

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

# O Grau Topológico de Brouwer e Aplicações

por

José Carlos de Albuquerque Melo Júnior

Dezembro/2010  
João Pessoa - PB

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Curso de Graduação em Matemática

# O Grau Topológico de Brouwer e Aplicações

por

**José Carlos de Albuquerque Melo Júnior**

sob orientação do

**Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó**

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática.

Dezembro/2010

João Pessoa - PB

# O Grau Topológico de Brouwer e Aplicações

por

**José Carlos de Albuquerque Melo Júnior**

Monografia apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Graduado em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó -UFPB (Orientador)**

---

**Prof. Dr. Uberlandio Batista Severo - UFPB**

---

**Prof. Dr. Eduardo Gonçalves dos Santos - UFPB**

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Curso de Graduação em Matemática

**Dezembro/2010**

# Agradecimentos

- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó que, orientou o presente trabalho com sabedoria, multiplicando meus conhecimentos, me motivando a seguir em frente e transmitindo sua experiência de forma sábia e precisa.
- Aos meus pais José Carlos de Albuquerque Melo e Júlia Maria Gondim de Albuquerque e as minhas irmãs Juliana Gondim de Albuquerque e Jaqueline Gondim de Albuquerque, por me apoiarem incansavelmente e permitirem que tudo isto aconteça. Aos meus primos, considerados irmãos, Tenner Lísias Gondim Dias e Lívia Gondim de Oliveira, por me incentivarem e estarem comigo nos momentos mais difíceis.
- Aos meus amigos Jonnatas Evaristo dos Santos, Leonardo Costa Mitzcun, Antônio Arruda das Neves Júnior, Caio Quintino Correia, Diego Ferraz de Souza, por serem quem são e me ajudarem diretamente ou indiretamente para a conclusão deste trabalho. Agradeço especialmente ao Eudes Leite, por dedicar seu tempo em me ajudar, transmitindo seu conhecimento com paciência e precisão, tornando-se peça fundamental para a conclusão deste trabalho.
- Ao companheiro e amigo Gustavo da Silva Araújo, por estar comigo desde o início, criando um rígido alicerce que resultará em longos anos de estudo e amizade.
- Aos professores do Departamento de Matemática - UFPB, por estarem sempre presentes. Especialmente ao professor Eduardo Gonçalves dos Santos, que apesar de todos os compromissos profissionais, sempre nos dedicou tempo e ajuda quando necessário.

- A Vivian Correia Arruda, por estar comigo a 3 anos, me ajudando e fortalecendo, provando cada dia que estou com a pessoa certa e sendo a principal responsável por estar onde estou. Obrigado.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos a Teoria do Grau Topológico de Brouwer. Primeiramente, estudamos alguns resultados de Análise no  $\mathbb{R}^n$ , que serão importantes ferramentas no estudo do Grau. Logo após, associamos a cada tripla  $(f, \Omega, y)$ , onde  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$  e  $f$  uma função contínua em  $\Omega$ , um número inteiro  $d(f, \Omega, y)$ . Esta função denominada grau, através de suas propriedades e consequências, nos permite encontrar respostas significativas quanto à existência, unicidade ou multiplicidade de soluções da equação  $f(x) = y$ . Sequencialmente, construímos tal função e estudamos algumas aplicações da teoria desenvolvida, dentre elas, o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

# Abstract

In this work, we study the Brouwer Topological Degree Theory. First, we study some results about Analysis in  $\mathbb{R}^n$ , which are important tools on the study of the degree. After that, we associate each triple  $(f, \Omega, y)$ , where  $\Omega \subset \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$  and  $f$  a continuous function in  $\Omega$ , to a integer number  $d(f, \Omega, y)$ . This function, known as degree, through its properties and consequences, allows us to find meaningful answers about the existence, uniqueness or multiplicity of solutions for the equation  $f(x) = y$ . After that, we construct such a function and study some applications of the theory developed. Among them, the Brouwer Fixed Point Theorem.

# Sumário

Notações	ix
Introdução	xi
Preliminares	xiii
0.1 Aplicações Diferenciáveis . . . . .	xiii
0.2 Integrais Múltiplas . . . . .	xv
0.3 Resultados Diversos . . . . .	xviii
<b>1 Unicidade do Grau</b>	<b>1</b>
1.1 Valores Singulares e Regulares . . . . .	1
1.2 Redução ao Caso Linear . . . . .	6
1.3 O Caso Linear . . . . .	9
<b>2 Construção do Grau</b>	<b>16</b>
2.1 O Caso Regular . . . . .	16
2.2 Do Caso Regular ao Singular . . . . .	21
2.3 De $\bar{C}^2(\Omega)$ para $C(\bar{\Omega})$ . . . . .	23
2.4 Propriedades do Grau . . . . .	27
2.5 A Fórmula Produto . . . . .	29
<b>3 Aplicações do Grau</b>	<b>35</b>

---

3.1	Ponto Fixo de Brouwer . . . . .	35
3.2	Teorema do Ouriço . . . . .	40
3.3	Teorema de Borsuk . . . . .	42
<b>A</b>	<b>- Apendice</b>	<b>46</b>
A.1	Aplicações Diferenciáveis . . . . .	46
A.2	Integrais Múltiplas . . . . .	48
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>

# Notações

## Notações Gerais

$id$	aplicação identidade,
$gf$	$(gf)(x) = g(f(x))$ ,
$\Omega$	subconjunto aberto do $R^n$ ,
$\bar{\Omega}$	fecho de $\Omega$ ,
$\partial\Omega$	fronteira de $\Omega$ ,
$C(\Omega)$	conjunto das funções contínuas em $\Omega$ ,
$C^k(\Omega)$	conjunto das funções $k$ vezes diferenciáveis,
$B(x, r)$	bola de centro $x$ e raio $r$ ,
$\overline{B(x, r)}$	bola fechada de centro $x$ e raio $r$ ,

## Notações

---

$$\varrho(x, \Omega) = \inf\{|x - y| : y \in \Omega\} \quad x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \Omega \subset \mathbb{R}^n,$$

$$\|f\|_0 = \max_A |f(x)| \quad f \in C(A) \text{ e } A \subset \mathbb{R}^n \text{ compacto},$$

$$\operatorname{sgn} f \quad \text{sinal da função } f,$$

$$\operatorname{conv} D \quad \text{fecho convexo de } D,$$

$$\overline{C}^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$$

$$\overline{C}^\infty(\Omega) = \bigcap_{k \geq 1} C^k(\Omega)$$

$$|x| = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$$

# Introdução

A Teoria do grau tem sido desenvolvida como método para estudar o conjunto das soluções da equação

$$f(x) = y, \tag{1}$$

visando obter informações significativas quanto à existência, unicidade ou multiplicidade de tais soluções. Consideremos  $f$  uma função contínua definida num subconjunto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  com valores em  $\mathbb{R}^n$  e  $y$  um elemento de  $\mathbb{R}^n$ . Desta maneira, associamos cada tripla  $(f, \Omega, y)$  a um número inteiro  $d(f, \Omega, y)$ , satisfazendo as seguintes propriedades:

- (d1)  $d(id, \Omega, y) = 1$ , para todo  $y \in \Omega$ ;
- (d2)  $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y)$ , sempre que  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  sejam subconjuntos abertos e disjuntos de  $\Omega$  tais que  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ ;
- (d3)  $d(h(t, \cdot), \Omega, y(t))$  independe de  $t \in J = [0, 1]$  sempre que  $h : J \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  e  $y : J \rightarrow \mathbb{R}^n$  forem contínuas e  $y(t) \notin h(t, \partial\overline{\Omega})$ .

A propriedade (d1) é bastante natural, pois espera-se que a função  $f(x) = y$  tenha uma única solução  $x = y$ . A propriedade (d2) faz uma associação do grau no conjunto  $\Omega$  em relação a dois subconjuntos  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  de  $\Omega$ , que satisfazem determinadas condições. A propriedade (d3) nos diz que se uma função complicada  $f$  puder ser continuamente deformada em  $g$ , sem que nesse processo ocorram soluções na fron-

teira de  $\Omega$ , o cálculo de  $d(f, \Omega, y)$  pode ser feito por  $d(g, \Omega, y)$ .

Antes de iniciarmos o estudo do grau, de forma a facilitar a leitura, faremos uma seção preliminar com alguns resultados de análise no  $\mathbb{R}^n$ . No Capítulo 1, mostraremos que se existe uma função satisfazendo as propriedades enunciadas acima, então tal função é única. O Capítulo 2 é destinado à construção desta função denominada grau e às suas propriedades. O grau topológico de Brouwer tem uma ampla abordagem, sendo ilustrada em diversas aplicações, no Capítulo 3 exibimos algumas delas. Finalmente, acrescentamos um apêndice onde demonstramos alguns resultados da seção preliminar e indicamos onde encontrar as demonstrações restantes, visando ampliar o conhecimento do leitor ainda não familiarizado com a análise no  $\mathbb{R}^n$ .

## Preliminares

Fazemos aqui um apanhado de resultados importantes da análise que se fazem necessários para uma leitura mais didática e compreensiva; isto porque, enunciados numa parte em especial, evitam interrupções nas demonstrações dos teoremas situados nos capítulos específicos. Os resultados mais usados e considerados mais importantes, serão comentados novamente e demonstrados no Apêndice.

### 0.1 Aplicações Diferenciáveis

**Definição 1** *Uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ , definida no aberto  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ , diz-se diferenciável no ponto  $a \in U$  quando existir uma aplicação linear  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  tal que*

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T(h)}{|h|} = 0.$$

A transformação linear  $T$  é denotada por  $f'(a)$  e é chamada a derivada de  $f$  em  $a$ . Uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diz-se diferenciável no aberto  $U \subset \mathbb{R}^n$  quando é diferenciável em todos os pontos de  $U$ . Em certas situações, é conveniente considerar a matriz representante de  $f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  relativamente as bases canônicas de  $\mathbb{R}^n$  e  $\mathbb{R}^m$ . Esta matriz é chamada de **matriz Jacobiana** de  $f$  em  $a$  e representada por  $J_f(a)$ .

**Definição 2** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um aberto e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função diferenciável em  $x_0 \in \Omega$ . Dizemos que  $a$  é um ponto crítico de  $f$  se  $J_f(a) = 0$ , caso contrário dizemos que  $a$  é um ponto regular de  $f$ . Um ponto  $y \in \mathbb{R}^n$  é chamado valor singular de  $f$  se for imagem de algum ponto crítico de  $f$ , caso contrário é chamado de valor regular. Denotaremos por  $S_f$  o conjunto de todos os pontos críticos de  $f$ , isto é,  $S_f = \{x \in U : J_f(x) = 0\}$ .*

**Definição 3** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Para cada  $i = 1, \dots, n$ , definimos a  $i$ -ésima derivada parcial de  $f$  em  $a \in U$ , e denotamos por  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ , pelo seguinte limite*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(a_1, \dots, a_n)}{h}$$

*caso exista.*

**Definição 4** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Dizemos que uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  é de classe  $C^1$  em  $U$ , se as derivadas parciais  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, \dots, n$ , existem e são contínuas em  $U$ .*

**Teorema 1 (Desigualdade do Valor Médio)** *Dado  $U \subset \mathbb{R}^n$ , seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto  $(a, a + v)$  e tal que sua restrição ao segmento fechado  $[a, a + v] \subset U$  seja contínua. Se  $|f'(x)| \leq M$  para todo  $x \in (a, a + v)$  então  $|f(a + v) - f(a)| \leq M|v|$ .*

**Teorema 2 (Regra da Cadeia)** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  abertos,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável no ponto  $a$ , com  $f(U) \subset V$ , e  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  diferenciável no ponto  $f(a)$ . Então  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável no ponto  $a$ , com a derivada dada por  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .*

**Definição 5** *Sejam  $U$  e  $V$  abertos do  $\mathbb{R}^n$  e  $f : U \rightarrow V$  uma bijeção. Dizemos que  $f$  é um difeomorfismo se  $f$  é uma bijeção diferenciável cuja inversa  $f^{-1}$  é também diferenciável. Dizemos que  $f$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$  se  $f$  e  $f^{-1}$  são de classe  $C^1$ .*

**Teorema 3 (Teorema da Aplicação Implícita)** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$  um conjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Suponha que  $(a, b) \in U$  é tal que  $f(a, b) = 0$  e  $J_{\frac{\partial f}{\partial y}}(a, b) \neq 0$ . Então existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $a$  e uma única função  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$ , tal que  $g(a) = b$  e  $f(x, g(x)) = 0, \forall x \in V$ .*

**Teorema 4** *Seja  $\mathbb{R}^n \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  continuamente diferenciável de forma que  $h(t_0, x_0) = 0$  e  $J_{h(t_0, \cdot)} \neq 0$  para algum  $(t_0, x_0) \in \mathbb{R}^n \times \Omega$ . Então existe um intervalo  $(t_0 - r, t_0 + r)$ , uma bola  $B_\delta(x_0) \subset \Omega$  e uma função contínua  $z : (t_0 - r, t_0 + r) \rightarrow B_\delta(x_0)$  tal que  $z(t_0) = x_0$  e  $x(t)$  é a única solução de  $h(t, x) = 0$  em  $B_\delta(x_0)$ .*

**Teorema 5 (Teorema da Aplicação Inversa)** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Se, para  $a \in U$ ,  $J_f(a) \neq 0$ , então existem abertos  $V$  e  $W$ , contendo  $a$  e  $f(a)$ , respectivamente, tais que  $f$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$  entre  $V$  e  $W$ . Além disso, para  $y \in W$  temos*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

## 0.2 Integrais Múltiplas

Um bloco  $m$ -dimensional é um produto cartesiano

$$A = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i] = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_m, b_m] \subset \mathbb{R}^m$$

de  $m$  intervalos compactos. Os vértices do bloco  $A$  são os pontos  $p = (c_1, \dots, c_m)$  onde, para cada  $i = 1, 2, \dots, m$ , tem-se  $c_i = a_i$  ou  $c_i = b_i$ .

**Definição 6** *Uma partição do intervalo  $[a, b]$  é um subconjunto finito  $P \subset [a, b]$  tal que  $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ .*

**Definição 7** *Uma partição do bloco  $A = \prod_{i=1}^m [a_i, b_i]$  é um conjunto finito do tipo  $P = P_1 \times \dots \times P_m$ , onde cada  $P_i$  é uma partição do intervalo  $[a_i, b_i]$ .*

**Definição 8** *O volume  $m$  – dimensional do bloco  $A$  é dado por*

$$\text{vol}.A = \prod_{i=1}^m (b_i - a_i).$$

**Definição 9** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  um bloco,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada e  $P$  uma partição de  $A$ . Para cada sub-bloco  $S$  de  $P$ , denotamos  $m_s = \inf \{f(x); x \in S\}$  e  $M_s = \sup \{f(x); x \in S\}$ , e as somas superiores e inferiores de  $f$ , relativamente a partição  $P$ , respectivamente por*

$$L(f; P) = \sum_S m_s \cdot \text{vol}(S) \quad e \quad U(f; P) = \sum_S M_s \cdot \text{vol}(S),$$

onde  $\text{vol}(S)$  é o volume de  $S$ .

Vale observar que,  $L(f; P) \leq U(f; P)$ . De fato, vale ainda uma propriedade mais forte: para quaisquer partições  $P$  e  $Q$  do retângulo  $A$ , tem-se  $L(f; P) \leq U(f; Q)$ .

**Definição 10** *Dada uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , limitada no bloco  $A$ , definimos a integral inferior, que denotaremos por  $\int_A f(x)dx$  e a integral superior, denotada por  $\overline{\int}_A f(x)dx$ , como sendo*

$$\int_A f(x)dx = \sup_P \{L(f; P)\} \quad e \quad \overline{\int}_A f(x)dx = \inf_P \{U(f; P)\},$$

em que o supremo e o ínfimo acima estende-se a todas as partições  $P$  do retângulo  $A$ .

Diremos que  $f$  é *integrável* quando a sua integral inferior for igual à sua integral superior. Definiremos então a *integral* de  $f$  como

$$\int_A f(x)dx = \int_A f(x)dx = \overline{\int}_A f(x)dx.$$

**Teorema 6** *A fim de que uma função limitada  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  seja integrável no bloco  $A \subset \mathbb{R}^m$ , é necessário e suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, se possa obter uma partição  $P$  de  $A$  tal que*

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

Segue como corolário deste Teorema que toda função contínua  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável.

**Teorema 7 (Teorema Fundamental do Cálculo)** *Seja  $f : [a, a + h] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho com derivada integrável. Então*

$$\int_a^{a+h} f'(t)dt = f(a+h) - f(a).$$

**Definição 11** *Diremos que um conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  tem medida nula, e indicamos por  $\text{med.}(A) = 0$ , quando, para todo  $\epsilon > 0$  dado, existem retângulos abertos  $B_1, \dots, B_k, \dots$  do  $\mathbb{R}^n$ , tais que*

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \quad e \quad \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(B_i) < \epsilon.$$

Segue três proposições sobre conjuntos de medida nula:

**Proposição 1** *Todo subconjunto de um conjunto de medida nula tem também medida nula.*

**Proposição 2** *Seja  $X = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto enumerável. Então  $X$  tem medida nula.*

**Proposição 3** *Toda reunião enumerável de conjuntos de medida nula é ainda um conjunto de medida nula.*

Segue um teorema que será utilizado na demonstração do Lema de Sard.

**Teorema 8** *Todo conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito como uma união enumerável de cubos fechados que se interceptam somente e possivelmente na fronteira.*

**Teorema 9** *Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , limitada no retângulo  $A \subset \mathbb{R}^n$ , é integrável se, e somente se, o conjunto  $D_f$  dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.*

**Teorema 10 (Teorema de Fubini)** *Seja  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  integrável no produto dos blocos  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$ . Para todo  $x \in A$ , seja  $f_x : B \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_x(y) = f(x, y)$  e ponhamos*

$$\varphi(x) = \int_{\underline{B}} f_x(y) dy, \quad \psi(x) = \int_{\overline{B}} f_x(y) dy.$$

*As funções  $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$ , assim definidas, são integráveis, com*

$$\int_A \varphi(x) dx = \int_A \psi(x) dx = \int_{A \times B} f(x, y) dx dy,$$

*isto é,*

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A dx \left( \int_{\underline{B}} f(x, y) dy \right) = \int_A dx \left( \int_{\overline{B}} f(x, y) dy \right).$$

### 0.3 Resultados Diversos

**Definição 12** *Um conjunto  $\Omega$  é simétrico com respeito à origem se, e somente se,  $\Omega = -\Omega$ , ou seja, se sempre que tivermos  $x \in \Omega$  ocorrer também  $-x \in \Omega$ .*

**Definição 13** *Um caminho em  $\mathbb{R}^n$  é uma aplicação  $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ , cujo domínio é um intervalo  $I \subset \mathbb{R}$ .*

**Definição 14** *Um conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$  é dito conexo quando admite apenas a cisão trivial, ou seja,  $X = A \cup B$ , com  $A$  e  $B$  disjuntos e abertos em  $X$ , implica  $A = \emptyset$  ou  $B = \emptyset$ .*

**Definição 15** *Sejam  $x \in X$  e  $X \subset \mathbb{R}^n$ . A componente conexa do ponto  $x$  no conjunto  $X$  é a reunião  $C_x$  de todos os subconjuntos conexos de  $X$  que contêm o ponto  $x$ .*

**Definição 16** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^n$  um aberto. Uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  é dita localmente injetiva se todo ponto  $x \in U$  possui uma vizinhança  $V$  tal que  $f|_V$  é injetiva.*

A definição abaixo é de extrema importância e será utilizada inúmeras vezes. Ela nos diz respeito à possibilidade de deformar um caminho continuamente. Estas questões são tratadas na teoria da *homotopia*.

**Definição 17** *Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow X$  caminhos no conjunto  $X \subset \mathbb{R}^n$ , com o mesmo domínio  $[a, b]$  e com as mesmas extremidades, isto é,  $f(a) = g(a)$  e  $f(b) = g(b)$ . Uma homotopia entre  $f$  e  $g$  é uma aplicação contínua  $h : [a, b] \times J \rightarrow X$ , onde  $J = [0, 1]$ , tal que  $h(s, 0) = f(s)$ ,  $h(s, 1) = g(s)$ ,  $h(a, t) = f(a) = g(a)$  e  $h(b, t) = f(b) = g(b)$  para quaisquer  $s \in [a, b]$  e  $t \in [0, 1]$ .*

Apresentaremos agora um importante e útil teorema sobre extensão de funções contínuas:

**Teorema 11** *Seja  $A \subset \mathbb{R}^n$  compacto e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  contínua. Então existe uma função contínua  $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\tilde{f}(x) = f(x)$  para  $x \in A$ .*

$$f(\tilde{x}) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in A \\ \left( \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) \right)^{-1} \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) f(a^i), & \text{se } x \notin A \end{cases}$$

**Definição 18** *Seja  $f : D \rightarrow D$  uma função contínua. Dizemos que  $x \in D$  é um ponto fixo para  $f$  se  $f(x) = x$ .*

**Definição 19** *Dizemos que  $D \subset \mathbb{R}^n$  é um conjunto convexo, se dados  $x, y \in D$ , temos*

$$x + \lambda(y - x) \in D \quad \lambda \in [0, 1]$$

**Definição 20** *O fecho convexo de  $D \subset \mathbb{R}^n$  é a interseção de todos os conjuntos convexos que contêm  $D$ .*

Vale observar que  $D$  é convexo se, e somente se,  $\text{conv}D = D$ .

**Lema 1** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto qualquer e  $B$  o conjunto de todas as combinações convexas de elementos de  $D$ , isto é,*

$$B = \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i : \lambda_i \in [0, 1], \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

*Nestas condições temos  $B = \text{conv}D$ .*

**Proposição 4** *Sejam  $A$  uma matriz real  $n \times n$  com  $\det A \neq 0$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  os autovalores negativos de  $A$  e  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  suas multiplicidades como zeros de  $\det(A - \lambda id)$ , assumindo que  $A$  tenha tais autovalores. Então  $\mathbb{R}^n$  é soma direta de dois subespaços  $N$  e  $M$ ,  $\mathbb{R}^n = N \oplus M$ , tais que:*

- (a)  $M$  e  $N$  são invariantes por  $A$ ;
- (b)  $A|_N$  tem somente os autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  e  $A|_M$  não tem autovalores negativos;
- (c)  $\dim N = \sum_k^m \alpha_k$ .

# Capítulo 1

## Unicidade do Grau

Neste capítulo, objetivamos provar que se existe uma função  $d$  satisfazendo as propriedades (d1) – (d3), então esta função é única, para isso, faremos sucessivas reduções a casos mais simples. A primeira seção deste capítulo apresentará conceitos e ferramentas que facilitarão o processo posteriormente. Na segunda seção, reduziremos a demonstração da unicidade do grau ao caso linear. Finalmente na terceira seção, exibiremos um resultado da álgebra linear que juntamente com os resultados antecedentes, implicará na unicidade do grau.

### 1.1 Valores Singulares e Regulares

A primeira etapa desta seção, consiste em mostrar que a função  $d$  é unicamente determinada por seus valores em funções de classe  $\overline{C}^\infty$ . Consideremos a seguinte proposição:

**Proposição 5** (a) *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  compacto,  $f \in C(A)$  e  $\varepsilon > 0$ . Então, existe uma função  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que  $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$  em  $A$ .*

(b) *Sejam  $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ ,  $\varepsilon > 0$  e  $\delta > 0$  tais que  $\Omega_\delta = \{x \in \Omega : \varrho(x, \partial\Omega) \leq \delta\} \neq \emptyset$ .*

Então, existe  $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$|f - g|_0 + \max_{\Omega_\delta} |f'(x) - g'(x)| \leq \varepsilon.$$

Seja agora  $f \in C(\overline{\Omega})$  e  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Sendo  $\partial\Omega$  compacto e  $f$  contínua, o conjunto  $f(\partial\Omega)$  é compacto e, portanto,  $\alpha = \varrho(y, f(\partial\Omega)) > 0$ . De acordo com a Proposição 1, existe  $g \in \overline{C}^\infty(\Omega)$  tal que  $|f - g|_0 < \alpha$ . Definindo  $h : [0, 1] \times \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $h(t, x) = (1 - t)f(x) + tg(x)$ , temos que  $h$  é contínua e além disso

$$\begin{aligned} |h(t, x) - y| &= |(1 - t)f(x) + tg(x) - y| \\ &= |(f(x) - y) - t(f(x) - g(x))| \\ &\geq |f(x) - y| - t|f(x) - g(x)| \\ &\geq |f(x) - y| - |f - g|_0 > 0, \end{aligned}$$

para todo  $x \in \partial\Omega$ . Assim, aplicando (d3) com  $y(t) \equiv y$ , temos que  $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$ , o que conclui a primeira etapa.

Agora apresentaremos alguns resultados, tendo como objetivo mostrar que se  $f$  satisfaz certas condições então o conjunto  $f(S_f)$  tem medida  $n$ -dimensional nula. Para isso, precisaremos de alguns resultados preliminares.

**Proposição 6** *Sejam  $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$  e  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Se  $y$  é valor regular de  $f$ , então  $f^{-1}(y)$  é um conjunto finito.*

**Demonstração:** Dividimos a demonstração desta proposição em duas partes. Primeiramente mostraremos que os pontos de  $f^{-1}(y)$  são isolados. De fato, como  $y$  é um valor regular de  $f$ , implica que  $J_f(x_0) \neq 0$ , portanto, pelo Teorema da Aplicação Inversa (Teorema 5), existe  $U = B_\varepsilon(x_0)$  tal que  $f|_U$  é um homeomorfismo. Logo, para cada  $x_0 \in f^{-1}(y)$ , podemos tomar  $U = B_\varepsilon(x_0)$  tal que  $f^{-1} \cap B_\varepsilon(x_0) = x_0$ . Concluindo, que todos os elementos de  $f^{-1}(y)$  são isolados. Agora vamos provar que  $f^{-1}(y)$  é finito, suponha que  $f^{-1}(y)$  é infinito. Logo, existe uma sequência de

pontos distintos  $(x_n) \subset \Omega$  em  $f^{-1}(y)$ , e portanto  $(x_n) \subset \bar{\Omega}$ . Como  $\bar{\Omega}$  é compacto, existe uma subsequência  $(x_{n_j}) \subset (x_n)$  tal que  $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in \bar{\Omega}$ . Como  $f$  é contínua, segue que  $x_0 \in \bar{\Omega} \cap f^{-1}(y)$ , e como  $y \notin f(\partial\Omega)$ , então  $y \in \Omega$ . Resumindo, obtemos  $(x_{n_j}) \subset f^{-1}(y)$  tal que  $x_{n_j} \rightarrow x_0 \in f^{-1}(y)$ , o que contraria o fato de  $x_0$  ser ponto isolado. Portanto,  $f^{-1}(y)$  é finito. ■

Agora apresentaremos uma proposição que será muito útil posteriormente.

**Proposição 7** *Sejam  $y_0 \in \mathbb{R}^n$  e  $f \in \bar{C}^\infty(\Omega)$  tais que  $y_0 \notin f(\partial\Omega)$ . Então existe  $\alpha > 0$  tal que*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_0) \quad \forall y \in B(y_0, \alpha).$$

**Demonstração:** Seja  $\alpha = \varrho(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$ . Então  $B(y_0, \alpha) \cap f(\partial\Omega) = \emptyset$ . Defina agora

$$h(t, x) = f(x) \quad \text{e} \quad y(t) = ty_0 + (1-t)y, \quad \text{com} \quad y \in B(y_0, \alpha) \quad \text{e} \quad t \in [0, 1].$$

Temos que:

i)  $h(t, x)$  e  $y(t)$  são contínuas;

ii)  $y(t) \notin h(t, \partial\Omega)$  para todo  $t \in [0, 1]$ , já que  $h(t, \partial\Omega) = f(\partial\Omega)$ ,  $y(t) \in B(y_0, \alpha)$  e  $f(\partial\Omega) \cap B(y_0, \alpha) = \emptyset$ .

Assim, concluímos que  $d(h(t, x), \Omega, y(t))$  independe de  $t \in [0, 1]$  e, por (d3), segue que

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y_0) \quad \forall y \in B(y_0, \alpha).$$

■

Finalmente provaremos o resultado mais importante desta seção.

**Lema 2 (Lema de Sard)** *Seja  $f \in C^1(\Omega)$  e  $S_f$  o conjunto dos pontos críticos de  $f$ . Então  $f(S_f)$  tem medida nula.*

**Demonstração:** Antes de provarmos de fato este importante teorema, faremos uma série de observações que facilitarão o entedimento da demonstração. Usaremos sempre o produto interno canônico do  $\mathbb{R}^n$ . Vale lembrar que todo aberto do  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito como uma união enumerável de cubos fechados, e a união enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula. Neste caso, é suficiente mostrar que se  $Q$  é um cubo fechado tal que  $Q \subset \Omega$  então  $f(S_f(Q))$  tem medida nula. Então, denotemos  $Q$  um cubo fechado de aresta  $l$  contido em  $\Omega$ . Vamos dividir o cubo  $Q$  em  $m^n$  subcubos de aresta  $\frac{l}{m}$  de modo que a união destes subcubos resulte no cubo  $Q$  original. Como a aplicação  $f'$  é uniformemente contínua em  $Q$ , temos que dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $\delta_1 > 0$  tal que

$$|x - \bar{x}| < \delta_1 \implies |f'(x) - f'(\bar{x})| < \varepsilon,$$

para todo  $x, \bar{x} \in Q$ , existe também  $m \in \mathbb{N}$  tal que  $\delta = \frac{l\sqrt{n}}{m} < \delta_1$ . Além disso, uma vez que  $Q$  é compacto e  $f'$  é contínua em  $Q$ , existe  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $|f'(x)| \leq c$  para todo  $x \in Q$ . Desde que o diâmetro de um cubo de aresta  $\frac{l}{m}$  é  $\frac{l\sqrt{n}}{m}$ , vemos que

$$|f'(x) - f'(\bar{x})| < \varepsilon,$$

para todo  $x, \bar{x} \in Q_k$ . Definimos agora a função  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  da forma

$$h(t) = f(\bar{x} + t(x - \bar{x})),$$

e pelo Teorema Fundamental do Cálculo (Teorema 7), podemos escrever

$$h(1) - h(0) = \int_0^1 h'(t) dt = \int_0^1 f'(\bar{x} + t(x - \bar{x}))(x - \bar{x}) dt.$$

A partir de

$$h(1) - h(0) = f(x) - f(\bar{x})$$

e

$$f'(\bar{x})(x - \bar{x}) = \int_0^1 f'(\bar{x})(x - \bar{x}) dt,$$

obtemos

$$f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}) + R(x, \bar{x}),$$

onde  $R(x, \bar{x}) = \int_0^1 [f'(\bar{x} + t(x - \bar{x})) - f'(\bar{x})](x - \bar{x}) dt$  para todo  $x, \bar{x} \in Q_k$ . Podemos ainda majorar  $|R(x, \bar{x})|$  como

$$\begin{aligned} |R(x, \bar{x})| &\leq \int_0^1 |f'(\bar{x} + t(x - \bar{x})) - f'(\bar{x})| |x - \bar{x}| dt \\ &\leq \varepsilon \int_0^1 |x - \bar{x}| dt \\ &\leq \varepsilon \delta. \end{aligned}$$

Agora supomos que  $Q_k \cap S_f \neq \emptyset$  e para  $\bar{x} \in Q_k \cap S_f$  definimos  $A = f'(\bar{x})$ ,  $\tilde{Q}_k = Q_k - \bar{x}$  e  $g : \tilde{Q}_k \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $g(y) = f(\bar{x} + y) - f(\bar{x})$ . Devemos fazer três observações, primeiro que  $|y| < \delta$  para todo  $y \in \tilde{Q}_k$ , segundo que  $f(Q_k) = g(\tilde{Q}_k) + f(\bar{x})$  e terceiro que

$$g(y) = Ay + R(y), \quad \text{com } |R(y)| = |R(\bar{x} + y, \bar{x})| \leq \varepsilon \delta$$

para todo  $y \in \tilde{Q}_k$ .

Sabemos que  $\det A = 0$  pois  $\bar{x}$  é ponto crítico, portanto o conjunto  $A(\tilde{Q}_k)$  está contido em um subespaço de dimensão  $n - 1$ . Consideremos agora  $b^1$  um vetor unitário do complemento ortogonal de  $A(\tilde{Q}_k)$ . Completando  $b^1$  a uma base ortonormal  $b^1, \dots, b^n$  de  $\mathbb{R}^n$  temos que  $g(y) = \sum_{i=1}^n \langle g(y), b^i \rangle b^i$ , onde este último somatório nada mais é do que a expressão de  $g(y)$  nessa nova base ortonormal. Portanto, observe que são válidas as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} i) \quad |\langle g(y), b^1 \rangle| &\leq |R(y)| |b^1| \leq \varepsilon \delta \\ ii) \quad |\langle g(y), b^i \rangle| &\leq |\langle Ay, b^i \rangle| + |\langle R(y), b^i \rangle| \\ &\leq c\delta + \varepsilon \delta, \end{aligned}$$

para  $i = 2, \dots, n$ . As observações feitas até aqui nos permitem concluir que  $g(\tilde{Q}_k)$  está contido num retângulo  $\tilde{J}_k$  dado por

$$\tilde{J}_k = [-\varepsilon \delta, \varepsilon \delta] \times [-c\delta - \varepsilon \delta, c\delta + \varepsilon \delta] \times \dots \times [-c\delta - \varepsilon \delta, c\delta + \varepsilon \delta],$$

que possui volume  $vol(\tilde{J}_k) = 2\varepsilon\delta[2\delta(c + \varepsilon)]^{n-1}$ . Como  $f(Q_k) = g(\tilde{Q}_k) + f(\bar{x})$ , concluímos que  $f(Q_k)$  está contido num retângulo  $J_k$  contendo  $f(\bar{x})$  e cujo volume é o mesmo de  $\tilde{J}_k$ . Finalmente, uma vez que  $S_f(Q) \subset Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_{m^n}$  temos que o conjunto dos retângulos  $J_k$  definidos acima cobre  $f(S_f(Q))$ , além disso,

$$\sum_{k=1}^{m^n} vol(J_k) = 2^n \varepsilon \delta^n m^n [c + \varepsilon]^{n-1} = 2^n \varepsilon (l\sqrt{n})^m [c + \varepsilon]^{n-1}.$$

Como  $\varepsilon > 0$  é arbitrário concluímos que  $f(S_f(Q))$  tem medida nula. ■

O Lema de Sard é de extrema importância no estudo da teoria do grau, pois a partir dele e da proposição 6, conclui-se que ao calcular  $d(f, \Omega, y)$  podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $y$  é um valor regular de  $f$ .

## 1.2 Redução ao Caso Linear

Iniciaremos esta seção apresentando um lema, decorrente de (d2), que será útil mais adiante.

**Lema 3** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado,  $f \in C(\bar{\Omega})$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  tal que  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Então:*

- (a)  $d(f, \emptyset, y) = 0$ .
- (b) Se  $\Omega_1$  é um subconjunto aberto de  $\Omega$  e  $y \notin f(\bar{\Omega} \setminus \Omega_1)$ , então  $d(f, \Omega_1, y) = d(f, \Omega, y)$ .
- (c) Se  $f \in \bar{C}^\infty(\Omega)$ ,  $y \notin f(S_f(\Omega))$  e  $f^{-1}(y) = \emptyset$ , então  $d(f, \Omega, y) = 0$ .

**Demonstração:**

- (a) Para provar o item (a), basta considerar  $\Omega_1 = \Omega$  e  $\Omega_2 = \emptyset$ , pois como  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são subconjuntos abertos e disjuntos de  $\Omega$  e  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)) = f(\partial\Omega)$ , temos pela propriedade (d2) que

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \Omega_2, y) = d(f, \Omega, y) + d(f, \emptyset, y),$$

onde concluímos que  $d(f, \emptyset, y) = 0$ .

- (b) Para provar o item (b), basta considerar novamente  $\Omega_1 = \Omega$  e  $\Omega_2 = \emptyset$ , pois pela propriedade (d2)

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y) + d(f, \emptyset, y) = d(f, \Omega_1, y).$$

- (c) Para provar o item (c), consideremos  $\Omega_1 = \Omega_2 = \emptyset$  e note que temos  $f^{-1}(y) = \emptyset$  se, e somente se,  $y \notin f(\overline{\Omega})$ . Portanto, pela propriedade (d2), segue que

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \emptyset, y) + d(f, \emptyset, y) = 0.$$

Como queríamos. ■

**Teorema 12** *Sejam  $f \in \overline{C}^\infty(\Omega)$ ,  $y \notin f(\partial\Omega \cup S_f(\Omega))$  e  $f^{-1}(y) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ . Então existe  $r > 0$  tal que*

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m d(f'(x_i), B(0, r), 0).$$

**Demonstração:** Como  $f^{-1}(y)$  é finito, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$f^{-1}(y) \subset \bigcup B(x_i, \varepsilon) \quad \text{e} \quad B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon) = \emptyset \quad \text{se} \quad i \neq j.$$

A partir da fórmula de Taylor, obtemos

$$f(x) = f(x_i) + f'(x_i)(x - x_i) + r(x - x_i), \quad \text{onde} \quad \lim_{x \rightarrow x_i} \frac{r(x - x_i)}{x - x_i} = 0. \quad (1.1)$$

Denotando  $\Omega_i = B(x_i, \varepsilon)$  temos, por extensão da propriedade (d2), que

$$d(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m d(f, B(x_i, \varepsilon), y), \quad \text{pois } y \notin f(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^m \Omega_i).$$

Nosso objetivo é mostrar que para  $\delta$  suficientemente pequeno obtemos

$$d(f, B(x_i, \delta), y) = d(f'(x_i)(x - x_i), B(x_i, \delta), 0).$$

Para isso, consideremos  $A = f'(x_i)$ , então  $A$  é inversível pois  $\det A \neq 0$  e portanto

$$|x| = |A^{-1}Ax| \leq |A^{-1}||Ax|,$$

e assim  $|Ax| \geq c|x|$  com  $c = |A^{-1}|^{-1}$ . Logo, por (1.1), dado  $\varepsilon' = \frac{c}{2}$ , existe  $\delta > 0$  tal que

$$\frac{|r(x - x_i)|}{|x - x_i|} < \frac{c}{2}, \quad \text{sempre que } |x - x_i| < \delta.$$

Assim, para  $x \in B(x_i, \delta)$ , definimos

$$y(t) = ty \quad \text{e} \quad h(t, x) = tf(x) + (1 - t)A(x - x_i),$$

e por (1.1) temos

$$h(t, x) = ty + A(x - x_i) + tr(x - x_i).$$

É fácil ver que  $y(t)$  e  $h(t, x)$  são contínuas, o nosso objetivo agora é mostrar que para qualquer  $t \in [0, 1]$  temos que  $y(t) \notin h(t, \partial B(x_i, \delta))$ . De fato, temos que  $|h(t, x) - y(t)| = |A(x - x_i) + tr(x - x_i)|$  e lembrando que  $|A(x - x_i)| \geq c|x - x_i|$  obtemos

$$\begin{aligned} |h(t, x) - y(t)| &= |A(x - x_i) + tr(x - x_i)| \\ &\geq c|x - x_i| - |r(x - x_i)| \\ &> \left(c - \frac{c}{2}\right)|x - x_i| = \frac{c}{2}\delta > 0, \end{aligned}$$

para todo  $t \in [0, 1]$  e  $|x - x_i| = \delta$ . A partir da propriedade (d3), concluímos que

$$d(f, B(x_i, \delta), y) = d(A(x - x_i), B(x_i, \delta), 0). \tag{1.2}$$

Seja agora  $r > 0$  tal que  $B(x_i, \delta) \subset B(0, r)$ . Como  $x_i$  é a única solução de  $Ax - Ax_i = 0$ , obtemos pelo item (b) do Lema 1 que

$$d(A(x - x_i), B(x_i, \delta), 0) = d(A(x - x_i), B(0, r), 0). \quad (1.3)$$

Considere  $h : [0, 1] \times B(0, r) \rightarrow \mathbb{R}^n$  definida por  $h(t, x) = A(x - tx_i)$  e  $y(t) = 0$ . Naturalmente,  $y(t)$  e  $h(t, x)$  são contínuas e, como  $|x_i| < r$ ,  $A(t - tx_i) \neq 0$  para todo  $x \in \partial B(0, r)$  e todo  $t \in [0, 1]$ . Logo,  $0 \notin h(t, \partial B(0, r))$ . Usando novamente (d3), temos

$$d(A(x - x_i), B(0, r), 0) = d(Ax, B(0, r), 0). \quad (1.4)$$

Portanto, de (1.2), (1.3) e (1.4) concluímos que

$$d(f, B(x_i, \delta), y) = d(f'(x_i), B(0, r), 0),$$

o que finaliza a demonstração. ■

### 1.3 O Caso Linear

Finalmente concluiremos a demonstração da unicidade da função  $d$ , mostrando a veracidade da igualdade  $d(A, B(0, r), 0) = \text{sgndet}A$ , onde  $A$  é a matriz associada a transformação linear com  $\det A \neq 0$ . Para isso, usaremos fortemente a Proposição 4, enunciada na seção preliminares e algumas noções de Álgebra Linear.

Como

$$\det(A - \lambda id) = (-1)^n \prod_{k=1}^m (\lambda - \lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^n (\lambda - \mu_j)^{\beta_j},$$

temos que

$$\begin{aligned}
\det A &= (-1)^n \prod_{k=1}^m (-\lambda_k)^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^n (-\mu_j)^{\beta_j} \\
&= (-1)^n \prod_{k=1}^m |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^n (-\mu_j)^{\beta_j} \\
&= (-1)^n (-1)^{n-\alpha} \prod_{k=1}^m |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^n (\mu_j)^{\beta_j} \\
&= (-1)^\alpha \prod_{k=1}^m |\lambda_k|^{\alpha_k} \prod_{j=m+1}^n (\mu_j)^{\beta_j},
\end{aligned}$$

desta forma,  $\operatorname{sgndet} A = (-1)^\alpha$ , onde  $\alpha = \sum_{k=1}^m \alpha_k = \dim N$ . Observe que se  $A$  possui apenas autovalores negativos, então  $\det(tA + (1-t)\operatorname{id}) \neq 0$  em  $[0, 1]$ , pois se  $\det(tA + (1-t)\operatorname{id}) = 0$  para algum  $t \in [0, 1]$ , deveríamos ter  $t \in (0, 1)$  tal que

$$0 = \det(tA + (1-t)\operatorname{id}) = f^n \det\left(A + \frac{1-t}{t}\operatorname{id}\right),$$

ou seja,  $\frac{t-1}{t} < 0$  é autovalor de  $A$ , o que é um absurdo. Portanto, pelas propriedades do grau (d1) e (d3), temos que

$$d(A, B(0, r), 0) = d(\operatorname{id}, B(0, r), 0) = 1 = \operatorname{sgndet} A.$$

Denotemos então  $\Omega$  o conjunto  $B(0, r)$  e consideremos apenas o caso em que  $N \neq \{0\}$ .

**Passo 1.** Suponhamos que  $\alpha = \dim N$  é par. Como  $\mathbb{R}^n = N \oplus M$ , todo elemento  $x$  de  $\mathbb{R}^n$  tem única representação da forma  $x = P_1x + P_2x$ , onde  $P_1x \in N$  e  $P_2x \in M$ . Definimos então  $P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow N$  e  $P_2 = \operatorname{id} - P_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow M$ . Assim,  $A = AP_1 + AP_2$  é uma decomposição direta de  $A$  e pela proposição 4 temos  $A(N) \subset N$  e  $A(M) \subset M$ . O próximo passo é mostrar que a homotopia

$$h(t, x) = tAx + (1-t)(-P_1x + P_2x),$$

é admissível, ou seja,  $h(t, x) \neq 0$  em  $[0, 1] \times \partial\Omega$ . De fato, observe que

$$h(0, x) = 0 \implies P_1x = P_2x,$$

e como  $P_1x = P_2x \in N \cap M = \{0\}$  segue que  $x = 0$ , e portanto  $x \notin \partial\Omega$ . Se  $h(t, x) = 0$  com  $t \in (0, 1)$  teríamos

$$AP_1x + AP_2x = \frac{1-t}{t}P_1x - \frac{1-t}{t}P_2x,$$

denotando  $\lambda = \frac{1-t}{t} > 0$  temos

$$AP_1x = \lambda P_1x \quad \text{e} \quad AP_2x = -\lambda P_2x.$$

Pelo item (b) da proposição 4, concluímos que  $x = 0$  e portanto  $x \notin \partial\Omega$ . Se caso  $h(1, x) = 0$  teríamos  $Ax = 0$ , implicando  $x = 0$ . Portanto,  $h(t, x)$  é uma homotopia admissível, e pela propriedade do grau (d3), temos

$$d(A, \Omega, 0) = d(-P_1 + P_2, \Omega, 0).$$

Como supomos inicialmente  $\alpha$  par, temos que  $\alpha = 2p$  para algum  $p \geq 1$ . Se  $p = 1$ , podemos encontrar uma matriz  $B_{\alpha \times \alpha}$  tal que  $B^2 = -id|_N$ , basta considerar a rotação por  $\pi/2$ , isto é

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

e para um caso geral, arranjamos  $p$  blocos semelhantes ao longo da diagonal principal, ou seja,  $b_{2j-1, 2j} = 1 = -b_{2j, 2j-1}$  para  $j = 1, \dots, p$  e  $b_{jk} = 0$  para os demais  $j, k$ .

Se  $v$  é um autovetor de  $B$  com autovalor  $\lambda$ , então

$$Bv = \lambda v \implies B^2v = \lambda Bv \implies -idv = \lambda^2v \implies -v = \lambda^2v \implies \lambda^2 = -1,$$

ou seja,  $B$  possui apenas autovalores complexos. O objetivo agora é encontrar homotopias entre

$$-P_1 + P_2 \longrightarrow BP_1 + P_2 \longrightarrow P_1 + P_2 = id,$$

afim de concluir que

$$d(-P_1 + P_2, \Omega, 0) = d(BP_1 + P_2, \Omega, 0) = d(id, \Omega, 0).$$

Para a primeira homotopia, consideremos a aplicação

$$h(t, x) = tBP_1x - (1 - t)p_1x + P_2x,$$

e mostremos que  $h$  é uma homotopia admissível, ou seja,  $h(t, x) \neq 0$  para  $(t, x) \in [0, 1] \times \partial\Omega$ . Se  $h(0, x) = 0$  então temos  $x = 0$ . Se  $h(1, x) = 0$  então  $BP_1x + P_2x = 0$  implicando  $P_2x = 0$  e  $BP_1x = 0$ . Como  $B$  é não-singular segue que  $P_1x = 0$ , e como as duas projeções se anulam concluímos que  $x = 0$ . Resta o caso em que  $h(t, x) = 0$  para  $t \in (0, 1)$ , deste modo

$$[tB - (1 - t)]P_1x + P_2x = 0,$$

portanto

$$P_2x = 0 \quad \text{e} \quad BP_1x = \frac{1 - t}{t}P_1x.$$

Se caso  $P_1x \neq 0$  então  $\frac{1 - t}{t}$  seria um auto valor de  $B$  o que não é possível, pois  $B$  possui apenas autovalores complexos. Assim,  $P_1x = 0$  implica  $x = 0$  e portanto  $0 \notin h(t, \partial\Omega)$  para  $t \in [0, 1]$ . Logo, as aplicações  $-P_1 + P_2$  e  $BP_1 + P_2$  são homotópicas.

Para a segunda homotopia, consideremos a aplicação

$$h(t, x) = tP_1x + (1 - t)BP_1x + P_2x.$$

Usando um raciocínio análogo ao usado na primeira homotopia, concluímos que também são homotópicas as aplicações  $BP_1 + P_2$  e  $P_1 + P_2$ . Portanto, a partir dos resultados obtidos, concluímos

$$d(A, \Omega, 0) = d(id, \Omega, 0) = 1 = (-1)^{2p} = \text{sgndet}A.$$

**Passo 2.** Consideremos agora o caso em que  $\alpha$  é ímpar, ou seja,  $\alpha = 2p + 1$  para algum  $p \geq 0$ . Seja  $\{v^1, v^2, \dots, v^\alpha\}$  uma base de  $N$ , denotemos  $N_1$  como o subespaço

gerador por  $v^1$  e  $N_2$  o subespaço gerado por  $\{v^2, \dots, v^\alpha\}$ . Então  $N = N_1 \oplus N_2$ , onde  $\dim N_1 = 1$  e  $\dim N_2 = 2p$ . Consideremos também  $\tilde{Q}_1 : N \rightarrow N_1$  e  $\tilde{Q}_2 = id|_N - \tilde{Q}_1 : N \rightarrow N_2$  as projeções sobre os subespaços em questão. Assim,  $P_1 = \tilde{Q}_1 P_1 + \tilde{Q}_2 P_1$ . Como no caso anterior, buscamos encontrar homotopias entre

$$A \longrightarrow -P_1 + P_2 \longrightarrow -\tilde{Q}_1 P_1 + B\tilde{Q}_2 P_1 \longrightarrow -\tilde{Q}_1 P_1 + \tilde{Q}_2 P_1 + P_2,$$

assim

$$d(A, \Omega, 0) = d(-Q_1 + Q_2, \Omega, 0),$$

onde  $Q_1 = \tilde{Q}_1 P_1$  e  $Q_2 = \tilde{Q}_2 P_1 + P_2$ . Observe que  $Q_1$  e  $Q_2$  são as projeções referentes à decomposição  $\mathbb{R}^n = N_1 \oplus (N_2 \oplus M)$ . Como 0 é o único zero de  $-Q_1 + Q_2$  podemos substituir  $\Omega = B(0, r)$  por qualquer conjunto aberto e limitado que contenha o 0, sem mudar o valor de  $d$ . Desta forma, dado  $\Omega \subset N_1$  aberto e limitado e  $g : \bar{\Omega} \rightarrow N_1$  contínua com  $0 \notin g(\partial\Omega)$  definimos

$$\tilde{d}(g, \Omega, 0) = d(g \circ Q_1 + Q_2, \Omega + \tilde{B}(0, r), 0),$$

e pela propriedades do grau temos:

$$(\tilde{d}1) \quad \tilde{d}(id|_{N_1}, \Omega, 0) = 1 \text{ se } 0 \in \Omega.$$

$$(\tilde{d}2) \quad \tilde{d}(g, \Omega, 0) = \tilde{d}(g, \Omega_1, 0) + \tilde{d}(g, \Omega_2, 0) \text{ sempre que } \Omega_1 \text{ e } \Omega_2 \text{ são subconjuntos abertos disjuntos de } \Omega \text{ e } 0 \notin g(\bar{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2)).$$

$$(\tilde{d}2) \quad \tilde{d}(h(t, \cdot), \Omega, 0) \text{ é independente de } t \in J = [0, 1] \text{ sempre que } h : J \times \bar{\Omega} \rightarrow N_1 \text{ é contínua e } 0 \notin h(J \times \partial\Omega).$$

**Passo 3.** Temos que  $N_1 = \{\lambda v^1 : \lambda \in \mathbb{R}\}$  e sem perda de generalidade podemos supor que  $|v^1| = 1$ . A partir do conjunto  $\Omega = \{\lambda v^1 : \lambda \in (-2, 2)\}$  definimos

$$\Omega_1 = \{\lambda v^1 : \lambda \in (-2, 0)\} \quad \text{e} \quad \Omega_2 = \{\lambda v^1 : \lambda \in (0, 2)\}.$$

Considere também a função  $f(\lambda v^1) = (|\lambda| - 1)v^1$ . Como  $f(0) = -v^1 \neq 0$  temos que  $0 \notin f(\overline{\Omega} \setminus (\Omega_1 \cup \Omega_2))$ . Daí, construímos a homotopia

$$h(t, \lambda v^1) = t(|\lambda| - 2)v^1 + v^1,$$

e observamos que como  $\partial\Omega = \{-2v^1, 2v^1\}$ , temos que  $h([0, 1] \times \partial\Omega) = \{v^1\}$ , implicando que  $h(t, \lambda v^1) \neq 0$  em  $[0, 1] \times \partial\Omega$ . Portanto, pelas propriedades do grau  $(\tilde{d}1), (\tilde{d}2)$  e  $(\tilde{d}3)$  temos que

$$0 = \tilde{d}(v^1, \Omega, 0) = \tilde{d}(f, \Omega, 0) = \tilde{d}(f, \Omega_1, 0) + \tilde{d}(f, \Omega_2, 0). \quad (1.5)$$

Observe que  $f|_{\Omega_1}(\lambda v^1) = -(\lambda + 1)v^1 = -id|_{N_1} - v^1$  possui um único zero  $-v^1 \in \Omega_1 \subset \Omega$ , de forma que

$$\tilde{d}(f, \Omega_1, 0) = \tilde{d}(-id|_{N_1} - v^1, \Omega, 0) = \tilde{d}(-id|_{N_1}, \Omega, 0), \quad (1.6)$$

onde a última igualdade segue do fato que  $h(t, \lambda v^1) = -\lambda v^1 - v^1 \neq 0$  em  $[0, 1] \times \partial\Omega$ . De forma análoga temos que

$$\tilde{d}(f, \Omega_2, 0) = \tilde{d}(id|_{N_1}, \Omega, 0). \quad (1.7)$$

Portanto, por (1.5), (1.6) e (1.7) temos que

$$\tilde{d}(id|_{N_1}, \Omega, 0) + \tilde{d}(-id|_{N_1}, \Omega, 0) = 0,$$

portanto  $\tilde{d}(-id|_{N_1}, \Omega, 0) = -1$ . Finalmente, aplicando a proposição 4, temos que

$$d(a, \Omega, 0) = \tilde{d}(-id|_{N_1}, \Omega, 0) = -1 = (-1)^{2p+1} = \text{sgndet}A,$$

como queríamos.

Agrupando todos os resultados desta seção, formulamos o seguinte teorema.

**Teorema 13 (Unicidade do Grau)** *Sejam  $\mathcal{D}$  a coleção de todos os subconjuntos abertos e limitados de  $\mathbb{R}^n$  e*

$$M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \in \mathcal{D}, f \in C(\overline{\Omega}) \text{ e } y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\}.$$

*Então existe uma única função  $d : M \rightarrow \mathbb{Z}$  satisfazendo as propriedades (d1)-(d3). Além disso, tais propriedades implicam que  $d(A, \Omega, 0) = \text{sgn det } A$  para aplicações lineares  $A$  com  $\text{det } A \neq 0$  e  $0 \in \Omega$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que existem duas funções  $d_1$  e  $d_2$  satisfazendo as propriedades do grau topológico de Brouwer. Sejam  $f \in C(\overline{\Omega})$  e  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , então pelo resultado adquirido após a Proposição 5, temos que

$$d_1(f, \Omega, y) = d_1(g, \Omega, y),$$

onde  $g \in \overline{C}^\infty(\Omega)$  e  $|f - g|_0 < \sigma(y, f(\partial\Omega))$ . Portanto, pelo Teorema 13 temos

$$d_1(g, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m d_1(g'(x_i), B(0, r), 0),$$

onde  $x_i \in f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$ . Finalmente, pelos dados obtidos nesta última seção, temos que

$$\sum_{i=1}^m d_1(g'(x_i), B(0, r), 0) = \sum_{i=1}^m \text{sgndet}.g'(x_i),$$

e portanto

$$d_1(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m \text{sgndet}.g'(x_i).$$

De forma análoga verificamos que

$$d_2(f, \Omega, y) = \sum_{i=1}^m \text{sgndet}.g'(x_i),$$

concluindo então que

$$d_1(f, \Omega, y) = d_2(f, \Omega, y).$$

■

# Capítulo 2

## Construção do Grau

Nesta seção definiremos o grau em três etapas. Na primeira, faremos uma definição restrita a valores regulares de  $f \in \overline{C}^1(\Omega)$ . Na segunda, generalizamos a primeira definição para qualquer valor de  $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ . Por fim, na terceira etapa, ampliaremos a definição do grau para sua forma mais genérica, definindo-o para  $f \in C(\overline{\Omega})$ . Começamos então definindo o grau para valores regulares.

### 2.1 O Caso Regular

Iniciamos esta seção definindo o grau para valores regulares.

**Definição 21** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado,  $f \in \overline{C}^1(\Omega)$  e  $y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega \cup S_f)$ . Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação  $f$  em relação a  $\Omega$  no ponto  $y$  como sendo:*

$$d(f, \Omega, y) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x), & \text{se } f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0, & \text{se } f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases}$$

onde  $\operatorname{sgn}$  é a função definida por

$$\operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

**Observação 1** *Uma primeira observação que deve ser constatada a partir da definição acima é a igualdade*

$$d(f, \Omega, y) = d(f - y, \Omega, 0).$$

De fato, primeiramente temos que

$$f(x) = y \Leftrightarrow f(x) - y = 0.$$

Definindo  $f(x) - y = \phi(x)$  segue que  $\phi^{-1}(\{0\}) = f^{-1}(\{y\})$ . Portanto,

$$d(f - y, \Omega, 0) = d(\phi, \Omega, 0),$$

e pela definição de grau

$$d(\phi, \Omega, 0) = \sum_{\eta_i \in \phi^{-1}(\{0\})} \text{sgn}[J_\phi(\eta_i)].$$

Como a quantidade de parcelas dos dois somatórios

$$\sum_{\eta_i \in \phi^{-1}(\{0\})} \text{sgn}[J_\phi(\eta_i)] \quad e \quad \sum_{x_i \in f^{-1}(\{y\})} \text{sgn}[J_f(x_i)]$$

são iguais e

$$\phi(\eta_i) = 0 \Leftrightarrow f(\eta_i) - y = 0 \Leftrightarrow f(\eta_i) = y,$$

temos que  $x_i = \eta_i$ . Portanto

$$d(\phi, \Omega, 0) = \sum_{x_i \in f^{-1}(\{y\})} \text{sgn}[J_f(x_i)],$$

resultando

$$d(\phi, \Omega, 0) = d(f, \Omega, y)$$

como queríamos.

Agora exibiremos um exemplo prático de como calcular o grau topológico de uma função conhecida definida em um intervalo  $\Omega$ .

**Exemplo:** Seja  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  uma aplicação definida por  $f(x) = \text{sen}(x)$  com  $\Omega = (0, \frac{5\pi}{2})$  e  $y = \frac{\pi}{4}$ . Vamos calcular o grau topológico de Brouwer de  $f$  com relação a  $\Omega$  no ponto  $y$ , ou seja,  $d(f, \Omega, y)$ .

O primeiro passo é verificar se  $d(f, (0, \frac{5\pi}{2}), \frac{\pi}{4})$  está bem definido, para isto, devemos verificar se  $y \notin f(\partial\Omega \cup S_f)$ . De fato,

$$\partial\Omega = \left\{0, \frac{5\pi}{2}\right\} \implies f(\partial\Omega) = \{0, 1\},$$

e

$$f(S_f) = \left\{x \in \left(0, \frac{5\pi}{2}\right); \cos(x) = 0\right\} = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\} \implies f(S_f) = \{-1, 1\},$$

portanto  $\frac{\pi}{4} \notin \{-1, 0, 1\}$ . É fácil observar que

$$f^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right) = \{\eta_1, \eta_2, \eta_3\},$$

e pela definição de grau

$$d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = \sum_{\eta_i \in f^{-1}\left(\left\{\frac{\pi}{4}\right\}\right)} \text{sgn}(J_f(\eta_i)).$$

Logo

$$d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = \text{sgn}(f'(\eta_1)) + \text{sgn}(f'(\eta_2)) + \text{sgn}(f'(\eta_3)),$$

portanto

$$d\left(f, \left(0, \frac{5\pi}{2}\right), \frac{\pi}{4}\right) = 1 + (-1) + 1 = 1.$$

◇

O objetivo agora é generalizar a definição de grau inserida anteriormente, abrangendo tanto valores regulares quanto valores singulares, para isso, vamos inicialmente substituir  $\sum \text{sgn}J_f(x)$  por uma integral apropriada.

**Proposição 8** *Sejam  $\Omega$ ,  $f$  e  $y$  como na Definição 6 e  $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$  a família de funções regularizantes dada por*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi_1\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

onde  $\varphi_1 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  é dado por

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} c \cdot \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right), & \text{para } |x| < 1 \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e  $c > 0$  é tal que  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_1(x) dx = 1$ . Além disso,  $\text{supp} \varphi_\varepsilon = \overline{B(0, \varepsilon)}$  e  $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1$  para todo  $\varepsilon > 0$ . Então existe  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(y, f)$  tal que

$$d(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx, \quad \text{para } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

**Demonstração:** Dividimos a demonstração em dois casos. Primeiro supomos o caso em que  $f^{-1}(y) = \emptyset$ . Assim, tomamos  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = \varrho(y, f(\overline{\Omega}))$  para obtermos  $\varphi_\varepsilon(f(x) - y) = 0$ , resultando  $d(f, \Omega, y) = 0$ . Para o caso  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ , supomos  $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_m\}$  e assim pelo Teorema da Aplicação Inversa (Teorema 5), existem bolas  $B(x_i, \delta)$  disjuntas tais que  $f|_{B(x_i, \delta)}$  é um homeomorfismo sobre uma vizinhança  $V_i$  de  $y$  e  $\text{sgn} J_f(x) = \text{sgn} J_f(x_i)$  na  $B(x_i, \delta)$ . Tomando  $r > 0$  tal que  $B(y, r) \subset \bigcap_{i=1}^m V_i$  e denotando  $U_i = B(x_i, \delta) \cap f^{-1}(B(y, r))$ , existe  $\beta > 0$  tal que

$$|f(x) - y| \geq \beta \text{ para todo } x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcap_{i=1}^m U_i.$$

Assim, temos que se  $0 < \varepsilon < \beta$  então  $\varphi_\varepsilon(f(x) - y) = 0$  para  $x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcap_{i=1}^m U_i$ , e assim

denotando  $I_f = \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx$ , temos

$$\begin{aligned} I_f &= \sum_{i=1}^m \int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) \operatorname{sgn} J_f(x) |J_f(x)| dx \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} J_f(x_i) \int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx. \end{aligned}$$

Precisamos apenas mostrar que  $\int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx = 1$  para concluir a demonstração. Para isso, observe que

(i)  $J_f(x) = J_{f-y}(x)$ , pois  $y$  é mantido constante.

(ii)  $f(U_i) - y = B(0, r)$ .

Desta forma, tomando  $\varepsilon < r$  e usando o Teorema de Mudança de Variáveis (Teorema 11), temos

$$\begin{aligned} \int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) |J_f(x)| dx &= \int_{U_i} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) |J_{f-y}(x)| dx = \int_{B(0,r)} \varphi_\varepsilon(x) dx \\ &= \int_{B(0,\varepsilon)} \varphi_\varepsilon(x) dx = 1. \end{aligned}$$

Considerando  $\varepsilon_0 = \min\{\beta, r\}$  temos que

$$\begin{aligned} I_f &= \int_{\Omega} \varphi_\varepsilon(f(x) - y) J_f(x) dx \\ &= \sum_{i=1}^m \operatorname{sgn} J_f(x_i) \\ &= \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_f(x) = d(f, \Omega, y), \quad \text{para } 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração. ■

## 2.2 Do Caso Regular ao Singular

O próximo passo é definir o grau também para valores singulares. Consideremos  $f \in \overline{C}^2(\Omega)$ ,  $y_0 \notin f(\partial\Omega)$  e  $\alpha = \varrho(y_0, f(\partial\Omega)) > 0$ , fixemos  $y_1, y_2 \in B(y_0, \alpha)$  valores regulares de  $f$  e definamos  $\delta = \alpha \max\{|y_1 - y_0|, |y_2 - y_0|\}$ . Desta forma, pela Proposição 8 obtemos  $\varepsilon < \delta$  tal que

$$d(f, \Omega, y_i) = \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(f(x) - y_i) J_f(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

O objetivo agora é mostrar que as duas integrais acima são iguais, isto é,

$$\int_{\Omega} [\varphi_{\varepsilon}(f(x) - y_2) - \varphi_{\varepsilon}(f(x) - y_1)] J_f(x) dx = 0, \quad (2.1)$$

ou seja,

$$\int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(f(x) - y_1) J_f(x) dx = \int_{\Omega} \varphi_{\varepsilon}(f(x) - y_2) J_f(x) dx.$$

Para provar a igualdade, definamos

$$w(x) = (y^1 - y^2) \int_0^1 \varphi_{\varepsilon}(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) dt.$$

Dividiremos o processo em duas partes, primeiramente mostraremos que

$$\operatorname{div} w(x) = \varphi_{\varepsilon}(f(x) - y_2) - \varphi_{\varepsilon}(f(x) - y_1).$$

Temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ (y_i^1 - y_i^2) \int_0^1 \varphi_{\varepsilon}(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) dt \right] \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_i} [(y_i^1 - y_i^2) \varphi_{\varepsilon}(x - y^1 + t(y^1 - y^2))] dt \\ &= \int_0^1 \varphi'_{\varepsilon}(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) [e_i(y_i^1 - y_i^2)] dt, \end{aligned}$$

a partir da definição de divergência temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} w(x) &= \sum_{i=1}^n \int_0^1 \varphi'_\varepsilon(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) [e_i(y_i^1 - y_i^2)] dt \\
&= \int_0^1 \left[ \varphi'_\varepsilon(x - y^1 + t(y^1 - y^2)) \left( \sum_{i=1}^n e_i(y_i^1 - y_i^2) \right) \right] dt \\
&= \int_0^1 [\varphi'_\varepsilon(x - y^1 + t(y^1 - y^2))(y^1 - y^2)] dt \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt}(\varphi_\varepsilon(g(t, x))) dt,
\end{aligned}$$

onde  $g(t, x) = x - y^1 + t(y^1 - y^2)$ . Portanto

$$\operatorname{div} w(x) = \varphi_\varepsilon(g(1, x)) - \varphi_\varepsilon(g(0, x)) = \varphi_\varepsilon(x - y^2) - \varphi_\varepsilon(x - y^1),$$

como queríamos.

Consideremos  $r = \alpha - (\delta - \varepsilon)$ , então  $\operatorname{supp} w(x) \subset \overline{B(y_0, r)}$ . De fato, se  $|x - y_0| > r$  e  $t \in [0, 1]$  temos

$$\begin{aligned}
|x - y_1 + t(y_1 - y_2)| &\geq |x - y_0| - |y_0 - y_1 + t(y_1 - y_2)| \\
&> r - |(1 - t)(y_0 - y_1) + t(y_0 - y_2)| \\
&\geq r - (1 - t)|y_0 - y_1| - t|y_0 - y_2| \\
&\geq r - \max_{i=1,2} |y_0 - y_i| = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Assim, se  $x \notin \overline{B(y_0, r)}$  temos  $|x - y_1 + t(y_1 - y_2)| > \varepsilon$ , isto é,  $\varphi_\varepsilon(x - y_1 + t(y_1 - y_2)) = 0$  para todo  $t \in [0, 1]$ . Logo,  $\operatorname{supp} w(x) \subset \overline{B(y_0, r)}$  e portanto temos  $f(\partial\Omega) \cap \operatorname{supp} w(x) = \emptyset$ . Prova-se ainda que, sob estas condições, existe  $v \in C^1(\mathbb{R}^n)$  tal que  $\operatorname{supp} v(x) \subset \Omega$  e

$$[\varphi_\varepsilon(f(x) - y_2) - \varphi_\varepsilon(f(x) - y_1)] J_f(x) = \operatorname{div} v(x) \quad \text{em } \Omega. \quad (2.2)$$

Seja então  $a > 0$  tal que  $\Omega \subset [-a, a]^n = Q$ . Temos, por (2.1) e (2.2), que

$$\begin{aligned}
\int_Q \operatorname{div} v(x) dx &= \int_\Omega \operatorname{div} v(x) dx \\
&= \int_\Omega [\varphi_\varepsilon(f(x) - y_2) - \varphi_\varepsilon(f(x) - y_1)] J_f(x) dx.
\end{aligned}$$

Por outro lado, como  $\text{supp } v \subset [-a, a]^n$ , temos

$$\int_Q \text{div} v(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{-a}^a \cdots \int_{-a}^a \left( \int_{-a}^a \frac{\partial v_i}{\partial x_i} dx_i \right) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n = 0.$$

Portanto,

$$d(f, \Omega, y_1) = d(f, \Omega, y_2),$$

como queríamos.

Portanto, conseguimos generalizar a definição 18, de modo a abranger tanto valores regulares como singulares, ou seja, podemos eliminar a hipótese  $y \notin f(S_f)$  e introduzir a definição abaixo.

**Definição 22** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado,  $f \in \overline{C}^2(\Omega)$  e  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Então, definimos*

$$d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega, y^1),$$

onde  $y^1$  é um valor regular de  $f$  tal que  $|y^1 - y| < \varrho(y, f(\partial\Omega))$  e  $d(f, \Omega, y^1)$  é dado pela Definição 18.

### 2.3 De $\overline{C}^2(\Omega)$ para $C(\overline{\Omega})$

Antes de exibirmos uma definição final do grau, apresentaremos uma proposição mostrando que o grau dado pela definição 19 é o mesmo para funções  $\overline{C}^2(\Omega)$  suficientemente próximas de uma função contínua dada.

**Proposição 9** *Sejam  $f \in \overline{C}^2(\Omega)$  e  $y \notin f(\partial\Omega)$ . Então para  $g \in \overline{C}^2(\Omega)$  existe  $\delta = \delta(f, g, y) > 0$  tal que  $d(f + tg, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$  sempre que  $|t| < \delta$ .*

**Demonstração:** A demonstração será dividida em três casos distintos.

**Caso 1.** Supomos  $f^{-1}(y) = \emptyset$ . Neste caso temos  $\gamma = \min_{x \in \overline{\Omega}} |f(x) - y| > 0$ , e assim para todo  $x \in \overline{\Omega}$  temos

$$|f(x) - y + tg(x)| \geq |f(x) - y| - |t||g(x)| \geq \gamma - |t|M > 0,$$

qualquer que seja  $t$  tal que  $|t| < \gamma/M = \delta$  e  $M = \max_{x \in \overline{\Omega}} |g(x)|$ .

**Caso 2.** Supomos agora que  $y$  é um valor regular e  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ . Deste modo,  $f^{-1}(y) = \{x^1, \dots, x^m\}$  com  $J_f(x^i) \neq 0$  para  $i = 1, \dots, m$ . Seja  $h(t, x) = f_t(x) - y$  onde  $f_t(x) = f(x) + tg(x)$ . Observe que  $h$  é de classe  $C^2$ ,  $h(0, x^i) = 0$  e  $J_{h(0, \cdot)}(x^i) = J_f(x^i) \neq 0$ , portanto, pelo Teorema da Aplicação Implícita (Teorema 3), obtemos funções contínuas  $z^i : (-r_i, r_i) \rightarrow B_{\delta_i}(x^i)$  tais que  $z^i(0) = x^i$  e  $z^i(t)$  é a única solução de  $h(t, x) = 0$  para  $t \in B_{\delta_i}(x^i)$ . Portanto, pela continuidade de  $z^i(t)$ , podemos encontrar números positivos  $\rho$  e  $r$  tais que

$$z^i : (-r, r) \rightarrow B(x^i, \rho) \text{ e } \bigcap_{i=1}^n \overline{B(x^i, \rho)} = \emptyset.$$

Observe também que o raio  $\rho$  pode ser escolhido tal que  $\text{sgn} J_f(x) = \text{sgn} J_f(x^i)$  em  $\overline{B(x^i, \rho)}$ . Portanto, denotando  $V = \bigcup_{i=1}^n B(x^i, \rho)$ , temos

$$f^{-1}(y) \cap V = \{z^1(t), \dots, z^m(t)\}.$$

A partir da expressão acima, da compacidade de  $\overline{\Omega} \setminus V$  e da unicidade de  $z^i(t)$  como solução de  $h(t, x) = 0$ , podemos encontrar  $\beta > 0$  tal que  $|f(x) - y| > \delta$  em  $\overline{\Omega} \setminus V$ . Analogamente temos

$$f_t^{-1}(y) = \{z^1(t), \dots, z^m(t)\},$$

para  $|t| < \delta_0 = \min\{r, \beta M^{-1}\}$ . Como  $J_f$  é uniformemente contínua em  $[-\delta, \delta] \times \overline{\Omega}$ , temos por definição que dado  $\varepsilon = \min\{|J_f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} > 0$ , existem  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tais que

$$|J_f(z^1) - J_{f_t}(z^2)| < \varepsilon \quad \text{onde } |t| < \delta_1 \text{ e } |z^1 - z^2| < \delta_2,$$

desta forma, podemos obter  $\delta < \delta_0$  tal que

$$|J_f(x) - J_{f_t}(x)| < \min\{|J_f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} \quad \text{para } x \in \overline{\Omega} \text{ e } |t|, \delta,$$

e assim concluímos que

$$\operatorname{sgn} J_{f_t}(z^i(t)) = \operatorname{sgn} J_f(z^i(t)) = \operatorname{sgn} J_f(x^i),$$

ou seja, de acordo com a Definição 18 segue que

$$d(f_t, \Omega, y) = d(f, \Omega, y) \quad \text{com } |t| < \delta.$$

**Caso 3.** Supomos  $y$  singular. Escolhemos então um valor regular  $y_0 \in B_{\frac{\alpha}{3}}(y)$ , onde  $\alpha = \varrho(y, f(\partial\Omega))$ , e assim, encontramos  $\delta_0 > 0$  tal que

$$d(f_t, \Omega, y_0) = d(f, \Omega, y_0) = d(f, \Omega, y) \quad \text{para } |t| < \delta_0, \quad (2.3)$$

pelo caso anterior. Desta forma, para  $x \in \partial\Omega$ , podemos fazer a majoração

$$|f(x) - y_0| \geq |f(x) - y| - |y - y_0| \geq \alpha - \frac{\alpha}{3} = \frac{2\alpha}{3},$$

e assim,

$$|f_t(x) - y_0| \geq |f(x) - y_0| - |t||g(x)| \geq \frac{2\alpha}{3} - |t||g(x)| > \frac{\alpha}{3},$$

tendo  $|t| < \frac{\alpha}{3M}$ . Portanto, temos

$$|y_0 - y| < \varrho(y_0, f_t(\partial\Omega)),$$

e pela Definição 19 segue

$$d(f_t, \Omega, y) = d(f_t, \Omega, y_0) \quad \text{para } |t| < \frac{\alpha}{3M}.$$

Logo, juntando todos os resultados obtidos e considerando  $\delta = \min\{\delta_0, \frac{\alpha}{3M}\}$ , temos

$$d(f, \Omega, y) = d(f_t, \Omega, y_0) = d(f_t, \Omega, y) \quad \text{para } |t| < \delta,$$

como queríamos. ■

Podemos então concluir que o grau é o mesmo para todas as funções  $C^2$  suficientemente próximas de uma função contínua. De fato, sejam  $f \in C(\overline{\Omega})$ ,  $y \notin f(\partial\Omega)$  e  $\alpha = \varrho(y, f(\partial\Omega))$ . Consideremos duas funções  $g, \tilde{g} \in \overline{C^2}(\Omega)$  tais que

$$|g - f|_0 < \alpha \quad \text{e} \quad |\tilde{g} - f|_0 < \alpha,$$

e definimos

$$h(t, x) = g(x) + t(\tilde{g}(x) - g(x)) \quad \text{e} \quad \varphi(t) = d(h(t, \cdot), \Omega, y),$$

para  $t \in [0, 1]$ . Observe que  $h(0, x) = g(x)$  e a partir das hipóteses temos  $g(x) \neq y$ , observe também que  $h(1, x) = \tilde{g}(x)$  e de forma análoga  $\tilde{g}(x) \neq y$ . Temos também que

$$\begin{aligned} |g(x) - \tilde{g}(x)| &= |g(x) + f(x) - f(x) - \tilde{g}(x)| \\ &\leq |g(x) - f(x)| + |\tilde{g}(x) - f(x)| \\ &< \alpha + \alpha = 2\alpha, \end{aligned}$$

desta forma, para  $t_0 \in (0, 1)$  e  $x \in \partial\Omega$  temos

$$\begin{aligned} |h(t_0, x) - y| &= |(1 - t_0)g(x) + t_0\tilde{g}(x) - y| \\ &= |(g(x) - y) - t_0(g(x) - \tilde{g}(x))| \\ &\geq |g(x) - y| - t_0|g(x) - \tilde{g}(x)| > 0. \end{aligned}$$

Portanto, para  $t_0 \in [0, 1]$  temos  $y \notin h(t_0, \partial\Omega)$  e portanto  $d(h(t_0, \cdot), \Omega, y)$  está bem definida. Assim, podemos aplicar a Proposição 9 na aplicação

$$h(t, x) = h(t_0, x) + (t - t_0)(\tilde{g}(x) - g(x)),$$

e concluir que  $\varphi(t)$  é constante em uma vizinhança de  $t_0$ , isto é,  $\varphi$  é localmente constante. Desta maneira,  $\varphi$  é contínua em  $[0, 1]$  e, como este intervalo é um conjunto

conexo,  $\varphi([0, 1])$  também é conexo. Sendo  $\varphi([0, 1]) \subset \mathbb{Z}$  concluímos que  $\varphi([0, 1])$  é constituído de apenas um ponto, isto é,  $\varphi$  é constante em  $[0, 1]$ . Em particular

$$d(g, \Omega, y) = d(\tilde{g}, \Omega, y).$$

Finalmente, exibiremos uma definição final para o grau, como consequência dos resultados expostos até o momento.

**Definição 23** *Sejam  $f \in C(\overline{\Omega})$  e  $y \in f(\partial\Omega)$ . Então definimos  $d(f, \Omega, y) = d(g, \Omega, y)$ , em que  $g \in \overline{C^2}(\Omega)$  é uma função tal que  $|g - f|_0 < \varrho(y, f(\partial\Omega))$  e  $d(g, \Omega, y)$  é dado pela Definição 19.*

## 2.4 Propriedades do Grau

Exibiremos agora algumas propriedades como consequências do estudo realizado até o momento.

**Teorema 14 (Propriedades do Grau)** *Sejam  $M = \{(f, \Omega, y) : \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ aberto e limitado, } f \in C(\overline{\Omega}) \text{ e } y \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)\}$  e  $d : M \rightarrow \mathbb{Z}$  o grau topológico. Então  $d$  satisfaz:*

- (d4)  $d(f, \Omega, y) \neq 0$  implica  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ ;
- (d5)  $d(\cdot, \Omega, y)$  e  $d(f, \Omega, y)$  são constantes em  $\{g \in C(\overline{\Omega}) : |g - f|_0 < r\}$  e  $B(y, r) \subset \mathbb{R}^n$ , respectivamente, onde  $r = \varrho(y, f(\partial\Omega))$ . Além disso,  $d(f, \Omega, \cdot)$  é constante em cada componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ ;
- (d6)  $d(g, \Omega, y) = d(f, \Omega, y)$  sempre que  $g|_{\partial\Omega} = f|_{\partial\Omega}$ ;
- (d7)  $d(f, \Omega, y) = d(f, \Omega_1, y)$  para todo subconjunto aberto  $\Omega_1$  de  $\Omega$  tal que  $y \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$ .

**Demonstração:**

- (d4) Como vimos no lema 3, se  $f^{-1}(y) = \emptyset$  então  $d(f, \Omega, y) = 0$ , portanto, pela contrapositiva, se  $d(f, \Omega, y) \neq 0$  então  $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ .
- (d5) A propriedade (d5) é dividida em duas partes. A primeira parte é uma consequência imediata da definição do grau. Para provar a segunda parte, usaremos a propriedade (d3) e vale antes ressaltar que uma componente conexa é um conjunto conexo maximal, em relação a inclusão, comparado aos demais conjuntos conexos. Queremos provar que  $d(f, \Omega, \cdot)$  é constante em cada componente conexa. De fato,  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  é um aberto, suas componentes conexas são abertos do  $\mathbb{R}^n$ , sendo portanto conexas por caminho. Portanto, se  $G$  é uma componente conexa de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  e  $y_1, y_2 \in G$ , existe uma curva contínua  $y : [0, 1] \rightarrow G$  com  $y(0) = y_1$  e  $y(1) = y_2$ . Logo, pela propriedade (d3), concluímos que  $d(f, \Omega, y_1) = d(f, \Omega, y_2)$ .
- (d6) Para esta demonstração, usaremos a propriedade (d3). Considere

$$h(t, x) = tf(x) + (1 - t)g(x), \quad \text{com } t \in [0, 1].$$

Observe que  $h(t, x)$  é uma função contínua, restando apenas verificar que  $y \notin h(t, \partial\Omega)$  para todo  $t \in [0, 1]$ . De fato, seja  $x \in \partial\Omega$ , então

$$\begin{aligned} h(t, x) &= tf(x) + (1 - t)g(x) \\ &= tf(x) + (1 - t)f(x) \\ &= f(x) \neq y, \end{aligned}$$

o que conclui a demonstração.

- (d7) Consequência imediata de (d2).

■

## 2.5 A Fórmula Produto

Apresentaremos nesta seção um importante teorema que relaciona o grau de uma aplicação composta  $gf$  com o grau de  $g$  e  $f$ . Antes de enunciarmos e provarmos o teorema, faremos duas importantes observações.

**Observação 2** *A propriedade do grau (d5) nos diz que o número inteiro  $d(f, \Omega, y)$  é o mesmo para cada  $y$  em uma mesma componente conexa  $K$  de  $\mathbb{R}^m \setminus f(\partial\Omega)$ . Desta forma, denotemos tal inteiro por  $d(f, \Omega, K)$ . Como  $f(\partial\Omega)$  é compacto, temos uma componente conexa ilimitada  $K_\infty$  de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , se  $n > 1$  e duas se  $n = 1$ . Neste último caso, denotaremos  $K_\infty$  a união destas duas componentes ilimitadas.*

**Observação 3** *Como  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  é aberto, as componentes conexas  $K_i$  são conjuntos abertos, assim, para cada  $x_i \in K_i$  encontramos  $\varepsilon_i$  tal que  $B_i = B_{\varepsilon_i}(x_i) \subset K_i$ . Como as bolas são disjuntas duas a duas, podemos escolher um ponto  $y_i$  em cada  $B_i$ , tal que todas as suas entradas são racionais. Assim, estabelecemos uma bijeção com os racionais que é enumerável, e a união de conjuntos enumeráveis é enumerável. Provando então que o conjunto das componentes conexas  $K_i$  é um conjunto enumerável.*

**Teorema 15** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto e limitado,  $f \in C(\overline{\Omega})$ ,  $g \in C(\mathbb{R}^n)$ ,  $K_i$  as componentes conexas limitadas de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  e  $y \notin (gf)(\partial\Omega)$ . Então*

$$d(gf, \Omega, y) = \sum_i d(f, \Omega, K_i) \cdot d(g, K_i, y),$$

onde somente uma quantidade finita de termos é diferente de zero.

**Demonstração:** A demonstração é bastante técnica e será dividida em três partes:

**1ª Parte.** A primeira parte consiste em mostrar que o somatório exibido no teorema é finito. De fato, como  $f(\overline{\Omega})$  é compacto, existe  $r > 0$  tal que  $f(\overline{\Omega}) \subset B(0, r)$ . Seja

$M = \overline{B(0, r)} \cap g^{-1}(y)$ . Como  $y \notin (gf)(\partial\Omega)$  segue que  $M$  é compacto, por ser uma interseção de compactos, e  $M \subset \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ . Como as componentes conexas  $K_i$  de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$  determinam uma partição de  $\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , podemos admitir a seguinte igualdade

$$\mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega) = \dot{\bigcup}_i K_i \dot{\bigcup} K_\infty.$$

Portanto, como  $M$  é compacto e  $M \subset \dot{\bigcup}_i K_i$ , existe uma cobertura finita tal que

$$M \subset K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_p \cup K_{p+1},$$

onde  $K_{p+1} = K_\infty \cap B_{r+1}(0)$ .

Logo,  $d(f, \Omega, K_{p+1}) = 0$  e para  $j \geq 2$  temos  $K_j \subset B(0, r)$  e  $g^{-1} \cap K_j = \emptyset$ , implicando  $d(g, K_j, y) = 0$ . Portanto, o somatório do enunciado do teorema é finito.

**2ª Parte.** A segunda parte consiste em demonstrar o teorema para um caso particular. Suponhamos  $y$  regular,  $f \in \bar{C}^1(\Omega)$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R}^n)$  e  $(gf)^{-1}(y \cap S_{gf}) = \emptyset$ .

A definição do grau nos diz que

$$d(gf, \Omega, y) = \sum_{x \in (gf)^{-1}(y)} J_{gf}(x),$$

observe que  $(gf)'(x) = g'(f(x))f'(x)$  implica  $\text{sgn}J_{gf}(x) = \text{sgn}J_g(f(x)) \cdot \text{sgn}J_f(x)$ , portanto

$$\sum_{x \in (gf)^{-1}(y)} \text{sgn}J_{gf}(x) = \sum_{x \in G^{-1}(y), x \in f^{-1}(x)} \text{sgn}J_g(z) \text{sgn}J_f(x),$$

podemos então escrever o somatório acima na forma

$$\sum_{x \in G^{-1}(y), x \in f^{-1}(x)} \text{sgn}J_g(z) \text{sgn}J_f(x) = \sum_{x \in f(\Omega), z \in g^{-1}(y)} \text{sgn}J_g(z) \left[ \sum_{x \in f^{-1}(z)} \text{sgn}J_f(x) \right],$$

e finalmente aplicando a definição do grau no segundo somatório, temos que

$$\sum_{x \in f(\Omega), z \in g^{-1}(y)} \text{sgn}J_g(z) \left[ \sum_{x \in f^{-1}(z)} \text{sgn}J_f(x) \right] = \sum_{x \in f(\Omega), z \in g^{-1}(y)} \text{sgn}J_g(z) \cdot d(f, \Omega, z).$$

Como  $f(\overline{\Omega}) \subset B(0, r)$ , podemos substituir  $z \in f(\Omega)$  por  $z \in \overline{B(0, r)} \setminus f(\partial\Omega)$ , tendo em vista que  $d(f, \Omega, z) = 0$  para  $z \notin f(\Omega)$ . Substituindo no somatório desenvolvido até o momento, temos

$$d(gf, \Omega, y) = \sum_{x \in g^{-1}, z \in \overline{B(0, r)} \setminus f(\partial\Omega)} \operatorname{sgn} J_g(z) \cdot d(f, \Omega, z).$$

Utilizando a propriedade do grau (d2) com as componentes conexas  $K_i$  que são disjuntas, e a primeira parte desta demonstração, temos

$$\sum_{x \in g^{-1}, z \in \overline{B(0, r)} \setminus f(\partial\Omega)} \operatorname{sgn} J_g(z) \cdot d(f, \Omega, z) = \sum_{i=1}^p \left[ \sum_{z \in K_i \cap g^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_g(z) \cdot d(f, \Omega, z) \right],$$

e aplicando a definição de grau, temos

$$\sum_{i=1}^p \left[ \sum_{z \in K_i \cap g^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_g(z) \cdot d(f, \Omega, z) \right] = \sum_{i=1}^p d(f, \Omega, K_i) \sum_{z \in K_i \cap g^{-1}(y)} \operatorname{sgn} J_g(z).$$

Pela propriedade do grau (d5), que nos diz que o grau é o mesmo número inteiro para todo  $z \in K_i$ , temos

$$d(gf, \Omega, y) = \sum_i d(f, \Omega, K_i) \cdot d(g, K_i, y).$$

Como já provamos anteriormente, a fórmula continua válida se  $(gf)^{-1}(y) \cap S_{gf} \neq \emptyset$ . Concluindo a 2ª parte da demonstração.

**3ª Parte.** Finalmente para o caso mais geral consideremos  $f \in C(\overline{\Omega})$ ,  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  e denotemos

$$S_m = \{z \in B_{r+1}(0) \setminus f(\partial\Omega) : d(f, \Omega, z) = m\}$$

e

$$N_m = \{i \in \mathbb{N} : d(f, \Omega, K_i) = m\}.$$

Primeiramente, verifiquemos que a igualdade  $S_m = \bigcup_{i \in N_m} K_i$  é verdadeira. De fato, se  $z \in B_{r+1}(0) \setminus f(\partial\Omega)$  e  $d(f, \Omega, z) = m$  então  $d(f, \Omega, K - i) = m$ , pois  $z \in K_i$

para algum  $K_i$ . Portanto, se  $z \in K_i$  com  $i \in N_m$  segue que  $z \in \bigcup_{i \in N_m} K_i$ . Por outro lado, se  $z \in \bigcup_{i \in N_m} K_i$  então  $z \in K_i$  para algum  $i \in N_m$ , implicando que  $d(f, \Omega, z) = m$ . Como  $K_i$  é uma componente conexa limitada, temos que  $K_i \subset B_{r+1} \setminus f(\partial\Omega)$ , portanto  $z \in S_m$ , o que prova a igualdade. Portanto

$$\sum_i d(f, \Omega, K_i) \cdot d(g, K_i, y) = \sum_{m \in \mathbb{N}} m \left[ \sum_{i \in N_m} d(g, K_i, y) \right],$$

e aplicando a propriedade do grau (d2), segue que

$$\sum_i d(f, \Omega, K_i) \cdot d(g, K_i, y) = \sum_m m \cdot d(g, S_m, y).$$

O objetivo então é mostrar que

$$d(gf, \Omega, y) = \sum_m m \cdot d(g, S_m, y), \quad (2.4)$$

para tanto, observe que  $\partial S_m \subset f(\partial\Omega)$ . Provaremos esta inclusão por contradição. De fato, suponha que exista  $z \in \partial S_m$  tal que  $z \notin f(\partial\Omega)$ . Logo,  $z \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ , então existe  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $z \in K_i$ , e como  $K_i$  é aberto, encontramos  $\epsilon > 0$  tal que  $B(z, \epsilon) \subset K_i$  e  $d(f, \Omega, z') = m$  para todo  $z' \in B(z, \epsilon)$ . Por outro lado, como  $z \in \partial S_m$  temos que  $B(z, \epsilon) \cap (\mathbb{R}^n \setminus S_m) \neq \emptyset$ , ou seja, existe  $z' \in B(z, \epsilon)$  tal que  $z' \notin S_m$ . Portanto,  $d(f, \Omega, z') \neq m$  com  $z' \in B(z, \epsilon)$ , que é uma contradição. Desta forma,  $\partial S_m \subset f(\partial\Omega)$ . Observe que  $g(\partial S_m) \subset g(f(\partial\Omega))$ , pois  $g \in C(\mathbb{R}^n)$  e como provamos  $\partial S_m \subset f(\partial\Omega)$ . Portanto,  $y \notin g(\partial S_m)$  tendo em vista que  $y \notin (gf)(\partial\Omega)$ . Assim, existe  $g_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$  tal que

$$d(g_0, S_m, y) = d(g, S_m, y),$$

para todo  $m$ , além disso,

$$d(g_0 f, \Omega, y) = d(gf, \Omega, y). \quad (2.5)$$

Considere o conjunto  $M_0 = \overline{B(0, r+1)} \cap g_0^{-1}(y)$ . Se este conjunto é vazio então a equação (2.4) é satisfeita imediatamente. Vamos considerar então que  $M_0$  é diferente

de vazio. Observe que  $y \notin (g_0 f)(\partial\Omega)$  e observe também que  $M_0$  é compacto, pois é interseção de compactos. Portanto,  $\varrho(M_0, f(\partial\Omega)) > 0$ . De fato, se  $\varrho(M_0, f(\partial\Omega)) = 0$  para algum  $x_0 \in M_0$ , teríamos que  $x_0 \in f(\partial\Omega)$ , mas como  $g_0(x_0) = y$ , teríamos que  $y \in (g_0 f)(\partial\Omega)$ , que é um absurdo.

Seja  $f_0 \in \overline{C^1}(\Omega)$  tal que

$$|f - f_0| < \varrho(M_0, f(\partial\Omega)) \quad \text{e} \quad f_0(\overline{\Omega}) \subset B(0, r + 1),$$

e definimos

$$\tilde{S}_m = \{z \in B(0, r + 1) \setminus f_0(\partial\Omega) : d(f_0, \Omega, z) = m\}.$$

Dado  $z \in M_0$  temos que

$$\varrho(z, f(\partial\Omega)) \geq \varrho(M_0, f(\partial\Omega)),$$

portanto

$$|f - f_0|_0 < \varrho(z, f(\partial\Omega)).$$

Então, pela propriedade do grau (d5) temos que

$$d(f, \Omega, z) = d(f_0, \Omega, z).$$

O próximo passo é mostrar que  $S_m = \tilde{S}_m$ . De fato, pelo que vimos até o momento podemos dizer que  $M_0 \cap S_m = M_0 \cap \tilde{S}_m$  e portanto os dois conjuntos estão contidos em  $S_m \cap \tilde{S}_m$ . Observe que  $y \notin g_0(\overline{S}_m \setminus (S_m \cap \tilde{S}_m))$ , pois caso estivesse, existiria  $z \in \overline{S}_m \setminus (S_m \cap \tilde{S}_m)$  tal que  $g_0(z) = y$  o que é um absurdo pois  $S_m \cap M_0 \subset S_m \cap \tilde{S}_m$ . Então, pela propriedade do grau (d7), temos que

$$d(g_0, S_m, y) = d(g_0, S_m \cap \tilde{S}_m, y) = d(g_0, \tilde{S}_m, y).$$

Utilizando o resultado da 2ª parte e essas últimas observações temos que

$$d(g_0 f_0, \Omega, y) = \sum_m m \cdot d(g_0, \tilde{S}_m, y) = \sum_m m \cdot d(g_0, S_m, y) = \sum_m m \cdot d(g, S_m, y).$$

Resta então verificar que  $d(g_0 f_0, \Omega, y) = d(g_0 f, \Omega, y)$ . Considere então a homotopia

$$h(t, x) = g_0(f(x) + t(f_0(x) - f(x))),$$

mostraremos que  $y \notin h([0, 1] \times \partial\Omega)$ . De fato, se para algum  $(t_0, x_0) \in [0, 1] \times \Omega$  tivéssemos  $y \in h([0, 1] \times \partial\Omega)$ , existiria  $z = f(x_0) + t_0(f_0(x_0) - f(x_0))$  tal que  $g_0(z) = y$ , implicando  $z \in M_0$ . Desta forma

$$\begin{aligned} \varrho(M_0, f(\partial\Omega)) &\leq |z - f(x_0)| = |t_0(f_0(x_0) - f(x_0))| \\ &\leq |f - f_0|_0 < \varrho(M_0, f(\partial\Omega)), \end{aligned}$$

que é um absurdo. Portanto, basta aplicar a propriedade do grau (d3), concluindo a demonstração do teorema. ■

# Capítulo 3

## Aplicações do Grau

Nesta seção, apresentaremos algumas aplicações da função grau definida e construída nas seções precedentes.

### 3.1 Ponto Fixo de Brouwer

O Teorema do ponto fixo de Brouwer se remete à existência de pontos fixos. O Teorema é bastante útil para compreensão da topologia dos espaços euclidianos. É também o ponto de partida para a demonstração de outros teoremas como o Teorema do Ponto Fixo de Schauder e o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer. Encontrar pontos fixos em determinadas funções, é uma tarefa de extrema importância na matemática, tendo aplicações em diversas áreas como economia e estatística.

**Teorema 16 (Ponto Fixo de Brouwer)** *Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto convexo não vazio e  $f : D \rightarrow D$  uma função contínua. Então  $f$  tem um ponto fixo.*

**Demonstração:** Dividiremos a demonstração deste importante teorema em duas partes. Primeiramente, supomos  $D = \overline{B(0, r)}$  tal que  $f$  não possui pontos fixos na fronteira de  $D$ . Definimos  $h : [0, 1] \times D \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $h(t, x) = x - tf(x)$ . Observamos

que  $0 \notin h([0, 1] \times \partial D)$ . De fato, suponha que  $h(t_0, x_0) = 0$  para algum  $t_0 \in [0, 1]$  e  $x_0 \in \partial D$ , desta forma

$$r = |x_0| = t_0|f(x_0)| \leq t_0r \Rightarrow t_0 = 1 \Rightarrow f(x_0) = x_0,$$

o que é um absurdo, pois supomos que  $f$  não tem ponto fixo na fronteira de  $D$ . Portanto, usando a propriedade (d3), de invariância por homotopia do grau, temos que

$$d(id - f, \text{int}D, 0) = d(id, B(0, r), 0) = 1.$$

Logo, a equação  $x - f(x)$  possui pelo menos uma solução em  $D$  e esta solução é exatamente o ponto fixo que procurávamos.

Para o caso mais geral, nosso objetivo é mostrar que  $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \text{conv}f(D)$ , onde  $\tilde{f}$  é a extensão da função contínua  $f$ , dada por

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in D \\ \left( \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) \right)^{-1} \sum_{i \geq 1} 2^{-i} \varphi_i(x) f(a^i), & \text{se } x \notin D \end{cases}$$

em que  $\{a^1, a^2, \dots\}$  é um subconjunto enumerável denso em  $D$  e

$$\varphi_i(x) = \max \left\{ 2 - \frac{|x - a^i|}{\rho(x, D)}, 0 \right\},$$

para  $x \notin D$ .

Denotemos  $X = \text{conv}f(D)$ , assim se  $x \in D$  temos que  $\tilde{f}(x) = f(x)$  e portanto  $\tilde{f}(x) \in \bar{X}$ . Para o caso em que  $x \notin D$ , observe que  $\tilde{f}(x) = \lim S_m$ , onde

$$S_m = \left[ \sum_{i=1}^m 2^{-i} \varphi_i(x) \right]^{-1} \sum_{i=1}^m 2^{-i} \varphi_i(x) f(a^i).$$

Portanto,  $S_m \in X$ , pois  $S_m$  é a combinação convexa de  $f(a^1), f(a^2), \dots, f(a^m)$ , que são elementos de  $f(D)$ . Assim,  $\tilde{f}(x)$  é limite de uma sequência de elementos de

$X$ , portanto  $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset \overline{X}$ . Como  $f(D) \subset D$  e  $D$  é compacto e convexo, segue que  $\tilde{f}(\mathbb{R}^n) \subset D$ .

Seja agora  $r$  suficientemente grande tal que  $D \subset \overline{B(0, r)}$ . Pela primeira parte da demonstração, sabemos que existe  $x \in \overline{B(0, r)}$  tal que  $\tilde{f}(x) = x$ . Mas,  $\tilde{f}(x) \in D$ , o que mostra que  $x \in D$ . Portanto,  $\tilde{f}(x) = f(x) = x$ , isto é,  $f$  possui ponto fixo. ■

**Observação 4** *O Teorema acima permanece válido se  $D$  for somente homeomorfo a um compacto convexo. De fato, suponha que  $D = h(D_0)$  com  $D_0$  compacto convexo e  $h$  um homeomorfismo. Então,  $h^{-1} \circ f \circ h : D_0 \rightarrow D_0$  é contínua. Logo, para algum  $x_0 \in D_0$  temos  $h^{-1}(f(h(x_0))) = x_0$ , isto é,  $f(h(x_0)) = h(x_0)$ .*

Exibiremos agora uma proposição e duas aplicações, enfatizando este importante Teorema.

**Proposição 10** *Não existe função contínua  $f : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$  que deixe fixo todos os pontos da fronteira.*

**Demonstração:** De fato, suponha que existe uma aplicação contínua  $f : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$  tal que  $f(x) = x$  para todo  $x \in \partial B(0, r)$ . Considere também  $g : \overline{B(0, r)} \rightarrow \partial B(0, r)$  onde  $g(x) = -f(x)$ . Observe que a aplicação  $g$  satisfaz às hipóteses exigidas no Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, pois  $g$  é contínua,  $\overline{B(0, r)}$  é compacto e convexo e  $g(\overline{B(0, r)}) \subset \overline{B(0, r)}$ . Portanto, existe  $x_0 \in \partial B(0, r)$  tal que

$$x_0 = g(x_0) = -f(x_0) = -x_0, \quad |x_0| = r,$$

o que é um absurdo. ■

**Exemplo: (Perrom-Frobenius.)** Seja  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  com  $a_{ij} \geq 0$ . Então existe  $\lambda \geq 0$  e  $x = (x_1, \dots, x_n) \neq 0$  tal que  $x_i \geq 0$  para todo  $i$  e  $Ax = \lambda x$ , isto é,  $A$  tem um autovetor não-negativo correspondente a um autovalor não-negativo.

Primeiramente, definimos o conjunto

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, \forall i \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Mostraremos que este conjunto é convexo, limitado e fechado (compacto), caindo assim nas hipóteses do Teorema do Ponto Fixo. De fato, sejam  $x, y \in D$ ,  $S = \{z \in \mathbb{R}^n : z = tx + (1-t)y, t \in [0, 1]\}$  e  $z_i = tx_i + (1-t)y_i$ , assim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n z_i &= \sum_{i=1}^n tx_i + \sum_{i=1}^n (1-t)y_i \\ &= t \sum_{i=1}^n x_i + (1-t) \sum_{i=1}^n y_i \\ &= t + 1 - t = 1, \end{aligned}$$

portanto  $S \subset D$ , concluindo que  $D$  é convexo. Seja  $x \in D$ , então  $x_i \leq 1$  e assim  $x_i^2 \leq 1$ , implicando

$$|x| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \leq \sqrt{n},$$

concluindo que  $D$  é limitado. Finalmente, considerando a sequência  $(x^m) \subset D$  tal que  $x^m \rightarrow x$ , temos que

$$x^m \rightarrow x \Leftrightarrow x_i^m \rightarrow x_i,$$

e como  $x_i \geq 0$  e

$$1 = \sum_{i=1}^m x_i^m \rightarrow \sum_{i=1}^m x_i = 1,$$

segue que  $x \in D$  e portanto  $D$  é fechado. Considere  $Ax_0 = 0$  para algum  $x_0 \in D$ , desta forma, tomaríamos  $\lambda = 0$  e teríamos o resultado pretendido, portanto, devemos supor  $Ax \neq 0$ , assim  $\sum_{i=1}^n (Ax)_i \geq \alpha > 0$ , para algum  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Definimos então a função em  $D$  da forma

$$f(x) = \frac{Ax}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i},$$

que é contínua em  $D$ . Observamos também que  $f(D) \subset D$ , pois se  $x \in D$  e  $y = f(x)$ , temos

$$0 \leq y_i = \frac{(Ax)_i}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i} \Rightarrow \sum_{j=1}^n y_j = \frac{\sum_{j=1}^n (Ax)_j}{\sum_{i=1}^n (Ax)_i} = 1.$$

Desta forma,  $f(x) \in D$  e portanto, pelo Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, a aplicação  $f$  tem um ponto fixo em  $D$ , ou seja, existe  $x_0 \in D$  tal que

$$f(x_0) = \frac{Ax_0}{\sum_{i=1}^n (Ax_0)_i} = x_0 \Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0,$$

onde  $\lambda = \sum_{i=1}^n (Ax_0)_i$ .

◇

Exibiremos agora um exemplo muito interessante, onde será usado o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer para garantir a existência de solução em um sistema de equações diferenciais ordinárias.

**Exemplo:** Considere o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u' = f(t, u) \\ u(0) = x \in \overline{B(0, r)} \end{cases}$$

em que  $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  é uma função de classe  $C^1$  periódica na variável  $t$ , ou seja,  $f(t + w, x) = f(t, x)$  para algum  $w \in \mathbb{R}^+$  e para todo  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . O objetivo é escolher uma bola  $\overline{B(0, r)}$  de forma que o problema possua solução única  $u(t, x)$  em  $[0, \infty)$ . Definimos então a aplicação  $p_t(x) = u(t, x)$  e suponhamos que  $f$  satisfaz a seguinte condição de fronteira

$$\langle f(t, x), x \rangle = \sum_{i=1}^n f_i(t, x)x_i < 0,$$

para todo  $t \in [0, w]$  e  $|x| = r$ . Suponha agora que num instante  $t$ , a solução do sistema atinge a fronteira da bola, neste caso

$$\frac{d}{dt}|u(t)|^2 = 2\langle u'(t), u(t) \rangle = 2f(t, u(t)) \cdot u(t) < 0,$$

ou seja, a norma de  $u(t)$  é decrescente perto do instante  $t$ , em outras palavras, quando a função atinge a fronteira da bola a mesma automaticamente volta para o interior da bola. Portanto, temos a garantia de que  $P_t : \overline{B(0, r)} \rightarrow \overline{B(0, r)}$  qualquer que seja o  $t > 0$ . Segue também que a aplicação  $P_t$  é contínua, pois as soluções do sistema variam continuamente com as condições iniciais.

Agrupando todas as informações obtidas até o momento, satisfazemos as condições do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer, e portanto, existe um ponto fixo  $x_w$  para a função  $P_w$ . Assim a equação tem uma solução com a propriedade de que  $u(0, x_w) = x_w = u(w, x_w)$  e que satisfaz

$$\begin{cases} u' = f(t, u), & \text{em } (0, w) \\ u(0) = u(w) = x_w \end{cases}$$

A ideia é expandir  $u(t, x_w)$   $w$ -periodicamente. Assim, considerando  $v : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  dada por

$$v(t) = u(t - kw, x_w),$$

em  $[kw, (k+1)w]$ , obtemos uma solução  $w$ -periódica do sistema. A conclusão é que  $u(t, x)$  é uma solução  $w$ -periódica do sistema se, e somente se,  $x$  é um ponto fixo do operador  $P_w$ . Este operador é conhecido como *operador de Poincaré*.

◇

## 3.2 Teorema do Ouriço

**Teorema 17** *Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e limitado com  $0 \in \Omega$  e  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  contínua. Suponha também que  $n$  é ímpar. Então, existe  $x_0 \in \partial\Omega$  tal que  $f(x_0) = \lambda x_0$ , para algum  $\lambda \neq 0$ .*

**Demonstração:** Podemos supor sem perda de generalidade que  $f \in C(\overline{\Omega})$ . Como estamos considerando  $n$  ímpar, temos que o determinante da matriz identidade negativa é  $(-1)^n = -1$ , desta forma,  $d(-id, \Omega, 0) = -1$ . Dividiremos a demonstração em duas partes. Primeiro consideremos o caso em que  $d(f, \Omega, 0) \neq -1$ . Definimos a aplicação  $h : [0, 1] \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tal que  $h(t, x) = (1-t)f(x) + t(-x)$ . Desta forma,  $h(0, x) = f(x)$  e  $h(1, x) = -x = -id(x)$ . Observemos que para algum  $t_0 \in (0, 1)$  e  $x_0 \in \partial\Omega$  temos  $h(t_0, x_0) = 0$ , pois caso contrário, pela propriedade do grau (d3), teríamos

$$d(h(0, \cdot), \Omega, 0) = d(h(1, \cdot), \Omega, 0) = -1,$$

contradizendo a hipótese. Portanto,

$$h(t_0, x_0) = (1 - t_0)f(x_0) + t_0(-x_0) \Rightarrow f(x_0) = \frac{t_0}{1 - t_0}x_0 = \lambda x_0,$$

onde  $\lambda = \frac{t_0}{1 - t_0} \neq 0$ .

Supomos agora que  $d(f, \Omega, 0) = -1$ . Neste caso, analogamente à primeira parte da demonstração, definimos uma aplicação  $h : [0, 1] \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  onde  $h(t, x) = (1 - t)f(x) + tx$ . Desta maneira,  $h(0, x) = f(x)$  e  $h(1, x) = x = id(x)$ . Com um raciocínio análogo à primeira parte, concluímos que a aplicação  $h$  não é uma homotopia admissível entre  $f(x)$  e  $id(x)$ , ou seja, para algum  $t_0 \in (0, 1)$  e  $x_0 \in \partial\Omega$  temos  $h(t_0, x_0) = 0$ . Portanto,

$$h(t_0, x_0) = (1 - t_0)f(x_0) + t_0x_0 \Rightarrow f(x_0) = \frac{t_0}{t_0 - 1}x_0 = \lambda x_0,$$

onde  $\lambda = \frac{t_0}{t_0 - 1} \neq 0$ . ■

**Observação 5** *Um exemplo de que para  $n$  par o teorema acima não é verdadeiro, é considerar uma rotação por  $\frac{\pi}{2}$  de uma esfera unitária no  $\mathbb{R}^2$ , onde para qualquer  $(x_1, x_2)$ , tem-se  $f(x_1, x_2) = f(-x_2, x_1)$ . De fato, seja  $\Omega = B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ , definimos  $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$  onde*

$$f(x, y) = (-y, x).$$

Afirmamos que não existe  $(x_0, y_0) \in \partial\Omega$  tal que  $f(x_0, y_0) = \lambda(x_0, y_0)$ , para algum  $\lambda \neq 0$ . Supondo que existe, temos que

$$\lambda(x_0, y_0) = (-y_0, x_0),$$

desta forma

$$\lambda x_0 = -y_0 \quad e \quad \lambda y_0 = x_0,$$

e portanto

$$\lambda^2 = -1,$$

que é um absurdo.

**Observação 6** Seja  $\Omega = B(0, 1)$ , então não existe um campo contínuo de vetores tangentes que não se anule em  $S = \partial B(0, 1)$ . De fato, supomos que na aplicação  $f : S \rightarrow \mathbb{R}^n$  tenhamos  $f(x) \neq 0$  e  $\langle f(x), x \rangle$  para todo  $x \in S$ . Temos todas as hipóteses do Teorema acima satisfeitas, portanto existe  $x_0 \in S$  tal que  $f(x_0) = \lambda x_0$ , com  $\lambda \neq 0$ . Mas dessa forma

$$\langle f(x_0), x_0 \rangle = \langle \lambda x_0, x_0 \rangle = \lambda |x_0|^2 = 0,$$

implicando  $x_0 = 0$  o que é um absurdo, pois  $x_0 \in S$  e  $0 \notin S$ . Logo,  $f$  se anula em algum ponto de  $S$ .

Um exemplo prático deste Teorema seria:

**Exemplo:** O vento na superfície da Terra é um campo contínuo de vetores tangentes à sua superfície. Desta forma, o Teorema nos diz que em cada instante do tempo em pelo menos um ponto sobre a superfície do nosso planeta não venta.  $\diamond$

### 3.3 Teorema de Borsuk

Exibiremos agora um Teorema de suma importância na teoria do grau. Sempre que queremos mostrar que uma equação  $f(x) = y$  possui solução num conjunto  $\Omega$ ,

precisamos mostrar que  $d(f, \Omega, y) \neq 0$ . O Teorema seguinte será uma ferramenta útil para realizar esta tarefa.

**Teorema 18 (Borsuk)** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, limitado e simétrico com respeito a origem. Seja  $f \in C(\overline{\Omega})$  uma função ímpar com  $0 \notin f(\partial\Omega)$ . Então  $d(f, \Omega, y)$  é ímpar.*

**Demonstração:** Antes de demonstrarmos de fato o teorema, demonstraremos um caso particular, supondo inicialmente que  $f \in C^1(\Omega)$  e que  $0$  é um ponto regular de  $f$ , isto é,  $J_f(0) \neq 0$ . Neste caso, é suficiente encontrar uma função  $g \in C^1(\Omega)$  ímpar tal que  $0 \notin g(S_g(\Omega))$  sendo  $g$  suficientemente próxima de  $f$ . De fato, aplicando a propriedade do grau (d5), temos que

$$d(f, \Omega, 0) = d(g, \Omega, 0) = \operatorname{sgn} J_g(0) + \sum_{0 \neq x \in g^{-1}(0)} J_g(x).$$

Como supomos  $g$  uma função ímpar, ou seja,  $g(x) = -g(-x)$ , temos que  $g(x) = 0$  se, e somente se,  $g(-x) = 0$  e também  $J_g(\cdot)$  é par, concluindo então que o somatório acima é par. Como supomos também que  $0 \notin g(S_g)$ , temos que  $\operatorname{sgn} J_g(0) \neq 0$ . Portanto,  $d(f, \Omega, 0)$  é ímpar, como desejamos.

O próximo passo é definir esta função  $g$ , para isto, usaremos o princípio da indução. Consideremos  $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$ , ímpar tal que  $\varphi'(0) = 0$  e  $\varphi(t) = 0$  se, e somente se,  $t = 0$ . Definimos,  $\Omega_1 = \{x \in \Omega : x_1 \neq 0\}$  e  $\tilde{f}(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x_1)}$  para  $x \in \Omega_1$ . O Lema de Sard nos assegura que podemos encontrar  $y^1 \notin \tilde{f}(S_{\tilde{f}}(\Omega_1))$  com  $|y^1|$  tão pequeno quanto se queira. Definimos então a aplicação

$$g_1(x) = f(x) - \varphi(x_1)y^1.$$

É fácil ver que  $g_1 \in C^1(\Omega)$  é uma função ímpar e próxima de  $f$  em  $\overline{\Omega}$ . O próximo passo é mostrar que  $0$  é um valor regular de  $g_1$  em  $\Omega_1$ . Primeiro observe que podemos reescrever a função  $g_1$  definida acima, na forma

$$g_1(x) = \varphi(x_1)(\tilde{f}(x_1)(\tilde{f}(x) - y^1)),$$

para  $x \in \Omega_1$ . Portanto, quando derivamos obtemos

$$g'_1(x) = \varphi'(x_1)(\tilde{f}(x) - y^1) + \varphi(x_1)\tilde{f}'(x),$$

para  $x \in \Omega_1$ . Se  $x \in \Omega_1$  é tal que  $g_1(x) = 0$ , temos que

$$g_1(x) = f(x) - \varphi(x_1)y^1 = 0 \implies f(x) = \varphi(x_1)y^1 \implies \tilde{f}(x) = y^1,$$

implicando

$$g'_1(x) = \varphi(x_1)\tilde{f}'(x),$$

para todo  $x \in \Omega_1 \cap g_1^{-1}(0)$ . Como temos que  $\varphi(x_1) \neq 0$  e  $y^1 \notin \tilde{f}(S_{\tilde{f}}(\Omega_1))$ , concluímos que  $g'_1(x)$  é não singular para todo  $x \in \Omega_1$ , tal que  $g_1(x) = 0$  como queríamos.

Supomos agora que já temos uma função ímpar  $g_k \in C^1(\Omega)$  próxima de  $f$  tal que  $0 \notin g_k(S_{g_k}(\Omega_k))$  para algum  $k < n$ . Prosseguindo, definimos

$$g_{k+1}(x) = g_k(x) - \varphi(x_{k+1})y^{k+1},$$

com  $|y^{k+1}|$  suficientemente pequeno e tal que  $0$  é um valor regular para  $g_{k+1}$  no conjunto  $\{x \in \Omega : x_{k+1} \neq 0\}$ . Para finalizar o processo de indução, observemos que  $g_{k+1} \in C^1(\Omega)$  é ímpar e próxima de  $f$  e  $\bar{\Omega}$ . Podemos concluir que  $0 \notin g_{k+1}(S_{g_{k+1}}(\Omega_{k+1}))$  pois se  $x \in \Omega_{k+1}$  e  $x_{k+1} = 0$ , desta forma  $x \in \Omega_k$ ,  $g_{k+1}(x) = g_k(x)$ ,  $g'_{k+1}(x) = g'_k(x)$  e então  $J_{g_{k+1}}(x) \neq 0$ . Portanto,  $g = g_n \in C^1(\Omega)$  é ímpar, próxima de  $f$  em  $\bar{\Omega}$  e é tal que  $0 \notin g(S_g(\Omega \setminus \{0\}))$ , pois  $\Omega_n = \Omega \setminus \{0\}$ . Para finalizar a demonstração deste caso particular, observe que pelo passo de indução temos que  $g'(0) = g'_1(0) = f'(0)$  e portanto  $0 \notin g(S_g(\Omega))$ .

Finalmente para o caso geral, primeiramente definimos  $g_2 = \frac{1}{2}(g_1(x) - g_1(-x))$  a parte ímpar de  $g_1$ . Aproximamos  $f \in C(\bar{\Omega})$  por  $g_1 \in \bar{C}^1(\Omega)$ . Escolhemos um  $\delta$  positivo que não seja auto valor de  $g'_2(0)$ . Definimos também a função  $\tilde{f} = g_2 - \delta \cdot id$ . Observe que  $\tilde{f} \in \bar{C}^1(\Omega)$  e é ímpar. Provaremos que  $J_{\tilde{f}}(0) \neq 0$ . De fato, observe que

$$\tilde{f}'(0) = g'_2(0) - \delta \cdot id,$$

e como  $\delta$  não é um autovalor de  $g'_2(0)$ , segue que

$$J_{\tilde{f}}(0) = \det(\tilde{f}'(0)) = \det(g'_2(0) - \delta \cdot id) \neq 0.$$

Portanto, tomando  $g_1$  suficientemente próxima de  $f$  e  $\delta$  pequeno, teremos  $\tilde{f}$  próxima de  $f$ . Implicando,

$$d(f, \Omega, 0) = d(\tilde{f}, \Omega, 0),$$

que é ímpar. ■

Exibiremos agora um resultado que é a generalização imediata do teorema acima.

**COROLÁRIO 1** *Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  aberto, limitado e simétrico em relação à  $0 \in \Omega$ . Seja  $f \in C(\overline{\Omega})$  tal que  $0 \notin f(\partial\Omega)$  e  $f(-x) \neq \lambda f(x)$  em  $\partial\Omega$  para todo  $\lambda \geq 1$ . Então  $d(f, \Omega, 0)$  é ímpar.*

**Demonstração:** Basta mostrar que a aplicação

$$h(t, x) = f(x) - tf(-x),$$

é uma homotopia admissível. De fato,  $h(0, x) = f(x)$  e  $h(1, x) = f(x) - f(-x)$  que é uma função ímpar. Logo, como  $0 \notin f(\partial\Omega)$  temos que  $h(0, x) = f(x) \neq 0$ . No caso  $t \neq 0$  e  $x \in \partial\Omega$  temos que

$$h(t, x) = 0 \iff f(-x) = \frac{1}{t}f(x),$$

que por hipótese nunca acontece. Portanto,  $h(t, x)$  define uma homotopia admissível em  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  entre a função  $f$  e uma função  $g$  ímpar, e pelo Teorema de Borsuk, temos

$$d(f, \Omega, 0) = d(g, \Omega, 0).$$

■

# Apêndice A

## - Apendice

Este apêndice destina-se a apresentar sem demonstrações alguns resultados exibidos na seção preliminar e utilizados no corpo do trabalho.

### A.1 Aplicações Diferenciáveis

**Teorema 19 (Regra da Cadeia)** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$ ,  $V \subset \mathbb{R}^m$  abertos,  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável no ponto  $a$ , com  $f(U) \subset V$ , e  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^p$  diferenciável no ponto  $f(a)$ . Então  $g \circ f : U \rightarrow \mathbb{R}^p$  é diferenciável no ponto  $a$ , com a derivada dada por  $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ .*

**Demonstração:** Por hipótese, podemos escrever

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \rho(h) \cdot |h|, \text{ com } \lim_{h \rightarrow 0} \rho(h) = 0$$

e

$$g(b+k) = g(b) + g'(b) \cdot k + \sigma(k) \cdot |k|, \text{ com } \lim_{k \rightarrow 0} \sigma(k) = 0.$$

Desta forma,

$$(g \circ f)(a+h) = g(f(a) + f'(a) \cdot h + \rho(h) \cdot |h|).$$

Denotando  $k = f'(a) \cdot h + \rho(h) \cdot |h|$ , obtemos

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + h) &= g(b + k) \\ &= g(b) + g'(b) \cdot (f'(a) \cdot h) + g'(b) \cdot \rho(h) \cdot |h| + \sigma(k) \cdot |k| \\ &= (g \circ f)(a) + [g'(b) \cdot f'(a)] \cdot h + C(h) \cdot |h|, \end{aligned}$$

onde

$$C(h) = g(b) \cdot \rho(h) + \sigma \cdot |f'(a) \cdot \frac{h}{|h|} + \rho(h)|.$$

Se  $h \rightarrow 0$ , então  $k \rightarrow 0$  e  $f'(a) \cdot \frac{h}{|h|}$  é limitada. Portanto  $\lim_{h \rightarrow 0} C(h) = 0$ , provando o teorema. ■

**Teorema 20 (Desigualdade do Valor Médio)** *Dado  $U \subset \mathbb{R}^n$ , seja  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciável em cada ponto do segmento de reta aberto  $(a, a + v)$  e tal que sua restrição ao segmento fechado  $[a, a + v] \subset U$  seja contínua. Se  $|f'(x)| \leq M$  para todo  $x \in (a, a + v)$  então  $|f(a + v) - f(a)| \leq M|v|$ .*

**Demonstração:** Definimos o caminho  $\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $\lambda(t) = f(a + tv)$ . Observe que por hipótese este caminho é contínuo e diferenciável no intervalo aberto  $(0, 1)$ . Pela regra da cadeia, temos

$$\lambda'(t) = f'(a + tv) \cdot v,$$

onde

$$|\lambda'(t)| \leq |f'(a + tv)| \cdot |v| \leq M \cdot |v|,$$

para todo  $t \in (0, 1)$ . Portanto, pelo Teorema do Valor Médio para caminhos (Ver [4]),

$$|\lambda(1) - \lambda(0)| = |f(a + v) - f(a)| \leq M \cdot |v|.$$

■

**Teorema 21 (Teorema da Aplicação Implícita)** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$  um conjunto aberto e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Suponha que  $(a, b) \in U$  é tal que  $f(a, b) = 0$  e  $J_{\frac{\partial f}{\partial y}}(a, b) \neq 0$ . Então existe um aberto  $V \subset \mathbb{R}^n$  contendo  $a$  e uma única função  $g : V \rightarrow \mathbb{R}^m$  de classe  $C^1$ , tal que  $g(a) = b$  e  $f(x, g(x)) = 0, \forall x \in V$ .*

**Demonstração:** Ver [7]. ■

**Teorema 22 (Teorema da Aplicação Inversa)** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^n$  e  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  uma aplicação de classe  $C^1$ . Se, para  $a \in U$ ,  $J_f(a) \neq 0$ , então existem abertos  $V$  e  $W$ , contendo  $a$  e  $f(a)$ , respectivamente, tais que  $f$  é um difeomorfismo de classe  $C^1$  entre  $V$  e  $W$ . Além disso, para  $y \in W$  temos*

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}.$$

**Demonstração:** Ver [7]. ■

## A.2 Integrais Múltiplas

**Teorema 23** *A fim de que uma função limitada  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  seja integrável no bloco  $A \subset \mathbb{R}^m$ , é necessário e suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$  dado, se possa obter uma partição  $P$  de  $A$  tal que*

$$S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon.$$

**Demonstração:** Denotemos  $I$  o conjunto das somas inferiores e  $H$  o conjunto das somas superiores de  $f$ . Como  $s \in I$  e  $S \in H$  temos que  $s \leq H$ , implicando,  $\sup I \leq \sup H$ . Para que  $f$  seja integrável, ou seja, para obter  $\sup I = \inf H$ , é suficiente que, para todo  $\varepsilon > 0$  existam  $s = s(f; P) \in I$  e  $S(f; Q) \in H$  tais que  $S(f; Q) - s(f; P) < \varepsilon$ . Por hipótese, temos a primeira implicação satisfeita. Reciprocamente, se  $f$  é integrável, dado  $\varepsilon > 0$ , obtemos partições  $P'$  e  $P''$  tais que

$$S(f; P'') - s(f; P') < \varepsilon,$$

e considerando  $P = P' + P''$ , obtemos

$$S(f; P) - s(f; P) \leq S(f; P'') - s(f; P') < \varepsilon,$$

como queríamos. ■

**Proposição 11** *Seja  $X = \{x_1, x_2, \dots\} \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto enumerável. Então  $X$  tem medida nula.*

**Demonstração:** Dado  $\varepsilon > 0$ , escolhemos um retângulo  $C_i$  tal que  $x_i \subset C_i$  e  $\text{vol.}(C_i) < \varepsilon/2^i$ , para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Desta forma, obtemos uma família de retângulos fechados que cobre  $X$ , tal que

$$\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol.}(C_i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon,$$

como queríamos. ■

**Proposição 12** *Toda reunião enumerável de conjuntos de medida nula é ainda um conjunto de medida nula.*

**Demonstração:** Seja  $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ , uma reunião enumerável de conjuntos tal que  $\text{med.}X_i = 0$  para todo  $i \in \mathbb{N}$ . Dado  $\varepsilon > 0$  podemos obter, para cada  $i \in \mathbb{N}$ , uma sequência de cubos abertos  $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ij}, \dots$  tais que  $X_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}$  e  $\sum_j \text{vol.}C_{ij} < \varepsilon/2^i$ . Portanto,  $X$  está contido na reunião (enumerável) de todos os  $C_{ij}$ . Dado qualquer subconjunto finito  $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  existe  $k \in \mathbb{N}$  tal que se  $(i, j) \in F$  então  $i \leq k, j \leq k$ , logo

$$\sum_{(i,j) \in F} \text{vol.}(C_{ij}) \leq \sum_{j=1}^k \left[ \sum_{i=1}^k \text{vol.}(C_{ij}) \right] < \sum_{i=1}^k \frac{\varepsilon}{2^i} < \varepsilon.$$

Portanto, qualquer que seja a forma de enumerar os  $C_{ij}$ , teremos  $\sum_{i,j} \text{vol.}(C_{ij}) \leq \varepsilon$ , implicando  $\text{med.}X = 0$ . ■

**Teorema 24** *Todo conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  pode ser escrito como uma união enumerável de cubos fechados que se interceptam somente e possivelmente na fronteira.*

**Demonstração:** Denotemos  $K_0$  o conjunto de todos os cubos fechados de lado unitário cujos vértices são pontos de coordenadas inteiras. Podemos então dividir cada cubo de  $K_0$  em  $2^n$  subcubos fechados dividindo a aresta do cubo original ao meio e denotemos  $K_1$  o conjunto de todos esses subcubos. Prosseguindo da mesma maneira, obtemos uma sequência de conjuntos  $K_0, K_1, \dots$  onde cada  $K_i$  contém cubos de aresta  $1/2^i$  e cada  $K_i$  é um conjunto enumerável. Dado um aberto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , denotemos  $S_0$  o conjunto de todos os cubos de  $K_0$  que estão contidos em  $\Omega$ . Analogamente, denotemos  $S_1$  como sendo o conjunto de todos os cubos de  $K_1$  que estão contidos em  $\Omega$  com a propriedade de que nenhum cubo de  $S_1$  é subcubo de algum cubo de  $S_0$ . Prosseguindo da mesma maneira, obtemos uma sequência de conjuntos  $S_0, S_1, \dots$  de cubos fechados cuja união é o conjunto  $\Omega$ . De fato, como  $\Omega$  é aberto, dado  $x \in \Omega$  existe uma vizinhança  $V_x$  de  $x$  tal que  $V_x \subset \Omega$ . Como podemos tomar um cubo tão pequeno quanto se queira, tomemos um cubo contendo  $x$  tal que esteja contido em  $V_x$ . Como a união enumerável de conjuntos finitos é enumerável, o teorema está demonstrado. ■

**Teorema 25** *Uma função  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , limitada no retângulo  $A \subset \mathbb{R}^n$ , é integrável se, e somente se, o conjunto  $D_f$  dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.*

**Demonstração:** Ver [4]. ■

**Teorema 26 (Teorema de Fubini)** *Seja  $f : A \times B \rightarrow \mathbb{R}$  integrável no produto dos retângulos  $A \subset \mathbb{R}^n$  e  $B \subset \mathbb{R}^m$ . Para todo  $x \in A$ , seja  $f_x : B \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f_x(y) = f(x, y)$  e ponhamos*

$$\varphi(x) = \int_{\underline{B}} f_x(y) dy, \quad \psi(x) = \int_{\overline{B}} f_x(y) dy.$$

As funções  $\varphi, \psi : A \rightarrow \mathbb{R}$ , assim definidas, são integráveis, com

$$\int_A \varphi(x) dx = \int_A \psi(x) dx = \int_{A \times B} f(x, y) dx dy,$$

isto é,

$$\int_{A \times B} f(x, y) dx dy = \int_A dx \left( \int_{\underline{B}} f(x, y) dy \right) = \int_A dx \left( \overline{\int}_B f(x, y) dy \right).$$

**Demonstração:** Seja  $P = P_1 \times P_2$  uma partição qualquer de  $A \times B$ . Os retângulos de  $P$  são os produtos  $B_1 \times B_2$ , onde  $B_1 \in P_1$  e  $B_2 \in P_2$ . A soma inferior de  $f$  relativa à partição  $P$  se escreve

$$U(f; P) = \sum m_{B_1 \times B_2} \cdot \text{vol.}(B_1) \cdot \text{vol.}(B_2) = \sum_{B_1 \in P_1} \left( \sum_{B_2 \in P_2} m_{B_1 \times B_2} \cdot \text{vol.}(B_2) \right) \text{vol.}(B_1).$$

Para todo  $x \in B_1$ ,  $m_{B_1 \times B_2} = m_{B_1 \times B_2}(f) \leq m_{B_2}(f_x)$ . Logo,

$$\sum_{B_2 \in P_2} m_{B_1 \times B_2} \cdot \text{vol.}(B_2) \leq \sum_{B_2 \in P_2} m_{B_2}(f_x) \cdot \text{vol.}(B_2) \leq \varphi(x).$$

Como esta desigualdade vale para todo  $x \in B_1$ , concluímos que

$$\sum_{B_2 \in P_2} m_{B_1 \times B_2} \cdot \text{vol.}(B_2) \leq m_{B_1}(\varphi).$$

Daí,

$$U(f; P) \leq \sum_{B_1 \in P_1} m_{B_1}(\varphi) \cdot \text{vol.}(B_1) = U(\varphi; P_1).$$

Analogamente, prova-se a desigualdade  $L(\varphi; P_1) \leq L(f; P)$ . Portanto,

$$U(f; P) \leq U(\varphi; P_1) \leq L(\varphi; P_1) \leq L(f; P),$$

para qualquer partição  $P = P_1 \times P_2$ . Como  $f$  é integrável, decorre imediatamente que  $\varphi$  é integrável e que  $\int_A \varphi(x) dx = \int_{A \times B} f(x, y) dx dy$ . A afirmação sobre  $\psi$  se prova da mesma maneira. ■

**Teorema 27 (Teorema da Mudança de Variáveis)** *Sejam  $A \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto aberto e  $g : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função bijetiva e de classe  $C^1$  tal que  $g'(x) \neq 0$  para todo  $x \in A$ . Se  $f : g(A) \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, então*

$$\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) |\det g'|$$

**Demonstração:** Ver [7]. ■

## Referências Bibliográficas

- [1] DEIMLING, Klaus. *Nonlinear Functional Analysis*. Springer-Verlag, New York, 1980.
- [2] K. HOFFMAN e R. KUNZE. *Álgebra Linear*. Polígono, São Paulo, 1971.
- [3] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise vol. 1*, 12.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2008.
- [4] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise vol. 2*, 11.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2009.
- [5] LIMA, Elon Lages. *Topologia dos Espaços Métricos*, 4.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2007.
- [6] NIRENBERG, Louis. *Topics in Nonlinear Functional Analysis*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, 1974.
- [7] SPIVAK, Michael. *Calculus on Manifolds*. Benjamim, New York, 1965.