2\beta} = \emptyset$ para $i \neq j$ e para $a_j \geq 0$ vale $(\sum_{j=1}^{k} a_j - 1)_+ \geq \sum_{j=1}^{l}(a_j - 1)_+$ obtemos

$$J_\varepsilon(\gamma^1(s)) \geq \sum_{j=1}^{l} J_\varepsilon(\gamma^{1,j}(s)) = \sum_{j=1}^{l} J_\varepsilon^j(\gamma^{1,j}(s)).$$

Agora, para $s = (s_1, \ldots, s_k) \in T$ denotamos $0_j = (s_1, \ldots, s_{j-1}, 0, s_{j+1}, \ldots, s_k)$ e $1_j = (s_1, \ldots, s_{j-1}, T_j, s_{j+1}, \ldots, s_k)$. Por (ii) na Proposição 5.4 segue que

$$J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(0_j)),\ J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon(1_j)) \leq \tilde{D} \leq (3\tilde{E} + E)/4$$

para ε pequeno e então $\gamma_\varepsilon^R(0_j) = \gamma_\varepsilon(0_j)$ e $\gamma_\varepsilon^R(1_j) = \gamma_\varepsilon(1_j)$. Daí $\gamma^{1,j}(0_j) = 0$ e $\gamma^{1,j}(1_j) = \gamma_\varepsilon^j(T_j)$. Como em [24], Proposição 3.4, vemos que existe $\bar{s} \in T$ tal que

$$J_\varepsilon^j(\gamma^{1,j}(\bar{s})) \geq C_\varepsilon^j \quad \text{para qualquer} \quad j \in \{1, \ldots, l\}.$$

Consequentemente

$$\max_{s\in T} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R(s)) \geq \max_{s\in T} \sum_{j=1}^{l} J_\varepsilon^j(\gamma^{1,j}(s)) + o(1) \geq \sum_{j=1}^{l} C_\varepsilon^j + o(1).$$

Por (iii) na Proposição 5.4 e (5.23) obtemos

$$E \leq \sum_{j=1}^{l} \liminf_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon^j \leq \max_{s\in T} J_\varepsilon(\gamma_\varepsilon^R(s)) \leq E - \min\left\{\rho, \frac{\omega^2 d_1}{2}\right\},$$

o que é uma contradição e completa a prova da proposição. ■

Proposição 5.10. *Existe um ponto crítico $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$ de J_ε se $\varepsilon > 0$ é suficientemente pequeno. Além disso, $\{u_\varepsilon\}_\varepsilon$ é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

Prova. Pela Proposição 5.9 existem $\varepsilon_0 > 0$ e $R_0 > 0$ para os quais podemos encontrar $\{u_n\}_n \subset E_\varepsilon^R \cap X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$, $u_n = u_n(\varepsilon, R)$, tal que $J_\varepsilon'(u_n) \to 0$ em $\left(E_\varepsilon^R\right)'$ quando $n \to \infty$, para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Já que $\{u_n\}_n$ é limitada em E_ε^R vemos que é também limitada em $H_0^1(B(0, R/\varepsilon))$ com a norma usual. Então podemos assumir que $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(B(0, R/\varepsilon))$ e $u_n(x) \to u(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$ onde $u = u_{\varepsilon,R}$. Usando o fato de que $\|J_\varepsilon'(u_n)\|_{(E_\varepsilon^R)'} \to 0$ e a compacidade da imersão $H_0^1(B(0, R/\varepsilon)) \hookrightarrow L^r(B(0, R/\varepsilon))$ para $r \in [1, 2^*)$ vemos que u é uma solução não negativa para

$$-\Delta u = f'(u)\,[k(\varepsilon x)h(f(u)) - V(\varepsilon x)f(u)] - 4\left(\int_{B(0,R/\varepsilon)} \chi_\varepsilon |u|^2\,\mathrm{d}x - 1\right)_+ \chi_\varepsilon u \quad \text{em} \quad B(0, R/\varepsilon) \tag{5.24}$$

Então vemos que $u_n \to u$ em $H_0^1(B(0, R/\varepsilon))$ o que implica que

$$\int_{B(0,R/\varepsilon)} V(\varepsilon x) f^2(u_n - u)\,\mathrm{d}x \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty$$

e daí $u_n \to u$ em E_ε. Assim, $u \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$. Por $(h_1) - (h_2')$ e Lema 3.4 existem $C > 0$ dependendo apenas de h e f tal que

$$-\Delta u \leq c f'(u) f(u)^{22^*-1} \leq c u^{2^*-1} \quad \text{em} \quad B(0, R/\varepsilon). \tag{5.25}$$

Pela Proposição 5.5 vemos que dado $\sigma > 0$ existe $k \in \mathbb{N}$, ε_0 e $R_0 > 0$ dependendo de σ tais que

$$\left(\int_{\{x \in \mathbb{R}^N : [u_{\varepsilon,R}(x)]^{2^*-2} > k\}} u_{\varepsilon,R}^{2^*}\,\mathrm{d}x\right)^{2/N} \leq \sigma \quad \text{para todo} \quad R \geq R_0 \quad \text{e} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

Daí, usando um método de iteração devido a Moser (veja [52], Lema B.3) provamos que $\{u_{\varepsilon,R}\}$ é limitado em $L_{loc}^p(\mathbb{R}^N)$ uniformemente em $R \geq R_p$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_p)$ para qualquer $p \in [2, \infty)$. Além disso,

$$\|u_{\varepsilon,R}\|_{L^p(B(y,1))} \leq C_p \|u_{\varepsilon,R}\|_{L^2(B(y,r_p))} \quad \text{para todo} \quad y \in \mathbb{R}^N.$$

Então por ([32], Teorema 9.26) existe $C > 0$ dependendo de N tal que

$$\sup_{B(y,1)} u_{\varepsilon,R} \leq C\left(\|u_{\varepsilon,R}\|_{L^2(B(y,2))} + \|c u_{\varepsilon,R}^{2^*-1}\|_{L^N(B(y,2))}\right) \leq C\|u_{\varepsilon,R}\|_{L^2(B(y,r_N))} \tag{5.26}$$

para todo $y \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ e $R \geq R_0$, onde R_0 e ε_0 dependem de N. Em particular isto implica que $\{u_{\varepsilon,R}\}_{\varepsilon,R}$ é limitado em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Devido à limitação de $\{\|u_{\varepsilon,R}\|_\varepsilon\}$ e $\{J_\varepsilon(u_{\varepsilon,R})\}$ temos $\{Q_\varepsilon(u_{\varepsilon,R})\}$ uniformemente limitado em $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Daí, já que $\Omega \subset B(0, R_0)$ existe $C_1 > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0, R_0/\varepsilon)} |u_{\varepsilon,R}|^2 \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |u_{\varepsilon,R}|^2 \, \mathrm{d}x \leq \varepsilon C_1 \tag{5.27}$$

para qualquer $R \geq R_0$ e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Então para ε_0 suficientemente pequeno e $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ fixado segue de (5.26), (5.27) e (h_1) que

$$h(f(u_{\varepsilon,R}(x))) \leq \frac{V_0}{2} f(u_{\varepsilon,R}(x)) \quad \text{para} \quad |x| \geq \frac{R_0}{\varepsilon} + r_N \quad \text{e} \quad R \geq R_0.$$

Depois de alguns cálculos obtemos

$$\lim_{A \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B(0,A)} \left[|\nabla u_{\varepsilon,R}|^2 + V(\varepsilon x) f^2(u_{\varepsilon,R}) \right] \, \mathrm{d}x = 0 \tag{5.28}$$

uniformemente em $R \geq R_0$. Tomamos $R_k \to \infty$ e denotamos $u_k = u_{\varepsilon, R_k}$. Sendo $\{u_k\}_k$ uma sequência limitada em E_ε, é também limitada em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e podemos assumir que $u_k \rightharpoonup u_\varepsilon$ em $H^1(\mathbb{R}^N)$ e $u_k(x) \to u_\varepsilon(x)$ para quase todo ponto $x \in \mathbb{R}^N$ quando $k \to \infty$. Então $\|u_\varepsilon\|_\infty \leq C$ para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Uma vez que u_k é uma solução para (5.24), usando (5.28) vemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_k|^2 \, \mathrm{d}x \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 \, \mathrm{d}x \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} V(\varepsilon x) f^2(u_k - u_\varepsilon) \, \mathrm{d}x \to 0$$

quando $k \to \infty$. A partir deste resultado temos

$$\|u_k - u_\varepsilon\|_\varepsilon \to 0 \quad \text{quando} \quad k \to \infty,$$

e daí $u_k \to u_\varepsilon$ em E_ε. Isto implica que $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$. Além disso, para qualquer $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{supp}(\varphi) \subset B(0, R_k/\varepsilon)$ para qualquer $k \geq k_0$. Então, por (5.24) temos

$$0 = \langle (J_\varepsilon^{R_k})'(u_k), \varphi \rangle = \langle J_\varepsilon'(u_k), \varphi \rangle \to \langle J_\varepsilon'(u_\varepsilon), \varphi \rangle.$$

Uma vez que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E_ε obtemos $J_\varepsilon'(u_\varepsilon) = 0$ o que completa a prova. ■

5.5 Prova do Teorema 5.1

Até este momento provamos a existência de um ponto crítico para J_ε, $u_\varepsilon \in X_\varepsilon^{d_0} \cap J_\varepsilon^{D_\varepsilon}$, para $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ com $\varepsilon_0 > 0$ e $d_0 > 0$ suficientemente pequeno. Temos também $u_\varepsilon \geq 0$ e $J_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq (E + \tilde{E})/2$ o que implica $u_\varepsilon \neq 0$. A função u_ε satisfaz

$$-\Delta u_\varepsilon = f'(u_\varepsilon)\left[k(\varepsilon x)h(f(u_\varepsilon)) - V(\varepsilon x)f(u_\varepsilon)\right] - 4\left(\int_{\mathbb{R}^N} \chi_\varepsilon |u|^2\,\mathrm{d}x - 1\right)_+ \chi_\varepsilon u_\varepsilon \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \tag{5.29}$$

Já que $u_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos $u_\varepsilon \in \mathcal{C}_{loc}^{1,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ e pelo princípio do máximo segue que $u_\varepsilon > 0$. Além disso, por (5.29) existe $\rho > 0$ tal que $\|u_\varepsilon\|_{L^\infty} \geq \rho$ para $\varepsilon > 0$ pequeno. Observamos que pela Proposição 5.5 existe $\{y_\varepsilon^j\} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\varepsilon y_\varepsilon^j \in \mathcal{M}_j^{2\beta}$ e para qualquer sequência $\varepsilon_n \to 0$ existem $x_j \in \mathcal{M}_j$ e $U_j \in \mathbf{S}_j$ satisfazendo

$$\varepsilon_n y_{\varepsilon_n}^j \to x_j \quad \text{e} \quad \|u_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_{\varepsilon_n}^j)U_j(\cdot - y_{\varepsilon_n}^j)\|_{\varepsilon_n} \to 0,$$

e daí

$$\|u_{\varepsilon_n}\|_{L^2(\mathbb{R}^N \setminus \Omega_{\varepsilon_n})} + \sum_{j=1}^{l} \|u_{\varepsilon_n} - \varphi_{\varepsilon_n}(\cdot - y_{\varepsilon_n}^j)U_j(\cdot - y_{\varepsilon_n}^j)\|_{L^2(\Omega_{\varepsilon_n}^j)} \to 0.$$

Consequentemente, usando (5.11), dado $\sigma > 0$ existem $R > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tais que

$$\sup_{\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)} \int_{\Omega_\varepsilon^j \setminus B(0,R)} u_\varepsilon^2(x + y_\varepsilon^j)\,\mathrm{d}x \leq \sigma. \tag{5.30}$$

Com isto provamos o decaimento exponencial de $u_\varepsilon(\cdot + y_\varepsilon^j)$ para $j \in \{1, \ldots .l\}$ e como no Capítulo 3 concluímos a prova do Teorema 5.1.

REFERÊNCIAS

[1] M. J. Alves, P. C. Carrião e O. H. Miyagaki, *Soliton solutions to a class of quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}$, Adv. Nonlinear Stud. **7** (2007), 579-597.

[2] C. O. Alves, J. M. do Ó e M. A. S. Souto, *Local mountain-pass for a class of elliptic problems in* $\mathbb{R}^N$ *involving critical growth*, Nonlinear Anal. **46** (2001), 495-510.

[3] C. O. Alves, G. M. Figueiredo e M. F. Furtado, *Multiplicity of solutions for elliptic systems via local mountain pass method*, Commun. Pure Appl. Anal. **8** (2009), 1745-1758.

[4] C. O. Alves, O. H. Miyagaki e S. H. M. Soares, *On the existence and concentration of positive solutions to a class of quasilinear elliptic problems on* $\mathbb{R}$, to appear.

[5] C. O. Alves, e S. H. M. Soares, *Existence and concentration of positive solutions for a class of gradient systems*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **12** (2005), 437-457.

[6] A. Ambrosetti e P. H. Rabinowitz, *Dual variational methods in critical point theory and applications*, J. Functional Analysis 14 (1973), 349-381.

[7] A. Ambrosetti e Z.-Q. Wang, *Positive solutions to a class of quasilinear elliptic equation on* $\mathbb{R}$, Discrete Contin. Dyn. Syst. **9** (2003), 55-68.

[8] H. Berestycki, T. Gallouët e O. Kavian, *Equations de Champs scalaires euclidens non linéaires dans le plan*, C.R. Acad. Sci; Paris Ser. I Math., **297** (1983), 307-310 and Publications du Laboratoire d'Analyse Numérique, Université de Paris VI, (1984).

[9] H. Berestycki e P. -L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313-345.

[10] H. Berestycki e P. -L. Lions, *Nonlinear scalar field equations. II*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 347-375.

[11] L. Boccardo e F. Murat, *Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations*, Nonlinear Anal. **19** (1992), 581-597.

[12] H. Brezis e E. Lieb, *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 88 (1983) 486-490.

[13] H. Brezis e E. Lieb, *Minimum action solutions of some vector field equations*. Comm. Math. Phys. **96** (1984), 97-113.

[14] J. Byeon, *Existence of large positive solutions of some nonlinear elliptic equations on singularly perturbed domains*, Comm. Partial Differential Equations **22** (1997), 1731-1769.

[15] J. Byeon e L. Jeanjean, *Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity*, Arch. Rational Mech. Anal. **185** (2007), 185-200.

[16] J. Byeon e L. Jeanjean, *Multi-peak standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **19** (2007), 255-269.

[17] J. Byeon e L. Jeanjean, *Erratum: "Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity"[Arch. Ration. Mech. Anal. 185 (2007), no. 2, 185-200; MR2317788]*, Arch. Rational Mech. Anal. **190** (2008), 549-551.

[18] J. Byeon, L. Jeanjean e M. Maris, *Symmetry and monotonicity of least energy solutions*, Calc. Var. Partial Differential Equations **36** (2009), 481-492.

[19] J. Byeon, L. Jeanjean e K. Tanaka, *Standing waves for nonlinear Schrödinger equations with a general nonlinearity: one and two dimensional cases*, Comm. Partial Differential Equations **33** (2008), 1113-1136.

[20] J. Byeon e Z. -Q. Wang, *Standing waves with a critical frequency for nonlinear Schrödinger equations. II*, Calc. Var. Partial Differential Equations **18** (2003), 207-219.

[21] D. Cassani, J. M. do Ó e A. Moameni, *Existence and concentration of solitary waves for a class of quasilinear Schrödinger equations*, Commun. Pure Appl. Anal. **9** (2010), 281-306.

[22] M. Colin, *Stability of stationary waves for a quasilinear Schrödinger equation in space dimension 2*, Adv. Differential Equations **8** (2003), 1-28.

[23] M. Colin e L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach*, Nonlinear Anal. **56** (2004), 213-226.

[24] V. Coti-Zelati e P. H. Rabinowitz, *Homoclinic orbits for second order Hamiltonian systems possessing superquadratic potentials*, J. Amer. Math. Soc. **4**, (1991), 693-727.

[25] M. del Pino e P. L. Felmer, *Local mountain pass for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), 121-137.

[26] J. M. do Ó, *On existence and concentration of positive bound states of p-Laplacian equations in $\mathbb{R}^N$ involving critical growth*, Nonlinear Anal. **62** (2005), 777-801.

[27] J. M. do Ó e E. S. Medeiros, *Remarks on least energy solutions for quasilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^N$*, Electron J. Differential Equations (2003), 1-14.

[28] J. M. do Ó, O. Miyagaki e S. Soares, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations: the critical exponential case*, Nonlinear Anal. **67** (2007), 3357-3372.

[29] J. M. do Ó, A. Moameni e U. Severo, *Semi-classical states for quasilinear Schrödinger equations arising in plasma physics*, Comm. Contemp. Math. **11** (2009), 547-583.

[30] J. M. do Ó e U. Severo, *Quasilinear Schrödinger equations involving concave and convex nonlinearities*, Commun. Pure Appl. Anal. **8** (2009), 621-644.

[31] A. Floer e A. Weinstein, *Nonspreading wave packets for the cubic Schrödinger equation with a bounded potential*, J. Funct. Anal. **69** (1986), 397-408.

[32] D. Gilbarg e N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order.* Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[33] E. Gloss, *Existence and concentration of bound states for a p-Laplacian equation in* $\mathbb{R}^N$, Adv. Nonlinear Stud. **10** (2010), 273-296.

[34] E. Gloss, *Existence and concentration of positive solutions for a quasilinear equation in* $\mathbb{R}$, preprint.

[35] E. Gloss, *Existence and concentration of positive solutions for a quasilinear equation in* $\mathbb{R}^N$, preprint.

[36] E. Gloss, *Standing waves for a system of nonlinear Schrödinger equations in* $\mathbb{R}^N$, preprint.

[37] L. Gongbao e Y. Shusen, *Eigenvalue problems for quasilinear elliptic equations on* $\mathbb{R}^N$, Comm. Partial Differential Equations **14** (1989), 1291-1314.

[38] C. Gui, *Existence of multi-bump solutions for nonlinear Schrödinger equations via variational method*, Comm. Partial Differential Equations **21** (1996), 787-820.

[39] L. Jeanjean e M. Squassina, *Existence and symmetry of least energy solutions for a class of quasilinear elliptic equation*, to appear in Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.

[40] L. Jeanjean e K. Tanaka, *A note on a mountain pass characterization of least energy solutions*, Advanced Nonlinear Studies **3** (2003), 461-471.

[41] L. Jeanjean e K. Tanaka, *A remark on least energy solutions in* $\mathbb{R}^N$, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 2399-2408.

[42] P. -L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. II*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **1** (1984), 223-283.

[43] J. Liu, Y. Wang e Z.-Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*, J. Differential Equations **187** (2003), 473-493.

[44] J. Q. Liu e Z.-Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations,I*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), 441-448.

[45] M. Maris, *On the Symmetry of Minimizers*, Arch. Rational Mech. Anal. **192** (2009), 311-330.

[46] V. Moroz e J. Van Schaftingen, *Semiclassical stationary states for nonlinear Schrödinger equations with fast decaying potentials*, Calc. Var. Partial differential Equations, **37** (2010), 1-27.

[47] M. Poppenberg, K. Schmitt e Z.-Q. Wang, *On the existence of soliton solutions to quasilinear Schrödinger equations*, Calc. Var. Partial differential Equations, **14** (2002), 329-344.

[48] P. H. Rabinowitz, *On a class of nonlinear Schrödinger equations*, Z. Angew. Math. Phys. **43** (1992), 272-291.

[49] U. B. Severo, *Multiplicity of solutions for a class of quasilinear elliptic equations with concave and convex term in* $\mathbb{R}$, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. **5** (2008), 1-16.

[50] W. A. Strauss, *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. **55** (1977), 149-162.

[51] W. A. Strauss, *Mathematical aspects of classical nonlinear field equations*, No. 98 in Lecture Notes in Physics, Springer, Berlin-New York, (1979).

[52] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems*, Springer-Verlag, (1990).

[53] N. S. Trudinger, *On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. **20** (1967), 721-747.

[54] F. A. van Heerden e Z.-Q. Wang, *Schrödinger type equations with asymptotically linear nonlinearities*, Differential Integral Equations **16** (2003), 257-280.

[55] X. Wang, *On concentration of positive bound states of nonlinear Schrödinger equations*, Comm. Math. Phys. **153** (1993), 229-244.