

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Teorema de Compacidade para o Problema de Yamabe

por

Rayssa Helena Aires de Lima Caju¹

Fevereiro/2014
João Pessoa - PB

¹Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Um Teorema de Compacidade para o Problema de Yamabe

por

Rayssa Helena Aires de Lima Caju

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2014
João Pessoa - PB

Um Teorema de Compacidade para o Problema de Yamabe

por

Rayssa Helena Aires de Lima Caju

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó – UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo – Ufscar

Prof. Dr. Bernhard Ruf – University of Milan

Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza – UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2014

C139u Caju, Rayssa Helena Aires de Lima.

Um teorema de compacidade para o problema de Yamabe/
Rayssa Helena Aires de Lima Caju.- João Pessoa, 2014.

126f. : il.

Orientador: João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Pontos de blow-up - propriedades básicas. 3. Teorema do Anulamento de Weyl. 4. Problema de compacidade. 5. Teorema de Massa Positiva.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

AGRADECIMENTOS

- À Deus.
- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó por ter orientado este trabalho, pelo conhecimento transmitido, por me motivar a enfrentar novos desafios e, principalmente, pela confiança depositada.
- A Professora Flávia Jerônimo pela ajuda nos momentos de dificuldade, apoio, incentivo, confiança, e por ter acreditado em mim sempre.
- Aos professores da UFPB, em especial aos professores Everaldo Souto, Uberlândio Severo, Alexandre Simas, Pedro Hinojosa.
- A minha família, em especial a minha avó, pela cobrança, carinho, apoio e ajuda em todas as decisões.
- Aos meus amigos do milênio, mestrado e doutorado, em especial à Ageu Freire, José Carlos, Leon Costa, Ricardo Pinheiro, Victor Carvalho pela amizade e companheirismo .
- A banca examinadora: Prof. Dr. Bernhard Ruf, Prof. Dr. Djairo Guedes de Figueiredo e Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza por aceitarem participar da avaliação deste trabalho.
- Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

À minha avó.

RESUMO

Neste trabalho provaremos a compacidade do conjunto de soluções do problema de Yamabe quando $n \leq 24$. Iniciaremos com o estudo das propriedades básicas de pontos de blow-up e em seguida provaremos estimativas pontuais, ótimas em certo sentido, que serão de fundamental importância para a demonstração do Teorema do Anulamento de Weyl nestas dimensões. O problema de compacidade então se reduz à mostrar a positividade de uma certa forma quadrática. Provaremos ainda que, se $n \geq 25$, tal forma quadrática tem autovalores negativos. Vale ressaltar que durante tal processo o Teorema de Massa Positiva será uma ferramenta chave na obtenção do resultado principal.

ABSTRACT

In this paper we prove the compactness of the full set of solutions of the Yamabe problem when $n \leq 24$. We begin with the study of basic properties of blow-up points and then prove sharp pointwise estimates that will be crucial for the proof of Weyl Vanishing Theorem in these dimensions. The compactness problem then reduces to show the positivity of a certain quadratic form. We also show that this quadratic form has negative eigenvalues, if $n \geq 25$. It is noteworthy that during this process the Positive Mass Theorem is a key tool in obtaining the main result.

SUMÁRIO

Introdução	2
1 Preliminares de Geometria e Análise	6
1.1 Variedades Riemannianas	6
1.1.1 Aplicação Exponencial	8
1.1.2 Curvaturas	10
1.1.3 Campos de Jacobi	13
1.2 O Operador de Laplace-Beltrami	13
1.3 Espaços de Sobolev em Variedades	16
1.4 Equações Elípticas e Teoria de Regularidade	19
1.5 Função de Green para o Laplaciano	22
1.6 Variedades Localmente Conformemente Planas	24
2 Problema de Yamabe	25
2.1 Problema de Yamabe	25
2.2 Sobre o número de soluções	41
2.3 Coordenadas Normais Conformes	41
2.4 Expansão assintótica da função de Green	46
3 Propriedades Básicas de Blow-up	48
3.1 Identidade de Pohozaev	48
3.2 Equação da Curvatura Escalar Conforme	51
3.3 Propriedades Básicas de Blow-up	54
4 Análise Refinada de Pontos de Blow-up	67
4.1 Análise Linear e Curvatura Escalar	67
4.2 Análise Refinada de Blow-up	71

5	Teorema do Anulamento de Weyl	79
6	Conjunto de Pontos de Blow-up	83
6.1	Restrição Local de Sinal	83
6.2	Conjunto de Blow-up	85
7	Teorema de Compacidade	89
7.1	Variedades Assintoticamente Planas	90
7.2	Teorema de Compacidade	91
A	Forma Quadrática de Pohozaev	96

INTRODUÇÃO

Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$ sem fronteira. A classe conforme de g é o conjunto

$$[g] = \{\tilde{g} = \phi^2 g : \phi \in C^\infty(M), \phi > 0\}.$$

O problema de Yamabe consiste em encontrar uma métrica \tilde{g} com curvatura escalar conforme, conforme a g . Tal problema é equivalente a encontrar uma solução positiva para a equação

$$\Delta_g u - c(n)R_g u + K u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \text{ em } M \quad (1)$$

onde Δ_g é o operador de Laplace-Beltrami associado a métrica g , R_g é a curvatura escalar de g , $c(n) = \frac{n-2}{4(n-1)}$, e K é constante. Mais precisamente, se $u > 0$ é solução de (2.1), e escrevermos $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$, então a curvatura escalar de \tilde{g} é dada por $c(n)^{-1}K$. O Problema de Yamabe possui uma estrutura variacional. As métricas \tilde{g} conformes a métrica dada, que possuem curvatura escalar constante, são os pontos críticos do seguinte funcional de energia:

$$Q(\tilde{g}) = \frac{\int_M R_{\tilde{g}} dv_{\tilde{g}}}{\left(\int_M dv_{\tilde{g}}\right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

Como sabemos, a existência de uma solução minimizante para o problema de Yamabe foi estabelecida pelos trabalhos de Yamabe [?], Trudinger ([24]), Aubin ([1]) e Schoen ([22]).

As classes conformes da variedade Riemanniana compacta podem ser classificadas em três tipos, de acordo com o sinal do quociente de Yamabe:

$$Q(M, g) = \inf_{\tilde{g} \in [g]} Q(\tilde{g}).$$

Se o quociente de Yamabe for negativo, segue do Princípio do Máximo que a solução

é única. Caso o quociente de Yamabe seja nulo, a solução é única a menos de um fator constante. No entanto, a estrutura do conjunto de soluções do problema quando o quociente de Yamabe for positiva pode ser muito rica. O caso mais simples que exemplifica tal fato é a esfera dotada com a métrica usual (S^n, g_0) . Tal caso é interessante pois a esfera unitária é a única variedade compacta que admite um grupo não compacto de transformações conformes $Conf(S^n)$ e, segue do teorema de Obata ([19]), que o conjunto de soluções do problema de Yamabe, neste caso, é dado por

$$\{\lambda\psi^*(g_0) : \lambda \in \mathbb{R}_+, \psi \in Conf(S^n)\}.$$

Exemplos como $S^1 \times S^{n-1}$ ([22]), mostram que existem um grande número de soluções com elevada energia e elevado índice de Morse. De fato, um teorema devido a Pollack ([20]) mostra que em toda variedade compacta M^n , com $n \geq 3$ e curvatura escalar positiva pode ser perturbada, na topologia C^0 , para ter tantas soluções quanto desejarmos. Deste modo é natural nos perguntarmos sobre o que pode ser dito a respeito do conjunto de soluções desse problema.

Em um tópico de um curso lecionado na universidade de Stanford em 1988 ([?]), ao estudar o caso localmente conformemente plano, R.Schoen propôs a seguinte conjectura:

Conjectura de Compacidade

O conjunto de soluções do Problema de Yamabe, no caso em que o quociente de Yamabe é positivo, é compacto a menos que a variedade é conformemente equivalente a esfera euclidiana.

A principal dificuldade para estabelecer o resultado em dimensões $n \geq 6$ é a demonstração da *Conjectura do Anulamento de Weyl*, sobre a localização de possíveis pontos de blow-up.

Em um artigo surpreendente ([?]) Simon Brendle mostrou que a Conjectura de Compacidade é falsa quando $n \geq 52$. Em seguida, Fernando Codá e Simon Brendle ([7]), provaram que a conjectura é falsa para $25 \leq n \leq 51$. Finalmente, M.Khuri, F.C.Marques e R.Schoen, provaram (ver [14]) a conjectura afirmativamente quando $n \leq 24$. Ficando estabelecido o seguinte resultado:

A Conjectura de Compacidade é verdadeira se, e somente se, $n \leq 24$.

Nosso objetivo nesta dissertação é estudar os resultados obtidos em [14]. Descreveremos abaixo, alguns dos resultados principais a serem demonstrados nesta dissertação.

Para qualquer $p \in \left[1, \frac{n+2}{n-2}\right]$ considere o conjunto

$$\Phi_p = \{u > 0 \mid L_g u + K u^p = 0 \text{ em } M\} \tag{2}$$

então nosso principal resultado é:

Teorema 0.1. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $3 \leq n \leq$*

24 sem fronteira. Se (M^n, g) tem quociente de Yamabe positiva e não é conformemente difeomorfa para (S^n, g_0) , então para todo $\epsilon > 0$ então existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de g e ϵ tal que

$$C^{-1} \leq u \leq C \quad e \quad \|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C, \quad (3)$$

para qualquer $u \in \sum_{1+\epsilon \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}} \Phi_p$, onde $0 < \alpha < 1$.

Como na construção dos minimizantes do problema de Yamabe, a prova deste teorema tem aspecto local e global. O aspecto global envolve o Teorema de Massa Positiva. Para aplicarmos o teorema de massa positiva para obter estimativas de soluções do problema de Yamabe, o tensor de Weyl deve ser nulo para ordem suficientemente alta, de modo que a energia ADM possa ser definida. Esta é a principal dificuldade do problema, e o próximo resultado, afirma que este é exatamente o caso, quando $n \leq 24$. Mais especificamente estabeleceremos o seguinte resultado local:

Teorema 0.2 (Teorema do Anulamento de Weyl). *Seja g uma métrica Riemanniana suave definida na bola unitária de dimensão n , B_1 , $6 \leq n \leq 24$. Suponha que existe uma sequência de soluções $\{u_i\}$ de*

$$L_g u_i + K u_i^{p_i} = 0, \quad \text{em } B_1, \quad (4)$$

$p_i \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right]$, tal que para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma constante $C(\epsilon)$ tal que $\sup_{B_1 \setminus B_\epsilon} u_i \leq C(\epsilon)$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} (\sup_{B_1} u_i) = \infty$. Então o tensor de Weyl $W(g)$ satisfaz,

$$|W(g)|(x) \leq C|x|^l$$

para algum $l > \frac{n-6}{2}$.

Vale observar que, sem assumir o teorema de massa positiva, nosso teorema de compacidade vale para a classe de variedades (M^n, g) , satisfazendo

$$\sum_{k=0}^{\frac{n-6}{2}} |\nabla_g^k W_g(x)|^2 > 0$$

para todo $x \in M$.

A demonstração do teorema do anulamento de Weyl no caso de pontos de blow-up isolados simples precisa de um novo método para obtermos restrições locais em um ponto de blow-up. O primeiro passo para isto é obter aproximações fortes de uma sequência que está explodindo na vizinhança de um ponto de blow-up. O ponto importante aqui é que em dimensões altas, é necessário realizar uma análise refinada de blow-up indo além do “standard bubble”.

Depois de estabelecida esta expansão, podemos aplicar a identidade de Pohozaev para encontrar obstruções locais. Os termos de correção relevantes advindos da métrica, estão codificados em uma forma quadrática cuja positividade é suficiente para demonstrarmos o nosso resultado principal.

No apêndice demonstraremos a positividade da forma quadrática no caso em que $n \leq 24$, observando também que tal fato não é verdadeiro quando $n \geq 25$. A existência de uma dimensão crítica para este problema provém de um fato interessante e surpreendente, que merece ser melhor estudado. Observamos que a demonstração de que a forma quadrática é positiva envolve muitas contas e é bastante extensa, por esta razão utilizamos o Maple para auxiliar no calculo, cujas instruções estão disponíveis em ([13]).

O passo final da demonstração envolve a redução para o caso de pontos de blow-up isolados simples. Tal fato envolve renormalizações apropriadas para uma situação a qual o blow-up é simples para uma sequência de métricas convergindo para a métrica euclidiana, para qual o termo de fronteira correspondente na identidade de Pohozaev é positivo. Combinando a análise descrita acima para mostrar que os termos interiores são desprezíveis descartamos a possibilidade de alta energia blow-up no caso em que $3 \leq n \leq 24$. Notamos assim, que o resultado é local, e portanto podemos mostrar que localmente o conjunto dos pontos de blow-up consiste de um número finito de pontos de blow-up isolados simples. O que generaliza o resultado obtido pelo terceiro autor no caso de variedades localmente conformemente planas.

Uma consequência do teorema 0.1 é dar uma demonstração alternativa para o problema de Yamabe. Isto segue do fato que, métodos variacionais padrões podem ser usados para dar informações para a equação subcrítica (4), com $p_i \rightarrow \frac{n+2}{n-2}$ quando $i \rightarrow \infty$. De forma mais geral, o teorema de compacidade nos permite calcular o grau total de Leray-Schauder de todas as soluções da equação (2.1), e obter teoremas de existência mais refinados que discutiremos no capítulo 9.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES DE GEOMETRIA E ANÁLISE

Neste capítulo, faremos uma breve revisão das ferramentas de análise e geometria riemanniana necessárias para a compreensão do problema de Yamabe, e do estudo a ser desenvolvido nesta dissertação. Para mais detalhes do conteúdo abordado neste capítulo ver [3], [2], [12] e [10].

1.1 Variedades Riemannianas

Definição 1.1. *Uma métrica Riemanniana em uma variedade diferenciável M é uma correspondência que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno g_p , no espaço tangente T_pM , que varia diferenciavelmente no sentido a ser especificado a seguir: se $x : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$ é um sistema de coordenadas locais em torno de p , com $x(x_1, \dots, x_n) = q \in x(U)$ e $\frac{\partial}{\partial x_i}(q) = dx(e_i)$, então $g_{ij}(x_1, \dots, x_n) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}(q), \frac{\partial}{\partial x_j}(q) \rangle$ é uma função diferenciável.*

Uma variedade diferenciável dotada de uma métrica Riemanniana é chamada variedade Riemanniana.

Notação: Denotaremos a métrica g por $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$ ou $\langle \cdot, \cdot \rangle$ quando estiver claro a métrica com a qual estivermos trabalhando.

Exemplo 1.1. *Tomando $M = \mathbb{R}^n$ com $\frac{\partial}{\partial x_i}$ identificado com e_i , onde $\{e_i\}$ é a base canônica usal do \mathbb{R}^n , a métrica dada por $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, torna M uma variedade Riemanniana.*

Definição 1.2. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana suave. Se \tilde{g} é outra métrica Riemanniana em M , diremos que \tilde{g} é conforme a g se, e somente se, existe função positiva $\rho \in C^\infty(M)$ tal que $\tilde{g} = \rho g$.*

Exemplo 1.2. Em $H^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n > 0\}$, podemos considerar a métrica $g = \frac{1}{x_n}g_0$, onde g_0 é a métrica euclidiana usual. Por definição a métrica g é conforme a métrica euclidiana.

Denotemos por $\mathcal{X}(M)$ o espaço dos campos de vetores suaves em M e por $\mathcal{D}(M)$ o anel das funções reais de classe C^∞ definidas em M , e $T(M)$ o fibrado tangente de M . Introduziremos a seguir uma espécie de derivada de campos de vetores.

Definição 1.3. Uma conexão afim ∇ em uma variedade diferenciável M é uma aplicação

$$\begin{aligned} \nabla : T(M) \times \mathcal{X}(M) &\rightarrow T(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y \end{aligned}$$

que satisfaz as seguintes propriedades:

- (i) Se $X \in T_p M$, então $\nabla_X Y \in T_p M$;
- (ii) Para todo $p \in M$ a restrição de ∇ para $T_p M \times \mathcal{X}(M)$ é bilinear;
- (iii) Se f é uma função diferenciável, então $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$;
- (iv) Se X e Y pertencem a $\mathcal{X}(M)$, X de classe C^r e Y de classe C^{r+1} , então $\nabla_X Y$ é de classe C^r .

Veremos a seguir que a métrica Riemanniana determina de maneira única a escolha de uma conexão Riemanniana para a variedade M . Para isto precisamos das seguintes definições

Definição 1.4. Uma conexão é dita

- (a) *compatível* com a métrica g , se é válida a relação

$$X\langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle, \quad X, Y, Z \in \mathcal{X}(M)$$

- (b) *simétrica* quando

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$$

para todo $X, Y \in \mathcal{X}(M)$.

Teorema 1.1 (Levi-Civita). Dada uma variedade Riemanniana M , existe uma única conexão afim ∇ em M simétrica e compatível com a métrica Riemanniana.

Observação 1.1. A conexão dada pelo Teorema acima é chamada conexão Riemanniana de M . A menos de menção explícita a variedade estará munida com a conexão Riemanniana.

Para finalizar esta seção especificaremos o que foi feito acima para um sistema de coordenadas (U, φ) específico. Considerando os campos coordenados $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ em U , podemos escrever $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k$. Os coeficientes Γ_{ij}^k são chamados símbolos de Christoffel da conexão. Quando trabalhamos com a conexão Riemanniana, podemos obter uma expressão clássica dos símbolos de Christoffel em termos dos coeficientes da métrica Riemanniana dada por

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x_j} g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x_m} g_{ij} \right\} g^{mk}. \quad (1.1)$$

Observação 1.2. *A definição de derivada covariante pode ser estendida para campos de tensores suaves, considerando a derivada covariante como uma aplicação satisfazendo as seguintes propriedades:*

- a) Para funções, $\nabla_X f = X(f)$;
- b) ∇_X preserva o tipo de tensor;
- c) ∇_X comuta com a contração;
- d) $\nabla_X(u \otimes v) = (\nabla_X u) \otimes v + u \otimes (\nabla_X v)$, onde u e v são campos de tensores.

1.1.1 Aplicação Exponencial

Introduziremos a seguir a noção de geodésicas como curvas de aceleração nula. É possível verificar que tais curvas possuem a propriedade de minimizar comprimentos para pontos “suficientemente próximos”, e além disso, se uma curva é minimizante, então necessariamente, deverá ser uma geodésica.

Definição 1.5. *Uma curva parametrizada $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica em t_0 se $\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$, no ponto t_0 . Se γ é geodésica em t , para todo $t \in I$, dizemos que γ é uma geodésica.*

A proposição a seguir afirma que se a velocidade v é suficientemente pequena, existe uma única geodésica passando por um ponto q , com velocidade v , definida para um certo intervalo $(-\delta, \delta)$.

Proposição 1.1. *Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta, \epsilon_1 > 0$ e uma aplicação suave*

$$\begin{aligned} \gamma : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} &\rightarrow M, \\ \mathcal{U} &= \{(q, v) : q \in V \text{ e } v \in T_q M \text{ com } |v| < \epsilon_1\} \end{aligned}$$

tais que a curva $t \mapsto \gamma(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v , para cada $q \in V$ e cada $v \in T_q M$ com $|v| < \epsilon_1$.

Na verdade, é possível aumentar a velocidade da geodésica diminuindo seu intervalo de definição ou vice-versa. Tal fato é decorrente do seguinte lema.

Lema 1.1 (Homogeneidade de uma geodésica). *Se a geodésica $\gamma(t, q, v)$ está definida no intervalo $(-\delta, \delta)$, então a geodésica $\gamma(t, q, av)$, $a > 0$, está definida no intervalo $(-\frac{\delta}{a}, \frac{\delta}{a})$ e a seguinte relação é válida*

$$\gamma(t, q, av) = \gamma(at, q, v).$$

Deste modo, pela proposição anterior e pelo lema de homogeneidade, podemos tornar o intervalo da geodésica uniformemente grande em uma vizinhança de p . Mais precisamente obtemos

Proposição 1.2. *Dado $p \in M$, existem uma vizinhança V de p em M , um número $\epsilon > 0$ e uma aplicação suave*

$$\begin{aligned} \gamma &: (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M, \\ \mathcal{U} &= \{(q, w) : q \in V \text{ e } w \in T_q M \text{ com } |w| < \epsilon\} \end{aligned}$$

tal que $t \mapsto \gamma(t, q, w)$ é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade w , para cada $q \in V$ e $w \in T_q M$ com $|w| < \epsilon$.

A proposição acima nos permite introduzir o conceito de aplicação exponencial. Consideremos $p \in M$ e $\mathcal{U} \subset TM$ aberto como na proposição 1.1. Então a aplicação exponencial será definida como

$$\exp(q, v) = \gamma(1, q, v) = \gamma\left(|v|, q, \frac{v}{|v|}\right).$$

Podemos considerar a aplicação exponencial restrita a um aberto do espaço tangente $T_q M$, isto é, definimos

$$\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$$

por $\exp_q(v) = \exp(q, v)$. Geometricamente, $\exp_q(v)$ é o ponto de M obtido percorrendo um comprimento igual a $|v|$, a partir de q , sobre a geodésica que passa por q com velocidade igual a $\frac{v}{|v|}$.

Proposição 1.3. *Dado $q \in M$, existe $\epsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\epsilon(0) \subset T_q M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de $B_\epsilon(0)$ sobre um aberto de M .*

Se \exp_p é um difeomorfismo em uma vizinhança V da origem de $T_p M$, $\exp_p V = U$ é chamada uma vizinhança normal de p . Se $B_\epsilon(0)$ é tal que $B_\epsilon(0) \subset V$, chamamos $\exp_p B_\epsilon(0) = B_\epsilon(p)$ a bola normal de centro p e raio ϵ .

Uma vez que a exponencial é um difeomorfismo local em cada ponto, é possível induzir através da aplicação um sistema de coordenadas natural na variedade M da seguinte

maneira: Fixando $\{e_1, \dots, e_n\} \subset T_p M$ base ortonormal, definimos as coordenadas normais como

$$X(x_1, \dots, x_n) = \exp_p\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right).$$

O teorema a seguir é um resultado chave para o estudo de variedades Riemannianas, uma vez que um dos aspectos mais interessantes da Geometria é compreender a ligação existente entre propriedades locais e propriedades globais da variedade.

Teorema 1.2 (Hopf-Rinow). *As seguintes afirmações são equivalentes:*

- a) *A variedade Riemanniana M é completa como espaço métrico;*
- b) *Para algum ponto $p \in M$, todas as geodésicas partindo de p são infinitamente estendíveis;*
- c) *Todas as geodésicas são infinitamente estendíveis;*
- d) *Todo subconjunto fechado e limitado de M é compacto;*

Mais ainda, temos o seguinte:

Se M é conexa e completa, então todo par de pontos (p, q) de M pode ser interligado por uma geodésica cujo comprimento de arco é igual a $d(p, q)$.

De acordo com o teorema acima, sabemos que $\exp_p(rX)$, com $\|X\| = 1$, está definida para todo $r \in \mathbb{R}$ e $X \in S^{n-1}$. Sabemos também que a aplicação exponencial é diferenciável. Desta forma, considere a aplicação $\mu : S^{n-1} \rightarrow (0, \infty]$, onde $\mu(X)$ é a cota superior do conjunto dos $r \in \mathbb{R}$ tais que a geodésica c , definida como $c(s) = \exp_p(sX)$, com $s \in [0, r]$, é minimizante.

Definição 1.6. *Seja $\mu(X)$ definido como anteriormente e $\delta_p = \inf \mu(X)$, $X \in S^{n-1}$. O número δ_p é chamado raio injetivo em p , claramente $\delta_p > 0$. Desta forma, podemos definir o raio injetivo δ da variedade, como o maior número δ tal que $\delta \leq \delta_p$, para todo $p \in M$.*

É possível provar que para variedades compactas o raio injetivo é estritamente positivo.

1.1.2 Curvaturas

A noção de curvatura em uma variedade Riemanniana possui uma interpretação geométrica que não abordaremos neste capítulo. Descreveremos a seguir o conceito de maneira puramente formal.

Definição 1.7. *A curvatura R de uma variedade Riemanniana M é uma 2-forma com valores em $\text{Hom}(\mathcal{X}(M), \mathcal{X}(M))$ definida como,*

$$(X, Y) \rightarrow R(X, Y) = \nabla_Y \nabla_X - \nabla_X \nabla_Y + \nabla_{[X, Y]}.$$

onde ∇ é a conexão Riemanniana de M .

Em coordenadas locais (Ω, φ) podemos escrever

$$R(X_i, X_j)X_k = \sum_l R_{ijk}^l X_l,$$

onde os coeficientes R_{ijk}^l serão as componentes de um (3,1)-tensor em Ω , chamado tensor curvatura. Podemos obter a seguinte expressão dessas componentes com relação aos símbolos de Christoffel da conexão Riemanniana

$$R_{ijk}^l = \partial_j \Gamma_{ki}^l - \partial_k \Gamma_{ji}^l + \sum_{m=1}^n \Gamma_{jm}^l \Gamma_{ki}^m - \sum_{m=1}^n \Gamma_{km}^l \Gamma_{ji}^m \quad (1.2)$$

Denotaremos também $R_{ijk} = \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle = R(X_i, X_j, X_k, X_s)$. E deste modo obtemos a relação

$$\begin{aligned} R_{ijk} &= \langle R(X_i, X_j)X_k, X_s \rangle \\ &= \left\langle \sum_l R_{ijk}^l X_l, X_s \right\rangle \\ &= \sum_l R_{ijk}^l g_{ls}. \end{aligned}$$

Proposição 1.4. *Obtemos assim as seguintes relações:*

- (a) $R_{ijks} + R_{jkis} + R_{kij s} = 0$,
- (b) $R_{ijks} = -R_{jik s}$,
- (c) $R_{ijks} = -R_{ijsk}$,
- (d) $R_{ijks} = R_{ksij}$.

Relacionado ao tensor curvatura está o conceito de curvatura seccional. No que segue, denotaremos por

$$|x \wedge y| = \sqrt{|x|^2|y|^2 - g(x, y)^2},$$

a área do paralelogramo bi-dimensional determinado pelo par de vetores $x, y \in V$.

Proposição 1.5. *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional do espaço tangente $T_p M$ e sejam $x, y \in \sigma$ dois vetores linearmente independentes. Então,*

$$K(x, y) = \frac{R(x, y, x, y)}{|x \wedge y|^2}$$

não depende da escolha dos vetores $x, y \in \sigma$.

Definição 1.8. Dado um ponto $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional $\sigma \subset T_pM$, o número real $K(x, y) = K(\sigma)$, onde $\{x, y\}$ é uma base qualquer de σ , é chamado curvatura seccional de σ em p .

Definição 1.9 (Curvatura de Ricci e Curvatura Escalar). Seja $x = z_n \in T_pM$, $|x| = 1$. Tome uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_n\}$ do hiperplano de T_pM ortogonal a x , então

$$\begin{aligned} Ric(x) &= \frac{1}{n-1} \sum_i \langle R(x, z_i)x, z_i \rangle, \quad i = 1, \dots, n-1, \\ R_g(p) &= \frac{1}{n} \sum_j Ric(z_j) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i,j} \langle R(z_i, z_j z_i, z_j) \rangle, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

são chamadas curvatura de Ricci na direção x e curvatura escalar em p .

Algumas vezes utilizaremos a definição de curvatura sem a normalização apresentada acima. Notemos que tais curvaturas independem da escolha das bases. De fato, para observar isto, consideremos a aplicação bilinear

$$Q(x, y) = \text{traço da aplicação } z \rightarrow R(x, z)y.$$

E assim, usando as propriedades descritas na proposição 1.4, segue que

$$Q(x, y) = \sum_i \langle R(x, z_i)y, z_i \rangle = \sum_i \langle R(y, z_i)x, z_i \rangle = Q(y, x).$$

para uma base ortonormal $\{z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = x\}$. Logo, Q é simétrica e $Q(x, x) = (n-1)Ric(x)$ independe da base escolhida. Defina agora a aplicação auto-adjunta K associada a Q dada por

$$Q(x, y) = \langle K(x), y \rangle$$

Numa base ortonormal $\{z_i\}$ temos

$$\begin{aligned} \text{traço de } K &= \sum_j \langle K(z_j), z_j \rangle = \sum_j Q(z_j, z_j) \\ &= (n-1) \sum_j Ric(z_j) = n(n-1)R_g(p). \end{aligned}$$

ficando assim demonstrado o que a curvatura está intrinsecamente determinada. A forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ é chamada tensor de Ricci.

Descreveremos o que foi feito acima para um sistema de coordenadas locais (U, \mathbf{x}) . Seja $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$, eg^{ij} a matriz inversa de g_{ij} . Então os coeficientes da forma bilinear $\frac{1}{n-1}Q$ na base $\{X_i\}$ são dados por

$$\frac{1}{n-1}R_{ik} = \frac{1}{n-1} \sum_j R_{ijk}^j = \frac{1}{n-1} \sum_{sj} R_{ijks} g^{sj}.$$

Relembremos agora que se $A : T_pM \rightarrow T_pM$ é uma aplicação linear auto-adjunta e $B : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$ é a forma bilinear a ela associada, isto é, $B(x, y) = \langle A(x), y \rangle$, então o traço de $A = \sum_{ik} B(X_i, X_k)g^{ik}$. Portanto a curvatura escalar no sistema de coordenadas é dada por

$$R_g = \frac{1}{n-1} \sum_{ik} R_{ik}g^{ik}.$$

A partir de agora utilizaremos a notação de Einstein, onde um índice que aparece duas vezes em um produto deve ser somado de 1 a n .

1.1.3 Campos de Jacobi

Os campos de Jacobi são desenvolvidos como uma forma de relacionar ao conceito de curvatura a noção de geodésica. A curvatura seccional $K(p, \sigma)$ mede a “velocidade de afastamento” das geodésicas que saem de p e são tangentes a σ , para formalizar precisamente essa noção de afastamento precisamos introduzir a ideia de campos de Jacobi. Abordaremos nesta seção apenas a sua definição e um resultado que será relevante para o desenvolvimento desta dissertação, finalizando assim a breve revisão de geometria Riemanniana.

Definição 1.10. *Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica de M . Um campo de vetores J ao longo de γ é um campo de Jacobi se satisfaz a equação de Jacobi*

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(\gamma'(t), J(t))\gamma'(t) = 0$$

para $t \in [0, a]$.

Proposição 1.6. *Seja $p \in M$ e $\gamma : [0, a] \rightarrow M$ uma geodésica com $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$. Seja $w \in T_v(T_pM)$ com $|w| = 1$ e seja J o campo de Jacobi ao longo de γ dado por*

$$J(t) = (d \exp_p)_{tw}(tw), \quad 0 \leq t \leq a.$$

Então o desenvolvimento de Taylor de $\|J(t)\|^2$ em torno de $t = 0$ é dado por

$$\|J(t)\|^2 = t^2 - \frac{1}{3} \langle R(v, w)v, w \rangle t^4 + R(t),$$

onde $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R(t)}{t^4} = 0$.

1.2 O Operador de Laplace-Beltrami

Introduziremos a seguir os conceitos necessários para a introdução do operador de Laplace-Beltrami e obteremos uma expressão para o operador em coordenadas locais. Definiremos também alguma da notação que utilizaremos no decorrer do texto.

Definição 1.11. a) Seja $u \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ uma função suave. O gradiente de u é um campo diferenciável em M satisfazendo

$$\langle \text{gradu}(p), v \rangle = du_p(v), \quad \forall v \in T_p M \quad (1.3)$$

b) Seja $Y \in \mathcal{X}(M)$ um campo vetorial suave. A divergência de Y é uma função suave em M dada por

$$\begin{aligned} \text{div} Y : M &\rightarrow \mathbb{R} \\ p &\mapsto (\text{div} Y)(p) = \text{tr}\{X(p) \rightarrow \nabla_Y X(p)\} \end{aligned}$$

onde tr denota o traço de um operador linear.

c) O operador de Laplace-Beltrami de $u \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ é definido como

$$\Delta u = \text{div}(\text{gradu}).$$

A seguir obteremos uma expressão para as definições acima em coordenadas locais $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$. De fato, uma vez que o gradiente de uma função é um campo diferenciável, em coordenadas locais podemos escrever

$$\text{gradu} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde pela definição (1.3), segue que

$$a_i = \sum_{j=1}^n g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}. \quad (1.4)$$

Consideremos a aplicação linear

$$E(Y) = \nabla_Y \text{gradu} = \nabla_Y \left(\sum a_i X_i \right),$$

e portanto, usando a notação $\nabla_i = \nabla_{X_i}$, e avaliando nos elementos da base, vem que

$$\begin{aligned} E(X_j) &= \sum_j \left(\sum_i a_i X_i \right) = \sum_i \left(a_i \nabla_j X_i + \frac{\partial a_i}{\partial x_j} X_i \right) \\ &= \sum_i a_i \left(\sum_k \Gamma_{ij}^k X_k \right) + \sum_k \frac{\partial a_k}{\partial x_j} X_k. \end{aligned}$$

Sendo assim, obtemos

$$\Delta u = \sum_j \left(\sum_i a_i \Gamma_{ij}^j + \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right). \quad (1.5)$$

Nosso objetivo agora é calcular o termo $\frac{\partial a_j}{\partial x_j}$, para isto iremos derivar a expressão $\sum_k g_{ik}g^{kj} = \delta_{ij}$ em relação à x_j . Obteremos assim,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(g^{ik}) = - \sum_{im} g^{jm} \frac{\partial g_{mi}}{\partial x_j} g^{ik} = - \sum_m g^{jm} \Gamma_{jm}^k - \sum_i g^{ik} \Gamma_{ji}^j. \quad (1.6)$$

Substituindo (1.4) em (1.5) e utilizando a expressão (1.6), segue que

$$\begin{aligned} \Delta u &= \sum_{ij} \left(\sum_k g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \Gamma_{ij}^j + \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_k g^{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right) \\ &= \sum_{jk} g^{jk} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{ijk} g^{ik} \frac{\partial u}{\partial x_k} \Gamma_{ij}^j - \sum_{jk} \left(\sum_m g^{jm} \Gamma_{jm}^k + \sum_i g^{ik} \Gamma_{ji}^j \right) \frac{\partial u}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

e assim

$$\Delta u = \sum_{ij} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} - \sum_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \Gamma_{ij}^m \right). \quad (1.7)$$

Usando novamente a expressão (1.6) na expressão acima obtemos

$$\Delta u = \sum_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}) \right) + \sum_m g^{jm} \frac{\partial u}{\partial x_j} \Gamma_{im}^i. \quad (1.8)$$

Relembrando a expressão dos símbolos de Christoffel em termos da métrica vem que

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^i g^{mj} = \frac{1}{2} \left(\sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} (g_{jk}) g^{ki} g^{mj} + \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ki}) g^{ki} g^{mj} - \sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{ij}) g^{ki} g^{mj} \right),$$

derivando $\sum_j g_{jk}g^{mj} = \delta_{mk}$, em relação à x_i , e substituindo na expressão anterior temos

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^i g^{mj} = \frac{1}{2} \left(\sum_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (g_{ki}) g^{ki} g^{mj} \right). \quad (1.9)$$

Note que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \log \sqrt{\det g} &= \frac{1}{2 \det g} \left(\sum_{il} \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{il} C_{il}) \right) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{il} \frac{C_{il}}{\det g} \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{il}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{il} g^{il} \frac{\partial}{\partial x_k} (g_{il}), \end{aligned}$$

onde $C_{il} = (-1)^{i+l} \det g(i/l)$ e $g(i/l)$ é a matriz obtida de g retirando-se a linha i e a coluna l . Substituindo em (1.9), obtemos

$$\sum_{ij} \Gamma_{ij}^i g^{mj} = \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\log \sqrt{\det g}) g^{mj}.$$

Inserindo a expressão acima obtida em (1.6), obtemos uma nova expressão para o operador de Laplace-Beltrami,

$$\Delta u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} (g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial u}{\partial x_j}). \quad (1.10)$$

1.3 Espaços de Sobolev em Variedades

Definiremos a seguir a noção de espaços de Sobolev para variedades Riemannianas, noção indispensável para o estudo de equações diferenciais em variedades. Nesta seção não demonstraremos os resultados principais, deixando como referência o livro do [Aubin]. Estabeleceremos a seguir as notações necessárias para o desenvolvimento do capítulo.

Definição 1.12. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana suave de dimensão n . Para uma função real $u \in C^k(M^n)$, definimos:*

$$|\nabla^k u|^2 = \nabla^{\alpha_1} \nabla^{\alpha_2} \dots \nabla^{\alpha_k} u \nabla_{\alpha_1} \nabla_{\alpha_2} \dots \nabla_{\alpha_k} u,$$

onde $\nabla^{\alpha_j} = \sum_{\alpha_i} g^{\alpha_i \alpha_j} \nabla_{\alpha_i}$. Em particular

$$|\nabla^0 u| = |u|, |\nabla^1 u|^2 = \sum_{i=1}^n \nabla^i u \nabla_i u,$$

e $\nabla^k \varphi$ denota a k -ésima derivada covariante de φ .

Consideremos o espaço $C^{k,p}(M)$, das funções C^∞ , tais que $|\nabla^l u| \in L^p(M)$, para todo l com $0 \leq l \leq k$, onde k e l são inteiros e $p \geq 1$ é um número real.

Definição 1.13. *O espaço de Sobolev $W^{p,k}(M)$ é o completamento de $C^{k,p}(M)$ com relação a norma*

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \sum_{l=0}^k \|\nabla^l u\|_p.$$

O espaço $W_0^{k,p}(M)$ é o fecho de $\mathcal{D}(M)$ em $W^{k,p}(M)$, onde $\mathcal{D}(M)$ é o espaço das funções suaves com suporte compacto em M . Podemos considerar a norma equivalente

$$\left[\sum_{l=0}^k \|\nabla^l u\|_p^p \right]^{1/p}.$$

Quando $p = 2$, o espaço $H^k(M) = W^{2,k}(M)$, é um espaço de Hilbert com o produto interno proveniente da norma acima.

A seguir apresentaremos os teoremas fundamentais sobre espaços de Sobolev, de modo que possamos ter ferramentas para a discussão do Problema de Yamabe.

Teorema 1.3 (Imersão de Sobolev). *Sejam k e l dois inteiros com $k > l \geq 0$, p e q dois números reais com $1 \leq q < p$ satisfazendo, $1/p = 1/q - (k - l)/n$. O teorema da imersão de Sobolev assegura que para \mathbb{R}^n , $W^{k,q} \subset W^{l,p}$ continuamente.*

Se $(k - r)/n > 1/q$, então $W^{k,q} \subset C_B^r$ continuamente. Aqui, $r \geq 0$ é um inteiro e o conjunto C_B^r é o conjunto das funções limitadas cujas derivadas de ordem menor ou igual a r também são limitadas, onde

$$\|u\|_{C^r} = \max_{0 \leq l \leq r} \sup |\nabla^l u|.$$

Se $(k - r - \alpha)/n > 1/q$, então $W^{k,q} \subset C^{r,\alpha}$ continuamente, onde α é um número real satisfazendo $0 < \alpha < 1$ e $C^{r,\alpha}$ é o espaço das funções de classe C^r , cujas derivadas satisfazem a condição de Hölder com expoente α , onde

$$\|u\|_{C^\alpha} = \sup |u| + \sup_{p \neq q} \frac{|u(p) - u(q)|}{d(p, q)^\alpha}.$$

Teorema 1.4. *O teorema da imersão de Sobolev é válido para variedades compactas. Mais ainda, $W^{k,q}$ não depende da métrica Riemanniana.*

Teorema 1.5 (Mergulho de Sobolev). *Se $1 \leq q < n$ então toda $\varphi \in W^{1,q}(\mathbb{R}^n)$ satisfaz:*

$$\|\varphi\|_p \leq K(n, q) \|\nabla \varphi\|_q,$$

com $1/p = 1/q - 1/n$ e

$$K(n, q) = \frac{q-1}{n-q} \left[\frac{n-q}{n(q-1)} \right]^{1/q} \left[\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n/q)\Gamma(n+1-n/q)w_{n-1}} \right]^{1/n}$$

para $1 < q < n$, e

$$K(n, 1) = \frac{1}{n} \left[\frac{n}{w_{n-1}} \right]^{1/n}.$$

ou seja, $K(n, q)$ é a norma do mergulho $W^{1,q} \subset L^p$ que é atingido pelas funções

$$\varphi(x) = (\lambda + \|x\|^{q/(q-1)})^{1-\frac{n}{q}},$$

onde λ é um número real positivo qualquer.

Teorema 1.6. *O teorema do mergulho de Sobolev é válido para toda variedade completa M com curvatura limitada e raio injetivo $\delta > 0$. Mais ainda, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $A_q(\varepsilon)$ tal que toda $\varphi \in W^{1,q}$ satisfaz:*

$$\|\varphi\|_p \leq [K(n, q) + \varepsilon] \|\nabla \varphi\|_q + A_q(\varepsilon) \|\varphi\|_q,$$

onde $1/p = 1/q - 1/n$ e $K(n, q)$ é a melhor constante tendo esta propriedade.

Os dois teoremas a seguir nos fornecem desigualdades ótimas, importantes no decorrer do estudo:

Teorema 1.7. *Seja M^n uma variedade suave com raio injetivo $\delta_0 > 0$. Se a curvatura for constante ou se a dimensão é dois e a curvatura é limitada, então $A_q(0)$ existe e toda $\varphi \in W^{1,q}(M)$ satisfaz*

$$\|\varphi\|_p \leq K(n, q)\|\nabla\varphi\|_q + A_q(0)\|\varphi\|_q.$$

Para $M = \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{H}^n , a desigualdade vale com $A_q(0) = 0$.

Teorema 1.8. *Existe uma constante $A(q)$ tal que toda $\varphi \in W^{1,q}(S^n)$ satisfaz:*

$$\begin{aligned} \|\varphi\|_p^q &\leq K^q(n, q)\|\nabla\varphi\|_q^q + A(q)\|\varphi\|_q^q, & \text{se } 1 \leq q \leq 2, \\ \|\varphi\|_p^{q/(q-1)} &\leq K(n, q)^{q/(q-1)}\|\nabla\varphi\|_q^{q/(q-1)} + A(q)\|\varphi\|_q^{q/(q-1)} & \text{se } 2 \leq q < n. \end{aligned}$$

Se M^n , $n \geq 3$, é uma variedade Riemanniana com curvatura escalar constante e raio injetivo $\delta_0 > 0$ então existe uma constante A , tal que toda $\varphi \in W^{1,2}(M^n)$ satisfaz:

$$\|\varphi\|_{2^*}^2 \leq K(n, 2)^2\|\nabla\varphi\|_2^2 + A\|\varphi\|_2^2.$$

Para a esfera de volume 1, a desigualdade é válida com $A = 1$.

A seguir veremos uma versão do Teorema de Rellich-Kondrakov no caso em que a variedade é compacta. Antes, porém, relembremos o resultado para o caso euclidiano:

Teorema 1.9 (Kondrakov). *Seja $k \geq 0$ um inteiro, p e q números reais satisfazendo $1 \geq 1/p > 1/q - k/n > 0$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e limitado e tem fronteira suficientemente regular, isto é, $\partial\Omega$ é de classe C^1 ou lipschitziana, então*

- a) *A imersão $W^{k,q}(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ é compacta;*
- b) *A imersão $W^{k,q}(\Omega) \subset C^\alpha(\bar{\Omega})$ é compacta se $k - \alpha > n/q$, com $0 \leq \alpha < 1$;*
- c) *Se Ω é um aberto limitado de \mathbb{R}^n , as seguintes imersões são compactas:*

$$W_0^{k,q}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad \text{e} \quad W_0^{k,q}(\Omega) \subset C^\alpha(\bar{\Omega}).$$

Teorema 1.10. *O teorema de Kondrakov é válido para variedades Riemannianas compactas, e para variedades Riemannianas \bar{W}^n com fronteira de classe C^1 . Assim, as seguintes imersões são compactas:*

- a) *$W^{k,q}(M) \subset L^p(M)$ e $W^{k,q}(W) \subset L^p(W)$, onde $1 \geq 1/p > 1/q - k/n > 0$;*
- b) *$W^{k,q}(M) \subset C^\alpha(M)$ e $W^{k,q}(W) \subset C^\alpha(\bar{W})$, se $k - \alpha > n/q$, com $0 \leq \alpha < 1$.*

1.4 Equações Elípticas e Teoria de Regularidade

A seguir definiremos a noção de operadores elípticos e apresentaremos os resultados principais de teoria de regularidade.

Definição 1.14. *Seja M^n uma variedade Riemanniana. Um operador diferencial linear $A(u)$ de ordem $2m$ em M^n , escrito em uma carta local (Ω, φ) , é uma expressão da forma:*

$$A(u) = \sum_{l=0}^{2m} a_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l} \nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_l} u, \quad (1.11)$$

onde a_l são l -tensores e $u \in C^{2m}(M)$. Escreveremos, por simplicidade, $A(u) = a_l \nabla^l u$. Os termos de maior ordem são chamados de partes líderes.

O operador é dito elíptico em um ponto $x \in \Omega$, se existe $\lambda(x) \geq 1$, tal que, par todo vetor ξ temos

$$\|\xi\|^{2m} \lambda^{-1}(x) \leq a_{2m}^{\alpha_1 \dots \alpha_{2m}}(x) \xi_{\alpha_1} \dots \xi_{\alpha_{2m}} \leq \lambda(x) \|\xi\|^{2m}. \quad (1.12)$$

Diremos que o operador é uniformemente elíptico em Ω , se existe λ_0 e $\lambda(x)$, $1 \leq \lambda(x) \leq \lambda_0$, tal que a desigualdade (1.12) é válida para todo $x \in \Omega$.

Definição 1.15. *Um operador diferencial A de ordem $2m$ em M^n , é um operador na forma $A(u) = f(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^{2m} u)$, onde f é uma função diferenciável com relação as suas entradas. A primeira variação de f em $u_0 \in C^{2m}(\Omega)$ é o operador diferencial linear*

$$\begin{aligned} A'_{u_0}(v) &= \sum_{l=0}^{2m} \frac{\partial f(x, u_0, \nabla u_0, \dots, \nabla^{2m} u_0)}{\partial \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_l} u} \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_l} v \\ &= \frac{\partial f}{\partial \nabla^l u}(x, u_0, \nabla u_0, \dots, \nabla^{2m} u_0) \nabla^l, \end{aligned}$$

onde $\nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_l} u = \nabla_{\alpha_1} \dots \nabla_{\alpha_l} u$. Se A'_{u_0} é um operador elíptico em u_0 , então A é chamado elíptico em u_0 .

Consideremos A um operador diferencial linear de ordem $2m$ definido em uma variedade Riemanniana M , com ou sem fronteira. Até agora, entendemos por solução de uma equação $A(u) = f$, como sendo uma função $u \in C^{2m}$ satisfazendo a equação pontualmente. A seguir generalizaremos para variedades Riemannianas a ideia de solução fraca de uma equação.

Se $f \in L^p$ e se os coeficientes de A são mensuráveis e localmente limitados, diremos que $u \in W^{2m,p}(M)$ é uma solução forte no sentido L^p da equação $A(u) = f$ se existe uma sequência $\{\varphi_i\}$ de funções suaves em M tal que $\varphi \rightarrow u \in W^{2m,p}(M)$ e $A(\varphi_i) \rightarrow f \in L^p(M)$. De fato, neste caso as derivadas fracas de ordem até $2m$ (no sentido das distribuições) são funções em $L^p(M)$ satisfazendo $A(u) = f$ q.t.p.

Definição 1.16. *Seja $A(u) = a_l \nabla^l u$. Se os tensores $a_l \in C^l(M)$ para $0 \leq l \leq 2m$, então definimos o adjunto formal de A como*

$$A^*(\varphi) = (-1)^l \nabla^l(\varphi a_l).$$

Diremos que $u \in L^1(M)$ satisfaz a equação $A(u) = f$ no sentido das distribuições, se para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$ for válido

$$\int_M u A^*(\varphi) dV_g = \int_M f \varphi dV_g.$$

Se os coeficientes $a_l \in C^\infty(M)$, então a distribuição u satisfaz $A(u) = f$ se para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$:

$$\langle u, A^*(\varphi) \rangle = \langle f, \varphi \rangle.$$

Assim, uma dada distribuição é alguma derivada fraca de ordem, digamos r , de uma função localmente integrável. Neste caso $\langle u, A^*(\varphi) \rangle$ faz sentido se os coeficientes $a_l \in C^{l+r}(M)$.

Se o operador puder ser escrito na forma divergente, isto é, se for possível escrever $A(u)$ como

$$A(u) \equiv \sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq l \leq m}} \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_k} (a_{k,l}^{\alpha_1 \dots \alpha_k \beta_1 \dots \beta_l} \nabla_{\beta_1 \dots \beta_l} u) + \sum_{l=0}^m b_l \nabla^l u,$$

onde $a_{k,l}$ são $k+l$ -tensores e b_l são l -tensores, então $u \in W^{m,p}(M)$ é dita solução clássica de $A(u) = f$ com $f \in L^1(M)$ se para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$ verificarmos

$$\sum_{\substack{0 \leq k \leq m \\ 0 \leq l \leq m}} (-1)^k \int_M a_{k,l} \nabla^l u \nabla^k \varphi dV_g + \sum_{l=0}^m \int_M \varphi b_l \nabla^l u dV_g = \int_M f \varphi dV_g.$$

Neste caso precisamos apenas supor que $a_{k,l}$ são mensuráveis e localmente limitadas para todo par (k,l) . Note que estas definições de solução fraca e generalizada não são equivalentes, uma vez que dependem das propriedades dos coeficientes.

Para um operador diferencial não linear do tipo

$$A(u) = \sum_{l=0}^m (-1)^l \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_l} A_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) = (-1)^l \nabla^l A_l,$$

onde A_l são l -tensores em M , $u \in C^m(M)$ é dita uma solução fraca de $A(u) = 0$, se para toda $\varphi \in C_0^\infty(M)$, satisfizer

$$\sum_{l=0}^m \int A_l^{\alpha_1 \dots \alpha_l}(x, u, \nabla u, \dots, \nabla^m u) \nabla_{\alpha_1 \dots \alpha_l} \varphi dV_g = 0.$$

Em particular consideremos o problema

$$\Delta_g u + a(x)u = f(x), x \in M, \quad (1.13)$$

onde $a, f : M \rightarrow \mathbb{R}$ são funções dadas. Neste caso, diremos que u é solução fraca de (1.13) quando,

$$\int_M \nabla u, \nabla \phi dV_g + \int_M au\phi - \int_M f\phi dV_g = 0,$$

para toda $\phi \in H^1(M)$.

Nosso objetivo agora, é enunciar os resultados de regularidade mais importantes a cerca de teoria de regularidade. É possível verificar que, utilizando procedimentos de colagem, os resultados que anunciaremos a seguir podem ser formulados no contexto de variedades compactas.

Teorema 1.11. *Seja Ω um aberto de \mathbb{R}^n . Denotando por Δ o laplaciano com relação a qualquer métrica em Ω , se $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca para a equação $\Delta u = f$, então*

a) (Estimativa L^q) *Se $f \in W^{k,q}(\Omega)$, então $u \in W^{k+2,p}(\Omega_0)$, para todo compacto $\Omega_0 \subset \Omega$. Se $u \in L^q(\Omega)$, então*

$$\|u\|_{W^{k+2,q}(\Omega_0)} \leq C(\|\Delta u\|_{W^{k,q}(\Omega)} + \|u\|_{L^q(\Omega)})$$

b) (Estimativas de Schauder) *Se $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$, então $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega_0)$, para todo compacto $\Omega_0 \subset \Omega$. Se $u \in C^\alpha(M)$ então*

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(\Omega_0)} \leq C(\|\Delta u\|_{C^{k,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^\alpha(M)}).$$

Teorema 1.12. *Sejam M uma variedade Riemanniana compacta. Considere $u \in L^1_{loc}(M)$ uma solução fraca para $\Delta u = f$.*

a) *Se $f \in W^{k,q}(M)$, então $u \in W^{2+k,q}(M)$, e*

$$\|u\|_{W^{k+2,q}(M)} \leq C(\|\Delta u\|_{W^{k,q}(M)} + \|u\|_{L^q(M)}).$$

b) *Se $f \in C^{k,\alpha}(M)$, então $u \in C^{k+2,\alpha}(M)$ e,*

$$\|u\|_{C^{k+2,\alpha}(M)} \leq C(\|\Delta u\|_{C^{k,\alpha}(M)} + \|u\|_{C^\alpha(M)}).$$

Teorema 1.13 (Princípio do Máximo Forte). *Se h é uma função não negativa, regular, definida em uma variedade conexa M e $u \in C^2(M)$ satisfaz $(\Delta + h)u \geq 0$. Se u atinge o seu mínimo $m \leq 0$, então u é constante em M .*

1.5 Função de Green para o Laplaciano

No caso euclidiano, quando consideremos a solução fundamental do laplaciano, sabemos que para $n \leq 3$, $\Delta_{Qdist}(r^{2-n}) = (n-2)w_{n-1}\delta_p$ e, caso $n = 2$, $\Delta_{Qdist} \log r = -2\pi\delta_p$, onde δ_p é a função de Dirac em p , $r = d(P, Q)$ e w_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $n - 1$.

No caso de uma variedade Riemanniana, r é apenas uma função Lipschitziana, e por este motivo, com o objetivo de demonstrar a existência de uma função de Green, consideraremos uma função positiva decrescente $f(r)$, que é igual a 1 em uma vizinhança de 0 e nula quando $r \geq \delta(p)$ o raio injetivo de p . Definimos assim,

$$H(p, q) = \begin{cases} [(n-2)w_{n-1}]^{-1}r^{2-n}f(r), & \text{para } n \leq 3 \\ -(2\pi)^{-1}f(r) \log r, & \text{para } n = 2. \end{cases} \quad (1.14)$$

Proposição 1.7. *Para toda $\psi \in C^2(M)$, obtemos a Fórmula de Green:*

$$\psi(p) = \int_M H(p, q)\Delta\psi(q)dV_g(q) - \int_M \Delta_q H(p, q)\psi(q)dV_g(q). \quad (1.15)$$

Definição 1.17. *Seja M uma variedade Riemanniana compacta com fronteira de classe C^∞ . A função de Green $G(p, q)$ do laplaciano é uma aplicação de $M \times M$ satisfazendo*

$$\Delta_{Qdist}G(P, Q) = \delta_p(Q), \quad (1.16)$$

que se anula na fronteira.

Se M é uma variedade compacta suave com volume V , a função de Green $G(p, q)$ é uma função satisfazendo

$$\Delta_{Qdist}G(P, Q) = \delta_p(Q) - V^{-1}.$$

A seguir enunciaremos o teorema principal desta seção.

Teorema 1.14. *Seja M^n uma variedade Riemanniana compacta suave. Então existe uma função de Green $G(p, q)$ para o laplaciano que possui as seguintes propriedades:*

(a) *Para toda função $\varphi \in C^2$, temos*

$$\varphi(p) = V^{-1} \int_M \varphi(q)dV_g(q) + \int_M G(p, q)\Delta\varphi(q)dV_g(q).$$

(b) *$G(p, q)$ é uma função suave sobre $M \times M$ com exceção da diagonal.*

(c) Existe uma constante k tal que

$$\begin{aligned} |G(p, q)| &< k(1 + |\log r|), \text{ para } n = 2 \text{ e} \\ |G(p, q)| &< kr^{2-n} \text{ para } n > 2, \\ |\nabla_q G(p, q)| &< kr^{1-n} \text{ e } |\nabla_q^2 G(p, q)| < kr^{-n} \text{ com } r = d(p, q). \end{aligned}$$

(d) Existe uma constante A tal que $G(p, q) \geq A$. Uma vez que a função de Green é definida a menos de uma constante, podemos escolhe-la de modo que a função seja positiva.

(e) $\int G(p, q)dV_g(p) = \text{constante}$. Podemos escolher a função de Green de modo que a integral é nula.

(f) $G(p, q) = G(q, p)$.

É possível demonstrar a existência da função de Green para um operador coercivo da forma $\Delta_g + h$. É possível demonstrar que existe uma função $G : M \times M \setminus D_M \rightarrow \mathbb{R}$, onde D_M é a diagonal de $M \times M$, tal que para todo $x \in M$, $G_x = G(x, \cdot) \in L^1(M)$, tal que para todo $u \in C^2(M)$ e $x \in M$, temos

$$u(x) = \int_M G(x, y)(\Delta_g u(y) + h(y)u(y))dV_g \quad (1.17)$$

e tal que satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) Para quaisquer $x, y \in M$, $G(x, y) = G(y, x)$ e $G(x, y) > 0$. Mais ainda, para qualquer $x \in M$, a função $G_x : M \setminus \{x\} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $G_x(y) = G(x, y)$ pertence a $C_{loc}^{2,\alpha}(M \setminus \{x\})$.

(P2) Para quaisquer $x, y \in M$, $d_g(x, y)^{n-2}G(x, y) \leq C$.

(P3) Existe $\delta > 0$, dependendo apenas de (M, g) , tal que, para quaisquer $x, y \in M$, $x \neq y$, se $d_g(x, y) < \delta$, então

$$\begin{aligned} \left| d_g(x, y)^{n-2}G(x, y) - \frac{1}{(n-2)w_{n-1}} \right| &\leq Cd_g(x, y), \text{ e} \\ \left| d_g(x, y)^{n-1}|\nabla_y G(x, y)| - \frac{1}{w_{n-1}} \right| &\leq Cd_g(x, y) \end{aligned}$$

onde w_{n-1} é o volume da esfera unitária e $C > 0$ é uma constante.

A demonstração destes fatos estão no apêndice de [10].

1.6 Variedades Localmente Conformemente Planas

Para finalizar os pré-requisitos básicos para o nosso estudo precisamos introduzir a noção de variedades localmente conformemente planas.

Definição 1.18. *Diremos que uma variedade Riemanniana (M^n, g) é localmente conformemente plana se todo ponto $p \in M$ possuir uma vizinhança onde existe uma métrica \tilde{g} conforme a métrica dada que é plana*

Quando a variedade é localmente conformemente plana, existe um atlas $(\Omega_i, \varphi_i)_{i \in I}$ onde as aplicações φ_i são difeomorfismos conformes entre (Ω, g_i) e (R, g_0) , onde g_i são as restrições da métrica g ao subdomínio Ω_i . Em 1822, Gauss demonstrou que toda superfície admite coordenadas isotermas, e desta forma, toda variedade Riemanniana de dimensão 2 é localmente conformemente plana. Para dimensões maiores, introduziremos os seguintes campos tensores.

Definição 1.19. *O Tensor de Weyl é definido através de suas componentes em cartas locais pela expressão*

$$W_{ijkl} = R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}(R_{ik}g_{jl} - R_{il}g_{jk} + R_{jl}g_{ik} - R_{jk}g_{il}) \quad (1.18)$$

$$+ \frac{R_g}{(n-1)(n-2)}(g_{jl}g_{ik} - g_{jk}g_{il}). \quad (1.19)$$

O Tensor de Schouten é definido por

$$S_{ij} = \frac{1}{n-2} \left[2R_{ij} - \frac{R_g}{(n-1)}g_{ij} \right]. \quad (1.20)$$

Ou seja, o Tensor de Weyl é a parte livre de traço do tensor curvatura. É possível verificar que o Tensor de Weyl é conformemente invariante e ainda que, em dimensão 3, $W_{ijkl} \equiv 0$. Interpretando fisicamente, o tensor de Weyl é uma medida da curvatura do espaço-tempo.

O teorema a seguir será uma importante caracterização para as variedades localmente conformemente planas.

Teorema 1.15. *Uma condição necessária e suficiente para uma variedade Riemanniana ser localmente conformemente plana é que $W_{ijkl} \equiv 0$ quando $n > 3$ e $\nabla_k S_{ij} = \nabla_j S_{ik}$, quando $n = 3$.*

Exemplo 1.3. *As variedades Riemannianas com curvatura seccional constante são localmente conformemente planas.*

CAPÍTULO 2

PROBLEMA DE YAMABE

Nosso objetivo neste capítulo é apresentar um breve resumo histórico do problema de Yamabe, bem como apresentar algumas ferramentas mais específicas da Geometria Riemanniana necessárias ao longo desta dissertação.

2.1 Problema de Yamabe

Deformações conformes da métrica Riemanniana de uma dada variedade tem tido fundamental importância em geometria Riemanniana. Um fato relevante, garantido pelo teorema da uniformização de análise complexa, nos mostra que toda superfície admite uma métrica Riemanniana cuja curvatura Gaussiana é constante, o que merece destaque uma vez que reduz questões topológicas a questões puramente geométricas.

Uma pergunta interessante seria saber se tal fato admite generalizações, isto é, se toda variedade Riemanniana de dimensão n , admite uma métrica conforme cuja curvatura escalar é constante. Uma resposta afirmativa para esta questão facilitaria inúmeras questões da topologia diferencial reduzindo-as, por exemplo, à questões geométricas sobre modelos de curvatura constante. No entanto, é fácil ver que tal fato pode não ser verdadeiro. De modo geral este problema é altamente indeterminado: o tensor curvatura tem ordem de n^4 componentes independentes, enquanto uma mudança conforme da métrica nos permite apenas escolher uma única função desconhecida. Por exemplo, se $n \geq 4$, o tensor de Weyl, formado através das componentes do tensor curvatura, é conformemente invariante e nulo, se e somente se, a métrica é conformemente equivalente a métrica euclidiana. Assim, o natural seria buscarmos uma métrica Riemanniana conforme cuja curvatura escalar permaneça constante, para então olharmos para uma função desconhecida satisfazendo uma condição. Assim obtemos o seguinte problema:

Problema de Yamabe:

Dada uma variedade Riemanniana suave, compacta e sem fronteira (M, g) de dimensão $n \geq 3$, existe uma métrica \tilde{g} conforme a métrica g cuja curvatura escalar seja constante?

O problema acima possui uma formulação analítica. De fato, provaremos a seguir, que resolver o problema de Yamabe é equivalente a encontrar uma solução estritamente positiva para a equação diferencial com expoente crítico

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g u - R_g u + K u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \quad u > 0 \text{ em } M \quad (2.1)$$

onde R_g é a curvatura escalar e K é uma constante. Deste modo, se u é solução de (2.1) então a métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ tem curvatura constante igual a K .

Provemos que as formulações descritas acima para o problema são equivalentes. Por (1.2) sabemos que, em coordenadas locais, o tensor de Ricci é dado por

$$R_{ij} = \partial_t \Gamma_{ij}^t - \partial_j \Gamma_{it}^t + \Gamma_{ij}^s \Gamma_{st}^t - \Gamma_{it}^s \Gamma_{sj}^t$$

onde

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right)$$

são os símbolos de Christoffel da métrica g . Denotemos por $\tilde{\Gamma}_{ij}^k$ os símbolos de Christoffel para a métrica conforme $\tilde{g} = \rho g$. Então teremos, por um cálculo direto que

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{ij}^k &= \frac{1}{2} \tilde{g}^{kl} \left(\frac{\partial \tilde{g}_{il}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{g}_{jl}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x_l} \right) \\ &= \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_j} \rho^{-1} g_{il} + \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \rho^{-1} g_{jl} - \frac{\partial \rho}{\partial x_l} \rho^{-1} g_{ij} \right) \\ &= \Gamma_{ij}^k + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial(\log \rho)}{\partial x_j} \delta_{ik} + \frac{\partial(\log \rho)}{\partial x_i} \delta_{jk} - \frac{\partial(\log \rho)}{\partial x_l} g_{ij} g^{kl} \right). \end{aligned}$$

Obtemos assim uma expressão para o tensor de Ricci dada por

$$\tilde{R}_{ij} = R_{ij} - \frac{n-2}{2} (\log \rho)_{,ij} + \frac{n-2}{4} (\log \rho)_i (\log \rho)_j - \frac{1}{2} (\Delta(\log \rho) + \frac{n-2}{2} |\log \rho|^2) g_{ij}. \quad (2.2)$$

Uma vez que a curvatura $R_{\tilde{g}} = \tilde{g}^{ij} \tilde{R}_{ij}$, segue da expressão acima que

$$R_{\tilde{g}} = \rho^{-1} R_g - (n-1) \rho^{-2} \Delta \rho - \frac{1}{4} (n-1)(n-6) \rho^{-3} |\nabla \rho|^2.$$

Para eliminar o termo gradiente, como $n \geq 3$, escreveremos $\rho = u^{\frac{4}{n-2}}$, com $u > 0$ em M .

Teremos assim

$$\begin{aligned}
 \Delta(u^{\frac{4}{n-2}}) &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial(u^{\frac{4}{n-2}})}{\partial x_j} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{4}{n-2} u^{\frac{6-n}{n-2}} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \\
 &= \frac{4}{n-2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) u^{\frac{6-n}{n-2}} \\
 &\quad + \frac{4}{n-2} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{6-n}{n-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \\
 &= \frac{4}{n-2} \Delta u u^{\frac{6-n}{n-2}} + \frac{4}{(n-2)^2} (6-n) |\nabla u|^2 u^{\frac{8-n}{n-2}}. \tag{2.3}
 \end{aligned}$$

Observe também que

$$|\nabla(u^{\frac{4}{n-2}})|^2 = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial(u^{\frac{4}{n-2}})}{\partial x_i} \frac{\partial(u^{\frac{4}{n-2}})}{\partial x_j} = \frac{4^2}{(n-2)^2} |\nabla u|^2 u^{\frac{12-2n}{n-2}}. \tag{2.4}$$

Portanto, substituindo (2.3) e (2.4) em (2.2), obtemos

$$\begin{aligned}
 R_{\tilde{g}} &= u^{-\frac{4}{n-2}} R_g u^{-\frac{8}{n-2}} \left(\frac{4}{n-2} \Delta u u^{\frac{6-n}{n-2}} + \frac{4^2}{(n-2)^2} (6-n) |\nabla u|^2 u^{\frac{8-2n}{n-2}} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4} (n-1)(n-6) u^{-\frac{12}{n-2}} \left(\frac{4^2}{(n-2)^2} u^{\frac{12-2n}{n-2}} |\nabla u|^2 \right) \\
 &= u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(R_g u - \frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta u \right). \tag{2.5}
 \end{aligned}$$

Assim, se a curvatura escalar da métrica conforme for uma constante \tilde{K} , teremos

$$K = u^{-\frac{n+2}{n-2}} \left(R_g u - \frac{4(n-1)}{(n-2)} \Delta u \right),$$

que é equivalente a encontrar uma solução $u > 0$, da equação

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta u - R_g u + K u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0.$$

Concluimos assim que se existir uma função positiva u e uma constante K satisfazendo a equação (2.1), então a métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}} g$ tem curvatura escalar constante igual a K , ficando então demonstrada a equivalência da formulação geométrica e da formulação analítica do problema de Yamabe.

Em 1960, H. Yamabe [25] acreditou ter solucionado este problema usando métodos variacionais e técnicas de equações diferenciais parciais elípticas. Uma vez que a formulação analítica do problema de Yamabe é uma equação com expoente crítico, os

métodos diretos não poderiam ser utilizados para solucionar o problema. A ideia de Yamabe então foi provar a existência de solução no caso subcrítico, e assim obter uma sequência de soluções para o problema subcrítico de modo que, a função u obtida através do limite quando $q \rightarrow \frac{2n}{n-2}$, é solução de (2.1).

Para $q \in (2, 2^*)$ consideremos o problema subcrítico

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta_g v - R_g v + K v^{q-1} = 0, \quad (2.6)$$

e seja $I_q : H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional associado ao problema dado por

$$I_q(u) = \frac{\int \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R_g u^2 \right) dV}{\|u\|_q^2}.$$

Vale observar que o denominador de $I_q(v)$ faz sentido desde que $H^1 \subset L^{\frac{2n}{n-2}} \subset L^q$. Consideremos assim,

$$\mu_q = \inf I_q(\varphi) \quad \forall \varphi \in H^1, \varphi \geq 0, \varphi \neq 0.$$

Teorema 2.1. *Para $q \in (2, 2^*)$, existe uma função suave estritamente positiva φ_q satisfazendo (2.6) com $K = \mu_q$ e $I_q(\varphi_q) = \mu_q$.*

Demonstração. Dividiremos a demonstração em três etapas:

Etapa 1: Para $q \in (2, 2^*]$, μ_q é finito.

De fato, observe que

$$I_q(\varphi) = \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla \varphi|^2 + R_g \varphi^2 \right)}{\|\varphi\|_q^2} \geq \frac{\int_M R_g \varphi^2}{\|\varphi\|_q^2} \geq - \frac{|\int_M R_g \varphi^2|}{\|\varphi\|_q^2}. \quad (2.7)$$

Note porém que, aplicando a desigualdade de Hölder, segue que

$$\left| \int_M R_g \varphi^2 \right| \leq \max_M |R_g| \int_M \varphi^2 \leq \max_M |R_g| \|\varphi\|_q^2 V_g^{1-\frac{2}{q}},$$

onde $V_g = \int_M dV_g$, denota o volume de (M, g) . Substituindo a desigualdade acima em (2.7), segue que

$$I_q(\varphi) \geq - \frac{\max_M |R_g| \|\varphi\|_q^2 V_g^{1-\frac{2}{q}}}{\|\varphi\|_q^2} \geq - \max_M |R_g| V_g^{1-\frac{2}{q}}.$$

ficando demonstrado que μ_q é finito.

Etapa 2: Existe $\varphi = \varphi_q \in H^1(M)$, $\varphi \geq 0$, que atinge o ínfimo μ_q .

Considere $\{\varphi_i\}$ uma sequência minimizante para μ_q , isto é, $\varphi_i \in H^1(M)$ e $I(\varphi_i) \rightarrow \mu_q$, quando $i \rightarrow \infty$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\int_M \varphi_i^q = 1$, caso contrário, ao tomarmos $u_i = \varphi_i/a_i$, onde $a_i = \|\varphi_i\|_g$, a aplicação u_i terá as propriedades desejadas. Trocando φ_i por $|\varphi_i|$ se necessário, podemos também que $\varphi_i \geq 0, \forall i$.

Note que φ_i é uma sequência limitada em $H^1(M)$. De fato,

$$\|\varphi_i\|_{H^1}^2 = \|\nabla \varphi_i\|_2^2 + \|\varphi_i\|_2^2 = \frac{n-2}{4(n-1)} I_q(\varphi_i) - \int_M R_g \varphi_i^2 dV_g + \|\varphi_i\|_2^2.$$

Uma vez que $\{\varphi_i\}$ é uma sequência minimizante, podemos assumir que $I_q(\varphi_i) < \mu_q + 1$. Deste modo,

$$\begin{aligned} \|\varphi_i\|_{H^1}^2 &< \frac{n-2}{4(n-1)} \mu_q + 1 + \max_M |R_g| \|\varphi_i\|_2^2 + \|\varphi_i\|_2^2 \\ &= \frac{n-2}{4(n-1)} \mu_q + 1 + (1 + \max_M |R_g|) \|\varphi_i\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Observe porém, usando a desigualdade de Hölder,

$$\|\varphi_i\|_2^2 = \int_M \varphi_i^2 dV_g \leq \|\varphi_i\|_q^2 V_g^{1-\frac{2}{q}} \leq V_g^{1-\frac{2}{q}},$$

pois $\int_M \varphi_i^q = 1$. Deste modo, substituindo em (2.8), concluímos que a sequência minimizante $\{\varphi_i\}$ é limitada em $H^1(M)$. Utilizando a reflexividade de $H^1(M)$ e o fato de que, pelo Teorema de Rellich-Kondrakov, a imersão $H^1(M) \hookrightarrow L^q$ é compacta, existe uma subsequência $\{\varphi_j\}$, e uma função φ_q satisfazendo:

1. $\varphi_j \rightarrow \varphi_q \in L^q$;
2. $\varphi_j \rightarrow \varphi_q$ converge fracamente em H^1 ;
3. $\varphi_j \rightarrow \varphi_q$ q.t.p.

Como $\varphi_i \geq 0, \forall i$, da convergência q.t.p. segue que $\varphi \geq 0$. De **2)** segue que

$$\|\varphi\|_{H^1} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \|\varphi_i\|_{H^1},$$

donde concluímos da convergência L^q que $I_q(\varphi_q) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} I_q(\varphi_j) = \mu_q$ e, por definição de μ_q , segue a igualdade $I(\varphi_q) = \mu_q$.

Etapa 3: φ_q é solução regular do problema (2.6).

Como $I(\varphi_q) = \mu_q$, do Teorema dos Multiplicadores de Lagrange existe uma constante α tal que, para todo $\phi \in H^1(M)$, temos

$$\int_M \langle \nabla \varphi, \phi \rangle dV_g + c(n) \int_M R_g \varphi \phi = \alpha \int_M \varphi^{q-1} \phi dV_g.$$

Tomando $\phi = \varphi$, segue que $\alpha = \mu_q$ e portanto, φ é solução fraca não negativa de (2.6). A regularidade de φ é obtida através de um argumento de **bootstrap**, baseado nos resultados de imersões de Sobolev, Schauder e do teorema de regularidade local. O argumento consiste basicamente em observar que o lado direito φ^{q-1} está em algum espaço L^p para algum p , donde pela regularidade local, segue que $u \in W^{2,p}(M)$. Pelo teorema da imersão de Sobolev, φ^{q-1} está num espaço maior L^p , e procedendo assim $u \in W^{2,p}$. Deste modo, aplicando novamente o teorema da imersão de Sobolev, concluímos que $u \in C^2(M)$. Sendo $\varphi \geq 0$, aplicando o princípio do máximo concluímos que $\varphi > 0$ em M . Da teoria de regularidade, iterando se for necessário, chegamos que $\varphi \in C^\infty(M)$, ficando assim demonstrado o resultado. \square

Uma vez demonstrada a existência de solução do caso subcrítico, o passo seguinte foi demonstrar o caso geral fazendo q convergir para o expoente crítico. No entanto a demonstração de Yamabe continha um erro. Ao provar o teorema acima, Yamabe afirmou que a sequência de funções suaves positivas $\{\varphi_q\}$, $q \in (2, 2^*)$ satisfazendo

$$\Delta\varphi_q - c(n)R_g\varphi_q = -\mu_q\varphi_q^{q-1} \text{ com } \|\varphi_q\|_q = 1,$$

seria uniformemente limitada. No entanto, Trudinger mostrou que a afirmação é válida apenas para algumas situações específicas. Antes de fornecer mais informações sobre este fato, precisamos estabelecer algumas notações.

No caso em que $q = \frac{2n}{n-2}$ denotemos por $I : H^1(M) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcional associado a (2.1), dado por

$$I(u) = \frac{\int_M \left(\frac{4(n-1)}{n-2} |\nabla u|^2 + R_g u^2 \right) dV_g}{\left(\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}}}$$

onde

$$\mu = \inf I(u), \quad \forall u \in H^1(M), u \geq 0, u \not\equiv 0.$$

Provaremos primeiramente que μ é um invariante sobre a classe de métricas conformes à métrica g , o qual chamaremos de *invariante de Yamabe*. Denotemos por μ o ínfimo com relação a métrica g e $\tilde{\mu}$ o ínfimo com relação a métrica \tilde{g} .

Proposição 2.1. *Se g e \tilde{g} são duas métricas conformes, isto é, existe $v > 0$ suave tal que $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}}g$, então $\mu = \tilde{\mu}$.*

Demonstração. Sabemos que se $\tilde{g} = v^{\frac{4}{n-2}}g$, então $dV_{\tilde{g}} = v^{\frac{2n}{n-2}}dV_g$, denotando por $I_{\tilde{g}}$ e I_g os funcionais associados a métrica \tilde{g} e g , respectivamente, é possível obter a seguinte relação

$$\Delta_{\tilde{g}}(v^{-1}u) - c(n)R_{\tilde{g}}v^{-1}u = v^{-\frac{n+2}{n-2}}(\Delta_g u - c(n)R_g u).$$

e portanto

$$I_{\tilde{g}}(v^{-1}u) = I_g(u),$$

ficando assim demonstrado o resultado. \square

Foi observado que, no caso em que o invariante de Yamabe μ é estritamente positivo, é impossível demonstrar que a sequência de soluções dos casos subcríticos é uniformemente limitada. Por exemplo, no caso em que $M = S^n$, as funções $\varphi(r)$ obtidas através do teorema anterior não são uniformemente limitadas. Entretanto, nos casos em que o invariante é nulo ou positivo é possível demonstrar que a sequência $\{\varphi_q\}$ é, de fato, uniformemente limitada.

O fato para $\mu \leq 0$, a resolução do problema pode ser adaptada mudando o foco do estudo do problema de Yamabe para a melhor análise do invariante μ . Yamabe não solucionou o problema, mas demonstrou um resultado importante para solucionarmos o problema. Antes de estudar este teorema, veremos a seguinte proposição:

Proposição 2.2. *μ_q é uma função contínua em q , para $q \in (2, 2^*]$, que é sempre positiva, sempre nula ou sempre negativa. Mais ainda, $|\mu_q|$ é decrescente em q se supormos que o volume é igual a 1.*

Demonstração. Se o volume for 1 para $\psi \in C^\infty$, $\|\psi\|_q$ é uma função crescente em q . Assim, $|I_q(\psi)| < |I_p(\psi)|$ quando $p < q$, o que implica que $|\mu_p| > |\mu_q|$, desde que o conjunto das funções suaves é denso em H^1 .

Afirmção: $I_q(\psi)$ é uma função contínua em q .

A afirmação acima segue do fato que μ_q é uma função semicontínua superiormente em q . De fato, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma função $\psi \in C^\infty$ tal que $I_q(\psi) < \mu_p + \varepsilon$, e desde que $\mu_q \leq I_q(\psi)$, $\lim_{q \rightarrow p} I_q(\psi) = I_p(\psi)$, obtemos

$$\limsup_{q \rightarrow p} \mu_q \leq \mu_p + \varepsilon.$$

Considere q_i uma sequência convergindo para $p \in (2, 2^*]$. No caso em que o invariante é negativo, provaremos no próximo resultado que as funções φ_q são uniformemente limitadas. Ou seja, $\|\varphi_{q_i}\|_p \rightarrow 1$ e ainda $\mu_p \leq I_p(\varphi_{q_i}) = \mu_{q_i} \|\varphi_{q_i}\|_p^{-2}$, $\liminf_{q \rightarrow p} I_q \mu_q \geq \mu_p$, o que prova a continuidade da função $q \rightarrow \mu_q$ no caso negativo. Analogamente, podemos mostrar que a função é contínua entre $(2, 2^*)$ no caso positivo uma vez que se $q_0 < 2^*$, as funções φ_q são uniformemente limitadas para $q \in (2, q_0]$. Assim, $\mu_q \rightarrow \mu$ quando $q \rightarrow 2^*$ pois a função $q \rightarrow m_q$ é semicontínua superiormente e decrescente no caso positivo.

Se o volume não for um, podemos considerar uma mudança homotética da métrica de modo que o volume da nova métrica é igual a um. \square

Teorema 2.2. *Seja M^n uma variedade compacta suave. Então existe uma métrica conforme cuja curvatura escalar ou é uma constante não-positiva ou é uma aplicação*

estritamente positiva.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em três casos:

Caso 1: O invariante de Yamabe $\mu > 0$.

Observe primeiramente que se $\mu > 0$, então $\mu_q > 0$ para todo $q \in (2, 2^*)$. De fato,

$$\mu_q = I_q(\varphi_q) = I(\varphi_q) \|\varphi_q\|_{2^*}^2 \|\varphi_q\|_q^{-2} \geq \mu \|\varphi_q\|_{2^*}^2 > 0.$$

Considere então a métrica conforme $\tilde{g} = \varphi_q^{\frac{4}{n-2}} g$, com $q \in (2, 2^*)$ fixado. Deste modo, por (2.5), segue que a curvatura escalar da métrica conforme é dada por

$$R_{\tilde{g}} = \mu_q \varphi_q^{q-1-\frac{2n}{n-2}} \quad (2.9)$$

que é uma função estritamente positiva. Reciprocamente, se a curvatura for estritamente positiva podemos provar que $\mu > 0$, de fato, observe que o funcional $I_{\tilde{g}}$ associado ao problema satisfaz

$$I_{\tilde{g}}(\psi) \geq \inf_{x \in M} \left[\frac{4(n-1)}{n-2}, R_{\tilde{g}} \right] \frac{\int_M |\nabla \psi|^2 dV_{\tilde{g}} + \int_M \psi^2 dV_{\tilde{g}}}{\left(\int_M \psi^{\frac{2n}{n-2}} \right)^{\frac{n-2}{n}}}.$$

Aplicando o teorema do mergulho de Sobolev, segue que $I_{\tilde{g}}(\psi) \geq c > 0$, para toda $\psi \in H^1$. Deste modo, segue que $\mu_g = \mu_{\tilde{g}} > 0$.

Caso 2: O invariante de Yamabe $\mu = 0$.

Considere u uma função suave, $u \geq 0$, e considere $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}$ métrica conforme à g . Uma vez que

$$dV_g = \sqrt{\det g} dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n.$$

ou seja,

$$dV_{\tilde{g}} = u^{\frac{2n}{n-2}} dV_g \quad e \quad V_{\tilde{g}} = \int_M u^{2n/(n-2)} dV_g = 1.$$

Multiplicando a equação que relaciona as métricas (2.5) por u e integrando sobre a variedade temos que

$$I(u) = \int_M R_{\tilde{g}} dV_{\tilde{g}}.$$

Desta forma, como o conjunto das funções suaves é denso em H^1 , como $\mu = 0$, segue que existe uma métrica conforme a métrica dada com curvatura nula.

Caso 3: O invariante de Yamabe $\mu < 0$.

Se $\mu < 0$, então existe uma função $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $I(\psi) < 0$. Deste modo, $I_q(\psi) < 0$, para todo $q \in [2, 2^*]$, donde segue que $\mu_q < 0$. Com esta informação em mãos, provaremos que a sequência de soluções, obtida a partir do teorema 2.1 é uniformemente limitada para $q \in (2, 2^*)$. De fato, sendo M compacta, considere $p \in M$ de modo que φ_q

atinge um máximo em p , ou seja, $\Delta\varphi_q \leq 0$, donde obtemos que $\mu_q\varphi_q^{q-1}(p) \geq R_g(p)\varphi_q(p)$, o que implica que

$$\varphi_q^{q-2} \leq |\inf R_g||I(\psi)|^{-1},$$

e portanto,

$$\varphi_q \leq 1 + [|\inf R_g||I(\psi)|^{-1}]^{\frac{1}{2^*-2}}.$$

Utilizando a fórmula de representação de Green, como φ_q satisfaz (2.6), temos

$$\varphi_q(p) = \int_M \varphi_q(Q)dV(Q) + \int_M G(P, Q)\frac{n-2}{4(n-1)}[\mu_q\varphi_q^{q-1}(Q) - R_g(Q)\varphi_q(Q)]dV(Q). \quad (2.10)$$

e portanto, diferenciando (2.10), segue que $\varphi_q \in C^1$ uniformemente e, aplicando o Teorema de Arzelá-Ascoli, é possível exibir uma sequência φ_{q_i} , com $q_i \rightarrow 2^*$, tal que φ_{q_i} converge uniformemente para uma função não negativa φ .

Mas $0 > \mu_q \geq \inf R_g(x)\|\varphi_q\|_2^2 \geq \inf R_g(x)$. Deste modo, uma subsequência μ_{q_i} , converge para um número real ν e, pelo que vimos anteriormente, segue que $\nu = \mu$. Fazendo $q_i \rightarrow 2^*$ em (2.10), segue que φ é solução fraca de

$$\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta\varphi - R_g\varphi + \nu\varphi^{\frac{n+2}{n-2}} = 0. \quad (2.11)$$

Desde que $\|\varphi_q\|_q = 1$, $\|\varphi\|_{2^*} = 1$. Multiplicando (2.11) por φ e integrando, segue que $I(\varphi) = \nu$. Observe ainda que o segundo termo de (2.11) é contínuo e, portanto, substituindo em (2.10), concluimos que $\varphi \in C^1$. Aplicando o teorema de regularidade, o segundo termo de (2.10) é de classe C^1 , donde segue que $\varphi \in C^2$. Agora, de acordo com um resultado devido a Kazdan, concluimos que, desde que $\|\varphi\|_{2^*} = 1$, concluimos que φ é estritamente positiva. Utilizando o teorema de regularidade novamente, podemos provar por indução que $\varphi \in C^\infty$ é uma função satisfazendo (2.11), com $R_{\tilde{g}} = \mu < 0$. \square

O teorema acima soluciona o problema de Yamabe para os casos em que o invariante de Yamabe $\mu \leq 0$. Para o caso em que o invariante de Yamabe é estritamente positivo, vimos anteriormente que não é possível utilizar o método da aproximação. Partindo assim para a análise do invariante de Yamabe, Aubin demonstrou o seguinte resultado decisivo para a resolução do problema:

Teorema 2.3. $\mu \leq n(n-1)w_n^{2/n}$. Se $\mu < n(n-1)w_n^{2/n}$ então existe uma função suave estritamente positiva $\tilde{\varphi}$, solução de (2.1) tal que $R_{\tilde{g}} = c(n)^{-1}\mu$ e $\|\tilde{\varphi}\|_{2^*} = 1$.

Demonstração. Relembremos que $K(n, 2) = 2(w_n)^{-1/n}[n(n-2)]^{-1/2}$ é a melhor constante para a desigualdade de Sobolev e que tal constante é a mesma para todas as variedades compactas. Desta forma, existe uma sequência de funções suaves ψ_i tal que

$$\|\psi_i\|_{2^*} = 1, \|\psi_i\|_2 \rightarrow 0 \text{ e } \|\nabla\psi_i\|_2 \rightarrow K(n, 2)^{-1},$$

quando $i \rightarrow \infty$. Assim,

$$I(\psi_i) = \frac{\int_M |\nabla \psi_i|^2 dV_g + \int_M R_g \psi_i^2 dV_g}{\|\psi_i\|_{2^*}^2} \rightarrow K(n, 2)^{-2} = n(n-1)w_n^{2/n}$$

e portanto, $\mu \leq n(n-1)w_n^{2/n}$. ficando demonstrada a primeira parte do teorema.

Para demonstrar a segunda parte consideremos $\{\varphi_q\}_q$, com $q \in (2, 2^*)$, soluções do problema subcrítico

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \Delta \varphi_q - R_g \varphi_q + \mu_q \varphi_q^{q-1} = 0. \quad (2.12)$$

Afirmção: $\{\varphi_q\}_q$ é limitada em H^1 .

De fato, como $I_q(\varphi_q) = \mu_q$, obtemos

$$\frac{\frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla \varphi_q\|_2^2 + \int_M R_g \varphi_q^2}{\|\varphi_q\|_q^2} = \mu_q,$$

e portanto, sendo $\|\varphi_q\|_q = 1$ e $\|\varphi_q\|_2 \leq 1$, segue que

$$\begin{aligned} \frac{4(n-1)}{n-2} \|\nabla \varphi_q\|_2^2 &= \mu_q - \int_M R_g \varphi_q^2 \leq \mu_q + \sup |R_g| \|\varphi_q\|_2^2 \\ &\leq I_q(1) + \sup |R_g| \leq \int_M R_g dV_g + \sup |R_g|. \end{aligned}$$

e desta forma, concluimos que o conjunto $\{\varphi_q\}_q$ é limitado em H^1 .

Assim, utilizando a reflexividade de H^1 e o Teorema de Rellich-Kondrachov, existe uma sequência com $q_i \rightarrow 2^*$ tal que :

1. $\varphi_{q_i} \rightharpoonup \varphi$ fracamente em H^1 ;
2. $\varphi_{q_i} \rightarrow \varphi$ em L^2 ;
3. $\varphi_{q_i} \rightarrow \varphi$ q.t.p.

Provemos agora que φ é solução fraca do problema. De fato, sendo φ_{q_i} funções positivas, segue da convergência q.t.p. que o seu limite, $\varphi \geq 0$. Desta, usando a imersão de Sobolev, temos que φ_q^{q-1} é uma aplicação limitada em $L^{2^*/2^*-1}$. Assim, fazendo $q \rightarrow 2^*$, segue que

$$\varphi^{q-1} \rightarrow \varphi^{2^*-1}, \text{ fracamente em } L^{2^*/2^*-1}.$$

Por outro lado, como φ_q é solução de (2.6), segue que para toda $\phi \in H^1(M)$, tem-se

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \int_M \nabla \varphi_q \nabla \phi dV_g + \int_M R_g \varphi_q \phi dV_g = -\mu_q \int_M \varphi_q^{q-1} \phi dV_g.$$

Utilizando o fato que o dual de $L^{2^*/2^*-1}$ é L^{2^*} segue para toda $\phi \in H^1(M)$, ao tomarmos

o limite na expressão acima que

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \int_M \nabla \varphi \nabla \phi dV_g + \int_M R_g \varphi \phi dV_g = -\mu_q \int_M \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \phi dV_g,$$

donde concluimos que φ é solução fraca do problema.

Para concluirmos a demonstração do resultado, resta provarmos que φ é uma solução forte do problema e, mais ainda, estritamente positiva.

Afirmção: φ é uma solução regular e, portanto, solução forte do problema.

De fato, para verificarmos que φ é suave, basta mostrar que existe r tal que $\varphi \in L^r(M)$, com $r > 2^*$. Com efeito, se $\varphi \in L^r(M)$, então $R_g \varphi + \mu_q \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \in L^p(M)$, com $p = r/(2^* - 1)$ e assim, da teoria de regularidade segue que $\varphi \in W^{2,p}(M)$. Utilizando a imersão de Sobolev, é possível tomar $p' > p$, de modo que $\varphi \in L^{p'}(M)$, e assim iterando o procedimento concluimos que $\varphi \in W^{2,p}(M)$ para todo $p > 1$. Utilizando novamente a imersão de Sobolev, concluimos que $\varphi \in C^\alpha(M)$ para algum α e aplicando o Teorema de Schauder concluimos que $\varphi \in C^{2,\alpha}$. Procedendo indutivamente, concluiremos que $\varphi \in C^\infty(M)$. Assim, provemos que de fato, tal r existe.

Considerando assim φ a solução fraca do problema então, para todo $\phi \in H^1(M)$, tem-se

$$\frac{4(n-1)}{n-2} \int_M \nabla \varphi \nabla \phi dV_g + \int_M R_g \varphi \phi dV_g = -\mu_q \int_M \varphi^{\frac{n+2}{n-2}} \phi dV_g. \quad (2.13)$$

A ideia para demonstrar o fato é a escolha de uma função teste especial. Fixemos $l > 0$, e consideremos $\psi = \varphi^+ = \max \varphi, 0$ e $\beta > 1$ a ser escolhido de maneira conveniente. Definamos as aplicações

$$G(v) = \begin{cases} v^\beta & \text{se } v \leq l \\ l^{\alpha-1}(\alpha l^{\alpha-1}v - (\alpha-1)l^\alpha) & \text{se } v > l \end{cases}$$

$$F(v) = \begin{cases} v^\alpha & \text{se } v \leq l \\ \alpha l^{\alpha-1}v - (\alpha-1)l^\alpha & \text{se } v > l \end{cases}$$

onde $2\alpha = \beta$.

É possível verificar que as funções definidas acima são Lipschitzianas e, na verdade, pertencem a $H^1(M)$. Para mais detalhes recomendamos [24]. Observe agora que

$$G'(v) = \begin{cases} \beta v^{\beta-1} & \text{se } v \leq l \\ l^{2(\alpha-1)} & \text{se } v > l \end{cases}$$

$$F'(v) = \begin{cases} \alpha v^{\alpha-1} & \text{se } v \leq l \\ \alpha l^{\alpha-1} & \text{se } v > l \end{cases}$$

e desta forma, como $2\alpha < \beta$, segue que

$$(F'(v))^2 \leq \alpha G'(v), \quad (2.14)$$

e das definições de F e G obtemos

$$(F(v))^2 \geq vG(v) \quad \text{e} \quad \alpha G = F'(v) \cdot F'(v). \quad (2.15)$$

Definamos então a função teste $\phi = \eta^2 G(v)$, onde $\eta \in C_0^1(M)$ é uma função contínua com suporte compacto em uma vizinhança de M . Sem perda de generalidade, suponha que $\eta \in C_0^1(S_R)$, onde S_R denota uma esfera centrada na origem com raio R em \mathbb{R}^n .

Assim, substituindo em (2.13) e substituindo as integrais na variedade pelas integrais na esfera S_R , teremos

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \sum_{ij} \left(\frac{n-2}{4(n-1)} g^{ij} \partial_j \varphi (2\partial_i \eta \eta G(v) + \eta^2 G'(v) \partial_i v) - R_g \varphi \eta^2 G(v) \right) \sqrt{\det g} dx = \\ \mu_g \int_{S_R} |u|^{\frac{n+2}{n-2}} \eta^2 G(v) \sqrt{\det g} dx \end{aligned}$$

e utilizando o Teorema de Stampacchia é possível substituir $\partial_i \varphi$ por $\partial_i v$ no conjunto em que $\varphi \neq 0$. Pela elipticidade da matriz métrica, no segundo termo da igualdade acima vale

$$\frac{1}{\mu} \sum_i x_i^2 \leq \sum_{ij} g^{ij} x_i x_j \leq \mu \sum_i x_i^2, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

donde obtemos

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \left(\sum_i (\partial_i \varphi)^2 \right) \eta^2 G'(v) \sqrt{\det g} dx \leq \mu_g \int_{S_R} |u|^{\frac{n+2}{n-2}} \eta^2 G(v) \sqrt{\det g} dx \\ + \int_{S_R} \sum_{ij} \left(-\frac{n-2}{4(n-1)} g^{ij} \partial_j \varphi \partial_i \eta \eta G(v) \sqrt{\det g} + R_g \varphi \eta^2 G(v) \right) \sqrt{\det g} dx, \end{aligned}$$

e sendo $u \leq v$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \left(\sum_i (\partial_i \varphi)^2 \right) \eta^2 G'(v) \sqrt{\det g} dx \leq C \int_{S_R} \left(\sum_{i,j} \partial_j \varphi \partial_i \eta \eta G(v) + \right. \\ \left. (v\eta^2 + v^{2^*-2} v \eta^2) G(v) \right) \sqrt{\det g} dx, \quad (2.16) \end{aligned}$$

onde C é uma constante dependendo dos valores de R_g, μ, η, g_{ij} .

Utilizando (2.15), observe que a primeira integral do segundo membro de (2.16) é

equivalente a

$$\begin{aligned} C \int_{S_R} \sum_{ij} \partial_j \varphi \eta |\partial_i \eta| G(v) \sqrt{\det g} dx &= \frac{C}{\alpha} \int_{S_R} \partial_j \varphi \eta |\partial_i \eta| F(v) F'(v) \sqrt{\det g} dx \\ &= \frac{C}{\alpha} \eta \partial_j F(v) \cdot F(v) |\partial_i \eta| \sqrt{\det g} dx. \end{aligned}$$

Agora, tomando $a = \eta \partial_j F$ e $b = |\partial_i \eta| F$, pela desigualdade de Young obtemos

$$C \int_{S_R} \sum_{ij} \partial_j \varphi \eta |\partial_i \eta| G(v) \sqrt{\det g} dx \leq \frac{C}{\alpha} \int_{S_R} \left(\sum_{ij} (\varepsilon \eta^2 (\partial_j F(v))^2 + \frac{1}{\varepsilon} |\partial_i \eta|^2 F^2(v)) \right) \sqrt{\det g} dx,$$

onde $\varepsilon > 0$. Assim, por (2.14), (2.15) e (2.16) temos que

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \eta^2 \left(\sum_j \partial_j F(v) \right)^2 \sqrt{\det g} dx &\leq \int_{S_R} C(\varepsilon \eta^2) \left(\sum_j \partial_j F(v) \right)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_i (|\partial_i \eta|^2 F^2(v)) \sqrt{\det g} dx + \\ &C\alpha \int_{S_R} \left(\eta^2 (F(v))^2 + \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2 \right) \sqrt{\det g} dx. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} (1 - C_\varepsilon) \int_{S_R} \eta^2 \left(\sum_j \partial_j F(v) \right)^2 \sqrt{\det g} dx &\leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{S_R} \sum_i |\partial_i \eta|^2 F^2(v) \sqrt{\det g} dx \\ &+ C\alpha \int_{S_R} \left(\eta^2 (F(v))^2 + \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2 \right) \sqrt{\det g} dx. \end{aligned}$$

E portanto, tomando ε suficientemente pequeno obtemos

$$\int_{S_R} \eta^2 \left(\sum_j \partial_j F(v) \right)^2 \sqrt{\det g} dx \leq \int_{S_R} (C' \sum_i |\partial_i \eta|^2 + \eta^2) F^2(v) + C'' \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2 \sqrt{\det g} dx. \quad (2.17)$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Sobolev, sabemos que

$$\begin{aligned} |\eta F|_{2^*}^2 &\leq C |\nabla(\eta F)|_2^2 \\ &= C \int_{S_R} |\eta \nabla F + F \nabla \eta|^2 \sqrt{\det g} dx \\ &\leq 2C \int_{S_R} (|\eta \nabla F|^2 + F^2 |\nabla \eta|^2) \sqrt{\det g} dx. \end{aligned}$$

e portanto, usando (2.17) resulta

$$\begin{aligned} |\eta F|_{2^*}^2 &\leq C' \int_{S_R} (|\nabla \eta|^2 + \eta^2) F^2(v) \sqrt{\det g} dx \\ &+ C'' \int_{S_R} \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2 \sqrt{\det g} dx. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por outro lado, da desigualdade de Hölder, temos

$$\int_{S_R} \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2 \sqrt{\det g} dx \leq \left(\int_{S_R} v^{2^*} \sqrt{\det g} dx \right)^{\frac{n-2}{n}} |\eta F|_{L^{2^*}(S_R)}^2. \quad (2.19)$$

Tomando R de modo que seja válida a desigualdade

$$\int_{S_R} v^{2^*} \sqrt{\det g} dx \leq (4C\alpha)^{-\frac{n}{n-2}},$$

e substituindo em (2.19)

$$\int_{S_R} \eta^2 v^{2^*-2} F(v)^2 \sqrt{\det g} dx \leq \frac{1}{4C\alpha} |\eta F|_{L^{2^*}(S_R)}^2. \quad (2.20)$$

Note que

$$\int_{S_R} (|\nabla \eta|^2 + \eta^2) F^2(v) \sqrt{\det g} dx \leq |(|\nabla \eta| + \eta) F|_{L^2(S_R)}^2,$$

e portanto, substituindo em (2.18) a desigualdade acima e usando (2.20) obtemos

$$\begin{aligned} |\eta F|_{L^{2^*}(S_R)}^2 &\leq C |(|\nabla \eta| + \eta) F|_{L^2(S_R)}^2 + \frac{1}{4} |\eta F|_{L^{2^*}(S_R)}^2 \\ &\leq (C' |(|\nabla \eta| + \eta) F|_{L^2(S_R)} + \frac{1}{2} |\eta F|_{L^{2^*}(S_R)})^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|\eta F|_{L^{2^*}(S_R)}^2 \leq C' |(|\nabla \eta| + \eta) F|_{L^2(S_R)}^2.$$

Fixando então β de modo que $1 < \beta < 2^* - 1$ e fazendo $l \rightarrow \infty$ na expressão anterior, mais precisamente nas expressões de F e G , temos

$$|\eta v^\alpha|_{L^{2^*}(S_R)}^2 \leq C' |(|\nabla \eta| + \eta) F|_{L^2(S_R)}^2.$$

Sem perda de generalidade, assuma que $\eta = 1$ na esfera $S_{\frac{R}{2}}$, concêntrica a S_R , e que $|\partial_i \eta| \leq 2/R$ em S_R . Então,

$$\begin{aligned} |\eta v^\alpha|_{L^{2^*}(S_{R/2})}^2 &\leq |\eta v^\alpha|_{L^{2^*}(S_R)}^2 \\ &\leq C'' \left(\int_{S_R} (|\nabla \eta|^2 v^{2\alpha} \sqrt{\det g} dx) \right)^{1/2} \\ &\leq C'' \left(\int_{S_R} \left| \frac{2\sqrt{\eta}}{R} + \eta \right|^2 v^{2\alpha} \sqrt{\det g} dx \right)^{1/2} \\ &= C'' \left(\frac{2\sqrt{\eta}}{R} + 1 \right) |v^\alpha|_{L^2(S_R)}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

e trocando φ por $-\varphi$ obtemos uma desigualdade semelhante a desigualdade acima.

Portanto, como $2\alpha < 2^*$, utilizando a imersão de Sobolev e a desigualdade acima temos

$$|u|_{L^{\alpha 2^*}(S_{R/2})}^2 \leq C_R.$$

Fazendo $\alpha 2^* = r > 2^*$, obtemos

$$|u|_{L^r(S_{R/2})} \leq C_R. \quad (2.22)$$

Finalmente, sendo M compacta, considere uma cobertura finita de M por vizinhanças coordenadas (U_i, h_i) , de modo que $U_i \subset h(S_{R_i})$, onde $i = 1, \dots, s$, e uma partição da unidade $\{\alpha_i\}$ subordinada a esta cobertura. Como em casa esfera S_R é válida uma estimativa como (2.22) para as aplicações $\alpha_i \varphi$, concluímos portanto que

$$|\varphi|_r = \sum_{i=1}^s |\alpha_i \varphi|_r = \sum_{i=1}^s |\alpha_i \varphi \circ h_i^{-1}|_{L^r(S_{R_i/2})} \leq C,$$

ou seja, φ é limitada em $L^r(M)$, para algum $r > 2^*$, ficando finalizada a prova da regularidade da função φ .

Para finalizarmos a demonstração do teorema, resta provar que $\varphi > 0$. Observe que do princípio do máximo, uma vez que $\varphi \geq 0$, segue que $\varphi = 0$ ou $\varphi > 0$, ou seja, nosso objetivo é excluir o caso em que $\varphi \equiv 0$. Note que, até o momento, não utilizamos a hipótese central do teorema de que $\mu \leq n(n-2)w_n^{2/n}$.

Do teorema 1.8, sabemos que dado $\varepsilon > 0$, existe uma constante positiva A_ε tal que, para toda $\varphi \in H^1(M)$ temos

$$\left(\int_M |u|^{2^*} dV_g \right)^{\frac{n-2}{n}} \leq (K(n, 2)^2 + \varepsilon) \left(\int_M |\nabla \varphi|^2 dV_g + A_\varepsilon \int_M \varphi^2 dV_g \right).$$

Por simplicidade iremos supor que $\varepsilon = 0$. Uma vez que φ_q é uma solução da equação (2.6), utilizando a desigualdade de Hölder e a desigualdade de Sobolev, segue que

$$1 \leq V_g^{2(\frac{1}{q} - \frac{n-2}{2n})} K(n, 2)^2 (\mu_q + A \int_M \varphi_q^2 dV_g),$$

onde

$$A = \frac{4(n-1)}{n-2} A_0 + \max_{x \in M} |R_g(x)|.$$

Passando o limite na desigualdade anterior, como φ_q converge fortemente em $L^2(M)$ para φ , temos que

$$1 \leq K(n, 2)^2 \mu + K(n, 2)^2 A \int_M \varphi^2 dV_g,$$

e uma vez que $1 - K(n, 2)^2 \mu > 0$, pela desigualdade acima concluímos que a norma $L^2(M)$

de φ é positiva, o que em particular acarreta que $\varphi \neq 0$, ficando finalmente demonstrado o teorema. \square

O teorema 2.3 nos fornece uma ferramenta para demonstrar a existência de solução para o Problema de Yamabe. Ou seja, o teorema nos garante que é suficiente exibir uma função teste ψ de modo que $I(\psi) < n(n-1)w_n^{2/n}$ para que o problema tenha solução.

A seguir apresentaremos as ideias e o enunciado dos teoremas principais, devidos a T.Aubin e R. Schoen, respectivamente que finalizaram a solução do problema de Yamabe.

Teorema 2.4. *Se (M^n, g) , onde $n \geq 6$, é uma variedade compacta não localmente conformemente plana, então $\mu < n(n-1)w_n^{2/n}$. Desta forma o mínimo é atingindo e existe uma métrica conforme \tilde{g} com $R_{\tilde{g}} = \mu V_{\tilde{g}}^{-2/n}$.*

Os casos não abordados no teorema 2.4 são mais delicados pois a geometria conforme local não nos dá informações suficientes para concluir que $\mu < n(n-1)w_n^{2/n}$. Para tais variedades, funções teste locais não funcionam, sendo necessária a construção de uma função teste global. Como μ é um invariante conforme, é possível calcular $I(\psi)$ para alguma função teste particular, em uma métrica conforme específica. Quando a variedade é localmente conformemente plana, após uma mudança conforme da métrica, a métrica é plana em uma bola B_δ de centro x_0 e raio δ . A demonstração dada por Richard Schoen para as situações restantes introduziram duas ideias centrais na teoria. A primeira ideia de R. Schoen foi estender as funções teste construídas na demonstração do teorema (2.4) por um múltiplo da função de Green do operador

$$L_g = \Delta_g - c(n)R_g$$

com $c(n) = \frac{n-2}{4(n-1)}$, chamado laplaciano conforme. A segunda ideia, foi utilizar o teorema da massa positiva da relatividade geral, que pode ser utilizado devido ao anulamento do tensor de Weyl nestes casos. Desta forma, R. Schoen em 1984, demonstrou o seguinte resultado

Teorema 2.5. *Se M tem dimensão 3, 4 ou 5, ou M é localmente conformemente plana, então $\mu < n(n-2)w_n^{2/n}$, a menos que M seja conforme a esfera unitária.*

o que finaliza a demonstração do problema de Yamabe.

Anos depois, começaram a aparecer outras demonstrações para algumas das situações acima descritas. John Lee e Thomas Parker [15], apresentaram uma nova demonstração que possuía melhorias de alguns resultados obtidos acima com o auxílio de um novo sistema de coordenadas o qual descreveremos na próxima seção. Tal sistema nos será útil nas construções que faremos ao longo desta dissertação.

No artigo [4] o matemático Bahri solucionou o caso em que a variedade é localmente conformemente plana utilizando um método original sem a utilização do Teorema de Massa Positiva.

2.2 Sobre o número de soluções

Uma vez solucionado o problema uma pergunta natural a ser feita é acerca da unicidade da solução do problema. E novamente o invariante μ quebrará o problema em duas situações distintas.

Considere φ_0 uma solução da equação (2.1) com $R_{\tilde{g}} = \mu$. Desde que a equação de Yamabe é conformemente invariante, na métrica g_0 correspondente a equação de Yamabe é sempre uma equação do tipo (2.1), consideremos uma solução φ_1 de (2.1), com $R_{\tilde{g}_1} = R_{\tilde{g}} = \mu$.

Suponhamos que o invariante $\mu < 0$ e consideremos $p \in M$ de modo que p seja um ponto de máximo para φ_1 , ou seja, $\Delta\varphi_1 \geq 0$, então $\varphi_1(p)^{n-2} \geq 1$. Analogamente, considerando $q \in M$ de modo que q seja um ponto de mínimo para φ_1 , segue que $\Delta\varphi_1 \leq 0$, ou seja, $\varphi_1(q)^{n-2} \leq 1$. Consequentemente $\varphi_0 = 1$ é a única solução do problema, onde $R_{\tilde{g}} = \mu < 0$. No caso em que o invariante $\mu = 0$, então $\Delta\varphi_1 = 0$, ou seja, $\varphi_1 = \text{constante}$.

No caso em que o invariante $\mu > 0$, não é possível garantir a unicidade em geral. O exemplo mais conhecido deste fato foi demonstrado por Obata [19] onde é provado que para a variedade (S^n, g_0) , o conjunto de soluções do problema de Yamabe é dado

$$\{\lambda\psi^*(g_0) : \lambda \in \mathbb{R}_+, \psi \in \text{Conf}(S^n)\}$$

onde $\text{Conf}(S^n)$ denota o conjunto não compacto de transformações conformes da esfera. Tal exemplo é importante uma vez que a esfera é a única variedade compacta que admite um grupo não compacto de transformações conformes.

O estudo do conjunto de soluções para o problema de Yamabe é o nosso objetivo ao longo desta dissertação.

2.3 Coordenadas Normais Conformes

Em geometria Riemanniana, coordenadas normais são de valor inestimável quando desejamos comparar a geometria local da variedade com o espaço euclidiano. O uso de tais coordenadas frequentemente simplifica os cálculos do problema. No entanto, para a análise que precisaremos realizar no decorrer desta dissertação faz-se necessária a introdução de um sistema de coordenadas no qual a normalização obtida ao alterarmos as coordenadas facilite a análise local, isto é, precisamos de um sistema mais específico para o nosso problema. Demonstraremos a seguir um resultado devido a Lee-Parker [15] que garante a

existência de tal sistema, chamado de coordenadas normais conformes.

O objetivo principal desta seção é demonstrar o seguinte resultado:

Teorema 2.6. *Seja M uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$, e seja $p \in M$. Para algum inteiro $N \geq 2$, existe uma métrica conforme g em M tal que no sistema de coordenadas normais em p*

$$\det(g_{ij}) = 1 + O(r^N)$$

onde $r = |x|$. Mais ainda, se $N \geq 5$ então teremos

$$R_g = O(r^2) \quad e \quad \Delta R_g(p) = -\frac{1}{6}|W(p)|^2$$

onde R_g e W são respectivamente a curvatura escalar e o tensor de Weyl.

No entanto, antes de provarmos o teorema acima serão necessários dois lemas. Para isto denotemos por \mathcal{P}_m como o conjunto dos polinômios homogêneos de grau m . Para tais polinômios sabemos que é válida a conhecida *Identidade de Euler*:

Proposição 2.3. *Se $p \in \mathcal{P}_m$, então a seguinte identidade é válida*

$$x_1 \frac{\partial p}{\partial x_1} + \dots + x_m \frac{\partial p}{\partial x_m} = m \cdot p.$$

Denotando por Δ_0 o laplaciano euclidiano, utilizaremos a identidade acima na demonstração do seguinte lema:

Lema 2.1. *Os autovalores de $r^2 \Delta_0$ em \mathcal{P}_m são*

$$\{\lambda_j = 2j(n - 2 + 2m - 2j) : j = 1, \dots, [m/2]\}.$$

A autofunção correspondente a λ_j tem a forma $r^{2j}\psi$, onde $\psi \in \mathcal{P}_{m-2j}$ é um polinômio harmônico.

Demonstração. Para $m = 0, 1$ o resultado segue imediatamente. Suponhamos que $m \geq 2$ e $f \in \mathcal{P}_m$ satisfaz $r^2 \Delta_0 f = \lambda f$. Pela fórmula de Euler, $\Delta_0 f \in \mathcal{P}_{m-2}$ e satisfaz

$$\begin{aligned} \lambda \Delta_0 f &= \Delta_0(r^2 \Delta_0 f) = \Delta_0(r^2) \Delta_0 f + 4x^i \partial_i \Delta_0 f + r^2 \Delta_0^2 f \\ &= 2n \Delta_0 f + 4(m-2) \Delta_0 f + r^2 \Delta_0^2 f \end{aligned}$$

Assim, teremos

$$r^2 \Delta_0(\Delta_0 f) = (\lambda - 2n - 4m + 8) \Delta_0 f$$

Portanto, ou $\Delta_0 f = 0$, o que implica que $\lambda = 0$ e f é harmônica, ou $(\lambda - 2n - 4m + 8)$ é um autovalor de $r^2 \Delta_0$ em \mathcal{P}_{m-2} . No último caso, f tem a expressão $f = \lambda^{-1} r^2 \Delta_0 f$. A demonstração segue por indução. \square

Lema 2.2. *Sejam $p \in M$ e T um $(k+2)$ -tensor simétrico em T_pM , $k \geq 0$. Então existe um único polinômio homogêneo f de ordem $(k+2)$ tal que no sistema de coordenadas normais de g , a métrica $\tilde{g} = e^{2f}g$ satisfaz*

$$\text{Sym}(\tilde{\nabla}\tilde{R}_{ij})(p) = T, \quad (2.23)$$

onde $\text{Sym}(\cdot)$ denota o operador de simetrização para tensores, $\tilde{g} = e^{2f}g$ e $\tilde{\nabla}, \tilde{R}_{ij}$ são respectivamente o operador diferencial covariante e a curvatura de Ricci de \tilde{g} .

Demonstração. Seja $\{x^i\}$ sistema de coordenadas normais da métrica g no ponto p e $r = |x|$ e seja $F(x) = R_{ij}(x)x^i x^j$. Usando a expansão de Taylor temos

$$F(x) = \sum_{m=2}^{k+2} F^{(m)}(x) + O(r^{k+3}),$$

onde

$$F^{(m)}(x) = \frac{1}{(m-2)!} \sum_{|k|=m-2} \sum_{ij} \partial_K R_{ij}(p) x^i x^j x^K \in \mathcal{P}_m$$

Estamos considerando $K = (k^1, \dots, k^n)$, $x^K = (x^1)^{k_1} \dots (x^n)^{k_n}$, e $|K| = \sum k_j$. Note que, a derivada covariante do tensor de Ricci satisfaz $R_{ij,K}(p) = \partial_K R_{ij}(p) + S_{ijK}$, onde S_{ijK} é um polinômio formado pelas derivadas de ordem menor que $|K|$ de R_{ij} em p . Então, se $f \in \mathcal{P}_{k+2}$, $\tilde{g} = e^{2f}g$, teremos $\tilde{S}_{ijK} = S_{ijK}$, para $|K| = k$. Note ainda que (2.23) é equivalente a

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{|K|=k} (\tilde{R}_{ij,K}(p) - T_{ijK}) x^i x^j x^K \\ &\quad k! \tilde{F}^{(k+2)}(x) + \sum_{|K|=k} (S_{ijK} - T_{ijK}) x^i x^j x^K, \end{aligned} \quad (2.24)$$

Usando a fórmula de Euler para polinômios homogêneos teremos

$$x^i x^j \partial_i \partial_j f = (x^i \partial_i)^2 f - x^i \partial_i f = (k+2)(k+1)f \quad (2.25)$$

e portanto $\Delta f = \Delta_0 f + O(r^{k+1})$. Da relação entre R_{ij} e \tilde{R}_{ij} , concluímos que

$$\begin{aligned} \tilde{F}^{(k+2)}(x) &= F^{(k+2)}(x) + x^i x^j [(2-n)\partial_i \partial_j f - (\Delta_0 f)\delta_{ij}] \\ &= F^{(k+2)}(x) - (n-2)(k+2)(k+1)f - r^2 \Delta_0 f. \end{aligned}$$

Utilizando o lema 2.1 sabemos que o operador $r^2 \Delta_0 + (n-2)(k+2)(k+1)$ é invertível em \mathcal{P}_{k+2} e deste modo, existe um único polinômio homogêneo $f \in \mathcal{P}_{k+2}$ satisfazendo (2.24), o que finaliza a demonstração do resultado. \square

Lema 2.3. *No sistema de coordenadas normais de g , $\det(g_{ij})$ tem a seguinte expansão:*

$$\det(g_{ij}) = 1 - \frac{1}{3}R_{ij}x^i x^j - \frac{1}{6}R_{ij,k}x^i x^j x^k - \left(\frac{1}{20}R_{ij,kl} + \frac{1}{90}R_{hijm}R_{hklm} - \frac{1}{18}R_{ij}R_{kl} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5)$$

onde todas as curvaturas e suas derivadas covariantes estão avaliadas em p .

Demonstração. Seja $\{x^i\}$ o sistema de coordenadas normais relacionados a métrica g em uma vizinhança U de p . Utilizando estas coordenadas, podemos identificar U com um subconjunto aberto de \mathbb{R}^n e p como sendo a origem. Neste ponto é importante lembrar a construção dos campos de Jacobi.

Fixados $\tau, \xi \in \mathbb{R}^n$, considere a aplicação $\gamma : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $\gamma_s(t) = t(\tau + s\xi)$, que determina uma família a um parâmetro de geodésicas saindo da origem e defina $T = \gamma'_s(t)$. O campo variacional $X(\gamma_s(t)) = \frac{\partial}{\partial s}\gamma_s(t) = t\xi$ é chamado campo de Jacobi. Para cada s, γ_s satisfaz a equação geodésica $\nabla_T T = 0$. Desde que $0 = \gamma_* \left[\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s} \right] = [T, X] = \nabla_T X - \nabla_X T$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_X \nabla_T T = \nabla_T \nabla_X T + \nabla_{[X,Y]} T - R(T, X)T \\ &= \nabla_T \nabla_T X - R(T, X)T. \end{aligned}$$

Segue assim que X satisfaz a equação de Jacobi $\nabla_T^2 X = R_T(X)$, onde R_T denota o operador linear $R(T, \cdot)T$ induzido pelo tensor curvatura.

A expansão de Taylor de $f(t) = |X(\gamma_0(t))|^2$ pode ser obtida aplicando ∇_T repetidamente. Usando a equação de Jacobi, $X(0) = 0$ e $\nabla_T X(0) = \xi$, calcularemos os termos principais como segue

$$\begin{aligned} \nabla_T f(0) &= 0, \nabla_T^2 f(0) = 2\langle \xi, \xi \rangle, \nabla_T^3 f(0) = 0, \\ \nabla_T^4 f(0) &= 8\langle R_\tau \xi, \xi \rangle(0), \nabla_T^5 f(0) = 20\langle (\nabla_\tau R_\tau) \xi, \xi \rangle(0), \\ \nabla_T^6 f(0) &= 36\langle (\nabla_\tau^2 R_\tau) \xi, \xi \rangle(0) + 32\langle R_\tau \xi, R_\tau \xi \rangle. \end{aligned}$$

Deste modo,

$$\begin{aligned} \langle \xi, \xi \rangle(t\tau) &= t^{-2} |X(\gamma_0(t))|^2 \\ &= \langle \xi, \xi \rangle + \frac{t^2}{3} \langle R_\tau \xi, \xi \rangle + \frac{t^3}{6} \langle (\nabla_\tau R_\tau) \xi, \xi \rangle + \\ &\quad \frac{t^4}{20} \langle (\nabla_\tau^2 R_\tau) \xi, \xi \rangle + \frac{2t^4}{45} \langle R_\tau \xi, R_\tau \xi \rangle + O(t^5) \end{aligned} \quad (2.26)$$

onde todos os produtos internos do lado direito são avaliados na origem. Tomemos $t\tau = x$ e $\xi = \frac{\partial}{\partial x_i} \pm \frac{\partial}{\partial x_j}$.

De (2.26) obtemos

$$g_{pq}(x) = \delta_{pq} + \frac{1}{3}R_{pijq}x^i x^j + \frac{1}{6}R_{pijq,k}x^i x^j x^k + \left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl} + \frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5), \quad (2.27)$$

onde todos os termos de curvatura estão avaliados na origem. Se $(g_{pq}) = \exp(A_{pq})$, então

$$A_{pq}(x) = \frac{1}{3}R_{pijq}x^i x^j + \frac{1}{6}R_{pijq,k}x^i x^j x^k + \left(\frac{1}{20}R_{pijq,kl} + \frac{2}{45}R_{pijm}R_{qklm} \right) x^i x^j x^k x^l + O(r^5). \quad (2.28)$$

Neste caso, $\det(g_{pq}) = \exp(\text{tr} A_{pq})$ tem a expressão desejada pelo lema.

Demonstração do Teorema: Demonstraremos o resultado utilizando indução. Suponha que a métrica g satisfaz

$$\det(g_{ij}) = 1 + O(r^N), \quad N \geq 2. \quad (2.29)$$

Observe que cada termo de (2.26) tem a forma

$$c_k t^k [(\nabla_\tau^{k-2} R_\tau)\xi, \xi] + B_k(\xi, \xi),$$

onde c_k é constante e B_k é uma forma bilinear com coeficientes dados pelas derivadas de ordem menor que $k - 2$. Desta forma a expansão de $\det(g_{ij})$ pode ser escrita como

$$\det(g_{ij}) = 1 + \sum_{|K|=N-2} c_k (R_{ij,K} - T_{ijK}) x^i x^j x^K + O(r^{N+1}) \quad (2.30)$$

onde T_{ijK} é um tensor simétrico que depende apenas das derivadas de ordem menor ou igual a $k - 1$ da curvatura. Usando o Lema 2.2, existe $f \in \mathcal{P}_N$ tal que se $\tilde{g} = e^{2f}g$, temos

$$\text{Sym}(\tilde{\nabla}^{N-2} \tilde{R}_{ij}) = T.$$

Note que $\det(\tilde{g}_{ij})$ também satisfaz (2.30), onde R_{ij} e T são substituídos por \tilde{R}_{ij} e \tilde{T} , respectivamente. No entanto, no caso em que $f \in \mathcal{P}_N$ vemos que $\tilde{T} = T$. Deste modo, como $\text{Sym}(\tilde{\nabla}^{N-2} \tilde{R}_{ij}) = \tilde{T}$, segue que $\det(\tilde{g}_{ij}) = 1 + O(r^{N+1})$. A demonstração então segue por indução da expansão assintótica de $\det(\tilde{g}_{ij})$.

Suponhamos agora que $N \geq 5$. Então, como $\det(g_{ij}) = 1 + O(r^5)$, sabemos que os coeficientes dados pela expansão do lema anterior são nulos. Portanto, em p teremos

- a) $R_{ij} = 0$,
- b) $R_{ij,k} + R_{jk,i} + R_{ki,j} = 0$,

$$c) \text{Sym} \left(R_{ij,kl} + \frac{2}{9} R_{pijm} R_{pklm} \right) = 0$$

De c) sabemos que $R_{ijkl} = W_{ijkl}$ e

$$R_{ij,kl} - R_{ij,lk} = R_{ikl}^m R_{im} = 0$$

o que implica que

$$\begin{aligned} (R_{ij,kl} + R_{kl,ij} + 2R_{ik,jl} + 2R_{jl,ik})x^i x^j + \frac{2}{9}(W_{pijm}W_{pklm} + W_{pikm}W_{pjlm} \\ + W_{pjkm}W_{plim} + W_{pkjm}W_{plim} + W_{plkm}W_{pjim})x^i x^j = 0 \end{aligned} \quad (2.31)$$

Pela simetria do tensor de Weyl temos

$$W_{pikm}W_{pkjm} = \frac{1}{2}W_{pikm}(W_{pkjm} - W_{pm,jk}) = \frac{1}{2}W_{pikm}W_{pjkm} \quad (2.32)$$

e ainda, usando a identidade de Bianchi $R_{,j} = 2R_{,j}^i$, obtemos

$$(3R_{,ij} + R_{ij,kk} + \frac{2}{3}W_{ipkm}W_{jpkm})x^i x^j = 0, \quad (2.33)$$

e conseqüentemente, contraindo os índices i e j , segue que $\Delta R = R_{,ii} = -\frac{1}{6}|W|^2$.

Finalmente, por a), $R_g(p) = R_{ij}(p) = 0$. Portanto teremos, $R_{,j}(p) = -2R_{ij,i}$ que, juntamente com a identidade de Bianchi nos garante que $2R_{,j} = 0$, o que finaliza a demonstração do teorema. \square

No que segue, chamaremos as coordenadas normais da métrica conforme dada pelo teorema acima de coordenadas normais conformes, e sempre assumiremos que N , dado pelo teorema é suficientemente grande.

2.4 Expansão assintótica da função de Green

Para finalizar este capítulo enunciaremos um resultado relevante para nossa análise nos próximos capítulos desta dissertação. Discutiremos a seguir a expansão da função de Green para o laplaciano conforme em coordenadas normais conformes.

Teorema 2.7 (Existência da Função de Green). *Suponha que M é uma variedade Riemanniana positiva de dimensão $n \geq 3$, e h é uma função estritamente positiva em M . Para cada $p \in M$, existe uma única função suave G_p em $M \setminus \{p\}$, chamada função de Green para $\Delta + h$ em p , tal que $(\Delta + h)G_p = \delta_p$, no sentido das distribuições, onde δ_p é a medida de Dirac em p .*

O teorema acima garante portanto a existência da função de Green para o laplaciano conforme. A demonstração deste resultado se encontra em [10].

Deste modo sabemos que, se $R > 0$ existe uma única função de Green $G_p \in C^\infty(M \setminus \{P\})$ tal que

$$LG_p = \delta_p, \quad G_p > 0$$

onde δ_p denota a medida de Dirac em p . Mais ainda, no sistema de coordenadas normais em p temos

$$G_p(x) = \frac{1}{(n-2)\omega_{n-1}} r^{2-n} (1 + o(1)).$$

No que segue se $G(x) = (n-2)\omega_{n-1}G_p(x)$ para $x \in M \setminus \{p\}$, então teremos,

$$LG = (n-2)\omega_{n-1}\delta_p \quad \text{e} \quad G(x) = r^{2-n}(1 + o(1)).$$

Teorema 2.8. *Em coordenadas normais conformes $\{x^i\}$ em p , a função de Green G tem a seguinte expansão assintótica*

$$G(x) = |x|^{2-n} \left(1 + \sum_{k=4}^n \chi_k(x) \right) + c \log |x| + O(1)$$

onde $\chi_k \in \mathcal{P}_k$, $r = |x|$ e o termo logarítmico aparece apenas quando n é par. Os termos de destaque são:

(a) Se $n = 3, 4, 5$ ou M é conformemente localmente plana em uma vizinhança de p , então

$$G = r^{2-n} + A + \alpha(x),$$

onde A é constante, $\alpha = o(r)$, e $\alpha \in C^{2,\mu}$ a menos que $n = 4$; para $n = 4$, $\alpha = P_2(x) \log r + \alpha_0$, onde $P_2(x)$ é um polinômio de grau 2 e $\alpha_0 \in C^{2,\mu}$.

(b) Para $n = 6$,

$$G = r^{-4} - \frac{a}{288} |W(p)|^2 \log r + \alpha(x),$$

onde $\alpha(x) = P(x) \log r + \alpha_0$ para algum polinômio P com $P(0) = 0$ e $\alpha_0 \in C^{2,\mu}$.

(c) Para $n \geq 7$,

$$G = r^{2-n} \left[1 + \frac{a}{12(n-4)} \left(\frac{r^4}{12(n-6)} |W(p)|^2 - R_{ij}(p) x^i x^j r^2 \right) \right] + \alpha(x),$$

onde $\alpha = (P(x) \log r + \alpha_0) r^{2-n}$ para algum polinômio $P(x)$ e $\alpha_0 \in C^{2,\mu}$.

Ver demonstração em [21] ou [15].

□

CAPÍTULO 3

PROPRIEDADES BÁSICAS DE BLOW-UP

Como mencionado anteriormente, nosso objetivo nesta dissertação é demonstrar o resultado de compacidade acerca do problema de Yamabe obtido em [artigo]. Com o objetivo de provar o resultado principal, veremos que serão necessários tanto o estudo de um certo tipo de equação diferencial parcial, como de propriedades relacionadas a deformação conforme de uma métrica, importantes para o estudo de pontos de blow-up isolados e isolados simples bem como para o estudo de suas propriedades.

Vale destacar a importância do estudo dos pontos de blow-up isolados simples, uma vez que, durante a prova do resultado principal verificaremos que os pontos necessariamente deverão ser desse tipo. Iniciaremos este capítulo com uma identidade importante para a análise local do problema.

3.1 Identidade de Pohozaev

Suponhamos que a função $u : B_\sigma(0) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma solução de classe C^2 da equação

$$\Delta u + K(x)u^p = -A(x). \quad (3.1)$$

onde $p \neq -1$, Δ é o laplaciano euclidiano, e $K \in C^1$. Defina

$$P(r, u) = \int_{\partial B_r} \left(\frac{n-2}{2} u \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{r}{2} |\nabla u|^2 + r \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{p+1} K(x) r u^{p+1} \right) d\sigma_r. \quad (3.2)$$

O lema a seguir nos proporciona uma identidade de Pohozaev radial.

Lema 3.1. *Dado $0 < r < \sigma$, temos que*

$$\begin{aligned} P(r, u) &= - \int_{B_r} \left(x^k \partial_k u + \frac{n-2}{2} u \right) A(x) dx + \left(\frac{n}{p+1} - \frac{n-2}{2} \right) \int_{B_r} K(x) u^{p+1} dx \\ &\quad + \frac{1}{p+1} \int_{B_r} (x^k \partial_k K(x)) u^{p+1} dx. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Demonstração. Multiplicando a equação (3.1) por $x^k \partial_k u$ e integrando sobre a bola centrada na origem e com raio r teremos

$$\int_{B_r} (x^k \partial_k u) (\Delta u + A(x) + K(x) u^p) dx = 0. \quad (3.4)$$

Usando integração por partes, temos

$$\begin{aligned} \int_{B_r} (x^k \partial_k u) \partial_{ii} u dx &= - \int_{B_r} (x^k \partial_k u)_i \partial_i u dx + \int_{\partial B_r} x^k \partial_k u \partial_i u \left(\frac{x_i}{r} \right) d\sigma_r \\ &= - \int_{B_r} (\delta_i^k \partial_k u \partial_i u + x^k \partial_k (\partial_i u) \partial_i u) dx + \int_{\partial B_r} x^k \partial_k u \partial_i u \left(\frac{x_i}{r} \right) d\sigma_r \\ &= - \int_{B_r} \left(\delta_i^k \partial_k u \partial_i u + \frac{1}{2} x^k \partial_k [(\partial_i u)^2] \right) d\sigma_r \\ &\quad + \frac{1}{r} \int_{\partial B_r} x^k \partial_k u x_i \partial_i u d\sigma_r. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Aplicando novamente integração por partes para o termo $\frac{1}{2} x^k \partial_k u x_i \partial_i u$, teremos

$$\frac{1}{2} \int_{B_r} x^k \partial_k [(\partial_i u)^2] dx = -\frac{1}{2} \int_{B_r} (\partial_i u)^2 dx + \frac{r}{2} \int_{\partial B_r} (\partial_i u)^2 d\sigma_r, \quad (3.6)$$

e portanto, substituindo (3.6) em (3.5), e somando em i , com $i = 1, \dots, n$, teremos

$$\begin{aligned} \int_{B_r} (x^k \partial_k u) \Delta u dx &= - \int_{B_r} \left(|\nabla u|^2 - \frac{n}{2} |\nabla u|^2 \right) dx + \frac{1}{r} \int_{\partial B_r} r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 d\sigma_r \\ &\quad - \frac{r}{2} \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 d\sigma_r \\ &= \frac{n-2}{2} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx - \frac{r}{2} \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 d\sigma_r + r \int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 d\sigma_r. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Novamente, utilizando integração por partes e também que $\partial_k (u^{p+1}) = (p+1)u^p \partial_k u$

obteremos a identidade abaixo

$$\begin{aligned}
 \int_{B_r} (x^k \partial_{u_k}) K(x) u^p dx &= \frac{1}{p+1} \int_{B_r} x^k \partial_k (u^{p+1}) K(x) dx \\
 &= -\frac{1}{p+1} \int_{B_r} (x^k K(x))_k u^{p+1} dx + \frac{1}{p+1} \int_{\partial B_r} x^k K(x) u^{p+1} \frac{x^k}{r} d\sigma_r \\
 &= -\frac{n}{p+1} \int_{B_r} K(x) u^{p+1} dx - \frac{1}{p+1} \int_{B_r} x^k \partial_k K(x) u^{p+1} dx \\
 &\quad + \frac{r}{p+1} \int_{\partial B_r} K(x) u^{p+1} d\sigma_r. \tag{3.8}
 \end{aligned}$$

Substituindo assim as estimativas (3.7) e (3.8) em (3.4), obteremos a seguinte expressão

$$\begin{aligned}
 \frac{n-2}{2} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx - \frac{r}{2} \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 d\sigma_r + r \int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dx - \frac{n}{p+1} \int_{B_r} K(x) u^{p+1} dx \\
 - \frac{1}{p+1} \int_{B_r} x^k \partial_k (K(x)) u^{p+1} dx + \frac{r}{p+1} \int_{\partial B_r} K(x) u^{p+1} d\sigma_r \\
 + \int_{B_r} (x^k \partial_k u) A(x) dx = 0. \tag{3.9}
 \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração, multiplicando a equação (3.1) pelo termo $\frac{n-2}{2}$ e integrando sobre a bola de centrada na origem e com raio r obteremos

$$\int_{B_r} \frac{n-2}{2} u (\Delta u + A(x) + K(x) u^p) dx = 0. \tag{3.10}$$

Aplicando a identidade de Green, temos

$$\int_{B_r} \frac{n-2}{2} u \Delta u dx = - \int_{B_r} \frac{n-2}{2} |\nabla u|^2 dx + \frac{n-2}{2} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial r} u d\sigma_r, \tag{3.11}$$

e substituindo em (3.10) teremos

$$\frac{n-2}{2} \int_{B_r} u A(x) dx + \int_{B_r} K(x) u^{p+1} dx = -\frac{n-2}{2} \int_{B_r} |\nabla u|^2 dx - \frac{n-2}{2} \int_{\partial B_r} u \frac{\partial u}{\partial r} d\sigma_r, \tag{3.12}$$

e portanto, substituindo (3.12) em (3.9), teremos

$$\begin{aligned}
 -\frac{r}{2} \int_{\partial B_r} |\nabla u|^2 + r \int_{\partial B_r} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 - \frac{r}{p+1} \int_{B_r} K(x) u^{p+1} - \frac{1}{p+1} \int_{B_r} x^k \partial_k (K(x)) u^{p+1} \\
 + \frac{r}{p+1} \int_{\partial B_r} K(x) u^{p+1} + \int_{B_r} (x^k \partial_k u) A(x) dx - \frac{n-2}{2} \int_{B_r} u A(x) + K(x) u^{p+1} + \\
 \frac{n-2}{2} \int_{\partial B_r} u \frac{\partial u}{\partial r} = 0,
 \end{aligned}$$

donde segue o resultado. \square

3.2 Equação da Curvatura Escalar Conforme

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto, e suponhamos que g é uma métrica Riemanniana em Ω , e f é uma função C^2 . Considere uma função positiva de classe C^2 , satisfazendo

$$\Delta_g u - c(n)R_g u + K f^{-\delta} u^p = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.13)$$

onde $c(n) = \frac{n-2}{4(n-1)}$, $K = n(n-2)$, $1 < p \leq \frac{n+2}{n-2}$, $\delta = \frac{n+2}{n-2} - p$ e R_g é a curvatura escalar de g . O operador $L_g = \Delta_g - c(n)R_g$ é chamado laplaciano conforme de g .

Observe que, quando $p = \frac{n+2}{n-2}$, esta equação diferencial parcial está intimamente relacionada com problemas da geometria conforme. Como mencionado no capítulo 1, encontrar uma solução deste problema é equivalente a encontrar uma métrica conforme à métrica dada cuja curvatura escalar seja constante, problema conhecido por problema de Yamabe. De forma mais específica, dada uma solução positiva u , a métrica $u^{\frac{4}{n-2}}g$ tem curvatura escalar constante igual a $4n(n-1)$.

Descreveremos a seguir uma característica importante das soluções deste tipo de equação. Mostraremos que tais soluções são invariantes nos sentidos que descreveremos abaixo. Consideremos $\tilde{g} = \phi^{\frac{4}{n-2}}g$ é uma métrica conforme a g :

Lema 3.2. *Se $\tilde{g} = \phi^{\frac{4}{n-2}}g$ é uma métrica conforme a g , então*

$$L_{\tilde{g}}(\phi^{-1}u) = \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g(u) \quad (3.14)$$

para qualquer função u e,

$$R_{\tilde{g}} = -c(n)^{-1}\phi^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g(\phi). \quad (3.15)$$

Demonstração. Observe que

$$\Delta_{\tilde{g}}(\phi^{-1}u) = \frac{1}{\sqrt{\det \tilde{g}}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\tilde{g}^{ij} \sqrt{\det \tilde{g}} \frac{\partial(\phi^{-1}u)}{\partial x_j} \right).$$

Uma vez que $\det \tilde{g} = \phi^{\frac{4n}{n-2}} \det g$ e $\tilde{g}^{ij} = \phi^{-\frac{4}{n-2}} g^{ij}$, temos

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\tilde{g}}(\phi^{-1}u) &= \frac{1}{\sqrt{\phi^{\frac{4}{n-2}}}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi^{-\frac{4}{n-2}} g^{ij} \sqrt{\phi^{\frac{4n}{n-2}}} \sqrt{\det g} \frac{\partial(\phi^{-1}u)}{\partial x_j} \right) \\
 &= \phi^{-\frac{2n}{n-2}} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi^{-\frac{4}{n-2}} \phi^{\frac{2n}{n-2}} g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial(\phi^{-1}u)}{\partial x_j} \right) \\
 &= \phi^{-\frac{2n}{n-2}} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\phi^2 g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial(\phi^{-1}u)}{\partial x_j} \right) \\
 &= \phi^{-\frac{2n}{n-2}} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi^2) g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial(\phi^{-1}u)}{\partial x_j} \\
 &\quad + \phi^{-\frac{2n}{n-2}} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \phi^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial(\phi^{-1}u)}{\partial x_j} \right) \\
 &= \phi^{-\frac{2n}{n-2}} 2\phi \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi) g^{ij} \frac{\partial(\phi^{-1}u)}{\partial x_j} \\
 &\quad + \phi^{-\frac{2n}{n-2}} \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \phi^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(g^{ij} \sqrt{\det g} \frac{\partial(\phi^{-1}u)}{\partial x_j} \right). \tag{3.16}
 \end{aligned}$$

aplicando novamente regra da cadeia, e utilizando a regra do produto para o laplaciano, temos

$$\begin{aligned}
 &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} 2g(\nabla\phi, \nabla\phi^{-1})u + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} 2g(\nabla\phi, \nabla u)\phi^{-1} + \phi^{-\frac{4}{n-2}} \Delta_g(\phi^{-1}u) \\
 &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} 2g(\nabla\phi, \nabla\phi^{-1})u + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} 2g(\nabla\phi, \nabla u)\phi^{-1} + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} \phi \Delta_g \phi^{-1} \cdot u \\
 &\quad + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta_g u + \phi^{-\frac{4}{n-2}} 2g(\nabla\phi^{-1}, \nabla u). \tag{3.17}
 \end{aligned}$$

Note que,

$$0 = \Delta_g(\phi\phi^{-1}) = \Delta_g\phi \cdot \phi^{-1} + \Delta_g\phi^{-1} \cdot \phi + 2g(\nabla\phi, \nabla\phi^{-1}), \tag{3.18}$$

implica que

$$\Delta_g\phi^{-1} \cdot \phi = -\Delta_g\phi \cdot \phi^{-1} - 2g(\nabla\phi, \nabla\phi^{-1}). \tag{3.19}$$

Substituindo em (3.17), obtemos

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\tilde{g}}(\phi^{-1}u) &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta_g u + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} \phi 2g(\nabla\phi^{-1}, \nabla u) + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} 2g(\nabla\phi, \nabla\phi^{-1})u \\
 &\quad + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} 2g(\nabla\phi, \nabla u)\phi^{-1} + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} (-\Delta_g\phi \cdot \phi^{-1} - 2g(\nabla\phi, \nabla\phi^{-1}))u \\
 &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta_g u + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} \phi 2g(\nabla\phi^{-1}, \nabla u) + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} 2g(\nabla\phi, \nabla u)\phi^{-1} \\
 &\quad - \phi^{-\frac{n+2}{n-2}} \Delta_g\phi \cdot \phi^{-1} \cdot u. \tag{3.20}
 \end{aligned}$$

Note ainda que,

$$0 = g(\nabla(\phi \cdot \phi^{-1}), \nabla u) = g(\nabla\phi^{-1}, \nabla u)\phi + g(\nabla\phi^{-1}, \nabla u)\phi,$$

implica que

$$g(\nabla\phi^{-1}, \nabla u)\phi = -g(\nabla\phi^{-1}, \nabla u)\phi,$$

e portanto, substituindo em (3.20), teremos

$$\Delta_{\tilde{g}}(\phi^{-1}u) = \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta_g u - \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta_g \phi \cdot \phi^{-1}u. \quad (3.21)$$

Finalmente, utilizando (3.15)

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}}(\phi^{-1}u) &= \Delta_{\tilde{g}}(\phi^{-1}u) - c(n)R_{\tilde{g}}\phi^{-1}u \\ &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta_g u - \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta_g \phi \cdot \phi^{-1}u - c(n) \left(-c(n)^{-1}\phi^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g(\phi) \right) \phi^{-1}u \\ &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta_g u - \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta_g \phi \cdot \phi^{-1}u + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}\Delta_g \phi \cdot \phi^{-1}u - \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}c(n)R_g u \\ &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}(\Delta_g u - c(n)R_g u) \\ &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g u. \end{aligned} \quad (3.22)$$

□

Consequentemente, se u é uma solução para a equação (3.13), então $\phi^{-1}u$ satisfaz

$$\begin{aligned} L_{\tilde{g}}(\phi^{-1}u) + K(\phi f)^{-\delta}(\phi^{-1}u)^p &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}L_g(u) + \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}Kf^{-\delta}u^p \\ &= \phi^{-\frac{n+2}{n-2}}(L_g(u) + Kf^{-\delta}u^p) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

e portanto, $\phi^{-1}u$ satisfaz uma equação do mesmo tipo. Ou seja, a equação é invariante via mudanças conformes da métrica.

Definição 3.1. *Seja u uma solução da equação (3.13) e fixemos $\bar{x} \in \Omega$. Fixado $s > 0$, definimos a função renormalizada $v(y)$ como sendo*

$$v(y) = s^{\frac{2}{p-1}}u(\exp_{\bar{x}}(sy)).$$

Lema 3.3. *Se $v(y)$ é a função renormalizada de u , então*

$$L_h v + K\tilde{f}^{-\delta}v^p = 0,$$

onde $\tilde{f}(y) = f(sy)$ e as componentes da métrica h em coordenadas normais são dadas por $h_{kl} = g_{kl}(sy)$.

A demonstração do lema acima é análoga a demonstração do lema anterior e por isto omitiremos sua prova. Conseqüentemente a função renormalizada satisfaz uma equação do mesmo tipo que a função original e neste caso diremos que a equação é invariante por renormalização.

Os fatos observados acima terão conseqüências importantes no que segue.

Estudaremos agora, seqüências de soluções u_i da equação (3.13). Vale notar que, quando o que desejamos é estudar objetos conformemente invariantes, é sempre possível substituir a seqüência u_i por outra seqüência de funções $v_i = \phi_i^{-1}u_i$, e ao mesmo tempo alterar a seqüência das métricas para $\tilde{g}_i = \phi_i^{\frac{4}{n-2}}g_i$, sempre que possuímos um controle uniforme dos fatores ϕ_i . A seguir, daremos alguns exemplos de tal procedimento. Fixemos $x \in \Omega$:

Lema 3.4. *Existe um $\sigma > 0$ tal que tal que $R_{\tilde{g}} > 0$ em $B_{2\sigma}(x)$, onde \tilde{g} é uma métrica conforme a g .*

Demonstração. Fixemos $\sigma > 0$ e considere ϕ a primeira autofunção de Δ_g com respeito a seguinte condição de Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta_g \phi + \lambda_1 \phi = 0 \text{ em } B_{2\sigma}(x) \\ \phi = 0 \text{ em } \partial B_{2\sigma}(x) \end{cases}$$

Relembre que, o autoespaço correspondentes é de dimensão 1 e podemos escolher ϕ de modo que $\phi > 0$ em $B_{2\sigma}(x)$. Assim, desde que $\lambda_1 \rightarrow \infty$ quando $\sigma \rightarrow 0$, podemos tomar σ suficientemente pequeno de modo que $\lambda_1 > \|R_g\|_{\overline{B_\sigma(x)}} + 1$, então

$$\begin{aligned} \Delta_g \phi - c(n)R_g \phi &= \Delta_g \phi + \lambda_1 \phi - \lambda_1 \phi - c(n)R_g \phi \\ &= (-\lambda_1 - c(n)R_g)\phi < 0, \end{aligned}$$

em $B_\sigma(x)$. Definindo $\tilde{g} = \phi^{\frac{4}{n-2}}g$, deduzimos de (3.15) que $R_{\tilde{g}} > 0$ em $B_\sigma(x)$. \square

Lema 3.5. *Existe σ tal que $R_{\tilde{g}} \equiv 0$ em $B_\sigma(x)$, onde \tilde{g} é uma métrica conforme a g .*

Demonstração. Considere a métrica cujo fator conforme é a função ψ obtida como solução da seguinte equação:

$$\begin{cases} \Delta_g \psi - c(n)R_g \psi = 0 \text{ em } B_\sigma(x) \\ \psi = 1 \text{ em } \partial B_\sigma(x) \end{cases}$$

desta forma concluímos que $R_{\tilde{g}} = 0$ em $B_\sigma(x)$, ficando assim demonstrado o resultado. \square

3.3 Propriedades Básicas de Blow-up

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto dotado com uma seqüência de métricas Riemannianas suaves $\{g_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ convergindo na topologia C_{loc}^N para uma métrica suave g ,

onde N é grande o suficiente e depende apenas de n . Considere uma sequência de soluções positivas $\{u_i\}_{i=1}^\infty$, da equação

$$L_{g_i}u_i + K f_i^{-\delta_i} u_i^{p_i} = 0 \text{ em } \Omega \quad (3.24)$$

onde $1 < p_i \leq \frac{n+2}{n-2}$, $\delta_i = \frac{n+2}{n-2} - p_i$, $K = n(n-2)$ e $\{f_i\}_{i=1}^\infty$ é uma sequência de funções suaves convergindo para uma função positiva f na topologia C_{loc}^2 .

Definição 3.2 (Ponto de Blow-up). *Um ponto $\bar{x} \in \Omega$ é dito um ponto de Blow-up para $\{u_i\}$ se existir uma sequência $\{x_i\} \subset \Omega$ tal que $x_i \rightarrow \bar{x}$ e $u_i(x_i) \rightarrow \infty$.*

Definição 3.3 (Ponto de blow-up isolado). *Um ponto $\bar{x} \in \Omega$ é um ponto de Blow-up isolado se existe uma sequência $\{x_i\} \subset \Omega$ tal que*

1. $x_i \rightarrow \bar{x}$;
2. x_i é um máximo local para u_i ;
3. $u_i(x_i) \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$;
4. $u_i(x) \leq C d_{g_i}(x, x_i)^{-\frac{2}{p_i-1}}$, $\forall x \in B_r(x_i) \subset \Omega$;

para constantes $r, C > 0$, onde $B_r(x_i)$ denota a bola geodésica de raio r centrada em x_i , e $d_{g_i}(x, x_i)$ representa a distância entre x e x_i , com respeito a métrica g_i .

Observe que o último item da definição de ponto de blow-up isolado implica que existe uma vizinhança V de \bar{x} de modo que \bar{x} é o único ponto de blow-up de $\{u_i\}$ nesta vizinhança. Com efeito, seja $V = B_{r/2}(\bar{x})$ e suponhamos que exista \bar{y} ponto de blow-up para $\{u_i\}$ ou seja, existe $y_i \rightarrow \bar{y}$, tal que $\lim u_i(y_i) = \infty$.

Seja $d = |\bar{x} - \bar{y}|$, e tome $i \gg i_0$ de forma que

$$|x_i - \bar{x}| < \frac{d}{4} \text{ e } |y_i - \bar{y}| < \frac{d}{4}.$$

Então,

$$\begin{aligned} |\bar{x} - \bar{y}| &\leq |\bar{x} - x_i| + |x_i - y_i| + |y_i - \bar{y}| \Rightarrow \\ |x_i - y_i| &> \frac{|\bar{x} - \bar{y}|}{2} \end{aligned}$$

e pela definição de ponto de blow-up isolado segue que

$$u_i(y_i) \leq \frac{C}{|y_i - x_i|^{\frac{2}{p_i-1}}} \leq \frac{C \cdot 2^{\frac{2}{p_i-1}}}{|\bar{y} - \bar{x}|^{\frac{2}{p_i-1}}} \leq C',$$

o que contradiz o fato que $\lim u_i(y_i) = \infty$.

Deste modo a definição acima implica que o ponto de blow-up em questão é isolado. A menos de menção explícita, trabalharemos nesta seção com coordenadas normais $x = (x_1, \dots, x_n)$ centradas em x_i , onde $\{x_i\}$ é como na definição 3.3. Denotaremos também $u_i(\exp_{x_i}(x))$ por $u_i(x)$ e $d_{g_i}(x, x_i)$ por $|x|$.

Observe que a definição de ponto de blow-up isolado tem a seguinte propriedade especial:

Lema 3.6. *A definição de ponto de blow-up isolado é invariante por renormalização.*

Demonstração. Os itens 1, 2 e 3 da definição são facilmente verificados, provemos o item 4. De fato, se $v(y) = s^{\frac{2}{p_i-1}}u(sy)$, então

$$\begin{aligned} u(sy) &\leq C|sy|^{-\frac{2}{p_i-1}} \Leftrightarrow \\ u(sy)s^{\frac{2}{p_i-1}} &\leq c|y| \Leftrightarrow \\ v(y) &\leq C|y|^{-\frac{2}{p_i-1}} \end{aligned}$$

□

Apresentaremos a seguir alguns resultados devidos a Schoen [?], referentes a pontos de Blow-up. O primeiro resultado mostra que próximo a um ponto de Blow-up isolado, as soluções da equação (3.24), satisfazem uma desigualdade de Harnack.

Proposição 3.1. *Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de Blow-up isolado para a sequência $\{u_i\}$ de soluções positivas de (3.24). Então, existe $C > 0$ independente de i , tal que*

$$\max_{s \leq |x| \leq 2s} u_i(x) \leq C \min_{s \leq |x| \leq 2s} u_i(x)$$

Demonstração. Considere (x^1, \dots, x^n) as coordenadas normais com respeito a métrica g_i na bola $B_r(x_i)$. Defina a aplicação

$$v_i(y) = s^{\frac{2}{p_i-1}}u_i(sy) \tag{3.25}$$

onde $|y| < 3$. Assim, conforme discutimos na seção anterior a aplicação definida acima satisfaz

$$L_{h_i}v_i(y) + K\tilde{f}_i^{-\delta_i}v_i^{p_i}(y) = 0$$

onde $\tilde{f}_i(y) = f_i(sy)$ e $(h_i)_{kl}(y) = (g_i)_{kl}(sy)$, e ainda

$$v_i(y) \leq C|y|^{-\frac{2}{p_i-1}}$$

quando $|y| < 3$. Segue assim da última desigualdade que v_i é uniformemente limitado em subconjuntos compactos de $B_3(0) \setminus \{0\}$. Deste modo, aplicando a desigualdade de Harnack

para equações elípticas lineares (cf. [11, Theorem 1.1]), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\max_{1 \leq |y| \leq 2} v_i(y) \leq C \min_{1 \leq |y| \leq 2} v_i(y)$$

ou seja,

$$\max_{1 \leq |y| \leq 2} s^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(sy) \leq C \min_{1 \leq |y| \leq 2} s^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(sy)$$

donde segue o resultado. \square

Podemos agora aplicar esta desigualdade de Harnack para obter informações na vizinhança de $\{u_i\}$ próximo a um ponto de blow-up isolado.

Considere a aplicação $U(y) = (1 + |y|^2)^{\frac{2-n}{2}}$. É fácil checar que esta aplicação satisfaz

$$\Delta U(y) + KU^{\frac{n+2}{n-2}}(y) = 0$$

Observe que, se $\pi : S^n \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a projeção estereográfica, então $(\pi^{-1})^* g_0 = 4U^{\frac{4}{n-2}} \delta$ onde g_0 é a “round metric” da esfera e δ é a métrica euclidiana do \mathbb{R}^n . Por esta razão a função $U(y)$ é frequentemente chamada de “standard bubble”.

O próximo resultado garante que no caso de um ponto de blow-up isolado a sequência $\{u_i\}$, após renormalização, se aproxima da função rotacionalmente simétrica U .

Proposição 3.2. *Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de Blow-up isolado para a sequência de soluções positivas $\{u_i\}$ de (3.24). Então $p_i \rightarrow \frac{n+2}{n-2}$ e para alguma sequência $\varepsilon_i \rightarrow 0$ e $R_i \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$, temos*

$$|M_i^{-1} u_i(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} y) - U(y)|_{C^2(B_{R_i}(0))} \leq \varepsilon_i \quad (3.26)$$

onde $M_i = u_i(x_i)$, depois de possivelmente tomarmos uma subsequência, e

$$\frac{R_i}{\log M_i} \rightarrow 0 \text{ quando } i \rightarrow \infty. \quad (3.27)$$

Demonstração. Sejam (x^1, \dots, x^n) as coordenadas normais com respeito a métrica g_i na bola $B_r(x_i)$. Defina a aplicação

$$v_i(y) = M_i^{-1} u_i(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} y)$$

para $|y| < rM_i^{\frac{p_i-1}{2}}$. Onde r é como na definição 3.3. Consequentemente tal função satisfaz

$$L_{h_i} v_i(y) + K \tilde{f}_i^{-\delta_i} v_i^{p_i} = 0$$

onde $\tilde{f}_i = f_i(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} y)$ e $(h_i)_{kl}(y) = (g_i)_{kl}(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} y)$.

Note também que

- $v_i(0) = M_i^{-1}u_i(\exp_{x_i}(0)) = M_i^{-1}u_i(x_i) = 1$;
- $\nabla v_i(0) = \nabla u_i(x_i) = 0$, pois x_i é ponto de máximo local;
- Se $|y| \leq rM_i^{\frac{p_i-1}{2}}$ então $0 < v_i(y) < C|y|^{-\frac{p_i-1}{2}}$;

Afirmção 3.1. *Existe $C > 0$ tal que, se $|y| < rM_i^{\frac{p_i-1}{2}}$ então $v_i(y) \leq C$.*

Demonstração da Afirmção : Pelo que discutimos na seção anterior, a menos de uma mudança conforme, podemos supor que as métricas tem curvatura escalar nula sobre pequenas bolas, isto é, podemos tomar $\sigma > 0$ de modo que $R_{h_i} \equiv 0$ em $B_\sigma(0)$, para todo i . Pelas propriedades da aplicação v_i descritas acima, obtemos

$$v_i(y) \leq C \quad (3.28)$$

quando $\sigma \leq |y| \leq rM_i^{\frac{p_i-1}{2}}$. E ainda, como as métricas tem curvatura escalar nula em $B_\sigma(0)$, o operador laplaciano conforme irá satisfazer o princípio do máximo, isto é, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\min_{|y| \leq r} v_i(y) \geq C^{-1} \min_{|y|=r} v_i(y) \quad \forall i \quad (3.29)$$

e $0 < r \leq \sigma$. E portanto, utilizando a desigualdade de Harnack esférica teremos

$$\begin{aligned} \max_{|y|=r} v_i(y) &\leq C \min_{|y|=r} v_i(y) \\ &\leq C \min_{|y| \leq r} v_i(y) \\ &\leq C v_i(0) \\ &= C \end{aligned} \quad (3.30)$$

ficando assim demonstrada a afirmação.

Estimativas elípticas usuais implicam que, após tomarmos uma subsequência $v_i \rightarrow v$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$, onde

$$\begin{cases} \Delta v(y) + K v^p(y) = 0, & y \in \mathbb{R}^n \\ v(0) = 1, \quad \nabla v(0) = 0, \end{cases}$$

onde $p = \lim_{i \rightarrow \infty} p_i$, e Δ denota o laplaciano euclidiano.

Pelo teorema de Caffarelli, Gidas e Spruck [8], necessariamente teremos que $p = \frac{n+2}{n-2}$ e $v(y) = U(y)$, o que finaliza a demonstração. \square

Para finalizar este capítulo introduziremos a seguir a noção de ponto de blow-up isolado simples, e demonstraremos algumas de suas propriedades.

Suponhamos que u_i é uma sequência de soluções positivas da equação (3.24) e seja

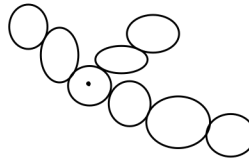
$x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado. Considere a média esférica

$$\bar{u}_i(r) = |\partial B_r(x_i)|_{g_i}^{-1} \int_{\partial B_r(x_i)} u_i d\sigma_{g_i} \quad (3.31)$$

onde $|\partial B_r(x_i)|_{g_i}$ denota a área de $\partial B_r(x_i)$ com respeito a g_i .

Definição 3.4 (Ponto de blow-up isolado simples). *Diremos que $\bar{x} \in \Omega$ é um ponto de Blow-up isolado simples para $\{u_i\}$, se existe $R > 0$, independente de i , tal que a função $\hat{u}_i(r) = r^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{u}_i(r)$ tem exatamente um ponto crítico em $r \in (0, R)$.*

Tais pontos possuem a importante propriedade de que não pode haver acumulação de mais de um “bubble” em um único ponto.



1.PNG

Figura 3.1: Ponto de Blow-up Isolado Simples.

Observação 3.1. *Note que, na proposição anterior, podemos sempre escolher $R_i \rightarrow \infty$ antes, para então escolher ε_i tão pequeno quanto quisermos e então escolher com que subsequência de $\{u_i\}$ iremos trabalhar. Em particular podemos tomar ε_i tão pequeno de modo que x_i seja o único ponto crítico de u_i no conjunto*

$$|x - x_i| < R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}$$

e portanto, \hat{u}_i possui um único ponto crítico em $0 < r < R_i M_i^{-\frac{(p_i-1)}{2}}$. Como resultado, se o ponto é de blow-up isolado simples então

$$\hat{u}_i'(r) < 0$$

para todo $R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq r < R$.

Provaremos a seguir que, no caso de pontos de blow-up isolados simples, o blow-up é análogo ao da função de Green para o laplaciano conforme centrado em x_i .

Relembre que, se R é suficientemente pequeno, então existe uma única função de Green $G_i(\cdot, x_i) \in C^2(\overline{B_R(x_i)} \setminus \{x_i\})$ satisfazendo

- $L_{g_i} G_i = 0$ em $B_R(x_i) \setminus \{x_i\}$;
- $G_i|_{\partial B_R(x_i)} = 0$;
- $\lim_{x \rightarrow x_i} |x|^{n-2} G_i(x) = 1$.

Proposição 3.3. *Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado simples para a sequência $\{u_i\}$ de soluções positivas para (3.24). Então existem constantes $C > 0$ e $S \in (0, R)$ que independem de i , tais que*

$$M_i u_i(x) \geq C^{-1} G_i(x, x_i), \quad R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq |x| \leq S \quad (3.32)$$

$$M_i u_i(x) \leq C |x|^{2-n}, \quad |x| \leq S \quad (3.33)$$

onde $G_i(x, x_i)$ é a função de Green para L_{g_i} , com as condições de fronteira de Dirichlet em $B_S(x_i)$.

Antes de demonstrarmos a proposição acima, precisaremos de uma série de lemas.

Lema 3.7. *Se δ é suficientemente pequeno, existem constantes $0 < S < R$ e $C > 0$ tal que*

$$M_i^{\lambda_i} u_i(x) \leq C d(x, x_i)^{2-n+\delta}, \quad (3.34)$$

$$M_i^{\lambda_i} |\nabla u_i(x)| \leq C d(x, x_i)^{1-n+\delta}, \quad (3.35)$$

$$M_i^{\lambda_i} |\nabla^2 u_i(x)| \leq C d(x, x_i)^{-n+\delta}, \quad (3.36)$$

para todo x tal que $R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d(x, x_i) \leq S$, onde $\lambda_i = (n-2-\delta) \frac{p_i-1}{2} - 1$.

Demonstração. A demonstração é análoga à demonstração do lema 3.3 do artigo [16]. \square

Observação 3.2. *Não é difícil ver que as estimativas acima implicam que*

$$\begin{cases} v_i(y) \leq C M_i^{\delta \frac{p_i-1}{2}} (1+|y|)^{2-n} \\ |\nabla v_i(y)| \leq C M_i^{\delta \frac{p_i-1}{2}} (1+|y|)^{1-n} \\ |\nabla^2 v_i(y)| \leq M_i^{\delta \frac{p_i-1}{2}} (1+|y|)^{-n} \end{cases}$$

para qualquer $|y| \leq S M_i^{\frac{p_i-1}{2}}$.

Lema 3.8. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\delta_i \leq \begin{cases} C M_i^{(-1+\delta) \frac{4}{n-2} + o(1)}, & \text{se } n > 4 \\ C M_i^{(-1+\delta)2 + o(1)} \log M_i, & \text{se } n = 4, \end{cases}$$

em particular, $M_i^{\delta_i} \rightarrow 1$, quando $i \rightarrow \infty$.

Demonstração. Aplicaremos a identidade de Pohozaev para u_i sobre a bola de raio $\frac{S}{2}$.

Com efeito se,

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{S}{2}, u_i\right) &= \int_{|x|=\frac{S}{2}} \left(\frac{n-2}{2} u_i \frac{\partial u_i}{\partial r} - \frac{|x|}{2} |\nabla u_i|^2 + |x| \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 \right) d\sigma \\
 &\quad + \frac{1}{p_i + 1} \int_{|x|=\frac{S}{2}} K f_i^{-\delta_i} |x| u_i^{p_i+1} d\sigma.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

por 3.1, sabemos que

$$\begin{aligned}
 P\left(\frac{S}{2}, u_i\right) &= - \int_{|x|\leq\frac{S}{2}} \left(x^m \partial_m u_i + \frac{n-2}{2} u_i \right) A_i(x) dx \\
 &\quad + \left(\frac{n}{p_i + 1} - \frac{n-2}{2} \right) \int_{|x|\leq\frac{S}{2}} K f_i^{-\delta_i} u_i^{p_i+1} dx \\
 &\quad - \frac{\delta_i}{p_i + 1} \int_{|x|\leq\frac{S}{2}} K f_i^{-\delta_i-1} (x^m \partial_m f_i) u_i^{p_i+1} dx,
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

com

$$\begin{aligned}
 A_i(x) &= (g^{kl} - \delta^{kl})(x) \partial_{kl} u_i(x) \\
 &\quad + (\partial_k g^{kl} + |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_k (|g|^{\frac{1}{2}}) g^{kl})(x) \partial_l u_i(x) - c(n) R_g(x) u_i(x)
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Da definição de $P\left(\frac{S}{2}, u_i\right)$ e pelo lema 3.7 temos

$$\left| P\left(\frac{S}{2}, u_i\right) \right| \leq c M_i^{-2\lambda_i} \tag{3.40}$$

Defina

$$\begin{aligned}
 \widehat{A}_i(y) &= (g^{kl} - \delta^{kl})(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} y) \partial_{kl} v_i + M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} (\partial_k g^{kl}) + |g|^{-\frac{1}{2}} \partial_k (|g|^{\frac{1}{2}} g^{kl})(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} y) \partial_l v_i \\
 &\quad - c(c) M_i^{-(p_i-1)} R_g(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} y) v_i.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

Através da mudança de variáveis $y = M^{\frac{p_i-1}{2}} x$, das desigualdades obtidas na observação 3.2 e do fato de que a métrica é euclidiana sobre a primeira ordem das coordenadas normais segue que

$$\begin{aligned}
 & \left| \int_{|x| \leq \frac{S}{2}} \left(x^m \partial_m u_i + \frac{n-2}{2} u_i \right) A_i(x) dx \right| = \\
 & = M_i^{p \frac{2-n}{2}} M_i^{\frac{n+2}{2}} \left| \int_{|y| \leq \frac{S}{2} M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}} \left(y^m \partial_m v_i + \frac{n-2}{2} v_i \hat{A}_i(y) dy \right) \right| \\
 & \leq C M_i^{p \frac{2-n}{2}} M_i^{\frac{n+2}{2}} M_i^{-(p_i-1)} M_i^{\delta(p_i-1)} \int_{|y| \leq \frac{S}{2} M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}} (1+|y|)^{4-2n} dy \\
 & \leq \begin{cases} C M_i^{(-1+\delta)\frac{4}{n-2}+o(1)}, & \text{se } n > 4 \\ C M_i^{(-1+\delta)2+o(1)} \log M_i, & \text{se } n = 4, \end{cases} \quad (3.42)
 \end{aligned}$$

Mais ainda, utilizando as estimativas (3.42), (3.40), a identidade (3.38), e o fato que $\frac{(n-2)\delta_i}{2(p_i+1)} = \frac{n}{p_i+1} - \frac{n-2}{2}$, então

$$\begin{aligned}
 & \frac{(n-2)\delta_i}{2(p_i+1)} \int_{|x| \leq \frac{S}{2}} K f_i^{-\delta_i} u_i(x)^{p_i+1} dx - \frac{\delta_i}{p_i+1} \int_{|x| \leq \frac{S}{2}} K f_i^{-\delta_i-1} (x^m \partial_m f_i) u_i^{p_i+1} dx \\
 & \leq \begin{cases} C M_i^{(-1+\delta)\frac{4}{n-2}+o(1)}, & \text{se } n > 4 \\ C M_i^{(-1+\delta)2+o(1)} \log M_i, & \text{se } n = 4, \end{cases}
 \end{aligned}$$

Deste modo, pela proposição 3.2, teremos

$$\int_{|x| \leq R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}} u_i(x)^{p_i+1} \geq c > 0 \quad (3.43)$$

donde concluímos que ao tomar S suficientemente pequeno, então

$$\frac{n-2}{2} \int_{|x| \leq \frac{S}{2}} K f_i^{-\delta_i} u_i(x)^{p_i+1} - K f_i^{-\delta_i-1} (x^m \partial_m f_i) u_i^{p_i+1} dx \geq c > 0 \quad (3.44)$$

donde segue que,

$$\begin{aligned}
 c\delta_i & \leq \frac{(n-2)\delta_i}{2(p_i+1)} \int_{|x| \leq \frac{S}{2}} K f_i^{-\delta_i} u_i(x)^{p_i+1} dx - \frac{\delta_i}{p_i+1} \int_{|x| \leq \frac{S}{2}} K f_i^{-\delta_i-1} (x^m \partial_m f_i) u_i^{p_i+1} dx \\
 & \leq \begin{cases} C M_i^{(-1+\delta)\frac{4}{n-2}+o(1)}, & \text{se } n > 4 \\ C M_i^{(-1+\delta)2+o(1)} \log M_i, & \text{se } n = 4, \end{cases} \quad (3.45)
 \end{aligned}$$

ficando assim demonstrado o resultado. \square

Lema 3.9. *Dado $\sigma > 0$ suficientemente pequeno, existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\int_{B_\sigma(x_i)} u_i^{p_i}(x) dx \leq C M_i^{-1}$$

Demonstração. Considere $s_i = R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}$. Observe que, usando mudança de variáveis e o fato de que $v_i(y) \leq cU(y)$ para $|y| \leq R$, obteremos

$$\int_{|x| \leq s_i} u_i^{p_i}(x) dx = M_i^{-\frac{(p_i-1)n}{2}} M_i^{p_i} \int_{|y| \leq R_i} v_i^{p_i} dy \leq C M_i^{-1} \quad (3.46)$$

Por outro lado, pela afirmação 3.7, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{s_i < |x| < \sigma} u_i^{p_i}(x) dx &\leq C M_i^{-\lambda_i p_i} \int_{s_i < |x| < \sigma} |x|^{(2-n+\delta)p_i} dx \\ &\leq C M_i^{-\lambda_i p_i} s_i^{(2-n+\delta)p_i+n} \\ &\leq o(1) M_i^{-1} \end{aligned} \quad (3.47)$$

ficando, pelas desigualdades acima, provada a afirmação. \square

A seguir enunciaremos uma proposição e seu respectivo corolário cujas demonstrações se encontram no apêndice do artigo [16].

Proposição 3.4. *Suponhamos que $u \in C^2(B_s \setminus \{0\})$, satisfaz*

$$-\Delta_g u + k(x)u = 0, \quad u > 0 \text{ em } B_s \setminus \{0\}.$$

Então existe $b \geq 0$, satisfazendo

$$u = b \cdot G + E, \quad \text{em } B_{\delta_0} \setminus \{0\},$$

onde δ_0 é suficientemente pequeno, G é a função de Green para a equação e $E \in C^2(B_s)$ satisfaz

$$-\Delta_g E(x) + k(x)E(x) = 0, \quad \text{em } B_s.$$

Corolário 3.1. *Considere $u \in C^2(B_s(0) \setminus \{0\})$, solução da equação*

$$-\Delta_g u + k(x)u = 0,$$

onde $k \in C^1(B_s)$ e u é singular próxima da origem. Então,

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_r} \frac{\partial u}{\partial \nu} = b \cdot \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B_r} \frac{\partial G}{\partial \nu} = -(n-2)|S^{n-1}|b.$$

Lema 3.10. *Existe $\sigma_1 > 0$ tal que para todo $0 < \sigma < \sigma_1$, existe uma constante $C = C(\sigma)$ com, para todo i ,*

$$u_i(x_i)u_i(x) \leq C(\sigma) \quad (3.48)$$

Demonstração. Considere $0 < \sigma < \sigma_1$ e defina a aplicação

$$w_i(x) = u_i(x_\sigma)^{-1}u_i(x) \quad (3.49)$$

onde x_σ é escolhido de modo que $d(x_\sigma, x_i) = \sigma$. Observe que,

$$L_{g_i}w_i + Ku_i(x_\sigma)^{p_i-1}f_i^{-\delta_i}w_i^{p_i} = 0 \quad (3.50)$$

Pela desigualdade de Harnack, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma constante $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$C_\varepsilon^{-1} \leq w_i(x) \leq C_\varepsilon$$

se $d(x, \bar{x}) > \varepsilon$. Pelo lema 3.7, sabemos que $u_i(x_\sigma)^{p_i-1} \rightarrow 0$ quando $i \rightarrow \infty$. Usando teoria elíptica usual mostramos que, após possivelmente passarmos à uma subsequência

$$w_i \rightarrow w \text{ em } C_{loc}^2(B_\sigma(\bar{x}))$$

onde w satisfaz

$$L_g w = 0, \quad w > 0.$$

Da observação 3.2, desde que o ponto de blow-up é isolado simples, a função $\hat{u}_i(r)$ é decrescente no intervalo $(R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}, R)$. Passando o limite, concluímos que $\hat{w}(r)$ é decrescente no intervalo $(0, R)$ e conseqüentemente w é singular na origem. Segue então do corolário anterior que

$$-\int_{B_\eta(x_i)} \Delta_{g_i} w_i = -\int_{\partial B_\eta(x_i)} \frac{\partial w_i}{\partial \nu} = -\int_{\partial B_\eta(\bar{x})} \frac{\partial w}{\partial \nu} + o(1) > c > 0 \quad (3.51)$$

para cada i , onde $\eta > 0$ é suficientemente pequeno. Por outro lado, utilizando a afirmação 3.9 teremos

$$\begin{aligned} -\int_{B_\eta(x_i)} \Delta_{g_i} w_i &= \int_{B_\eta(x_i)} [Ku_i(x_\sigma)^{-1}f_i^{-\delta_i}u_i^{p_i} - c(n)R_{g_i}w_i] \\ &\leq K \int_{B_\eta(x_i)} u_i(x_\sigma)^{-1}f_i^{-\delta_i}u_i^{p_i} \\ &\leq cu_i(x_\sigma)^{-1}M_i^{-1} \end{aligned} \quad (3.52)$$

Assim a demonstração da afirmação 3.10, segue das duas desigualdades acima. \square

Tendo provado os resultados a seguir, a demonstração da seguinte proposição segue rapidamente.

Demonstração da Proposição: Suponhamos que a desigualdade (3.33) não é verdadeira.

Então, para todo $i \in \mathbb{N}$ existe \tilde{x}_i , com $d(\tilde{x}_i, x_i) \leq \frac{S}{2}$, S suficientemente pequeno, tal que

$$\begin{aligned} u_i(\tilde{x}_i)u_i(x_i) &\geq id(\tilde{x}_i, x_i)^{2-n} \Rightarrow \\ u_i(\tilde{x}_i)u_i(x_i)d(\tilde{x}_i, x_i)^{n-2} &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

quando $i \rightarrow \infty$. Note ainda que, pela proposição 3.2, como

$$\frac{R_i}{\log M_i} \rightarrow 0 \text{ quando } i \rightarrow \infty$$

podemos tomar i suficientemente grande de modo que, $R_i u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq \tilde{r}_i \leq \frac{S}{2}$, onde $\tilde{r}_i = d(\tilde{x}_i, x_i)$.

Defina,

$$v_i(y) = \tilde{r}_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\tilde{r}_i y), |y| < 2. \quad (3.53)$$

Como a aplicação acima definida é uma renormalização de u_i , segue que a origem é um ponto de blow-up isolado simples para \tilde{v}_i . Usando o lema 3.10 e a desigualdade de Harnack, seque que

$$\begin{aligned} \max_{|y|=\sigma} \tilde{v}_i(0)\tilde{v}_i(y) &\leq C \min_{|y|=\sigma} \tilde{v}_i(0)\tilde{v}_i(y) \\ &\leq C \min_{|y|=\sigma} \tilde{r}_i^{\frac{4}{p_i-1}} u_i(x_i)u_i(\tilde{r}_i y) \\ &\leq C \end{aligned}$$

quando $d(x_i, \tilde{x}_i) = \sigma$, o que é uma contradiz o limite (3.53) e finaliza a demonstração da desigualdade (3.33).

Para demonstrarmos a desigualdade (3.32), lembre que a função de Green sempre existe quando S é suficientemente pequeno. Considere a região $\Omega_i := \{x : R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} \leq d_{g_i}(x, x_i) \leq S\}$. Note que,

- Como $G_i \equiv 0$ em $S = d(x, x_i)$, e portanto

$$M_i u_i(x) \leq 0 = C^{-1} G_i(x, x_i), \quad \text{para qualquer } C > 0$$

- Usando a desigualdade anterior e o fato que $G_i(x, x_i) = O(r^{2-n})$ quando $d(x, x_i) = R_i M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}$, existe $C > 0$ tal que

$$z := C^{-1} G_i - M_i u_i \leq 0$$

é negativa.

Desde que

$$L_{g_i}(u_i(x)u_i) \leq 0 = L_{g_i} G_i \quad (3.54)$$

temos que $L_{g_i} z \geq 0$ em Ω_i e $z \leq 0$ em $\partial\Omega_i$, e deste modo, aplicando o princípio do máximo segue que $z \leq 0$ em Ω_i , obtendo assim a desigualdade desejada. \square

Uma consequência imediata da proposição acima é que $M_i u_i$ converge para função de Green em um ponto de blow-up isolado simples.

Corolário 3.2. *Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado simples para $\{u_i\}$. Então, passando para uma subsequência*

$$M_i u_i(x) \rightarrow h(x) = G(x, \bar{x}) \text{ em } C_{loc}^2(B_R(\bar{x}) - \{\bar{x}\})$$

onde $G(x, \bar{x})$ é a função de Green para L_g centrada em \bar{x} .

Demonstração. Observe que a função $M_i u_i(x)$ satisfaz

$$L_{g_i}(M_i u_i(x)) + K M_i^{1-p_i} f_i^{-\delta_i}(x) (M_i u_i(x))^{p_i} = 0.$$

Utilizando a proposição acima, $M_i u_i(x)$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos contidos em $B_{\rho_1}(\bar{x}) \setminus \{x\}$ e, utilizando estimativas elípticas usuais mostramos que, possivelmente passando a uma subsequência, $M_i u_i(x) \rightarrow h$ em $C_{loc}^2(B_S(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\})$. Desde que $M_i \rightarrow \infty$ e $L_g h = 0$. Pela desigualdade (3.32), tomando o limite, podemos ver que h é singular, o que finaliza a demonstração. \square

CAPÍTULO 4

ANÁLISE REFINADA DE PONTOS DE BLOW-UP

Estabeleceremos neste capítulo algumas notações importantes e construiremos funções que utilizaremos na obtenção de estimativas ao redor de um ponto de blow-up. Tendo construído estas aplicações, estabeleceremos estimativas pontuais para a sequência renormalizada de soluções para pontos de blow-up isolados simples. Tais estimativas, inicialmente demonstradas no artigo [17], foram obtidas apenas para baixas dimensões. No entanto, em dimensões mais altas será necessária uma análise mais refinada, isto é, precisaremos ir além da primeira aproximação à função rotacionalmente simétrica.

Vale destacar que a partir deste capítulo veremos a importância da escolha das coordenadas normais conformes construídas no segundo capítulo. Em tais coordenadas será mais conveniente trabalhar com a expansão de Taylor da métrica, ao invés de trabalhar com as derivadas do Tensor de Weyl.

Ao longo desta dissertação trabalharemos também com $dv_g \equiv dx$ em coordenadas normais conformes, ignorando as contribuições do elemento volume quando o mesmo for desprezível.

4.1 Análise Linear e Curvatura Escalar

Introduziremos a seguir alguma notação básica. Denotemos por $d = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor$. Vimos no segundo capítulo, durante a construção das coordenadas normais conformes, que ao trabalharmos em tais coordenadas, é possível escrever

$$g_{ij} = \exp(h_{ij}),$$

onde $h_{ij}(x)x^j = 0$, $trh_{ij} = O(r^N)$, $r = |x|$ e N é suficientemente grande. Neste caso, $\det(g_{ij}) = 1 + O(|x|^N)$. Fazendo a expansão de Taylor da métrica h_{ij} , teremos $h_{ij} = H_{ij} + O(|x|^{n-3})$, onde

$$H_{ij}(x) = \sum_{2 \leq |\alpha| \leq n-4} h_{ij\alpha} x^\alpha.$$

Com

$$\begin{cases} H_{ij} = H_{ji} \\ H_{ij}x^j = 0 \\ trH_{ij} = 0. \end{cases}$$

. Denotaremos ainda por

$$H_{ij}^{(k)} = \sum_{|\alpha|=k} h_{ij\alpha} x^\alpha$$

a soma de todos os polinômios com grau k e

$$|H^{(k)}|^2 = \sum_{|\alpha|=k} |h_{ij\alpha}|^2.$$

O principal objetivo desta seção é introduzir as funções $\tilde{z}_{\varepsilon_i}$, de modo que $U + \tilde{z}_{\varepsilon_i}$ nos dê uma boa aproximação, ótima em certo sentido, das soluções renormalizadas ao redor de um ponto de blow-up. Neste caso, tomaremos $\varepsilon_i = M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}$ e as estimativas pontuais que demonstraremos na próxima seção seguirão como consequência deste resultado. Para construir tais funções precisamos obter uma solução para a seguinte equação,

$$\Delta\psi + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}}\psi = q_l U,$$

onde q_l é um polinômio homogêneo de grau l , tal que

$$\int_{S_1^{n+1}} q_l d\sigma_1 = 0 \quad \int_{S_1^{n-1}} q_l x^i d\sigma_1 = 0,$$

para $i = 1, \dots, n$. De modo mais geral, polinômios que possuem as características acima recebem uma nomenclatura específica.

Definição 4.1. *Diremos que dois polinômios p e q são ortogonais se*

$$\int_{S_1^{n-1}} pq d\sigma_1 = 0.$$

Considerando o conjunto

$$F(q_l) = \{ \text{combinações lineares de } |y|^{2j} \Delta^k q_l, 0 \leq j \leq k+2, y \in \mathbb{R}^n \}.$$

observe que, se $p \in F(q_l)$ então $\deg(p) \leq l + 4$.

Para demonstrarmos a próxima proposição, precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.1. *Suponhamos que ψ é uma solução da equação*

$$\Delta\psi + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}}\psi = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n. \quad (4.1)$$

Se $\lim_{|y| \rightarrow \infty} \psi(y) = 0$, então existem constantes c_0, \dots, c_n tais que

$$\psi(y) = c_0 \left(\frac{n-2}{2}U + y \cdot \nabla U \right) + \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial U}{\partial y_j}.$$

Ver demonstração em [9].

Proposição 4.1. *Seja q_l um polinômio homogêneo de grau l , ortogonal a $\langle 1, x^1, \dots, x^n \rangle$. Suponhamos que $l < n - 4$. Então existe um único $\Gamma \in F(q_l)$ tal que*

$$\Delta\psi + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}}\psi = q_l U \text{ em } \mathbb{R}^n, \quad (4.2)$$

onde $\psi = \Gamma(1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}}$.

Demonstração. Observe que, se $\psi = \Gamma(1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}}$, então a equação (4.2) será equivalente a

$$T(\Gamma) = p_l = (1 + |y|^2)^2 q_l,$$

onde $T(\Gamma) = (1 + |y|^2)\Delta\Gamma - 2ny \cdot \nabla\Gamma + 2ny\Gamma$. De fato, usando a regra do produto para o laplaciano, temos

$$\begin{aligned} \Delta\psi &= \Delta(\Gamma(1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}}) \\ &= \Delta\Gamma(1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}} + n(n+2)(1 + |y|^2)^{-\frac{n-4}{2}}|y|^2 \\ &\quad - n \cdot n(1 + |y|^2)^{-\frac{n-2}{2}}\Gamma - 2ny(1 + |y|^2)^{-\frac{n-2}{2}} \cdot \nabla\Gamma. \end{aligned}$$

Assim, (4.2) é equivalente a

$$\Delta\Gamma(1 + |y|^2) + 2n\Gamma - 2ny \cdot \nabla\Gamma = (1 + |y|^2)^2 q_l.$$

Note portanto que $T : F(q_l) \rightarrow F(q_l)$ é um operador linear entre espaços de dimensão finita e, conseqüentemente, para demonstramos o resultado é suficiente provar a injetividade de T . Seja $\Gamma_0 \in \ker T$, Suponhamos que $T(\Gamma_0) = 0$, quando $\Gamma_0 \in F(q_l)$. Se $\psi_0 = \Gamma_0(1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}}$, então

$$\Delta\psi_0 + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}}\psi_0 = 0.$$

e, desde que $\deg(\Gamma_0) \leq l + 4 < n$, e ainda $\lim_{y \rightarrow \infty} \psi_0(y) = 0$, pelo lema anterior segue que

$$\psi_0 = c_0 \left(\frac{n-2}{2} U + y \cdot \nabla U \right) + \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial U}{\partial y_j}.$$

Deste modo, como $\Gamma(0) = 0$, segue que $c_0 = 0$. Mais ainda, como $\nabla \Gamma_0(0) = 0$ e $\Delta^{[\frac{l}{2}]} q_l = 0$, mostramos que $c_j = 0$, para todo $j = 1, \dots, n$, o que implica que $\Gamma_0 \equiv 0$, ficando provada a proposição. □

Dado $\varepsilon > 0$, definimos a função \tilde{z}_ε como sendo a solução do seguinte problema

$$\Delta \tilde{z}_\varepsilon + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}} \tilde{z}_\varepsilon = c(n) \sum_{k=4}^{n-4} \partial_i \partial_j \tilde{H}_{ij}^{(k)} U, \quad (4.3)$$

dada pela Proposição 4.1, onde

$$\tilde{H}_{ij}(y) = H_{ij}(\varepsilon y).$$

Uma vez que estamos trabalhando com coordenadas normais conformes, utilizando integração por partes mostramos que

$$\int_{|x|=1} \partial_i \partial_j H_{ij} = 0,$$

e

$$\int_{|x|=1} x_l \partial_i \partial_j H_{ij} = 0,$$

onde $1 \leq l \leq n$. Segue ainda da Proposição 4.1 que $\tilde{z}_\varepsilon(0) = 0$, $\nabla \tilde{z}_\varepsilon(0) = 0$, e

$$\int_{S_r} \tilde{z}_\varepsilon d\sigma_r = 0, \quad \int_{x^l} \tilde{z}_\varepsilon d\sigma_r = 0,$$

se $1 \leq l \leq n$. Existe também uma constante $C > 0$, independente de ε e H_{ij} , tal que

$$|\partial^\beta \tilde{z}_\varepsilon|(y) \leq C \sum_{|\alpha|=4}^{n-4} \sum_{i,j} \varepsilon^{|\alpha|} |h_{ij\alpha}| (1 + |y|)^{|\alpha|+2-n-|\beta|}, \quad (4.4)$$

para $|\beta| = 0, 1, 2$. Note que, se $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} (\varepsilon^2 + |x|^2)^{\frac{2-n}{2}}$ e $\tilde{z}_\varepsilon(y) = \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} z_\varepsilon(\varepsilon y)$, então a equação (4.3) é equivalente a

$$\Delta z_\varepsilon + n(n+2)u_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}} z_\varepsilon = c(n) \sum_{k=4}^{n-4} \partial_i \partial_j H_{ij}^{(k)} u_\varepsilon$$

e a estimativa (4.4) implica que

$$|\partial^\beta z_\varepsilon|(y) \leq C \sum_{|\alpha|=4}^{n-4} \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|(\varepsilon + |x|)^{|\alpha|+2-n-|\beta|} \quad (4.5)$$

para $\beta = 0, 1, 2$.

Durante o resto deste trabalho será de grande importância obtermos uma boa aproximação para a curvatura escalar em termos de h_{ij} em coordenadas normais conformes. O que será demonstrado na proposição abaixo

Proposição 4.2. *Existe uma constante $C > 0$ tal que*

$$\begin{aligned} |R_g - \partial_i \partial_j h_{ij} + \partial_j (H_{ij} \partial_l H_{il}) - \frac{1}{2} \partial_j H_{ij} \partial_l H_{il} + \frac{1}{4} \partial_l H_{ij} \partial_l H_{ij}| \\ \leq C \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 |x|^{2|\alpha|} + C|x^{n-3}|, \end{aligned} \quad (4.6)$$

e

$$|R_g - \partial_i \partial_j h_{ij}| \leq C \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 |x|^{2|\alpha|} + C|x^{n-3}|, \quad (4.7)$$

se $|x| \leq \sigma \leq 1$, onde C depende apenas de n e $|h|_{C^N(B_\sigma(0))}$.

Demonstração. Segue da expressão local da métrica R_g em coordenadas locais, para mais detalhes ver [6]. \square

4.2 Análise Refinada de Blow-up

No que segue $\varepsilon_i = M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}$, $v_i(y) = M_i^{-1} u_i(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}} y)$, e H_{ij} é obtido da expansão de Taylor da métrica g_{ij} em coordenadas normais conformes ao redor do ponto x_i , que obtemos no capítulo anterior. Utilizaremos também a função $\tilde{z}_i = z_{\varepsilon_i}$ construída acima. Provaremos primeiramente a seguinte estimativa pontual:

Proposição 4.3. *Suponhamos que $n \geq 6$. Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado simples para a sequência $\{u_i\}$ de soluções positivas de (3.24). Então, passando para coordenadas normais conformes, existem constantes $\sigma, C > 0$ tais que*

$$|v_i - U - \tilde{z}_{\varepsilon_i}|(y) \leq C \max_{2 \leq k \leq d-1} \{\varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i), \varepsilon_i^{n-3}, \delta_i\}, \quad (4.8)$$

para todo $|y| \leq \sigma \varepsilon_i^{-1}$.

Demonstração. Seja $l_i = \sigma M_i^{\frac{p_i-1}{2}} = \sigma \varepsilon_i^{-1}$, e

$$\Lambda_i = \max_{|y| \leq l_i} |v_i - U - \tilde{z}_i| = |v_i - U - \tilde{z}_i|(y_i),$$

para certo $|y_i| \leq l_i$. Observe que, se existe uma constante $c > 0$ tal que $|y_i| \geq cl_i$ para todo i , então a desigualdade forte $\Lambda_i \leq c\varepsilon_i^{n-2}$ é válida. Isto segue da estimativa $v_i(y) \leq cU(y) \leq c|y|^{2-n}$ e

$$|\tilde{z}_i(y)| \leq c \sum_{k=4}^{n-4} \varepsilon_i^k |y|^{k+2-n} \leq c|y|^{2-n},$$

para $|y| \leq \sigma\varepsilon_i^{-1}$, desde que

$$\Lambda_i = |(v_i - U - \tilde{z}_i)(y_i)| \leq C|y_i|^{2-n} \leq C\varepsilon_i^{n-2}.$$

Ou seja, podemos assumir que $|y_i| \leq \frac{l_i}{2}$.

Defina,

$$w_i(y) = \Lambda_i^{-1}(v_i - U - \tilde{z}_i)(y).$$

Então w_i satisfaz

$$L_{\tilde{g}_i} w_i + b_i w_i = Q_i,$$

onde

$$b_i(y) = K \tilde{f}_i^{-\delta_i} \frac{v_i^{p_i} - (U + \tilde{z}_i)^{p_i}}{v_i - U - \tilde{z}_i}(y),$$

e

$$\begin{aligned} Q_i(y) &= \Lambda_i^{-1} \left\{ c(n)\varepsilon_i^2 (R_{g_i} - \sum_{l=2}^{n-6} (\partial_j \partial_k H_{jk})^{(l)})(\varepsilon_i y) U(y) + (\Delta - L_{\tilde{g}_i})(\tilde{z}_i) \right. \\ &\quad + O(|\tilde{z}_i|^2 U^{\frac{6-n}{n-2}}) + K((U + \tilde{z}_i)^{\frac{n+2}{n-2}} - \tilde{f}_i^{-\delta_i} (U + \tilde{z}_i^{p_i})) \\ &\quad \left. + M_i^{-(1+N)\frac{p_i-1}{2}} O(|y|^N) |y| (1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.9)$$

com $\tilde{f}_i = f_i(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}})$, $(\tilde{g}_i)_{kl} = (g_i)_{kl}(M_i^{-\frac{p_i-1}{2}})$ e $O(|y|^N)$ vem da expansão do elemento volume em coordenadas normais conformes, para N suficientemente grande. Desde que o ponto de blow-up é isolado simples, da desigualdade $v_i \leq cU$, podemos verificar que

$$b_i(y) \leq c(1 + |y|)^{-4}, \quad (4.10)$$

para $|y| \leq l_i$. Utilizando a fórmula da representação de Green temos que

$$w_i(y) = \int_{B_i} G_{i,L}(y, \eta) (b_i(\eta) w_i(\eta) - Q_i(y)) d\eta - \int_{\partial B_i} \frac{\partial G_{i,L}}{\partial \nu}(y, \eta) w_i(\eta) ds, \quad (4.11)$$

onde B_i denota $B_{l_i}(0)$ e $G_{i,L}$ é a função de Green de $L_{\tilde{g}_i}$ em B_i com respeito as condições de fronteira de Dirichlet.

Finalizaremos a demonstração da proposição utilizando contradição. Supondo que a

proposição não seja verdadeira então, necessariamente teremos

$$\Lambda_i^{-1} \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) \rightarrow 0, \quad (4.12)$$

para todo $2 \leq k \leq d-1$, quando $i \rightarrow \infty$, e

$$\Lambda_i^{-1} \varepsilon_i^{n-3} \rightarrow 0, \quad \Lambda_i^{-1} \delta_i \rightarrow 0. \quad (4.13)$$

Estimemos o termo Q_i . Primeiramente,

$$|R - \sum_{l=2}^{n-6} (\partial_j \partial_k H_{jk})^{(l)}|(\varepsilon y) \leq C \sum_{k=2}^{d-1} \varepsilon_i^{2k-2} |H^{(k)}|^2(x_i) |y|^{2k-2} + C \varepsilon_i^{n-5} |y|^{n-5}. \quad (4.14)$$

Donde segue que

$$\begin{aligned} \varepsilon_i^2 |R - \sum_{l=2}^{n-6} (\partial_j \partial_k H_{jk})^{(l)}|(\varepsilon y) U(y) &\leq C \sum_{k=2}^{d-1} \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) (1 + |y|)^{2k-n} + C \varepsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-3} \\ &\leq C \max_{2 \leq k \leq d-1} \{ \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) \} (1 + |y|)^{2d-2-n} \\ &\quad + C \varepsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-3}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Assim,

$$\begin{aligned} |(L_{\tilde{g}_i} - \Delta_y)(\tilde{z}_i)| &\leq C \sum_{k=2}^{n-4} \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) (1 + |y|)^{2k-n} \\ &\quad + C \sum_{k=4}^{n-4} \varepsilon_i^{n+k-3} |H^{(k)}|(x_i) (1 + |y|)^{k-3} \\ &\leq C \max_{2 \leq k \leq d-1} \{ \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) \} (1 + |y|)^{2d-2-n} \\ &\quad + C \varepsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-3}. \end{aligned}$$

Finalmente, desde que

$$|\tilde{z}_\varepsilon|^2 \leq C \sum_{k=4}^{n-4} \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) (1 + |y|)^{2k+4-2n},$$

obteremos

$$|\tilde{z}_i|^2 U^{\frac{6-n}{n-2}} \leq C \max_{2 \leq k \leq d-1} \{ \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) \} (1 + |y|)^{2d-2-n} + C \varepsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-5},$$

e deste modo,

$$\begin{aligned}
 |Q_i(y)| \leq & C\Lambda_i^{-1} \left\{ \max_{2 \leq k \leq d-1} \{ \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) \} (1 + |y|)^{2d-2-n} \right. \\
 & + \varepsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-3} \\
 & + M_i^{-(1+N)\frac{p_i-1}{2}} O(|y|^N) |y| (1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}} \\
 & \left. + \delta_i (|\log(U + \tilde{z}_i)| + |\log \tilde{f}_i|) (1 + |y|^{-n-2}) \right\}. \tag{4.16}
 \end{aligned}$$

Utilizando as estimativas (4.10) e (4.16), e pela fórmula de representação de Green novamente, concluímos que w_i é limitada em C_{loc}^2 , e

$$|w_i(y)| \leq C \left((1 + |y|)^{-2} + \Lambda_i^{-1} \left\{ \max_{2 \leq k \leq d-1} \{ \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i), \varepsilon_i^{n-3} \} \right\} \right), \tag{4.17}$$

para $|y| \leq \frac{\sigma}{2} \varepsilon_i^{-1}$. Estamos usando que $|w_i(y)| \leq C\Lambda_i^{-1} \varepsilon_i^{n-2}$ onde $|y| = \frac{\sigma}{2} \varepsilon_i^{-1}$, e também que $|G_{i,L}(y, \eta)| \leq C|y - \eta|^{2-n}$ para $|y| \leq \frac{l_i}{2}$. Então, por estimativas elípticas padrões, é possível obter uma subsequência, também denotada por w_i , convergindo para w , que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}}w = 0, & y \in \mathbb{R}^n \\ |w(y)| \leq C(1 + |y|^{-2}), \end{cases}$$

Assim, o lema 4.1 implica que

$$w(y) = c_0 \left(\frac{n-2}{2} U + y \cdot \nabla U \right) + \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial U}{\partial y_j}.$$

As condições $w(0) = \frac{\partial w}{\partial y_j}(0) = 0$ para todo j , em outras palavras, $w(y) \equiv 0$. Ou seja, concluímos que $|y_i| \rightarrow \infty$ quando $i \rightarrow \infty$, contradizendo a estimativa (4.10) e os limites, desde que $w_i(y_i) = 1$, ficando demonstrado o resultado. \square

Na próxima proposição, estimaremos o termo δ_i . Este resultado e a proposição anterior nos darão uma estimativa para $|v_i - U - \tilde{z}_i|$ independente de δ_i .

Proposição 4.4. *Nas hipóteses da proposição anterior*

$$\delta_i \leq C \max_{2 \leq k \leq d-1} \{ \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i), \varepsilon_i^{n-3} \}. \tag{4.18}$$

Demonstração. A demonstração será dada novamente por contradição. Se o resultado não for verdadeiro, teremos necessariamente

$$\delta_i^{-1} \varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) \rightarrow 0,$$

para todo $2 \leq k \leq d-1$, e

$$\delta_i^{-1} \varepsilon_i^{n-3} \rightarrow 0.$$

Conseqüentemente, pela proposição anterior

$$|v_i - U - \tilde{z}_i|(y) \leq C\delta_i.$$

Considere a aplicação uniformemente limitada

$$w_i(y) = \delta_i^{-1}(v_i - U - \tilde{z}_i)(y).$$

A função w_i satisfaz a seguinte equação

$$L_{\tilde{g}_i} w_i + b_i w_i = Q_i,$$

onde

$$b_i(y) = K \tilde{f}_i^{-\delta_i} \frac{v_i^{p_i} - (U + \tilde{z}_i)^{p_i}}{v_i - U - \tilde{z}_i}(y),$$

e

$$\begin{aligned} Q_i(y) &= \Lambda_i^{-1} \{c(n)\varepsilon_i^2(R_{g_i} - \sum_{l=2}^{n-6} (\partial_j \partial_k H_{jk})^{(l)})(\varepsilon_i y)U(y) + (\Delta - L_{\tilde{g}_i})(\tilde{z}_i) \\ &+ O(|\tilde{z}_i|^2 U^{\frac{6-n}{n-2}}) + K((U + \tilde{z}_i)^{\frac{n+2}{n-2}} - \tilde{f}_i^{-\delta_i}(U + \tilde{z}_i)^{p_i}) \\ &+ M_i^{-(1+N)\frac{p_i-1}{2}} O(|y|^N)|y|(1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}}\}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Utilizando novamente a proposição anterior temos ainda que

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}_i(y)| &\leq C\delta_i^{-1} \{ \max_{2 \leq k \leq d-1} \{\varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i)\} (1 + |y|)^{2d-2-n} \\ &+ \varepsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-3} \\ &+ M_i^{-(1+N)\frac{p_i-1}{2}} O(|y|^N)|y|(1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}} \\ &+ \delta_i (|\log(U + \tilde{z}_i)| + |\log \tilde{f}_i|) (1 + |y|^{-n-2}) \}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Utilizando teoria elíptica para equações lineares podemos supor que $w_i \rightarrow w$ em subconjuntos compactos assim, se $\psi(y) = \frac{n-2}{2}U(y) + y \cdot \nabla U(y)$, então

$$\begin{aligned} &\int_{|y| \leq \frac{i}{2}} \psi(y) \delta_i^{-1} (\max_{2 \leq k \leq d-1} \{\varepsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i)\} (1 + |y|)^{2d-2-n} + \varepsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-3} \\ &M_i^{-(1+N)\frac{p_i-1}{2}} O(|y|^N)|y|(1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}}) \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

onde $d = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$. Note que, quando $i \rightarrow \infty$ temos

$$\delta_i^{-1} K((U + \tilde{z}_i)^{\frac{n+2}{n-2}} - \tilde{f}_i^{-\delta_i}(U + \tilde{z}_i)^{p_i}) \rightarrow K(\log U(y) + \log f(\bar{x}))U^{\frac{n+2}{n-2}},$$

pontualmente. Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) U^{\frac{n+2}{n-2}}(y) dy = 0,$$

podemos concluir que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{|y| \leq \frac{l_i}{2}} \psi(y) \tilde{Q}_i(y) dy = n(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) (\log U(y)) U^{\frac{n+2}{n-2}}.$$

Por outro lado, utilizando integração por partes obtemos

$$\begin{aligned} \int_{|y| \leq \frac{l_i}{2}} \psi(y) \tilde{Q}_i(y) dy &= \int_{|y| \leq \frac{l_i}{2}} \psi(y) (L_{\tilde{g}_i} w_i + b_i w_i) dy = \\ &= \int_{|y| \leq \frac{l_i}{2}} (L_{\tilde{g}_i} \psi(y) + b_i \psi(y)) w_i dy + \int_{|y| = \frac{l_i}{2}} \left(\psi \frac{\partial w_i}{\partial r} - w_i \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Observe ainda que a integral sobre a fronteira converge a zero quando $i \rightarrow \infty$ pois

$$\begin{cases} |\psi| = O(r^{2-n}), & |\nabla \psi| = O(r^{1-n}) \\ |w_i(\frac{l_i}{2})| \leq c\delta_i^{-1}\epsilon_i^{n-2}, & |\nabla \psi_i(\frac{l_i}{2})| \leq c\delta_i^{-1}\epsilon_i^{n-2}l_i^{-1} \end{cases}$$

Assim, tomando o limite quando $i \rightarrow \infty$, devemos ter

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{|y| \leq \frac{l_i}{2}} \psi(y) \tilde{Q}_i(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta \psi(y) + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}}\psi) w dy = 0,$$

pois $\Delta \psi(y) + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}}\psi = 0$ e o limite independe do σ . Tal fato é uma contradição uma vez que a mudança de variáveis mostra que

$$n(n-2) \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) (\log U(y)) U^{\frac{n+2}{n-2}}(y) dy > 0,$$

ficando assim demonstrada a proposição. \square

As proposições acima implicam que

$$|v_i - U - \tilde{z}_i|(y) \leq C \max_{2 \leq k \leq d-1} \{\epsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2, \epsilon_i^{n-3}\} \quad (4.22)$$

para $|y| \leq \sigma\epsilon_i^{-1}$. Nosso objetivo a partir de agora é aplicar a fórmula de representação de Green para obter melhores estimativas.

Proposição 4.5. *Suponhamos que $n \geq 6$. Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado simples para a sequência $\{u_i\}$ de soluções positivas de (3.24). Então, após passarmos para*

coordenadas normais conformes, existem constantes $\sigma, C > 0$, tais que

$$\begin{aligned} |\nabla^m(v_i - U - \tilde{z}_i)|(y) &\leq C \sum_{k=2}^{d-1} \epsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) (1 + |y|)^{2k+2-n-m} \\ &\quad + C \epsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-1-m}, \end{aligned} \quad (4.23)$$

para todo $|y| \leq \sigma \epsilon_i^{-1}$, $0 \leq m \leq 2$.

Demonstração. Defina

$$T_i = \max_{2 \leq k \leq d-1} \{\epsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2, \epsilon_i^{n-3},$$

e

$$w_i(y) = (v_i - U - \tilde{z}_i)(y),$$

para $|y| \leq \delta \epsilon_i^{-1}$. Assim, a proposição anterior implica que w_i é uniformemente limitada, e que w_i satisfaz a equação

$$L_{\tilde{g}_i} w_i + b_i w_i = Q_i,$$

onde

$$|b_i|(y) \leq c(1 + |y|^{-4}),$$

e podemos observar que

$$\begin{aligned} |\tilde{Q}_i(y)| &\leq C \left\{ \sum_{k=2}^{d-1} \epsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) (1 + |y|)^{2k-n} \right. \\ &\quad + \epsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-3} \\ &\quad + M_i^{-(1+N)\frac{p_i-1}{2}} O(|y|^N) |y| (1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}} \\ &\quad \left. + \delta_i (|\log(U + \tilde{z}_i)| + |\log \tilde{f}_i|) (1 + |y|^{-n-2}) \right\}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Desde que $|G_{i,L}(y\eta)| \leq C|y - \eta|^{2-n}$, para $|y| \leq \frac{l_i}{2}$, a fórmula de representação de Green

$$w_i(y) = \int_{B_i} G_{i,L}(y, \eta) (b_i(\eta) w_i(\eta) - \tilde{Q}_i(\eta)) d\eta - \int_{\partial B_i} \frac{\partial G_{i,L}}{\partial \nu}(y, \eta) w_i(\eta) ds, \quad (4.25)$$

implica que

$$|w_i(y)| \leq c \left\{ \sum_{k=2}^{d-1} \epsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) (1 + |y|^{2k+2-n}) + T_i (1 + |y|^{-2}) + \epsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-1} \right\}. \quad (4.26)$$

Aplicando (4.25) na fórmula de representação (4.26) repetidamente obteremos

$$|w_i(y)| \leq C \sum_{k=2}^{d-1} \epsilon_i^{2k} |H^{(k)}|^2(x_i) (1 + |y|^{2k+2-n}) + C \epsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-1}$$

As estimativas das derivadas seguem por teoria elíptica clássica, finalizando assim a demonstração. \square

Observação 4.1. *A estimativa (4.23) é equivalente, em coordenadas, a*

$$|u_i - U_\varepsilon - z_\varepsilon|(x) \leq C\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \sum_{k=2}^{d-1} |H^{(k)}|^2(x_i)(\varepsilon + |x|)^{2k+2-n} + C\varepsilon^{\frac{n-2}{2}} (\varepsilon + |x|)^{-1} \quad (4.27)$$

para todo $|x| \leq \sigma$.

CAPÍTULO 5

TEOREMA DO ANULAMENTO DE WEYL

Sabemos que o Tensor de Weyl é a parte do tensor curvatura que mede o quanto a métrica é conformemente plana. Ou seja, ao nos perguntarmos o quanto uma dada variedade pode ser conformemente deformada em uma variedade dotada com uma métrica plana, a resposta usualmente é negativa e a obstrução para tal construção é proveniente do Tensor de Weyl.

Um resultado de bastante relevância a ser utilizado durante a demonstração do resultado de compacidade é o célebre Teorema de Massa Positiva da relatividade geral. Para a utilização de tal resultado, precisaremos que uma dada variedade, a ser construída posteriormente, possua massa definida e, neste ponto, a boa definição da massa estará intimamente relacionada com o Tensor de Weyl, isto é, para que a massa esteja bem definida, o tensor de Weyl obrigatoriamente terá que se anular em um pontos de Blow-up para ordem $l > \frac{n-6}{2}$ suficientemente alta.

Ou seja, a principal dificuldade em estabelecer a compacidade do conjunto de soluções do problema de Yamabe é provar a Conjectura do Anulamento de Weyl para dimensões altas. Neste capítulo provaremos o Teorema do Anulamento de Weyl para o caso particular em que todos os pontos de blow-up são isolados simples e $n \leq 24$. Tal fato extraordinário segue da positividade de uma certa forma quadrática, que é positiva apenas no caso em que $n \leq 24$.

Vale ressaltar que as estimativas construídas no capítulo anterior terão grande utilidade na demonstração deste teorema.

No que segue, $\theta_k = 1$ se $k = \frac{n-2}{2}$, e $\theta_k = 0$ caso contrário.

Teorema 5.1. *Suponhamos que $6 \leq n \leq 24$. Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado simples para a sequência $\{u_i\}$ de soluções positivas de (3.24). Então*

$$|\nabla_g^l W_g|^2(x_i) \leq C \varepsilon_i^{n-6-2l} |\log \varepsilon_i|^{-\theta_{l+2}} \quad (5.1)$$

es3 para todo $0 \leq l \leq \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor$. Em particular,

$$|\nabla_g^l W_g|^2(\bar{x}) = 0 \quad (5.2)$$

para $0 \leq l \leq \lfloor \frac{n-6}{2} \rfloor$.

Demonstração. Definindo

$$P(r, u_i) = \int_{|x|=r} \left(\frac{n-2}{2} u_i \frac{\partial u_i}{\partial r} - \frac{r}{2} |\nabla u_i|^2 + r \left| \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|^2 + \frac{1}{p_i+1} K f_i^{-\delta_i} r u_i^{p_i+1} \right) d\sigma_r,$$

pela identidade de Pohozaev temos que

$$\begin{aligned} P(r, u_i) &= - \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m u_i + \frac{n-2}{2} u_i \right) (\Delta_g - \Delta_0)(u_i) dx \\ &\quad - c(n) \int_{|x| \leq r} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R + R \right) u_i^2 dx + c(n) \frac{r}{2} \int_{|x|=r} R u_i^2 d\sigma_r \\ &\quad + \left(\frac{n}{p_i+1} - \frac{n-2}{2} \right) \int_{|x| \leq r} K f_i^{-\delta_i} u_i^{p_i+1} dx \\ &\quad - \frac{\delta_i}{p_i+1} \int_{|x| \leq r} K f_i^{-\delta_i-1} (x^m \partial_m f_i) u_i^{p_i+1} dx. \end{aligned}$$

Observe ainda que, se tomarmos r suficientemente pequeno, independentemente de i teremos,

$$\begin{aligned} &\left(\frac{n}{p_i+1} - \frac{n-2}{2} \right) \int_{|x| \leq r} K u_i^{p_i+1} dx - \\ &\frac{\delta_i}{p_i+1} \int_{|x| \leq r} K f_i^{-\delta_i-1} (x^m \partial_m f_i) u_i^{p_i+1} dx \geq 0 \end{aligned} \quad (5.3)$$

Consequentemente, para $r > 0$

$$\begin{aligned} P(r, u_i) &\geq - \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m u_i + \frac{n-2}{2} u_i \right) (\Delta_g - \Delta_\lambda)(u_i) dx \\ &\quad - c(n) \int_{|x| \leq r} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R + R \right) u_i^2 dx + c(n) \frac{r}{2} \int_{|x|=r} R u_i^2 d\sigma_r. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Desde que $M_i u_i \rightarrow h$, longe de x_i , teremos que $A_i(r) \leq C \epsilon_i^{n-2}$, onde

$$\begin{aligned} A_i(r) &= -c(n) \int_{|x| \leq r} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R + R \right) u_i^2 dx \\ &\quad - \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m u_i + \frac{n-2}{2} u_i \right) (g^{kl} - \delta^{kl}) \partial_{kl} u_i + \partial_k g^{kl} \partial_l u_i dx. \end{aligned}$$

Defina,

$$\begin{aligned} \widehat{A}_i(r) &= -c(n) \int_{|x| \leq r} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R + R \right) \phi_\epsilon^2 dx \\ &\quad - \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m \phi_\epsilon + \frac{n-2}{2} \phi_\epsilon \right) (g^{kl} - \delta^{kl}) \partial_{kl} \phi_\epsilon + \partial_k g^{kl} \partial_l \phi_\epsilon dx, \end{aligned}$$

onde $\phi_\epsilon = u_\epsilon + z_\epsilon$. As estimativas obtidas na proposição 4.5 implicam que

$$|u_i - \phi_{\epsilon_i}| \leq C \sum_{k=2}^{d-1} \epsilon_i^{\frac{n-2}{2}} |H^{(k)}|^2(x_i) (\epsilon_i + |x|)^{2k+2-n} + C \epsilon_i^{\frac{n-2}{2}} (\epsilon_i + |x|)^{-1}.$$

Assim, em conjunto com as estimativas das derivadas, obtemos

$$|A_i(r) - \widehat{A}_i(r)| \leq C \sum_{k=2}^{d-1} \epsilon_i^{2k+2} |H^{(k)}|^2(x_i) + C r \epsilon_i^{n-2}.$$

Então,

$$\widehat{A}_i(r) \leq C \sum_{k=2}^{d-1} \epsilon_i^{2k+2} |H^{(k)}|^2(x_i) + C \epsilon_i^{n-2}.$$

Estimaremos a seguir a segunda integral que aparece na definição de $\widehat{A}_i(r)$. Utilizando o fato que o laplaciano com respeito a métrica e o laplaciano euclidiano coincidem, em coordenadas normais conformes, quando aplicados em funções radialmente simétricas, desde que u_ϵ e $x^m \partial_m u_\epsilon + \frac{n-2}{2} u_\epsilon$ são funções radialmente simétricas, segue que

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m \phi_\epsilon + \frac{n-2}{2} \phi_\epsilon \right) (g^{kl} - \delta^{kl}) \partial_{kl} \phi_\epsilon + \partial_k g^{kl} \partial_l \phi_\epsilon dx &= \\ \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m \phi_\epsilon + \frac{n-2}{2} \phi_\epsilon \right) (\Delta_g - \Delta)(\phi_\epsilon) dx &= \\ \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m \phi_\epsilon + \frac{n-2}{2} \phi_\epsilon \right) (\Delta_g - \Delta)(z_\epsilon) dx &= \\ \int_{|x| \leq r} z_\epsilon (\Delta_g - \Delta) \left(x^m \partial_m \phi_{var} + \frac{n-2}{2} \phi_\epsilon \right) dx &= \\ \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m z_\epsilon + \frac{n-2}{2} z_\epsilon \right) (\Delta_g - \Delta)(z_\epsilon) dx. & \end{aligned}$$

Mas,

$$\left| (x^m \partial_m z_\varepsilon + \frac{n-2}{2} z_\varepsilon) (\Delta_g - \Delta) \right| \leq C \sum_{|\alpha|=2}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \sum_{i,j} \varepsilon^{3|\alpha|} |h_{ij\alpha}|^3 |\log \varepsilon| + Cr\varepsilon^{n-2}. \quad (5.5)$$

De forma análoga,

$$\left| \int_{|x| \leq r} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R + R \right) z_\varepsilon^2 dx \right| \leq C \sum_{|\alpha|=2}^{\lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor} \sum_{i,j} \varepsilon^{3|\alpha|} |h_{ij\alpha}|^3 |\log \varepsilon|^{\gamma_1} + Cr\varepsilon^{n-2}. \quad (5.6)$$

Portanto,

$$-c(n) \int_{|x| \leq r} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R + R \right) (u_\varepsilon^2 + 2u_\varepsilon z_\varepsilon) dx \leq C \sum_{k=2}^d \varepsilon_i^{2k+1} |H^{(k)}|^2(x_i) + C\varepsilon_i^{n-2}. \quad (5.7)$$

Finalmente, utilizando o resultado do apêndice, se $n \leq 24$, temos

$$\sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{2|\alpha|} |\log \varepsilon|^\theta \leq C\varepsilon_i^{n-2}$$

o que finaliza a demonstração. □

Como corolário, podemos melhorar as estimativas obtidas na proposição 4.5, se $n \leq 24$.

Corolário 5.1. *Suponhamos que $6 \leq n \leq 24$. Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado simples para uma sequência $\{u_i\}$ de soluções positivas da equação (3.24). Então, passando para coordenadas normais conformes, existem constantes $\sigma, C > 0$ tais que*

$$|\nabla^m (v_i - U - \tilde{z}_i)|(y) \leq C\varepsilon_i^{n-3} (1 + |y|)^{-1-m} \quad (5.8)$$

para todo $|y| \leq \sigma\varepsilon_i^{-1}$, $0 \leq m \leq 2$.

CAPÍTULO 6

CONJUNTO DE PONTOS DE BLOW-UP

Neste capítulo provaremos que, se existirem pontos de blow-up referentes a equação de Yamabe, tal conjunto será finito e constituído apenas por pontos de blow-up isolados simples. Tal resultado nos dará o ingrediente final para a demonstração do teorema de compacidade.

Assim, de modo a obter tal resultado, iniciaremos este capítulo obtendo um teorema referente a análise assintótica de pontos de blow-up quando $n \leq 24$ que, juntamente com o Teorema da Massa Positiva, excluirá a possibilidade do fenômeno de blow-up em variedades que não são conformemente difeomorfas a esfera.

6.1 Restrição Local de Sinal

A ideia básica é usar a identidade de Pohozaev como uma ferramenta de obstrução tendo por objetivo excluir a formação de “bubbles” em pontos de blow-up.

Definamos,

$$P'(r, v) = \int_{|x|=r} \left(\frac{n-2}{2} v \frac{\partial v}{\partial \nu} - \frac{r}{2} |\nabla v|^2 + r \left| \frac{\partial v}{\partial \nu} \right|^2 \right) d\sigma(r). \quad (6.1)$$

Teorema 6.1. *Suponhamos que $n \leq 24$. Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado simples para uma sequência $\{u_i\}$ de soluções positivas para (3.24). Se $u_i(x_i)u_i \rightarrow h$ longe da origem, então*

$$\liminf_{r \rightarrow 0} P'(r, h) \geq 0.$$

Demonstração. A demonstração deste teorema segue da aplicação da Identidade de Pohozaev juntamente com as estimativas pontuais construídas anteriormente. Relembrando que, da igualdade (5.4), para $r > 0$ suficientemente pequeno temos

$$\begin{aligned} P(r, u_i) \geq & - \int_{|x| \leq r} (x^m \partial_m u_i + \frac{n-2}{2} u_i) (\Delta_g - \Delta_0)(u_i) dx \\ & - c(n) \int_{|x| \leq r} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R + R \right) u_i^2 dx + c(n) \frac{r}{2} \int_{|x|=r} R u_i^2 d\sigma_r \end{aligned} \quad (6.2)$$

Uma vez que $M_i u_i \rightarrow h$ longe da origem, aplicando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue concluímos que

$$M_i^2 P(r, u_i) \rightarrow P'(r, h)$$

quando $i \rightarrow \infty$. Mais ainda, as estimativas pontuais estabelecidas no Corolário 5.1 implicam que

$$\varepsilon_i^{2-n} |A_i(r) - \widehat{A}_i(r)| \leq Cr,$$

onde A_i e \widehat{A}_i foram definidas no capítulo cinco. Assim,

$$r M_i^2 \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{|x|=r} R u_i^2 d\sigma_r = r \int_{|x|=r} R h^2 d\sigma_r$$

Pelo Teorema do Anulamento de Weyl segue que $H_{ij} = O(|x|^{d+1})$ em um ponto de blow-up \bar{x} e portanto $\partial_i \partial_j H_{ij} = O(r^{d-1})$. Assim teremos que,

$$R_g = \partial_i \partial_j h_{ij} + O(|x|^{n-3}).$$

Ainda, fazendo $\varepsilon \rightarrow 0$, nas estimativas pontuais dadas pelo Corolário 5.1 obtemos,

$$h = |x|^{2-n} + t(x) + O(|x|^{-1}),$$

onde

$$t(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{n-2} \tilde{z}_\varepsilon(\varepsilon^{-1} x) = O\left(\sum_{|\alpha|=4}^{n-4} |h_{ij\alpha}| |x|^{|\alpha|+2-n}\right).$$

Novamente, usando o Teorema do Anulamento de Weyl e a expansão da função de Green do laplaciano conforme segue que $t(x) = O(|x|^{d+3-n})$. Então,

$$\begin{aligned} r h^2 R &= r(r^{2-n} + t + O(r^{-1}))^2 (\partial_i \partial_j h_{ij} + O(r^{n-3})) \\ &= r(r^{2-n} + t)^2 (\partial_i \partial_j h_{ij}) + O(r^{2-n}) \\ &= (\partial_i \partial_j h_{ij}) r^{5-2n} + O(r^{2-n}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} \int_{|x|=r} r R h^2 d\sigma_r = 0.$$

Finalmente, aplicando o Teorema do Anulamento de Weyl para as estimativas (5.6) e (5.7) obtemos

$$\left| - \int_{|x| \leq r} \left(x^m \partial_m \phi_\epsilon + \frac{n-2}{2} \phi_\epsilon \right) \left((g^{kl} - \delta^{kl}) \partial_{kl} \phi_\epsilon + \partial_k g^{kl} \partial_l \phi_\epsilon \right) - c(n) \int_{|x| \leq r} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R + R \right) z_\epsilon^2 dx \right| \leq C r \epsilon^{n-2},$$

para $\epsilon \leq r$. Utilizando o resultado principal demonstrado no apêndice, podemos concluir que, se $n \leq 24$, então

$$\liminf_{r \rightarrow 0} P'(r, h) \geq 0. \quad (6.3)$$

□

6.2 Conjunto de Blow-up

Relembremos primeiramente um resultado bem conhecido na literatura, que se encontra demonstrado em [?].

Proposição 6.1. *Dado $\delta > 0$ suficientemente pequeno e $R > 0$ suficientemente grande, existe uma constante $C = C(\delta, R) > 0$ tal que, se u é uma solução positiva de (3.24), com $\max_M u > C$, então existem $\{x_1, \dots, x_N\} \subset M$, $N = N(u) \geq 1$, onde $\frac{n+2}{n-2} - p < \delta$ e cada x_i é um máximo local de u tal que:*

1. $\{B_{r_i}(x_i)\}_{i=1}^N$ é uma coleção disjunta se $r_i = R M_i^{-\frac{p_i-1}{2}}$;
2. Se $x = (x^1, \dots, x^n)$ é um sistema de coordenadas locais em torno de x_i então

$$|u_i(x_i)^{-1} u(u(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}} y) - U(y)|_{C_{loc}^2} \leq \delta,$$

$$\text{onde } y = u(x_i)^{\frac{p_i-1}{2}} x;$$

3. $u(x) \leq C d_g(x, \{x_1, \dots, x_N\})^{-\frac{2}{p_i-1}}$ para todo $x \in M$ e

$$d_g(x_i, x_j)^{\frac{2}{p_i-1}} u(x_j) \geq C^{-1}$$

para $i \neq j$.

A proposição acima nos garante que para cada função u , satisfazendo as hipóteses citadas, conseguimos um conjunto de máximos $\{x_1(u), \dots, x_N(u)\}$, onde $N = N(u)$, satisfazendo as propriedades mencionadas na proposição. Provaremos a seguir que, o

máximo local $x_i = x_i(u)$ obtido na proposição acima não pode ser acumulado, isto é, mostraremos que existem constantes $C_i(\delta, R) > 0$, $i = 1, 2$, tal que, para todo $u > 0$ solução de (3.24) com $\max_M u \leq C_1$, devemos ter

$$d_g(x_i(u), x_j(u)) \geq C_2.$$

A fim de demonstrar tal fato, provaremos que todo ponto de blow-up isolado deve ser um ponto de blow-up isolado simples, fato a ser demonstrado no lema a seguir.

Lema 6.1. *Seja $x_i \rightarrow \bar{x}$ um ponto de blow-up isolado para a sequência $\{u_i\}$ de soluções de (3.24). Então \bar{x} é um ponto de blow-up isolado simples para $\{u_i\}$.*

Demonstração. Suponhamos que \bar{x} não é um ponto de blow-up isolado simples. Então, existem ao menos dois pontos críticos de $\hat{u}_i = r^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{u}_i(r)$ em um intervalo $(0, \bar{\tau}_i)$, para alguma sequência $\bar{\tau}_i \rightarrow 0$.

Pela Proposição 3.2 sabemos que no intervalo deve existir apenas um ponto crítico $0 < r < r_i := R_i u_i(x_i)^{-\frac{p_i-1}{2}}$, denotemos por τ_i o segundo ponto crítico, onde $\tau_i \in (0, \bar{\tau}_i)$. Portanto, $\tau_i \geq r_i$ e $\tau_i \rightarrow 0$. Seja $x = (x^1, \dots, x^n)$ coordenadas normais centradas em x_i , e considere a renormalização de $u_i(x)$ dada

$$v_i(y) = \tau_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\tau_i y), \quad |y| < \tau_i^{-1},$$

onde $x = \tau_i y$. Então $v_i(y)$ satisfaz a equação

$$L_h v_i(y) + K f_i^{-\delta_i}(\tau_i y) v_i^{p_i}(y) = 0,$$

onde $h_{\alpha\beta}(y) = g_{\alpha\beta}(\tau_i y)$. Mais ainda, teremos $|y|^{\frac{2}{p_i-1}} v_i(y) \leq C$ para $|y| < \tau_i^{-1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} v_i(0) = \infty$. Note ainda que, como u_i ter apenas um ponto crítico no intervalo $(0, r_i)$, $r^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{v}_i(r)$ tem exatamente um ponto crítico em $0 < r < 1$, e

$$\frac{d}{dr} (r^{\frac{2}{p_i-1}} \bar{v}_i(r)) \Big|_{r=1} = 0. \tag{6.4}$$

Portanto a origem é um ponto de blow-up isolado simples para a sequência $\{v_i\}$. Utilizando argumento análogo ao da demonstração do Corolário 3.2, possivelmente tomando uma subsequência, teremos

$$v_i(0) v_i(y) \rightarrow h(y) := a|y|^{2-n} + b(y) \quad \text{em } C_{loc}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}),$$

onde $b(y)$ é harmônica em \mathbb{R}^n . Desde que $h(y)$ é positiva $\liminf_{|y| \rightarrow \infty} b(y) \geq 0$, e assim, utilizando o princípio do máximo concluímos que $b(y) \geq 0$. Pelo Teorema de Liouville, como b é harmônica e limitada inferiormente, concluímos que $b(y) = b$, onde b é uma

constante. Mais ainda, a igualdade (6.4) implica que

$$\frac{d}{dr}(r^{p_i-2}\bar{h}(r))|_{r=1} = 0,$$

que implica que $b = a > 0$. Assim,

$$\liminf_{r \rightarrow 0} P'(r, h) = \liminf_{r \rightarrow 0} - \int_{|y|=r} \frac{(n-2)^2}{2} a^2 |y|^{1-n} d\sigma(r) < 0,$$

o que contradiz o Teorema 6.1. \square

Tendo mostrado que todo ponto de blow-up isolado é isolado simples, provaremos a seguinte proposição.

Proposição 6.2. *Seja $\delta, R, u, C(\delta, R)$ e $\{x_1, \dots, x_N\}$ como na proposição 6.1. Se δ é suficientemente pequeno e R suficientemente grande, então existe uma constante $\bar{C}(\delta, R) > 0$ tal que se $\max_M u \geq C$, então $d_g(x_j, x_l) \geq \bar{C}$, para todo $1 \leq j \neq l \leq N$.*

Demonstração. Demonstraremos a proposição utilizando contradição. Se supormos que tal constante \bar{C} não existe, então existirá uma sequência $p_i \rightarrow p$ com $\max_M u_i \geq C$ e

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \min_{j \neq l} d_g(x_j(u_i), x_l(u_i)) = 0.$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$\sigma_i = d_g(x_1(u_i), x_2(u_i)) = \min_{j \neq l} d_g(x_j(u_i), x_l(u_i)) \rightarrow 0.$$

Então pelo item (3) da Proposição 6.1 temos $u_i(x_1), u_i(x_2) \rightarrow \infty$. Considerando a renormalização

$$v_i(y) = \sigma_i^{\frac{2}{p_i-1}} u_i(\exp_{x_1}(\sigma y)), \quad |y| < \sigma_i^{-1}.$$

Então $v_i(y)$ satisfaz

$$L_h v_i(y) + K f_i^{-\delta_i}(\sigma_i y) v_i^{p_i}(y) = 0,$$

onde $h_{\alpha\beta}(y) = g_{\alpha\beta}(\sigma_i y)$. Se $x_j(u_i) \in B_{\sqrt{\sigma_i}}(x_1)$ e considerarmos $y_j = \sigma_i^{-1} x_j(u_i)$, então cada y_j é um máximo local de $v_i(y)$ e pelo item (3) da Proposição 6.1,

$$|y - y_j|^{\frac{2}{p_i-1}} v_i(y) \leq C, \quad |y| < \sigma_i^{-1}.$$

Mais ainda, $y_1 = 0, |y_2| = 1$ e $\min_{j \neq l} |y_j - y_l| \geq 1 + o(1)$, assim, em particular, $y_2(u_i) \rightarrow \bar{y}_2$ com $|\bar{y}_2| = 1$. Portanto, $\{0, \bar{y}_2\}$ são pontos de blow-up isolados para $v_i(y)$ contanto que

$$v_i(0), v_i(y_2) \rightarrow \infty. \tag{6.5}$$

Provemos (6.5). Se $v_i(y_2)$ fica limitada mas $v_i(0) \rightarrow \infty$ então $x = 0$ é isolado e portanto um ponto de blow-up isolado simples, enquanto $v_i(y)$ permanece uniformemente limitada em uma vizinhança próxima de \bar{y}_2 . Então, pela Proposição 3.3, $v_i(\bar{y}_2) \rightarrow 0$, o que não pode acontecer uma vez que $\sigma_i \geq \max\{Ru_i(x_1)^{-\frac{p_i-1}{2}}, Ru_i(x_2)^{-\frac{2}{p_i-1}}\}$, o que implica que

$$v_i(0), v_i(\bar{y}_2) \geq R. \quad (6.6)$$

Por outro lado, se $v_i(0)$ e $v_i(y_2)$ permanecem limitada então utilizando argumento similar ao utilizado na proposição 3.2 mostramos que $v_i \rightarrow v > 0$ em $C_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$, onde $v(y)$ satisfaz

$$\begin{cases} \Delta v + K v^{\frac{n+2}{n-2}} = 0 \\ \nabla v(0) = \nabla v(\bar{y}_2) = 0. \end{cases}$$

Pelo Teorema de Caffarelli, Gidas e Spruck segue que $v \equiv 0$, o que é uma contradição a (6.6). Uma vez provado (6.5), concluímos que $\{0, \bar{y}_2\}$ são pontos de blow-up isolados simples para $\{v_i\}$. Portanto, pelo Corolário 3.2

$$v_i(0)v_i(y) \rightarrow G(y) := a_1|y|^{2-n} + a_2|y - \bar{y}_2|^{2-n} + b(y) \text{ em } C_{loc}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{S\}),$$

onde S denota o conjunto dos pontos de blow-up de $\{v_i\}$, $b(y)$ é uma função harmônica em $\mathbb{R}^n \setminus (S \setminus \{0, \bar{y}_2\})$, e $a_1, a_2 > 0$. Pelo princípio do máximo $b(y) \geq 0$, de modo que

$$G(y) = a_1|y|^{2-n} + b + O(|y|), \quad \text{para } |y| \text{ próximo a } 0,$$

para alguma constante $b > 0$. O que, analogamente ao que fizemos no lema anterior, é uma contradição a condição de sinal do Teorema 6.1. \square

Pela proposição acima, fica claro que para qualquer sequência dada de funções $\{u_i\}$, o inteiro $N = N(i)$ da Proposição 6.1 deve permanecer uniformemente limitado, pois de outra forma não poderia existir uma constante $\bar{C}(\delta, R) > 0$ tal que $d_g(x_j, x_l) \geq \bar{C}$. Com isto, obtemos o resultado principal desta seção como corolário imediato.

Corolário 6.1. *Seja $\{u_i\}$ uma sequência de soluções positivas de (3.24), com $\max_M u_i \rightarrow \infty$. Então $p_i \rightarrow \frac{n+2}{n-2}$, e o conjunto dos pontos de blow-up é um conjunto finito formado apenas de pontos de blow-up isolados simples.*

CAPÍTULO 7

TEOREMA DE COMPACIDADE

O objetivo deste capítulo é dar uma prova completa para os resultados enunciados na introdução, respondendo assim, juntamente com os resultados obtidos nos artigos, a conjectura de compacidade proposta por R.Schoen.

Tendo demonstrado que todo ponto de blow-up é na verdade um ponto de blow-up isolado simples, o teorema abaixo segue diretamente do teorema .

Teorema 7.1 (Teorema do Anulamento de Weyl). *Seja g uma métrica Riemanniana suave definida na bola unitária de dimensão n , B_1 , $6 \leq n \leq 24$. Suponha que existe uma sequência de soluções $\{u_i\}$ de*

$$L_g u_i + K u_i^{p_i} = 0, \text{ em } B_1, \quad (7.1)$$

$p_i \in \left(1, \frac{n+2}{n-2}\right]$, tal que para qualquer $\epsilon > 0$, existe uma constante $C(\epsilon)$ tal que $\sup_{B_1 \setminus B_\epsilon} u_i \leq C(\epsilon)$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} (\sup_{B_1} u_i) = \infty$. Então o tensor de Weyl $W(g)$ satisfaz,

$$|W(g)|(x) \leq C|x|^l$$

para algum $l > \frac{n-6}{2}$.

Restando assim, demonstrar o teorema principal:

Teorema 7.2. *Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $3 \leq n \leq 24$ sem fronteira. Se (M^n, g) tem quociente de Yamabe positiva e não é conformemente difeomorfa para (S^n, g_0) , então para todo $\epsilon > 0$ então existe uma constante $C > 0$, dependendo apenas de g e ϵ tal que*

$$C^{-1} \leq u \leq C \quad e \quad \|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq C, \quad (7.2)$$

para qualquer $u \in \sum_{1+\epsilon \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}} \Phi_p$, onde $0 < \alpha < 1$.

Para demonstrar o teorema acima utilizaremos uma generalização do teorema de massa positiva que requer a introdução do conceito de variedades assintoticamente planas.

7.1 Variedades Assintoticamente Planas

Definição 7.1. Uma variedade Riemanniana (M, \hat{g}) de dimensão n é chamada variedade assintoticamente plana de ordem τ , se $M = M_0 \cup M_\infty$, onde M_0 é compacto, e M_∞ é difeomorfa a $\mathbb{R}^n \setminus B_R (R > 0)$ e o difeomorfismo nos fornece um sistema de coordenadas $\{y^i\}$ para M_∞ tal que

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \delta_{ij} + O(|y|^{-\tau}), \\ \partial_k g_{ij} &= O(|y|^{-\tau-1}), \\ \partial_k \partial_l g_{ij} &= O(|y|^{-\tau-2}). \end{aligned}$$

Tal sistema de coordenadas é chamado sistema de coordenadas assintóticas. A definição acima aparentemente depende da escolha das coordenadas assintóticas. No entanto, podemos ver em [15] que a estrutura assintótica é determinada apenas pela métrica.

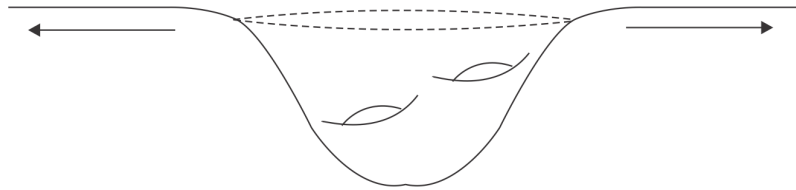


Figura 7.1: Variedade Assintoticamente Plana.

Exemplo 7.1. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e $\{x^i\}$ o sistema de coordenadas de um ponto $x_0 \in M$. Considere a métrica $\tilde{g} = r^{-4}g$ próximo a x_0 com $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ e $\tilde{M} = M \setminus \{x_0\}$. Então (M, g) é assintoticamente plana de ordem 2 com coordenadas assintóticas dadas por $y^i = r^{-2}x^i$.

Definição 7.2. Se $\tau > \frac{n-2}{2}$, podemos definir a massa de (M, g) pelo limite a seguir:

$$m(g) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} (\partial_i g_{ij} - \partial_j g_{ii}) \nu^j, \quad (7.3)$$

onde ν é o vetor normal euclidiano que aponta para fora de S_R .

Observação 7.1. A definição acima depende apenas das coordenadas assintóticas, mas de acordo com Bartnik [5], a definição de massa depende apenas de g quando a ordem $\tau > \frac{n-2}{2}$.

Proposição 7.1. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta com dimensão $n > 2$. Suponha que o invariante de Yamabe da variedade seja estritamente positivo. Defina a métrica $\tilde{g} = G^{\frac{4}{n-2}}$ onde $G(x) = (n-2)w_{n-1}G(x_0, x)$ e $\tilde{M} = M \setminus \{x_0\}$. Suponha que*

$$|g(r, \theta)| = 1 + O(r^k), \quad \text{com } k > n - 2, \quad (7.4)$$

e

$$G(x) = r^{2-n} + A + O(r). \quad (7.5)$$

Então (M, g) é assintoticamente plana de ordem 2 e a massa (M, g) é $m(g) = 4(n-1)A$.

Demonstração. Escrevendo a métrica

$$\tilde{g} = r^{-4}(1 + Ar^{n-2} + O(r^{n-1}))^{\frac{4}{n-2}}g.$$

Para o calculo da massa, escolhendo coordenadas polares com $\rho = 1/r$,

$$\partial_\rho \sqrt{|\tilde{g}(\rho, \theta)|} = \frac{1}{2} \sqrt{|\tilde{g}(\rho, \theta)|} \tilde{g}^{ij} \partial_\rho \tilde{g}_{ij}.$$

Então,

$$m(\tilde{g}) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} w_{n-1}^{-1} \int_{S_{n-1}} \left(\sqrt{|\tilde{g}(\rho, \theta)|} \partial_\rho \tilde{g}_{\rho\rho} - 2 \partial_\rho \sqrt{|\tilde{g}(\rho, \theta)|} \right) d\tau(\theta),$$

e como

$$\begin{aligned} \sqrt{|\tilde{g}(\rho, \theta)|} &= \rho^{-2n} G^{\frac{2n}{n-2}} \sqrt{|g(r, \theta)|} \\ &= [1 + A\rho^{2-n} + O(\rho^{1-n})]^{\frac{2n}{n-2}} \sqrt{|g(r, \theta)|}, \end{aligned}$$

segue que, se k é suficientemente grande $m(g) = (4n-4)A = 4(n-1)A$. \square

O teorema a seguir é uma generalização do Teorema de Massa Positiva de Schoen e Yau ([23]) para dimensões arbitrárias, demonstrado por J. Lohkamp.

Teorema 7.3 (Teorema da Massa Positiva). *Seja (\mathcal{M}, g) uma variedade assintoticamente plana de dimensão n , com ordem $\tau > \frac{n-2}{2}$. Suponhamos que a curvatura escalar R_g seja positiva e $R \in L^1(\mathcal{M}, g)$. Então $m(g) \geq 0$, e $m(g) = 0$ se, e somente se, (\mathcal{M}, g) é isométrica ao espaço euclidiano \mathbb{R}^n .*

7.2 Teorema de Compacidade

Demonstraremos finalmente o teorema principal do nosso artigo.

Demonstração do Teorema 9.2: Utilizando estimativas elípticas usuais juntamente com a desigualdade de Harnack, vemos que é suficiente estimarmos $|u|_{C^0(M)}$ como acima.

Suponhamos por absurdo que

$$\bigcup_{1+\epsilon \leq p \leq \frac{n+2}{n-2}} \Phi_p$$

não é limitado em $C^0(M)$. Então, existe uma sequência $u_i \in \Phi_{p_i}$, $1 + \epsilon \leq p_i \leq \frac{n+2}{n-2}$, com

$$\max_M u_i \rightarrow \infty \text{ com } i \rightarrow \infty.$$

Pelo Corolário 6.1 devemos ter $p_i \rightarrow \frac{n+2}{n-2}$, e existe um número finito $N > 0$, de pontos de blow-up isolados simples

$$x_i^{(1)} \rightarrow \bar{x}^{(1)}, \dots, x_i^{(N)} \rightarrow \bar{x}^{(N)}.$$

Podemos assumir sem perda de generalidade que

$$u_i(x_i^{(1)}) = \min\{u_i(x_i^{(1)}), \dots, u_i(x_i^{(N)})\},$$

para todo i . Então seja, $w_i = u_i(x_i^{(1)})u_i$. Pela Proposição 3.3, existem $C, \rho > 0$ tais que

$$w_i(x) \leq C d_{g_i}(x, x_i^{(j)}),$$

quando $d(x, x_i^{(j)}) \leq \rho$, para todo $j \in \{1, \dots, N\}$. Por outro lado, sabemos que a sequência u_i é uniformemente limitada em $M \setminus \bigcup_{j=1}^N B_{\frac{\rho}{4}}(\bar{x}^{(j)})$, desde que não há pontos de blow-up na região. Aplicando a desigualdade de Harnack concluímos ainda que w_i é uniformemente limitada em $M \setminus \bigcup_{j=1}^N B_{\frac{\rho}{2}}(\bar{x}^{(j)})$.

Os fatos acima implicam que, após passarmos a uma subsequência

$$w_i \rightarrow h := \sum_{j=1}^N a_j G_{\bar{x}^{(j)}} + b(x) \text{ em } C_{loc}^2(M \setminus \{\bar{x}^{(1)}, \dots, \bar{x}^{(N)}\}),$$

onde a_j são constantes não negativas, $a_1 > 0$, $G_{\bar{x}^{(j)}}$ é a função de Green para o Laplaciano conforme com singularidade em $\bar{x}^{(j)}$, e $b \in C^2(M)$. Note que desde que o primeiro autovalor de menos o laplaciano conforme é positivo, de fato se $L_g G = 0$ implica que $b \equiv 0$.

Seja $\hat{g} = G_{\bar{x}^{(1)}}^{\frac{4}{n-2}} g$. Sem perda de generalidade podemos assumir que g é a métrica conformemente relacionada a métrica dada que produz as coordenadas normais conformes em $\bar{x}^{(1)}$. De fato, suponhamos que g_0 é a métrica dada e $g = \phi^{\frac{4}{n-2}} g_0$ é a métrica que produz as coordenadas normais conformes, então $\phi^{-1} G_{\bar{x}^{(1)}}$ é a função de Green para g_0 . Assim,

$$\hat{g} = (\phi^{-1} G_{\bar{x}^{(1)}})^{\frac{4}{n-2}} g = \phi^{-\frac{4}{n-2}} G_{\bar{x}^{(1)}}^{\frac{4}{n-2}} \phi^{\frac{4}{n-2}} g_0 = G_{\bar{x}^{(1)}}^{\frac{4}{n-2}} g_0.$$

Assim $(M \setminus \{\bar{x}^{(1)}\}, \hat{g})$ tem curvatura escalar

$$R_{\hat{g}} = -c(n)^{-1} G_{\bar{x}^{(1)}}^{-\frac{n+2}{n-2} \frac{4}{n-2}} L_g(G_{\bar{x}^{(1)}}^{\frac{4}{n-2}}) \equiv 0.$$

Afirmação: $(M \setminus \{\bar{x}^{(1)}\}, \hat{g})$ é assintoticamente plana.

De fato, pelo Teorema 2.8, sabemos que no sistema de coordenadas normais conformes em $\bar{x}^{(1)} \in M$, a função de Green tem a seguinte expansão assintótica:

$$G(x, \bar{x}^{(1)}) = |x|^{2-n}(1 + \chi_1(x) + \dots + \chi_n(x)) + c \log |x| + \chi_{n+1}(x),$$

onde χ_k é um polinômio homogêneo de grau k , $\chi_{n+1} = O(1)$, $\chi_1 = \chi_2 = \chi_3 \equiv 0$, e o termo logarítmico aparece apenas em dimensões pares. Desde que o Teorema 7.3 implica que $h_{ij\alpha}(\bar{x}^{(1)}) = 0$ para todo $1 \leq i, j \leq n$ e $2 \leq |\alpha| \leq d$, e usando que, neste caso

$$R_g = \partial_i \partial_j h_{ij} + O(|x^{n-3}|), \quad (7.6)$$

com $\int_{S_1^{n-1}} \partial_i \partial_j h_{ij} = 0$, verificamos que

$$G(x, \bar{x}^{(1)}) = |x|^{2-n} \left(1 + \sum_{k=d+1}^{n-2} \chi_k(x) + A + O(|x| \log |x|) \right), \quad (7.7)$$

onde

$$\int_{S_1^{n-1}} \chi_k = 0, \quad \int_{S_1^{n-1}} x_i \chi_k = 0, \quad (7.8)$$

para todo $k \leq n-2$, $1 \leq i \leq n$.

Se introduzirmos as coordenadas assintóticas $y = |x|^{-2}x$, então a expansão (7.7), e o fato que $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij} + O(|x|^{n-1})$, $h_{ij} = O(|x|^{d+1})$, implicará que

$$\hat{g}_{ij} = \delta_{ij} + O(|y|^{-(d+1)})$$

para $|y|$ suficientemente grande. Mais precisamente, podemos obter

$$\hat{g}_{ij}(y) = G_{\bar{x}^{(1)}}^{\frac{4}{n-2}} |y|^{-4} (\delta_{ij} + \bar{h}_{ij} - 2y_i y_k |y|^{-2} \bar{h}_{kj} - 2y_j y_l |y|^{-2} \bar{h}_{il} + O(|y|^{1-n})),$$

onde $\bar{h}_{ij}(y) = h_{ij}(|y|^{-2}y)$, ficando assim demonstrada a afirmação.

Neste ponto vale ressaltar a construção geométrica por traz da afirmação anterior. Ao definirmos a métrica $\tilde{g} = G_{\bar{x}^{(1)}}^{\frac{4}{n-2}} g$, uma vez que a função de Green explode no ponto retirado, a operação acima é uma generalização da projeção estereográfica. No caso, a projeção estereográfica transforma a métrica da esfera em uma métrica euclidiana. Na situação acima a métrica é transformada em uma métrica que não é plana mas, que no

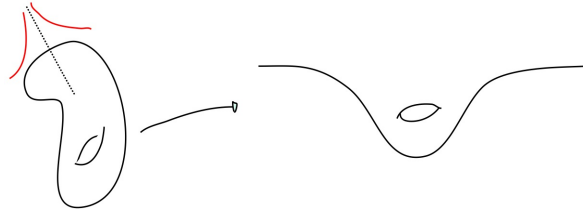


Figura 7.2: Análogo a Projeção Estereográfica.

infinito, se aproxima desta.

Afirmação: $m(\hat{g}) > 0$.

Como $d = \lfloor \frac{n-2}{2} \rfloor > \frac{n-2}{2}$, é possível aplicar o Teorema de Massa Positiva. De fato, supondo por absurdo que $m(\hat{g}) = 0$, aplicando o teorema de massa positiva concluímos que $(M \setminus \{\bar{x}^{(1)}\}, \hat{g})$ é isométrica ao \mathbb{R}^n . Mas \mathbb{R}^n é conformemente difeomorfa a $S^n - \{\text{ponto}\}$, o que implica que (M, g) é conforme a S^n , o que é um absurdo.

Observando que os termos envolvendo χ_k ou \bar{h} não contribuem para a massa, juntamente com as igualdades obtidas em (7.8), usando coordenadas normais conformes concluímos que $m(\hat{g}) = cA$, onde $c > 0$ ou seja, $A > 0$. O que contradiz a restrição de sinal local obtida pelo teorema 6.1, pois obtemos

$$\liminf_{r \rightarrow 0} P'(r, h) < 0,$$

onde $h := \sum_{j=1}^N a_j G_{\bar{x}^{(j)}}$, ficando assim demonstrado o resultado. \square

O Teorema de Compacidade provado acima, nos permite calcular o grau total de Leray-Schauder de todas as soluções da equação (2.1), e assim obter teoremas de existência mais refinados que discutiremos a seguir. Nesse ponto vale lembrar a equação (2.1) surge de um problema variacional. Se escolhermos a normalização unitária do volume $\int_M u^{\frac{2n}{n-2}} dv_g = 1$, a equação (2.1) provém de

$$L_g u + E_g(u) u^{\frac{n+2}{n-2}} = 0, \tag{7.9}$$

onde

$$E_g(u) = - \int_M u L_g u dv_g = \int_M (|\nabla_g u|^2 + c(n) R_g u^2) dv_g,$$

Dado $p \in \left[1, \frac{n+2}{n-2}\right]$ e $\Lambda > 0$, podemos definir a aplicação $F_p : \bar{\Omega}_\Lambda \rightarrow C^{2,\alpha}(M)$ por

$$F_p(u) = u + L_g^{-1}(E_g(u)u^p)$$

onde

$$\Omega_\Lambda = \{u \in C^{2,\alpha}(M) \mid \|u\|_{C^{2,\alpha}} < \Lambda, \quad u > \Lambda^{-1}\}.$$

Da teoria elíptica sabemos que a aplicação $u \mapsto L_g^{-1}(E(u)u^p)$ é uma aplicação compacta

de $\overline{\Omega}_\Lambda$ em $C^{2,\alpha}(M)$. Assim, F_p é da forma $I + \text{aplicação compacta}$, e podemos definir o grau de Leray-Schauder de F_p ([18]) na região Ω_Λ com respeito a $0 \in C^{2,\alpha}(M)$, o qual denotaremos por $\deg(F_p, \Omega_\Lambda, 0)$ desde que $0 \notin F_p(\partial\Omega_\Lambda)$. O grau é um inteiro que conta a multiplicidade do número de vezes que o valor 0 é atingido pela aplicação F_p . Note que $F_p(u) = 0$ se, e somente se, u é solução de (7.9). A invariância homotópica do grau nos diz que

$$\deg(F_p, \Omega_\Lambda, 0) = \deg(F_1, \Omega_\Lambda, 0),$$

se $0 \notin F_p(\partial\Omega_\Lambda)$ para todo $p \in \left[1, \frac{n+2}{n-2}\right]$. Quando $p = 1$ a equação é linear e não é difícil ver que $\deg(F_1, \Omega_\Lambda, 0) = -1$ para todo $\Lambda > 0$ suficientemente grande. Deste modo, teremos

Teorema 7.4. *Seja (M^n, g) satisfazendo as hipóteses do 7.2, então para todo Λ suficientemente grande e todo $p \in \left[1, \frac{n+2}{n-2}\right]$ temos*

$$\deg(F_p, \Omega_\Lambda, 0) = -1.$$

No caso em que todas as soluções do problema de Yamabe são não degeneradas, como será o caso para uma classe genérica de métricas, nossos resultados anteriores garantem a existência de um número finito de soluções do problema variacional. A desigualdade de Morse forte

$$(-1)^\lambda \leq \sum_{\nu=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda-\nu} C_\nu, \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots$$

onde C_ν denota o número de soluções de índice de Morse ν , válidas nesse caso desde elas são equações subcríticas.

Teorema 7.5. *Suponha que (M^n, g) satisfazem as hipóteses do Teorema 7.2, e suponha que todos os pontos críticos em $[g]$ são não degenerados. Então existem uma quantidade finita de pontos críticos g_1, \dots, g_k e teremos*

$$1 = \sum_{j=1}^k (-1)^{I(g_j)},$$

onde $I(g_j)$ denota o índice de Morse do problema variacional com volume restrito.

APÊNDICE A

FORMA QUADRÁTICA DE POHOZAEV

Nosso objetivo nesse apêndice é estudar a forma quadrática de Pohozaev. No que segue H_{ij} , onde $1 \leq i, j \leq n$, denota uma matriz cujas entradas são polinômios com n variáveis. Usaremos índices repetidos para denotar somatórios. Dadas H_{ij} e W_{ij} matrizes de polinômios, definimos

$$(H_{ij}, W_{ij}) = \int_{|x|=1} H_{ij} W_{ij} d\sigma.$$

Diremos que $H_{ij} \in \mathcal{V}_k$, onde k é um inteiro não negativo, se cada entrada polinomial tem grau k , e verifica:

1. $H_{ij} = H_{ji}$;
2. $H_{ii} = 0$;
3. $x_i H_{ij} = 0$.

Note que,

$$x_i \partial_j H_{ij} = \partial_j (x_i H_{ij}) - \delta_{ij} H_{ij} = 0.$$

Definimos ainda $\mathcal{V}_{\leq k} = \bigoplus_{j=2}^k \mathcal{V}_j$. Dado $H_{ij} \in \mathcal{V}_{\leq k}$ denotamos $H_{ij}^{(l)}$ sua componente de grau l . Seja $(\delta H)_i = \partial_j H_{ij}$ e $\delta^2 h = \partial_i \partial_j H_{ij}$. Iremos nos referir a δH e $\delta^2 H$ como divergência e divergência dupla de H_{ij} , respectivamente.

Dado $H_{ij} \in \mathcal{V}_k$, usando integração por partes obtemos

$$\int_{|x|=1} \partial_i \partial_j H_{ij} d\sigma = 0, \tag{A.1}$$

e

$$\int_{|x|=1} x_l \partial_i \partial_j H_{ij} d\sigma = 0, \quad (\text{A.2})$$

onde $1 \leq l \leq n$. Defina,

$$b_k = \int_0^\infty \frac{s^{k+n-3}}{(1+s^2)^{n-1}} ds \quad \text{para } k < n$$

$$c_k = - \int_0^\infty \frac{(1-s^2)s^{k+n-3}}{(1+s^2)^{n-1}} ds \quad \text{para } k < n-2.$$

O lema a seguir relaciona as integrais acima.

Lema A.1.

$$b_{2m} = \left(\prod_{j=1}^m \frac{n+2j-4}{n-2j} \right) b_0,$$

$$c_{2m} = \frac{4m}{n-2m-2} b_{2m}.$$

Demonstração. Usando integração por partes obtemos,

$$b_{2m} = \frac{n+2m-4}{n-2m} b_{2m-2}.$$

A primeira igualdade segue assim utilizando indução. A segunda igualdade segue do fato que,

$$c_{2m} = b_{2m+2} - b_{2m}.$$

□

Relembre que, $d = \lceil \frac{n-2}{2} \rceil$, e que $\theta_k = 1$ se $k = \frac{n-2}{2}$ e $\theta_k = 0$, caso contrário. Seja $H_{ij} \in \mathcal{V}_{\leq d}$. Se n é ímpar, seja

$$\frac{2}{n-2} I_{1,\varepsilon}^{(n)}(H, H) = \sum_{s,t=2}^d \varepsilon^{s+t} c_{s+t} \int_{S^1} \left(-\frac{1}{2} \partial_j H_{ij}^{(s)} \partial_l H_{il}^{(t)} + \frac{1}{4} \partial_l H_{ij}^{(t)} \right),$$

se n é par,

$$\frac{2}{n-2} I_{1,\varepsilon}^{(n)}(H, H) = \sum_{s,t=2}^d \varepsilon^{s+t} c_{s+t} \int_{S^1} \left(-\frac{1}{2} \partial_j H_{ij}^{(s)} \partial_l H_{il}^{(t)} + \frac{1}{4} \partial_l H_{ij}^{(s)} \partial_l H_{ij}^{(t)} \right) +$$

$$\varepsilon^{n-2} |\log \varepsilon| \int_{S^1} \left(-\frac{1}{2} \partial_j H_{ij}^{(d)} \partial_l H_{il}^{(d)} + \frac{1}{4} \partial_l H_{ij}^{(d)} \partial_l H_{ij}^{(d)} \right).$$

Durante o resto do apêndice denotaremos $g_{ij} = \exp(h_{ij})$, $tr h_{ij}(x) = O(|x|^N)$, onde N é

suficientemente grande. Escreveremos ainda $h_{ij}(x) = H_{ij}(x) + O(|x|^{d+1})$, e

$$H_{ij}(x) = \sum_{|\alpha|=2}^d h_{ij\alpha} x^\alpha.$$

Nas estimativas a seguir, ignoraremos as contribuições do elemento volume, desde que podemos escolher N suficientemente grande.

Lema A.2. *Dado $\eta > 0$, existe $C > 0$, dependendo apenas de n e $|g|_{C^N(B_\sigma(0))}$, tal que*

$$\left| - \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R_g + R_g \right) u_\varepsilon^2 dx - I_{1,\varepsilon}^{(n)}(H, H) \right| \leq C\eta \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{2|\alpha|} |\log \varepsilon|^{\theta|\alpha|} + C\sigma\eta^{-1} \varepsilon^{n-2},$$

se $\sigma \leq 1$ e ε é suficientemente pequeno.

Demonstração. Integrando por partes,

$$- \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R_g + R_g \right) u_\varepsilon^2 dx = \int_{|x| \leq \sigma} R_g u_\varepsilon \psi_\varepsilon dx - \frac{\sigma}{2} \int_{|x|=\sigma} R_g u_\varepsilon^2,$$

onde $\psi_\varepsilon = \frac{n-2}{2} u_\varepsilon + x^k \partial_k u_\varepsilon$. Usando a estimativa (4.6), concluímos que existe $C > 0$, tal que para qualquer $\eta > 0$ dado

$$\begin{aligned} & |R_g - \partial_i \partial_j h_{ij} + \partial_j (H_{ij} \partial_l H_{il}) - \frac{1}{2} \partial_j H_{ij} \partial_l H_{il} + \frac{1}{4} \partial_l H_{ij} \partial_l H_{ij}| \\ & \leq C \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 |x|^{2|\alpha|} + \eta \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 |x|^{2|\alpha|-2} + C\eta^{-1} |x|^{n-3}. \end{aligned}$$

Observe que a expressão acima difere da (4.6) pois aqui $\deg(H_{ij}) \leq d$. Desde que,

$$\int_{|x| \leq \sigma} (\partial_i \partial_j = 0, -\partial_j (H_{ij} \partial_l H_{il})) u_\varepsilon \psi_\varepsilon dx,$$

temos,

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq \sigma} R_g u_\varepsilon \psi_\varepsilon dx &= \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} \partial_j H_{ij} \partial_l H_{il} - \frac{1}{4} \partial_l H_{ij} \partial_l H_{ij} \right) u_\varepsilon \psi_\varepsilon dx \\ &+ O(\eta) \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{2|\alpha|} |\log \varepsilon|^{\theta|\alpha|} + O(\sigma\eta^{-1} \varepsilon^{n-2}). \end{aligned}$$

Mas,

$$\int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} \partial_j H_{ij} \partial_l H_{il} - \frac{1}{4} \partial_l H_{ij} \partial_l H_{ij} \right) u_\varepsilon \psi_\varepsilon dx = \sum_{s,t=2}^d \left(\int_0^\sigma u_\varepsilon \psi_\varepsilon r^{s+t+n-3} dr \right) \int_{S_1} \left(\frac{1}{2} \partial_j H_{ij}^{(s)} \partial_l H_{il}^{(t)} - \frac{1}{4} \partial_l H_{ij}^{(s)} \partial_l H_{ij}^{(t)} \right),$$

onde $S_1 = \{|x| = 1\}$. Agora,

$$\begin{aligned} \int_0^\sigma u_\varepsilon \psi_\varepsilon r^{s+t+n-3} dr &= \frac{n-2}{2} \varepsilon^{s+t} \int_0^{\sigma/3} \frac{(1-r^2) r^{s+t+n-3}}{(1+r^2)} dr \\ &= -\frac{n-2}{2} \varepsilon^{s+t} |\log \varepsilon|^{\frac{\theta_{s+t}}{2}} c_{s+t}^{\frac{1-\theta_{s+t}}{2}} + O(\varepsilon^{n-2}). \end{aligned}$$

donde segue o resultado. □

Se n é ímpar, defina

$$I_{2,\varepsilon}^{(n)}(H, H) = - \sum_{k,l=4}^d k \varepsilon^{k+l} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2(H^{(k)}) Z(H^{(l)}) U dy,$$

e, quando n for par,

$$I_{2,\varepsilon}^{(n)}(H, H) = - \sum_{k,l=4}^d k \varepsilon^{k+l} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2(H^{(k)}) Z(H^{(l)}) U dy - d \varepsilon^{n-2} |\log \varepsilon| \int_{S_1} (\delta^2 H^{(d)}) \Gamma^{(d+2)} (\delta^2 H^{(d)}).$$

Aqui, $Z(H^{(k)}) = \Gamma(\delta^2 H^{(k)}) (1 + |y|^2)^{-\frac{n}{2}}$ denota a solução de

$$\Delta Z(H^{(k)}) + n(n+2) U^{\frac{4}{n-2}} Z(H^{(k)}) = \frac{n-2}{4(n-1)} \delta^2(H^{(k)}) U,$$

construída no capítulo 4.

Lema A.3. *Dado $\eta > 0$, existe $C > 0$, dependendo apenas de n e $|g|_{C^N(B_\sigma(0))}$, tal que*

$$\left| -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R_g + R_g \right) u_\varepsilon \psi_\varepsilon dx - I_{2,\varepsilon}^{(n)}(H, H) \right| \leq C \eta \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{2|\alpha|} |\log \varepsilon|^{|\theta_{|\alpha|}|} + C \sigma \eta^{-1} \varepsilon^{n-2}$$

se $\sigma \leq 1$ e ε é suficientemente pequeno.

Demonstração. Relembre que

$$|z_\varepsilon|(x) \leq C \varepsilon^{\frac{n-2}{2}} \sum_{|\alpha|=4}^{n-4} \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}| (\varepsilon + |x|)^{|\alpha|+2-n}. \quad (\text{A.3})$$

Em particular,

$$|z_\varepsilon|(x) \leq C\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}(\varepsilon + |x|)^{6-n}.$$

Portanto, por (4.7),

$$\begin{aligned} -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k R_g + R_g \right) u_\varepsilon z_\varepsilon dx &= -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k (\delta^2 h) + \delta^2 h \right) u_\varepsilon z_\varepsilon dx + \\ &\quad \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 o(\varepsilon^{2|\alpha|} |\log \varepsilon|^{\theta|\alpha|}) + O(\sigma^5 \varepsilon^{n-2}). \end{aligned}$$

Mais ainda, usando a estimativa (A.3),

$$\begin{aligned} -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k (\delta^2 h) + \delta^2 h \right) u_\varepsilon z_\varepsilon dx &= -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k (\delta^2 H) + \delta^2 H \right) u_\varepsilon z_\varepsilon dx + \\ &\quad O(\eta) \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{2|\alpha|} |\log \varepsilon|^{\theta|\alpha|} + O(\sigma \eta^{-1} \varepsilon^{n-2}) \\ &= -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k (\delta^2 H) + \delta^2 H \right) u_\varepsilon z_\varepsilon^{\leq d} dx + \\ &\quad O(\eta) \sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{2|\alpha|} |\log \varepsilon|^{\theta|\alpha|} + O(\sigma \eta^{-1} \varepsilon^{n-2}). \end{aligned}$$

Onde,

$$\Delta z_\varepsilon^{\leq d} + n(n+2) u_\varepsilon^{\frac{4}{n-2}} z_\varepsilon^{\leq d} = c(n) \sum_{k=4}^d \delta^2 H^{(k)} u_\varepsilon,$$

e assim, $z_\varepsilon^{\leq d}$ depende linearmente de $\delta^2 H$. Observe agora que,

$$\begin{aligned} -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k (\delta^2 H) + \delta^2 H \right) u_\varepsilon z_\varepsilon^{\leq d} dx &= -2 \sum_{k,l=4}^d \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k (\delta^2 H^{(k)}) + \delta^2 H^{(k)} \right) u_\varepsilon z_\varepsilon^{(l)} dx \\ &= - \sum_{k,l=4}^d k \varepsilon^{k+l} \int_{|y| \leq \sigma \varepsilon^{-1}} \delta^2 (H^{(k)}) Z(H^{(l)}) U dy + \\ &\quad O\left(\sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{n-2} \right). \end{aligned}$$

Deste modo, se n é ímpar, então

$$\begin{aligned} -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k (\delta^2 H) + \delta^2 H \right) u_\varepsilon z_\varepsilon^{\leq d} dx &= - \sum_{k,l=4}^d k \varepsilon^{k+l} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2 (H^{(k)}) Z(H^{(l)}) U dy + \\ &\quad O\left(\sum_{|\alpha|=2}^d \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{n-2} \right). \end{aligned}$$

Caso n seja par, teremos

$$\begin{aligned}
 -2 \int_{|x| \leq \sigma} \left(\frac{1}{2} x^k \partial_k (\delta^2 H) + \delta^2 H \right) u_\varepsilon z_\varepsilon^{\leq d} dx &= - \sum_{k,l=4}^d k \varepsilon^{k+l} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2(H^{(k)}) Z(H^{(l)}) U dy - \\
 & d \varepsilon^{n-2} \int_{|y| \leq \sigma \varepsilon^{-1}} \delta^2(H^{(k)}) Z(H^{(l)}) U dy \\
 & + O\left(\sum_{|\alpha|=2}^{d-1} \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{n-2} \right) \\
 & + O(\eta) \sum_{|\alpha|=2}^{d-1} \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}|^2 \varepsilon^{2|\alpha|} \\
 & + O(\eta^{-1}) \sum_{|\alpha|=d} \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}| \varepsilon^{n-2}.
 \end{aligned}$$

Mas nesse caso,

$$\begin{aligned}
 -d \varepsilon^{n-2} \int_{|y| \leq \sigma \varepsilon^{-1}} \delta^2(H^{(k)}) Z(H^{(l)}) U dy &= -d \varepsilon^{n-2} \int_{|y| \leq \sigma \varepsilon^{-1}} (\delta^2 H^{(d)}) \Gamma(\delta^2 H^{(d)}) (1 + |y|^2)^{1-n} U dy \\
 &= d \varepsilon^{n-2} |\log \varepsilon| \int_{S_1} (\delta^2 H^{(d)}) \Gamma^{(d+2)}(\delta^2 H^{(d)}) dy + \\
 & O\left(\sum_{|\alpha|=d} \sum_{i,j} |h_{ij\alpha}| \varepsilon^{n-2} \right).
 \end{aligned}$$

□

Nosso objetivo é estudar a positividade da forma quadrática de Pohozaev

$$I_\varepsilon^{(n)} = I_{1,\varepsilon}^{(n)} + I_{2,\varepsilon}^{(n)} \quad (\text{A.4})$$

no espaço $\mathcal{V}_{\leq d}$. O principal resultado desse apêndice é a seguinte proposição:

Proposição A.1. *Existe $\beta > 0$ tal que, se $6 \leq n \leq 24$,*

$$I_\varepsilon^{(n)}(H, H) \geq \beta \sum_{k=2}^d \varepsilon^{2k} |\log \varepsilon|^{\theta_k} (H_{ij}^{(k)}, H_{ij}^{(k)}),$$

para $H_{ij} \in \mathcal{V}_{\leq d}$.

No entanto, antes de demonstrar a proposição é necessário compreender mais a estrutura de $\mathcal{V}_{\leq d}$. Iniciaremos assim com uma projeção sobre \mathcal{V}_k .

Seja \mathcal{P}_k o espaço dos polinômios homogêneos de grau k .

Lema A.4. *Seja \tilde{H}_{ij} uma matriz simétrica formada por polinômios homogêneos de grau k . Suponha que exista $p, t \in \mathcal{P}_{k-2}$, $q_j \in \mathcal{P}_{k-1}$ tal que:*

$$1. \tilde{H}_{ii} = -p|x|^2;$$

$$2. x_i \tilde{H}_{ij} = -q_j |x|^2;$$

$$3. x_i x_j \tilde{H}_{ij} = -t |x|^4.$$

Se

$$b_j = q_j - \frac{px_j}{2(n-1)} - \frac{(n-2)tx_j}{2(n-1)}$$

e

$$c = \frac{(p-t)|x|^2}{n-1},$$

então,

$$H_{ij} = \tilde{H}_{ij} + b_i x_j + b_j x_i + c \delta_{ij} \in \mathcal{V}_k.$$

Demonstração. É fácil checar que $H_{ij} = H_{ji}$, $H_{ii} = 0$ e $x_i H_{ij} = 0$. \square

Definição A.1. Quando o lema se aplicar, diremos que $H_{ij} = Proj(\tilde{H}_{ij})$.

Diremos que

$$S_{ij} = \text{mod}(x_i, x_j, \delta_{ij})$$

se existe b_i, c tal que $S_{ij} = b_i x_j + b_j x_i + c \delta_{ij}$. Definamos o operador $\mathcal{L}_k : \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{V}_k$ dado por

$$\mathcal{L}_k(H_{ij}) = Proj(|x|^2 F(H_{ij})),$$

onde,

$$F(H_{ij}) = \frac{1}{4} \partial_j \partial_l H_{il} + \frac{1}{4} \partial_i \partial_l H_{jl} - \frac{1}{4} \Delta H_{ij}.$$

O lema A.4 implica que,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(H_{ij}) &= \frac{1}{4} |x|^2 (\partial_j \partial_l H_{il} + \partial_i \partial_l H_{jl} - \Delta H_{ij}) - \frac{k}{4} x_j \partial_l H_{il} - \frac{k}{4} x_i \partial_l H_{jl} + \\ &\quad \frac{1}{2(n-1)} \delta^2 H(x_i x_j - |x|^2 \delta_{ij}). \end{aligned} \tag{A.5}$$

Note que, dado $H_{ij} \in \mathcal{V}_k$ e $W_{ij} \in \mathcal{V}_m$,

$$\begin{aligned} 4(\mathcal{L}_k(H_{ij}), W_{ij}) &= 4 \int_{S_1} Proj(|x|^2 F(H_{ij})) W_{ij} \\ &= 4 \int_{S_1} F(H_{ij}) W_{ij} \\ &= \int_{S_1} (\partial_j \partial_l H_{il} + \partial_i \partial_l H_{jl} - \Delta H_{ij}) W_{ij} \\ &= -2 \int_{S_1} \partial_l H_{il} \partial_j W_{ij} + \int_{S_1} \partial_l H_{ij} \partial_l W_{ij} - k(n+k+m-2) \int_{S_1} H_{ij} W_{ij}. \end{aligned}$$

Em particular $\mathcal{L}_k : \mathcal{V}_k \rightarrow \mathcal{V}_k$ é simétrico com respeito ao produto interno (\cdot, \cdot) . Faremos a seguir a análise dos autovalores deste operador. Seja $p_l \in \mathcal{P}_l$ tal que $2 \leq l \leq k-2$ e

$\Delta p_l = 0$. Defina,

$$\widehat{H}_{ij} = Proj(\partial_i \partial_j p_l | x|^{2m}),$$

onde $k = l - 2 + 2m$. Note que $m \geq 2$. O lema A.4 implica que

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{ij} &= \partial_i \partial_j p_l | x|^{2m} - (l-1)x_i \partial_j p_l | x|^{2m-2} - (l-1)x_j \partial_i p_l | x|^{2m-2} \\ &\quad + \frac{n-2}{n-1} l(l-1) p_l x_i x_j | x|^{2m-4} + \frac{1}{n-1} l(l-1) p_l \delta_{ij} | x|^{2m-2}. \end{aligned}$$

Um cálculo direto mostra que,

$$\partial_i \widehat{H}_{ij} = -\frac{n-2}{n-1} (l-1)(n+l-1) \partial_j p_l | x|^{2m-2} + \frac{n-2}{n-1} l(l-1)(n+l-1) x_j p_l | x|^{2m-4}, \quad (\text{A.6})$$

e

$$\delta^2 \widehat{H} = \frac{n-2}{n-1} l(l-1)(n+l-1)(n+l-2) p_l | x|^{2m-4}. \quad (\text{A.7})$$

Da identidade (A.6), e do fato de

$$\Delta \widehat{H}_{ij} = (2m(n+2m+2l-6) - 4(l-1)) \partial_i \partial_j p_l | x|^{2m-2} + \text{mod}(x_i, x_j, \delta_{ij}),$$

obtemos

$$|x|^2 F(\widehat{H}_{ij}) = A_{l,m} \partial_i \partial_j p_l | x|^{2m} + \text{mod}(x_i, x_j, \delta_{ij}).$$

Aqui,

$$A_{l,m} = (l-1) \left(1 - \frac{n-2}{2(n-1)} (n+l-1) \right) - \frac{m}{2} (n+2m+2l-6). \quad (\text{A.8})$$

Portanto,

$$\mathcal{L}_k(\widehat{H}_{ij}) = A_{l,m} \widehat{H}_{ij}. \quad (\text{A.9})$$

Lema A.5. *Seja $H_{ij} \in \mathcal{V}_k$. Então existem $p_{k-2q} \in \mathcal{P}_{k-2q}$, $q \in 1, \dots, \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$, $\Delta p_{k-2q} = 0$, tal que, se*

$$(\widehat{H}_q)_{ij} = Proj(\partial_i \partial_j p_{k-2q} | x|^{2q+2}),$$

e

$$H_{ij} = W_{ij} + \sum_{q=1}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} (\widehat{H}_q)_{ij},$$

então

$$\partial_i \partial_j W_{ij} = 0.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} (W_{ij}, (\widehat{H}_q)_{ij}) &= 0, \\ ((\widehat{H}_q)_{ij}, (\widehat{H}_s)_{ij}) &= 0, \text{ se } q \neq s, \\ \mathcal{L}_k((\widehat{H}_q)_{ij}) &= A_{k-2q, q+1} (\widehat{H}_q)_{ij}. \end{aligned}$$

Demonstração. A existência de polinômios p_{k-2q} tal que $\delta^2 W = 0$ segue da decomposição de $\delta^2 H$ em esferas harmônicas, observando as identidades (A.1) e (A.2) e usando a identidade (A.7). Mais ainda,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} W_{ij}(\widehat{H}_q)_{ij} &= \int_{S_1} W_{ij} \text{Proj}(\partial_i \partial_j p_{k-2q} |x|^{2q+2}) \\ &= \int_{S_1} W_{ij} \partial_i \partial_j p_{k-2q} \\ &= \int_{S_1} \partial_i \partial_j W_{ij} p_{k-2q} \\ &= 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (\widehat{H}_s)_{ij}(\widehat{H}_q)_{ij} &= \int_{S_1} (\widehat{H}_s)_{ij} \text{Proj}(\partial_i \partial_j p_{k-2q} |x|^{2q+2}) \\ &= \int_{S_1} (\widehat{H}_s)_{ij} \partial_i \partial_j p_{k-2q} \\ &= \int_{S_1} \partial_i \partial_j (\widehat{H}_s)_{ij} p_{k-2q} \\ &= c \int_{S_1} p_{k-2s} p_{k-2q} \\ &= 0, \end{aligned}$$

se $q \neq s$. Aqui, estamos usando a identidade (A.7). □

Defina $\mathcal{W}_k = \{W_{ij} \in \mathcal{V}_k : \partial_i \partial_j W_{ij} = 0\}$. Seja $W_{ij} \in \mathcal{W}_k$, então

$$\partial_i \mathcal{L}_k(W_{ij}) = -\frac{(n+k-2)k}{4} \partial_i W_{ij}, \quad (\text{A.10})$$

em particular, $\partial_i \partial_j \mathcal{L}_k(W_{ij}) = 0$. Portanto, $\mathcal{L}_k : \mathcal{W}_k \rightarrow \mathcal{W}_k$. Suponha que W_{ij} é um autovalor de \mathcal{L}_k , isto é, $\mathcal{L}_k(W_{ij}) = \lambda W_{ij}$. Pela identidade (A.10), concluímos que

$$\lambda = -\frac{(n+k-2)k}{4} \partial_i \quad \text{ou} \quad \partial_i W_{ij} = 0.$$

Defina $\mathcal{D}_k = \{D_{ij} = 0 : \partial_i D_{ij} = 0\}$. A identidade (A.10) implica que $\mathcal{L}_k : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D}_k$. Seja $D_{ij} \in \mathcal{D}_k$, então da identidade (A.5), temos

$$\mathcal{L}_k(D_{ij}) = -\frac{1}{4} |x|^2 \Delta D_{ij}.$$

Então $|x|^2 \Delta : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D}_k$, e desde que

$$|x|^{2m+2} \Delta^{m+1} D_{ij} = |x|^2 \Delta (|x|^{2m} \Delta^m D_{ij}) - 2m(n+2k-2m-2) |x|^{2m} \Delta^m D_{ij},$$

um argumento indutivo mostra que $|x|^{2m}\Delta^m : \mathcal{D}_k \rightarrow \mathcal{D}_k$ para todo $m \geq 1$. Considere agora a decomposição

$$D_{ij} = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} |x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)},$$

onde $\Delta M_{ij}^{(k-2q)} = 0$. Desde que $|x|^{2m}\Delta^m$ permanece invariante sobre \mathcal{D}_k , temos

$$|x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)} \in \mathcal{D}_k,$$

para qualquer $0 \leq q \leq \lfloor \frac{k}{2} \rfloor$. Em outras palavras, $M_{ij}^{(k-2q)} = M_{ji}^{(k-2q)}$, $x_i M_{ij}^{(k-2q)} = 0$ e $\partial_i M_{ij}^{(k-2q)} = 0$. Em particular, $M_{ij}^{(0)} = 0$ ou $M_{ij}^{(1)} = 0$ se k for par ou ímpar, respectivamente. Para ver isto, basta observar que $M_{ij}^{(0)} x_i x_j = 0$ ou $\partial_l M_{ij}^{(1)} x_i x_j = 0$.

Agora,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(|x|^q M_{ij}^{(k-2q)}) &= -\frac{1}{4}|x|^2 \Delta(|x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)}) \\ &= -\frac{1}{2}q(n-2q+2k-2)|x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)}. \end{aligned}$$

Assim, fica demonstrado o seguinte lema:

Lema A.6. *Seja $W_{ij} \in \mathcal{W}_k$. Então existe $\widehat{W}_{ij} \in \mathcal{W}_k$, $M_{ij}^{(k-2q)} \in \mathcal{D}_{k-2q}$, $q = 0, \dots, \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$, tal que*

$$W_{ij} = \widehat{W}_{ij} + \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} |x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)},$$

onde

$$\mathcal{L}_k(\widehat{W}_{ij}) = -\frac{(n+k-2)k}{4}\widehat{W}_{ij},$$

e

$$\Delta M_{ij}^{(k-2q)} = 0.$$

Mais ainda,

$$\begin{aligned} (\widehat{W}_{ij}, |x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)}) &= 0, \\ (|x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)}, |x|^{2s} M_{ij}^{(k-2q)}) &= 0, \text{ se } q \neq s \\ \mathcal{L}_k(|x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)}) &= -\frac{1}{2}q(n-2q+2k-2)|x|^{2q} M_{ij}^{(k-2q)}. \end{aligned}$$

Observação A.1. *Note que*

$$-\frac{(n+k-2)k}{4} \neq -\frac{1}{2}q(n-2q+2k-2), \quad (\text{A.11})$$

para $q = 0, \dots, \lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor$.

Voltemos agora ao estudo da positividade $I_\varepsilon^{(n)}$ em $\mathcal{V}_{\leq d}$.

Demonstração da Proposição A.1: Dado $H_{ij}^{(m)} \in \mathcal{V}_m$, $\overline{H}_{ij}^{(k)} \in \mathcal{V}_k$, defina

$$B(H_{ij}^{(m)}, \overline{H}_{ij}^{(k)}) = \int_{S_1} \left(-\frac{1}{2} \partial_j H_{ij}^{(m)} \partial_l \overline{H}_{il}^{(k)} + \frac{1}{4} \partial_l H_{ij}^{(m)} \partial_l \overline{H}_{ij}^{(k)} \right).$$

Então,

$$\begin{aligned} B(H_{ij}^{(m)}, \overline{H}_{ij}^{(k)}) &= \int_{S_1} H_{ij}^{(m)} \left(\frac{1}{4} \partial_j \partial_l \overline{H}_{ij}^{(k)} + \frac{1}{4} \partial_i \partial_l \overline{H}_{jl}^{(k)} - \frac{1}{4} \Delta \overline{H}_{ij}^{(k)} \right) \\ &\quad + \frac{(n+m+k-2)k}{4} \int_{S_1} H_{ij}^{(m)} \overline{H}_{ij}^{(k)} \\ &= \int_{S_1} H_{ij}^{(m)} \left(\mathcal{L}_k(\overline{H}_{ij}^{(k)}) + \frac{(n+m+k-2)}{4} \overline{H}_{ij}^{(k)} \right). \end{aligned}$$

Seja $H_{ij} \in \mathcal{V}_{\leq d}$. Então, usando a notação do Lema A.6,

$$H_{ij}^{(k)} = W_{ij}^{(k)} + \sum_{q=1}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)},$$

para $2 \leq k \leq d$. Seja $W_{ij} = \sum_{k=2}^d W_{ij}^{(k)}$, e $\widehat{H}_{ij} = \sum_{k=2}^d \sum_{q=1}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}$. Agora,

$$I_\varepsilon^{(n)}(W_{ij}^{(m)}, (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}) = I_{1,\varepsilon}^{(n)}(W_{ij}^{(m)}, (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}),$$

desde que $\delta^2 W^{(m)} = 0$. Mas,

$$\begin{aligned} I_{1,\varepsilon}^{(n)}(W_{ij}^{(m)}, (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}) &= cB(W_{ij}^{(m)}, (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}) \\ &= c \int_{S_1} W_{ij}^{(m)} \left(\mathcal{L}_k((\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}) + \frac{(n+m+k-2)k}{4} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)} \right) \\ &= c' \int_{S_1} W_{ij}^{(m)} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)} \\ &= c' \int_{S_1} W_{ij}^{(m)} \partial_i \partial_j p_{k-2q}^{(k)} \\ &= c' \int_{S_1} \partial_i \partial_j W_{ij}^{(m)} p_{k-2q}^{(k)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$I_\varepsilon^{(n)}(H_{ij}, H_{ij}) = I_\varepsilon^{(n)}(W_{ij}, W_{ij}) + I_\varepsilon^{(n)}(\widehat{H}_{ij}, \widehat{H}_{ij}),$$

e

$$(H_{ij}, H_{ij}) = (W_{ij}, W_{ij}) + (\widehat{H}_{ij}, \widehat{H}_{ij}).$$

Pelo Lema A.7,

$$W_{ij}^{(k)} = \widehat{W}_{ij}^{(k)} + \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)},$$

onde $2 \leq k \leq d$. Seja $\widehat{W}_{ij} = \sum_{k=2}^d \widehat{W}_{ij}^{(k)}$ e

$$D_{ij} = \sum_{k=2}^d \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}.$$

Agora,

$$\begin{aligned} B(\widehat{W}_{ij}^{(m)}, |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}) &= \int_{S_1} \widehat{W}_{ij}^{(m)} \left\{ \mathcal{L}_k(|x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(n+m+k-2)k}{4} |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)} \right\} \\ &= c'' \int_{S_1} \widehat{W}_{ij}^{(m)} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}, \end{aligned}$$

onde,

$$c'' = \frac{(n+m+k-2)k}{4} - \frac{1}{2}q(n-2q+2k-2).$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} B(\widehat{W}_{ij}^{(m)}, |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}) &= \int_{S_1} |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)} \left(\mathcal{L}_m(\widehat{W}_{ij}^{(m)}) + \frac{(n+m+k-2)m}{4} \widehat{W}_{ij}^{(m)} \right) \\ &= \frac{km}{4} \int_{S_1} \widehat{W}_{ij}^{(m)} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}. \end{aligned}$$

Portanto, a desigualdade (A.11), implica que,

$$B(\widehat{W}_{ij}^{(m)}, |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}) = 0,$$

e

$$\int_{S_1} \widehat{W}_{ij}^{(m)} |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)} = 0.$$

Então,

$$I_\varepsilon^{(n)}(H_{ij}, H_{ij}) = I_\varepsilon^{(n)}(\widehat{W}_{ij}, \widehat{W}_{ij}) + I_\varepsilon^{(n)}(D_{ij}, D_{ij}) + I_\varepsilon^{(n)}(\widehat{H}_{ij}, \widehat{H}_{ij}),$$

e

$$(H_{ij}, H_{ij}) = (\widehat{W}_{ij}, \widehat{W}_{ij}) + (D_{ij}, D_{ij}) + (\widehat{H}_{ij}, \widehat{H}_{ij}).$$

Dividiremos assim o estudo da positividade da forma quadrática em três casos.

Quando n é par, devido ao termo envolvendo o logarítmico, precisamos analisar

primeiramente este termo em \mathcal{V}_d . Portanto definiremos,

$$J(H_{ij}^{(d)}, H_{ij}^{(d)}) = B(H_{ij}^{(d)}, H_{ij}^{(d)}) - \int_{S_1} (\delta^2 H^{(d)}) \Gamma^{(d+2)} (\delta^2 H^{(d)}),$$

e

$$(I')_\varepsilon^{(n)}(H, H) = \frac{n-2}{2} \sum_{s,t=2}^{d'} \varepsilon^{s+t} c_{s+t} B(H_{ij}^{(s)}, H_{ij}^{(t)}) - \sum_{s,t=4}^{d'} s \varepsilon^{s+t} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2(H^{(s)}) Z(H^{(t)}) U dy,$$

onde $d' = \lfloor \frac{n-3}{2} \rfloor$. Desde que $(I')_\varepsilon^{(n)}(H, H) = (I')_1^{(n)}(H_\varepsilon, H_\varepsilon)$, onde $(H_\varepsilon)^{(s)} = \varepsilon^s H^{(s)}$, restringiremos a análise à J e $(I')_1^{(n)}$.

Caso 1: $H_{ij} = \widehat{W}_{ij} = \sum_{k=2}^d \widehat{W}_{ij}^{(k)}$, onde $\mathcal{L}_k(\widehat{W}_{ij}^{(k)}) = -\frac{(n+k-2)k}{4} \widehat{W}_{ij}^{(k)}$. Note primeiramente que,

$$B(\widehat{W}_{ij}^{(k)}, \widehat{W}_{ij}^{(m)}) = \frac{km}{4} (\widehat{W}_{ij}^{(k)}, \widehat{W}_{ij}^{(m)}).$$

Portanto,

$$J(\widehat{W}_{ij}^{(d)}, \widehat{W}_{ij}^{(d)}) = \frac{d^2}{4} |\widehat{W}_{ij}^{(d)}|^2.$$

Então J é sempre positivo neste caso. Por outro lado,

$$\begin{aligned} (I')_1^{(n)}(\widehat{W}, \widehat{W}) &= \frac{n-2}{8} \sum_{s,t=2}^{d'} st c_{s+t} (\widehat{W}_{ij}^{(s)}, \widehat{W}_{ij}^{(t)}) \\ &= \frac{n-2}{8} \sum_{2 \leq s,t \leq d'}^{s,t \text{ par}} st c_{s+t} (\widehat{W}_{ij}^{(s)}, \widehat{W}_{ij}^{(t)}) + \frac{n-2}{8} \sum_{2 \leq s,t \leq d'}^{s,t \text{ impar}} st c_{s+t} (\widehat{W}_{ij}^{(s)}, \widehat{W}_{ij}^{(t)}) \end{aligned}$$

Desde que estamos interessados apenas no caso $n \leq 24$, consideraremos apenas os casos

$$\widehat{W}_{ij} = \sum_{k=1}^4 \widehat{W}_{ij}^{(2k+2)},$$

$$\widehat{W}_{ij} = \sum_{k=1}^4 \widehat{W}_{ij}^{(2k+1)}$$

onde estamos usando o fato de $\widehat{W}_{ij}^{(2)} = 0$, desde que $\mathcal{V}_2 \subset \mathcal{D}_2$. Seja,

$$m_{kl}^{par} = (2k+2)(2l+2)c_{2k+2l+4},$$

e

$$m_{kl}^{impar} = (2k+1)(2l+1)c_{2k+2l+2}$$

Com a ajuda do Lema A.1, podemos checar em [13] que para cada $1 \leq p \leq 24$, a matriz

$$(m_{kl}^{par})_{1 \leq k, l \leq p}$$

é positiva definida se $4p + 6 \leq 24$. O mesmo é válido para

$$(m_{kl}^{par})_{1 \leq k, l \leq p}$$

se $4p + 4 < n \leq 24$. O que implica na positividade de $(I_\varepsilon)^{(n)}$ no caso 1, para $n \leq 24$.

Caso 2: $H_{ij} = D_{ij} = \sum_{k=2}^d D_{ij}^{(k)}$, onde

$$D_{ij}^{(k)} = \sum_{q=0}^{\lfloor \frac{k-2}{2} \rfloor} |x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)},$$

$(M_k)_{ij}^{(k-2q)} \in \mathcal{D}_{k-2q}$, e $\Delta(M_k)_{ij}^{(k-2q)}$, Observe primeiramente que

$$B(|x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}, |x|^{2q'} (M_m)_{ij}^{(m-2q')}) = c'' \int_{S_1} (M_k)_{ij}^{(k-2q)} (M_m)_{ij}^{(m-2q')}, \quad (\text{A.12})$$

onde

$$c'' = \frac{(n + m + k - 2)k}{4} - \frac{1}{2}q(n - 2q + 2k - 2).$$

Isto implica que,

$$I_\varepsilon^{(n)}(|x|^{2q} (M_k)_{ij}^{(k-2q)}, |x|^{2q'} (M_m)_{ij}^{(m-2q')}) = 0,$$

se $k - 2q \neq m - 2q'$. Defina $(E_s)_{ij} = \sum_{0 \leq 2q \leq d-s} |x|^{2q} (M_{s+2q})_{ij}^{(s)}$, para $2 \leq s \leq d$. Então, $D_{ij} = \sum_{s=2}^d (E_s)_{ij}$,

$$I_\varepsilon^{(n)}(D_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=2}^d I_\varepsilon^{(n)}((E_s)_{ij}, (E_s)_{ij}),$$

$$(D_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=2}^d ((E_s)_{ij}, (E_s)_{ij}),$$

Da igualdade (A.12), obtemos

$$B(|x|^{2q} (M_{s+2q})_{ij}^{(s)}, |x|^{2q'} (M_{s+2q'})_{ij}^{(s)}) = \left(qq' + \frac{(n + 2q + 2q' + 2s - 2)s}{4} \right) ((M_{s+2q})_{ij}^{(s)}, (M_{s+2q'})_{ij}^{(s)}).$$

Fixemos $2 \leq s \leq d$. Se $s + 2q = s + 2q' = d$, então

$$J(|x|^{d-s} (M_d)_{ij}^{(s)}, |x|^{d-s} (M_d)_{ij}^{(s)}) = \frac{1}{4}(d^2 + s^2 + s(n - 2)) |(M_d)_{ij}^{(s)}|^2,$$

que implica que J é positiva no caso 2.

Retornemos a análise de $(I')_1^{(n)}$, então $s + 2q \leq d'$. Desde que estamos trabalhando apenas com o caso em que $n \leq 24$, então podemos restringir nosso problema aos casos em que $s = 2, \dots, 10$. Para tal s , o problema se reduz a analisar uma matriz de tamanho no máximo $\lceil \frac{12-s}{2} \rceil \times \lceil \frac{12-s}{2} \rceil$. Agora,

$$(I')_1^{(n)}(E_s, E_s) = \frac{n-2}{2} \sum_{2q, 2q'=0}^{d'-s} m_{q+1, q'+1}^s ((M_{s+2q})_{ij}^{(s)}, (M_{s+2q'})_{ij}^{(s)}),$$

onde,

$$m_{q+1, q'+1}^s = c_{2s+2q+2q'} \left(qq' + \frac{(n+2q+2q'+2s-2)s}{4} \right).$$

Depois de longas verificações em [13], e com a ajuda do Lema A.1, verificamos que para cada $2 \leq s \leq 10$, $1 \leq p \leq \lceil \frac{12-s}{2} \rceil$, a matriz

$$(m_{k,l}^s)_{1 \leq k, l \leq p}$$

é positiva definida se $4p + 2s - 2 < n \leq 24$. O que implica a positividade de $(I)_\varepsilon^{(n)}$ no caso 2, para $n \leq 24$.

Caso 3: $H_{ij} = \widehat{H}_{ij} = \sum_{k=4}^d \widehat{H}_{ij}^{(k)}$, onde $\widehat{H}_{ij}^{(k)} = \sum_{q=1}^{\lceil \frac{k-2}{2} \rceil} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}$ e $(\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)} = Proj(\partial_i \partial_j (p_k)_{k-2q} | x|^{2q+2})$, $(p_k)_{k-2q} \in \mathcal{P}_{k-2q}$, $\Delta(p_k)_{k-2q} = 0$. Note que, pelo Lema A.6,

$$\begin{aligned} B((\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}, (\widehat{H}_{q'})_{ij}^{(m)}) &= \int_{S_1} (\widehat{H}_{q'})_{ij}^{(m)} \left(\mathcal{L}_k((\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}) + \frac{(n+m+k-2)k}{4} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)} \right) \\ &= \left(A_{k-2q, q+1} + \frac{(n+m+k-2)k}{4} \right) \int_{S_1} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)} (\widehat{H}_{q'})_{ij}^{(m)}. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \int_{S_1} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)} (\widehat{H}_{q'})_{ij}^{(m)} &= \int_{S_1} (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)} \partial_i \partial_j (p_m)_{m-2q'} \\ &= \int_{S_1} \partial_i \partial_j (\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)} (p_m)_{m-2q'} \\ &= \alpha_{k-2q} \int_{S_1} (p_k)_{k-2q} (p_m)_{m-2q'} \end{aligned}$$

onde

$$\alpha_l = \frac{n-2}{n-1} l(l-1)(n+l-1)(n+l-2).$$

Em particular,

$$B((\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}, (\widehat{H}_{q'})_{ij}^{(m)}) = 0, \quad ((\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}, (\widehat{H}_{q'})_{ij}^{(m)}) = 0,$$

se $k - 2q \neq m - 2q'$. Relembre que

$$\Delta Z((\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}) + n(n+2)U^{\frac{4}{n-2}}Z((\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}) = \frac{n-2}{4(n-1)}\alpha_{k-2q}(p_k)_{k-2q}|x|^{2q-2}U.$$

Podemos escrever,

$$Z((\widehat{H}_q)_{ij}^{(k)}) = \frac{n-2}{4(n-1)}\alpha_{k-2q}\Gamma_{k,q}(1+|x|^2)^{-\frac{n}{2}}$$

onde

$$T(\Gamma_{k,q}) = (p_k)_{k-2q}(|x|^{2q-2} + 2|x|^{2q} + |x|^{2q+2}).$$

relembrando que $T(\Gamma) = (1+|y|^2)\Delta\Gamma - 2ny \cdot \nabla\Gamma + 2n\Gamma$. Então,

$$\begin{aligned} T(|x|^{2j}(p_k)_{k-2q}) &= (2k+2j-4q-2)(2j-n)|x|^{2j}(p_k)_{k-2q} \\ &\quad + 2j(n+2j+2k-4q-2)|x|^{2j-2}(p_k)_{k-2q}, \end{aligned}$$

e então, podemos escrever

$$\Gamma_{k,q} = \sum_{j=0}^{q+1} \Gamma(k, q, j)|x|^{2j}(p_k)_{k-2q}.$$

Os coeficientes $\Gamma(k, q, j)$ podem ser computados indutivamente da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \Gamma(k, q, q+1) &= -\frac{1}{(2k-2q)(n-2q-2)}, \\ \Gamma(k, q, q) &= -\frac{2-2(q+1)(n+2k-2q)\Gamma(k, q, q+1)}{(2k-2q-2)(n-2q)}, \\ \Gamma(k, q, q-1) &= -\frac{1-2q(n+2k-2q-2)\Gamma(k, q, q)}{(2k-2q-4)(n-2q+2)}, \end{aligned}$$

e

$$\Gamma(k, q, j) = \frac{2(j+1)(n+2j+2k-4q)}{(2k+2j-4q-2)(n-2j)}\Gamma(k, q, j+1),$$

para $0 \leq j \leq q - 2$. Portanto,

$$\begin{aligned}
 & \frac{4(n-1)}{(n-2)} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2((\widehat{H}_{q'}^{(m)})_{ij}) Z((\widehat{H}_q^{(k)})_{ij}) U dy = \\
 & \alpha_{k-2q} \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2((\widehat{H}_{q'}^{(m)})_{ij}) \Gamma_{k,q} (1 + |y|^2)^{1-n} dy \\
 & = \alpha_{k-2q} \alpha_{m-2q'} \int_{\mathbb{R}^n} (p_m)_{m-2q'} \Gamma_{k,q} |y|^{2q'-2} (1 + |y|^2)^{1-n} dy \\
 & = \alpha_{k-2q} \alpha_{m-2q'} \sum_{j=0}^{q+1} \Gamma(k, q, j) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(p_m)_{m-2q'} (p_k)_{k-2q} |y|^{2j+2q'-2}}{(1 + |y|^2)^{n-1}} dy \\
 & = \alpha_{k-2q} \alpha_{m-2q'} \left(\sum_{j=0}^{q+1} \Gamma(k, q, j) b_{k+m-2q+2j} \right) \int_{S_1} (p_k)_{k-2q} (p_m)_{m-2q'} \cdot
 \end{aligned}$$

Em particular,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta^2((\widehat{H}_{q'}^{(m)})_{ij}) Z((\widehat{H}_{q'}^{(m)})_{ij}) U dy = 0,$$

se $k - 2q \neq m - 2q'$. Defina, para $2 \leq s \leq d - 2$,

$$(\widehat{E}_s)_{ij} = \sum_{q=1}^{\lfloor \frac{d-s}{2} \rfloor} Proj(\partial_i \partial_j (p_{s+2q})_s |x|^{2q+2}).$$

Então $\widehat{H}_{ij} = \sum_{s=2}^{d-2} (\widehat{E}_s)_{ij}$, e

$$\begin{aligned}
 I_\varepsilon^{(n)}(\widehat{H}_{ij}, \widehat{H}_{ij}) &= \sum_{s=2}^{d-2} I_\varepsilon^{(n)}((\widehat{E}_s)_{ij}, (\widehat{E}_s)_{ij}), \\
 (\widehat{H}_{ij}, \widehat{H}_{ij}) &= \sum_{s=2}^{d-2} ((\widehat{E}_s)_{ij}, (\widehat{E}_s)_{ij}),
 \end{aligned}$$

Quando n é par, e se $s + 2q = s + 2q' = d$, então

$$\begin{aligned}
 J((\widehat{H}_q)^{(d)}_{ij}, (\widehat{H}_q)^{(d)}_{ij}) &= B((\widehat{H}_q)^{(d)}_{ij}, (\widehat{H}_q)^{(d)}_{ij}) + \frac{n-2}{4(n-1)(2d-2q)(n-2q-2)} (\alpha)^2 \int_{S_1} (p_{s+2q})_s^2 \\
 &= t_{s,q} \int_{S_1} (p_{s+2q})_s^2.
 \end{aligned}$$

Aqui,

$$t_{s,q} = [(A_{s,q+1} + \frac{(n-2)^2}{4}) \alpha_s + \frac{n-2}{4(n-1)(d+s)(n+s-d-2)} (\alpha_s)^2]$$

onde,

$$A_{s,q+1} = (s-1) \left(1 - \frac{n-2}{2(n-1)(n+s-1)} - \frac{q+1}{2} (n+2q+2s-4) \right).$$

É possível checar que,

$$t_{s,q} = \frac{1}{16} \frac{(4s^2 - 8s + 4 + 4ns - 8n + 5n^2 - n^3)^2}{(n-1)^2(n-2+2s)^2} \alpha_s,$$

se $s + 2q = \frac{n-2}{2}$. O que implica que J é positiva nesse caso. Mais ainda,

$$\begin{aligned} (I'_1)^{(n)}((\widehat{E}_s)_{ij}, (\widehat{E}_s)_{ij}) &= \frac{n-2}{2} \sum_{q,q'=1}^{\lfloor \frac{d'-s}{2} \rfloor} c_{2s+2q+2q'} B((\widehat{E}_s)_{ij}^{(s+2q)}, (\widehat{E}_s)_{ij}^{(s+2q')}) - \\ &\quad \frac{n-2}{2} \sum_{q,q'=1}^{\lfloor \frac{d'-s}{2} \rfloor} (s+2q) \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2((\widehat{E}_s)_{ij}^{(s+2q)}) Z((\widehat{E}_s)_{ij}^{(s+2q')}) U dy \\ &= \sum_{q,q'=1}^{\lfloor \frac{d'-s}{2} \rfloor} M(s, q, q') \int_{S_1} (p_{s+2q})_s (p_{s+2q'})_s, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned} M(s, q, q') &= \frac{n-2}{2} c_{2s+2q+2q'} \alpha_s \left(A_{s,q+1} + \frac{(n+2s+2q+2q'-2)(s+2q)}{4} \right) - \\ &\quad \frac{n-2}{4(n-1)} \alpha_s^2 (s+q+q') \left(\sum_{j=0}^{q+1} \Gamma(s+2q, q, j) b_{2s+2q'+2j} \right). \end{aligned}$$

Aqui estamos usando que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta^2(H^{(k)}) Z(W^{(l)}) U dy = \int_{\mathbb{R}^n} \delta^2(W^{(l)}) Z(H^{(k)}) U dy, \quad (\text{A.13})$$

desde que por integração obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta Z(H^{(k)}) + n(n+2) U^{\frac{4}{n-2}} Z(H^{(k)}) \right) Z(W^{(l)}) dy = \\ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta Z(W^{(l)}) + n(n+2) U^{\frac{4}{n-2}} Z(W^{(l)}) \right) Z(H^{(k)}) dy \end{aligned}$$

Assim, podemos checar em [13] que, para todo $2 \leq s \leq 8$, e $1 \leq p \leq \lfloor \frac{10-s}{2} \rfloor$, a matriz

$$(M(s, q, q'))_{1 \leq q, q' \leq p}$$

é positiva definida se $2s + 4p + 2 < n \leq 24$, o que finaliza a demonstração da positividade de $(I'_\varepsilon)^{(n)}$ no caso 3, para $n \leq 24$. \square

A proposição a seguir afirma que $n = 25$ é a dimensão crítica da positividade da forma quadrática.

Proposição A.2. *Se $n \geq 25$, então a forma quadrática $I'_\varepsilon^{(n)}$ tem autovalores negativos.*

Demonstração. Ver (12) para detalhes da demonstração.

Seja $(m^2)_{kl}$ a matriz do caso 2 da demonstração acima. Um cálculo mostra que

$$\text{discrim}\left(\sum_{k,l=1}^2 (m^2)_{kl} a_k a_l, a_2\right) = 16 \frac{n^2(n+2)^2(n+4)^2(n^2-54n+152)}{(n-8)^2(n-6)^2(n-4)^2(n-10)} b_0^2.$$

o que implica que $((m^2)_{kl})_{1 \leq k,l \leq 2}$ não é positiva definida se $n \geq 52$. Por outro lado, podemos checar que $((m^2)_{kl})_{1 \leq k,l \leq 4}$ não é positiva definida se $25 \leq n \leq 52$. Dado W_{ikjl} com todas as simetrias do tensor de Weyl, e tal que $\sum |W_{ikjl}|^2 > 0$, defina

$$D_{ij}^{(2)} = \sum_{k,l=1}^n W_{ikjl} x_k x_l,$$

e

$$D_{ij} = a_1 D_{ij}^{(2)} + a_2 |x|^2 D_{ij}^{(2)} + a_3 |x|^4 D_{ij}^{(2)} + a_4 |x|^6 D_{ij}^{(2)}.$$

Concluimos então que, se $n \geq 25$ existem sempre a_1, a_2, a_3, a_4 tal que

$$I_\varepsilon^{(n)}(D_{ij}, D_{ij}) < 0,$$

o que finaliza a demonstração. □

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Thierry Aubin. Équations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire. *Bull. Sci. Math. (2)*, 99(4):201–210, 1975.
- [2] Thierry Aubin. *Some nonlinear problems in Riemannian geometry*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [3] Thierry Aubin. *A course in differential geometry*, volume 27 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [4] Abbas Bahri. Another proof of the Yamabe conjecture for locally conformally flat manifolds. *Nonlinear Anal.*, 20(10):1261–1278, 1993.
- [5] Robert Bartnik. The mass of an asymptotically flat manifold. *Comm. Pure Appl. Math.*, 39(5):661–693, 1986.
- [6] Simon Brendle. Blow-up phenomena for the Yamabe equation. *J. Amer. Math. Soc.*, 21(4):951–979, 2008.
- [7] Simon Brendle and Fernando C. Marques. Blow-up phenomena for the Yamabe equation. II. *J. Differential Geom.*, 81(2):225–250, 2009.
- [8] Luis A. Caffarelli, Basilis Gidas, and Joel Spruck. Asymptotic symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42(3):271–297, 1989.
- [9] Chiun-Chuan Chen and Chang-Shou Lin. Estimate of the conformal scalar curvature equation via the method of moving planes. II. *J. Differential Geom.*, 49(1):115–178, 1998.

- [10] Olivier Druet, Emmanuel Hebey, and Frédéric Robert. *Blow-up theory for elliptic PDEs in Riemannian geometry*, volume 45 of *Mathematical Notes*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2004.
- [11] David Gilbarg and Neil S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [12] Emmanuel Hebey. *Nonlinear analysis on manifolds: Sobolev spaces and inequalities*, volume 5 of *Courant Lecture Notes in Mathematics*. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [13] M. A. Khuri, F. C. Marques, and R. M. Schoen. Details of calculations from the appendix. <http://math.stanford.edu/schoen/yamabe-paper/>.
- [14] M. A. Khuri, F. C. Marques, and R. M. Schoen. A compactness theorem for the Yamabe problem. *J. Differential Geom.*, 81(1):143–196, 2009.
- [15] John M. Lee and Thomas H. Parker. The Yamabe problem. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 17(1):37–91, 1987.
- [16] Yanyan Li and Meijun Zhu. Yamabe type equations on three-dimensional Riemannian manifolds. *Commun. Contemp. Math.*, 1(1):1–50, 1999.
- [17] Fernando Coda Marques. A priori estimates for the Yamabe problem in the non-locally conformally flat case. *J. Differential Geom.*, 71(2):315–346, 2005.
- [18] L. Nirenberg. *Topics in nonlinear functional analysis*. Courant Institute of Mathematical Sciences, New York University, New York, 1974. With a chapter by E. Zehnder, Notes by R. A. Artino, Lecture Notes, 1973–1974.
- [19] Morio Obata. The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds. *J. Differential Geometry*, 6:247–258, 1971/72.
- [20] Daniel Pollack. Nonuniqueness and high energy solutions for a conformally invariant scalar equation. *Comm. Anal. Geom.*, 1(3-4):347–414, 1993.
- [21] R. Schoen and S.-T. Yau. *Lectures on differential geometry*. Conference Proceedings and Lecture Notes in Geometry and Topology, I. International Press, Cambridge, MA, 1994. Lecture notes prepared by Wei Yue Ding, Kung Ching Chang [Gong Qing Zhang], Jia Qing Zhong and Yi Chao Xu, Translated from the Chinese by Ding and S. Y. Cheng, Preface translated from the Chinese by Kaising Tso.

- [22] Richard Schoen. Conformal deformation of a Riemannian metric to constant scalar curvature. *J. Differential Geom.*, 20(2):479–495, 1984.
- [23] Richard Schoen and Shing Tung Yau. On the proof of the positive mass conjecture in general relativity. *Comm. Math. Phys.*, 65(1):45–76, 1979.
- [24] Neil S. Trudinger. Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3)*, 22:265–274, 1968.
- [25] Hidehiko Yamabe. On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds. *Osaka Math. J.*, 12:21–37, 1960.