

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

Classificação de Soluções de algumas  
Equações Elípticas não Lineares

POR  
EUDES MENDES BARBOZA

sob a orientação do  
Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Julho de 2013  
João Pessoa- PB

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática

# Classificação de Soluções de algumas Equações Elípticas não Lineares

POR  
Eudes Mendes Barboza

sob a orientação do  
Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Julho de 2013  
João Pessoa-PB

B238c Barboza, Eudes Mendes.  
Classificação de soluções de algumas equações elípticas  
não lineares / Eudes Mendes Barboza.- João Pessoa, 2013.  
123f.  
Orientador: João Marcos Bezerra do Ó  
Dissertação (Mestrado) – UFPB/CCEN  
1. Matemática. 2. Equações Diferenciais Parciais. 3. Método  
dos Planos Móveis. 4. Método das Esferas Móveis.

UFPB/BC

CDU: 51(043)

# Classificação de Soluções de algumas Equações Elípticas não Lineares

POR  
Eudes Mendes Barboza

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Graduação em Matemática-CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

---

**Prof. Dr. João Marco Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)**

---

**Prof. Dr. Claudianor Oliveira Alves - UFCG**

---

**Prof. Dr. Manassés Xavier de Souza - UFPB**

---

**Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB(Suplente)**

Universidade Federal da Paraíba  
Centro de Ciências Exatas e da Natureza  
Departamento de Matemática  
Pós-Graduação em Matemática

Julho/2013

# Dedicatória

*À minha família, aos meus estimados  
professores, aos meus queridos alunos  
e aos meus fiéis amigos.*

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer a todos aqueles que estiveram comigo ao longo dessa caminhada e me ajudaram direta ou indiretamente. A Deus por ter me erguido e amparado em todos os momentos difíceis da vida.

A minha família: minhas mães donas Lourdes, minha irmã Li, minha prima Suêny e minhas tias Marta e Glória que me deram suporte para transpor as dificuldades encontradas ao longo desses últimos anos.

A todos os meus Professores, em especial, a meu orientador Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó e a Prof. Ms. Flávia Jerônimo Barbosa, que me estimularam e me auxiliaram a cumprir mais esta etapa.

A todos os meus colegas de academia com os quais pude contar nessa jornada, em especial à galera do Milênio e aos Pedregais que transpassaram a barreira do coleguismo e se tornaram amigos e em alguns casos, irmãos como Esteban, Ellen, Mariana, Gérsica, Mylenna, Mônica, Rubicelly, Tony, Luan, Ginaldo, Wanderson... em especial, a Claudinha e a Ricardo Pinheiro por terem me ajudado de forma significativa nesta fase final.

A meus padrinhos Val e Freire e meus queridos amigos Tati, Renata, Nayana, Thiago, Jason, Niedja, Leyla, Jessica, Elize... que sempre contribuem positivamente para o meu crescimento.

E ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Dê-me uma alavanca e um ponto de apoio e moverei o mundo."(Arquimedes)

# Resumo

Neste trabalho, classificamos as soluções da equação  $\Delta u + fe^u = 0$  em  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}_+^2$ . Para isso, utilizamos basicamente o Método dos Planos Móveis e o Método das Esferas Móveis, garantindo, sob certas condições a monotonicidade e a simetria radial da solução. O primeiro método foi usado para estudarmos o caso  $f \equiv 1$ , em  $\mathbb{R}^2$  com  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u$  finito. O outro foi utilizado para verificar que a equação não tem solução quando  $f$  é uma função contínua, radialmente simétrica e monótona na região em que tem imagem positiva e não constante. Este último método também foi aplicado no estudo do problema

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha e^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2; \end{cases}$$

para  $\alpha = 1, \alpha = -1$  ou  $\alpha = 0$ , modificando as condições em relação a finitude das integrais  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u$  e  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2}$ . Na maioria dos casos em que a equação tem solução, verificamos que esta era a radialmente simétrica. A partir dessa simetria, transformamos nas equações diferenciais parciais em equações diferenciais ordinárias e podemos classificar suas soluções.

**Palavras-chave:** Equações Diferenciais Parciais, Método dos Planos Móveis, Método das Esferas Móveis.

# Abstract

In this work, we classify the solutions of the equation  $\Delta u + fu^c = 0$  in  $\mathbb{R}^2$  or  $\mathbb{R}_+^2$ . For this, we use basically the Moving Planes Method and and Moving Spheres Method. These methods ensure monotonicity and radial symmetry of the solution under certain conditions. The first method was used to study the case  $f \equiv 1$  in  $\mathbb{R}^2$  when  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u$  is finite. The other was used to verify that the equation has no solution when  $f$  is a continuous function and radially symmetric, monotone in the region which has positive image and not constant. The latter method was also applied to the study of the problem

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha e^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2; \end{cases}$$

for  $\alpha = 1, \alpha = -1$  or  $\alpha = 0$ , modifying the conditions under the finiteness of  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u$  and  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2}$ . In most cases, when the equation has the solution, it was verified that the radially symmetrical. From this symmetry, we transform our Partial Differential Equations for Ordinary Differential Equations and we classify their solutions.

**Keywords:** Partial Differential Equations, Moving Planes Method and Moving Spheres Method.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>1</b>
<b>0 Conceitos e Resultados Preliminares</b>	<b>4</b>
<b>I O Método dos Planos Móveis e o Método das Esferas Móveis</b>	<b>12</b>
<b>1 O Método dos Planos Móveis e Aplicações</b>	<b>14</b>
1.1 Descrição do Método do Planos Móveis . . . . .	15
1.2 Aplicação para domínio limitado . . . . .	16
1.3 Aplicação para domínio não limitado . . . . .	20
1.3.1 Prova do Teorema (16) . . . . .	26
<b>2 Transformada de Kelvin e Método das Esferas Móveis</b>	<b>31</b>
2.1 A Transformada de Kelvin. . . . .	31
2.2 O Método das Esferas Móveis . . . . .	36
2.2.1 Aplicação do Método das Esferas Móveis . . . . .	37
<b>II Classificação da Métricas Conformais sobre <math>\mathbb{R}_+^2</math> com curvatura gaussiana constante e curvatura geodésica sobre a fronteira com diversas condições de finitude da integral</b>	<b>40</b>
<b>3 Resultados Técnicos</b>	<b>43</b>
<b>4 Caso Super-harmônico</b>	<b>68</b>
4.1 Demonstração do Teorema 18. . . . .	68
4.1.1 Integral sobre $\partial\mathbb{R}_+^2$ infinita. . . . .	69
4.1.2 Integral sobre $\partial\mathbb{R}_+^2$ finita. . . . .	80
4.2 Considerações sobre as condições da finitude da integral para o caso super-harmônico. . . . .	95
<b>5 Caso Sub-harmônico</b>	<b>97</b>
5.1 A não solução da equação $\Delta u - e^u = 0$ em $\mathbb{R}^2$ . . . . .	97
5.2 Demonstração do Teorema 20. . . . .	98
5.2.1 Demonstração do Teorema 20 para $c \geq 0$ . . . . .	98
5.2.2 Demonstração do Teorema 20 para $c < 0$ . . . . .	99
5.2.3 $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ implica em $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ . . . . .	99
5.2.4 $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ implica $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ . . . . .	108
5.2.5 O comportamento assintótico da solução de (5.1) no infinito. . . . .	112

---

5.2.6	A simetria em relação a uma esfera. . . . .	112
5.2.7	Prova do Teorema 20 para $c < 0$ . . . . .	114
5.3	Considerações sobre as condições da finitude da integral para o caso sub-harmônico. . . . .	116
<b>6</b>	<b>Caso Harmônico</b> . . . . .	<b>117</b>
6.1	Demonstração do Teorema 22. . . . .	117
6.1.1	Demonstração do Teorema 22 para $c \geq 0$ . . . . .	118
6.1.2	Demonstração do Teorema 22 para $c < 0$ . . . . .	118
6.2	Considerações sobre as condições de finitude da integral para o caso harmônico. . . . .	122
	<b>Referências</b> . . . . .	<b>124</b>

# Lista de Figuras

Figura 1.1:	Reflexão de um ponto $x$ em relação a um hiperplano $T_\lambda$	15
Figura 1.2:	Região $\Sigma_\lambda$ definida a partir do hiperplano $T_\lambda$	17
Figura 1.3:	Aplicando o Princípio do Máximo em $\Sigma_{\lambda_0} \setminus K$	18
Figura 1.4:	Regiões $D_1, D_2$ e $D_3$	23
Figura 2.1:	Reflexão do ponto $y$ em relação à esfera $\partial B_\lambda(x)$	31
Figura 2.2:	Reflexão de um ponto $x$ em relação a uma esfera $\partial B_\lambda$	35
Figura 3.1:	Bola $B_{1/2}(x_i)$	44
Figura 3.2:	Bola $B_{1/2}^+(x_i)$ com $x_i \in B_{1/4}^+$	48
Figura 3.3:	Bola $B_{R_i}^{-T_i}$ com $T_i \leq 1/2$	52
Figura 3.4:	Bola $B_{R_i}^{-T_i}$ com $T_i < 1/2$	53
Figura 3.5:	Anel $\overline{B_R} \setminus B_{R-\epsilon}$	54
Figura 3.6:	Bola $B_{1/2}^+(x_i)$ com $x_i \in B_1^+$	55
Figure 3.7:	Bola $B(A_i, R_i)$	58
Figura 4.1:	Bola $B(5/4, 5/8) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$	69
Figura 4.2:	Uma cobertura finita para $\{y \in \overline{\mathbb{R}_+^2}; 3/4 \leq  y  \leq 3/2\}$	70
Figura 4.3:	Anel $B_{r_0} \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$ onde vale $u_{0,\lambda}(y) > u(y)$ .	77
Figura 4.4:	Região fora do anel $B_{r_0}^+ \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$ onde vale $u_{0,\lambda}(y) > u(y)$	78
Figura 4.5:	$\Omega = \{x = (s, t); 1/2 < s^2 + t^2 < 1, s > 0 \text{ e } 0 < t < 1/4\}$	88

# Lista de Símbolos

$\mathbb{R}^n$	Espaço euclidiano $n$ -dimensional, com $x = (x_1, \dots, x_n)$ , $x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ .
$\mathbb{R}_+^n$	Semi-espaço em $\mathbb{R}^n$ , ou seja $\mathbb{R}_+^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$ . Em nosso trabalho também faremos uso da notação $(x_1, \dots, x_{n-1}, t)$ com $t > 0$ para representar um elemento de $\mathbb{R}_+^n$ .
$\mathbb{R}_-^n$	$\{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n < 0\}$
$\partial\mathbb{R}_+^n$	Fronteira do semi-espaço $\mathbb{R}_+^n$ , identificado com $\mathbb{R}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n = 0\}$
$B_R(x) = B(x, R)$	Bola aberta do espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ centrada no ponto $y$ e raio $R > 0$ , ou seja, $B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n;  x - y  < R\}$ .
$B_R$	Bola aberta com centro na origem de $\mathbb{R}^n$ .
$B_R^+(x)$	Bola do semi-espaço $\mathbb{R}_+^n$ , ou seja, $B_R(x) \cap \mathbb{R}_+^n = \{y = (y_1, \dots, y_{n-1}, t) \in \mathbb{R}^n;  y - x  < R \text{ e } t > 0\}$ .
$B_R^T(x)$	$B_R(x) \cap \{y = (y_1, \dots, y_{n-1}, t) \in \mathbb{R}^n; t > T\}$ para $T \in \mathbb{R}$ .
$\partial B_R(x)$	Esfera do $\mathbb{R}^n$ de centro $x$ e raio $R > 0$ , isto é, $\partial B_R(x) = \{y \in \mathbb{R}^n;  y - x  = R\}$ .
$\partial' B_R^+(x)$	Fronteira da Bola de $\mathbb{R}_+^n$ contida em $\partial\mathbb{R}_+^n$ , ou seja, $\partial B_R^+(x) \cap \partial\mathbb{R}_+^n$ .
$\partial'' B_R^+(x)$	Fronteira da bola de $\mathbb{R}_+^n$ contida $\mathbb{R}_+^n$ , ou seja, $\partial B_R^+(x) \cap \mathbb{R}_+^n$ .
$\frac{\partial u}{\partial x_i}$	Derivada parcial da função $u$ com relação a variável $x_i$ .
$\frac{\partial u}{\partial t}$	Derivada parcial da função $u$ com relação a variável $t$ .
$C^0(\Omega)$	Conjunto das funções contínuas em $\Omega$ .
$C^k(\Omega)$	Conjunto das funções com derivadas parciais de ordem menor ou igual a $k \in \mathbb{N}$ contínuas em $\Omega$ .

$$u(x) = o(g(x)) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|u(x)|}{|g(x)|} = 0.$$

$$u(x) = O(g(x)) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{|u(x)|}{|g(x)|} \leq C \text{ para algum } C > 0.$$

$C = C(*, \dots, *)$  Denota uma constante dependendo apenas dos argumentos que aparecem nos parênteses.

$W^{k,p}(\Omega)$  Espaço das funções fracamente  $k$ -diferenciáveis e  $p$ -integráveis.

# Introdução

Neste trabalho, procuraremos classificar as soluções da seguinte classe de equações elípticas não lineares

$$\Delta u + fe^u = 0 \tag{1}$$

em basicamente dois domínios: o plano  $\mathbb{R}^2$  e o semi-plano superior  $\mathbb{R}_+^2$ .

Este estudo foi baseado nos artigos de Chen-Li [5], Zang [16], Li-Zhu [12] e Ou[13], onde se buscou classificar as soluções de (1), sob certas condições.

Para um melhor entendimento, iniciamos o trabalho com um **Capítulo 0**, onde enunciamos algumas conceitos e resultados básicos que serão utilizadas nas demonstrações ao longo do trabalho.

Em seguida, dividimos o trabalho em duas partes:

Na *Parte I*, consideraremos a equação (1) definida em  $\mathbb{R}^2$  e reduziremos nosso estudo em 2 capítulos.

No **Capítulo 1**, trataremos do caso  $f \equiv 1$  e assumiremos a condição de integrabilidade

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^u < \infty. \tag{2}$$

Neste caso, utilizaremos o Método dos Planos Móveis. Para isso, faremos uma explanação sobre esta ferramenta, mostrando suas etapas e argumentos usados em cada uma delas. Inicialmente, essa técnica foi desenvolvida para resolver problemas de cunho geométrico, ainda na década de 1950. Nos anos 70, foi utilizado para obter soluções de equações elípticas de segunda ordem. Em 1979, Gidas, Ni e Nirenberg provaram a simetria radial para o problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3}$$

com  $f$  localmente Lipschitz e  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ .

Este resultado será demonstrado a título de exemplificar uma aplicação do método. Finalizaremos o **Capítulo 1**, demonstrando que as soluções para equação

$$\Delta u + e^u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2$$

são da forma

$$\phi_{\lambda, x^0}(x) = \ln \left( \frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2|x - x^0|^2)^2} \right), \lambda > 0, x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

quando assumimos a condição (2).

No **Capítulo 2**, verificaremos que a equação (1) não possui solução quando  $f$  é uma função contínua, radialmente simétrica, monótona na região em que tem imagem positiva e não constante. Durante a demonstração desse resultado, utilizaremos o Método das Esferas Móveis, um variante do Método dos Planos Móveis, desenvolvido no início da década de 1990. Também mostraremos de forma esquematizada como se desenvolve as etapas desse último método, que necessita de uma importante ferramenta: a Transformada de Kelvin. Por esse motivo, neste capítulo, mostraremos alguns propriedades e resultados relativos a esta.

Na *Parte II*, classificaremos as soluções da equação (1), definida sobre  $\mathbb{R}_+^2$ , para  $f$  constante, para isso, consideramos, também, a seguinte equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} \quad (4)$$

onde  $t$  representa a segunda variável e  $c \in \mathbb{R}$ . Portanto, trataremos do seguinte problema

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha e^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \text{ com } \alpha, c \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5)$$

A classificação das soluções também dependerá das condições de finitude que imporemos sobre  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u$  e/ou  $\int_{\partial\mathbb{R}^2} e^{u/2}$ .

No **Capítulo 3** provaremos alguns resultados técnicos que nos auxiliarão durante os capítulos seguintes.

No **Capítulo 4**, estudaremos o caso super-harmônico e supondo  $\alpha = 1$ , mostraremos que a condição

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty \quad (6)$$

implica em

$$\int_{\partial\mathbb{R}^2} e^{u/2} < \infty \quad (7)$$

e que a recíproca não é verdadeira. E verificamos que as solução de (5) são da forma

$$u(x, t) = \log \left( \frac{8\lambda^2}{(\lambda^2 + (x - x_0)^2 + (t - t_0)^2)^2} \right) \quad (8)$$

para algum  $\lambda > 0, x_0 \in \mathbb{R}$  e  $t_0 = c\lambda/\sqrt{2}$ .

No **Capítulo 5**, traremos do problema quando  $\alpha = -1$ , ou seja, o caso sub-harmônico. Verificaremos que para  $c \geq 0$  não há solução. Já para  $c < 0$ , obteremos que as condições (6) e (7) são equivalentes e mais ainda, as soluções das equações são da forma

$$u(s, t) = \log \frac{8\lambda^2}{((s - s_0)^2 + (t - t_0)^2 - \lambda^2)^2}, \quad (9)$$

onde  $s_0 \in \mathbb{R}, t_0 = -c\lambda/\sqrt{2}, \lambda > 0$ .

Neste capítulo também verificamos que a equação

$$\Delta u - e^u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2$$

não tem solução.

No **Capítulo 6**, trabalharemos com o caso harmônico, dessa forma, temos necessariamente  $\alpha = 0$ . Neste caso, quando  $c \geq 0$ , verificamos que o problema não tem solução. Já quando  $c < 0$ , também verificamos que (6) implica em (7) e temos que a solução pode ser escrita como

$$u(s, t) = 2 \log \frac{2t_1}{(s - s_1)^2 + (t - t_1)^2} + 2 \log \frac{4}{|c|} \quad (10)$$

onde  $s_1$  é um número real e  $t_1$  é um número positivo.

# Capítulo 0

## Conceitos e Resultados Preliminares

Neste capítulo, enunciaremos definições básicas para o entendimento de nosso trabalho, bem como resultados elementares que serão necessários para a leitura deste trabalho. Destes resultados, alguns são bastantes comuns na literatura. Para estes, apenas indicaremos onde encontrar suas demonstrações. Outros resultados, cujas demonstrações são deixadas como exercícios nas referências bibliográficas consultadas, foram demonstrados.

**Definição 1** *Seja  $\Omega$  um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Se  $\partial\Omega$  é  $C^1$ , então um campo vetorial normal unitário exterior*

$$\nu = (\nu^1, \dots, \nu^n)$$

*ao longo de  $\partial\Omega$  é um campo de vetores que para cada  $x^0 \in \partial\Omega$  associa  $\nu(x^0) = \nu$  um vetor normal a  $\partial\Omega$  em  $x^0$  que aponta para fora de  $\Omega$ .*

**Definição 2** *Sejam  $u \in C^1(\overline{\Omega})$  dado  $x^0 \in \Omega$  temos que*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) = \langle \nabla u(x^0), \nu \rangle$$

*é a derivada normal (exterior) em  $x^0$ .*

**Teorema 1** *(Fórmulas da média para equações laplacianas).*

*Se  $u \in C^2(\Omega)$  tem  $\Delta u = 0$  em  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  (aberto), então*

$$u(x) = \frac{1}{n\gamma_n R^{n-1}} \int_{\partial B_R(x)} u dS = \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{B_R(x)} u dx,$$

*para cada  $B_R(x) \subset \Omega$ .*

**Demonstração:**

Ver [7], página 25. ■

**Teorema 2** *(Integração por partes)*

*Seja  $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$ , onde  $\Omega$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$ . Então*

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial\Omega} uv \nu^i dS \text{ para } i = 1, \dots, n.$$

**Demonstração:**

Usar o Teorema de Gauss-Green com  $uv$ . ■

**Lema 1** *Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$  com  $u(x) = O(|x|^\alpha)$  e  $0 < \alpha < 1$ , se  $\Delta u \equiv 0$ , então  $u$  é constante.*

**Demonstração:**

Como  $\Delta u \equiv 0$ , segue pela fórmula da média que para  $x_0 \in \mathbb{R}^n$

$$u(x_0) = \frac{1}{\gamma_n R^{n-1}} \int_{B_R(x_0)} u dx.$$

Como queremos mostrar que  $u$  é constante, e temos que  $\mathbb{R}^n$  é conexo, basta verificar que  $\nabla u \equiv 0$ .

De fato,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) = \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i} dx,$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Utilizando a integração por partes com  $v \equiv 1$  temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) &= \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{B_R(x_0)} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot v dx \\ &= \frac{1}{\gamma_n R^n} \left( - \int_{B_R(x_0)} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial B_R(x_0)} u \cdot v \nu^i dS \right) \\ &= 0 + \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} u \nu^i dS \end{aligned}$$

para  $i = 1, \dots, n$ .

Logo,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| \leq \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} |u \nu^i| dS = \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} |u| |\nu^i| dS = \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} |u| dS,$$

para  $i = 1, \dots, n$ , já que  $|\nu^i| \leq 1$ .

Agora, com  $u(x) = O(|x|^\alpha)$ , temos que para  $|u| \leq C|x|^\alpha$ . Dessa maneira, obtemos

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| \leq \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} |u| dS \leq \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} C|x|^\alpha dS.$$

Como sobre  $\partial B_R(x_0)$ , temos que  $|x| = R$ , temos

$$\int_{\partial B_R(x_0)} C|x|^\alpha dS \leq \int_{\partial B_R(x_0)} CR^\alpha.$$

Daí, segue

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| \leq \frac{1}{\gamma_n R^n} \int_{\partial B_R(x_0)} CR^\alpha = \frac{1}{\gamma_n R^n} \cdot R^\alpha CR^{n-1},$$

isto é,

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_0) \right| = \frac{\tilde{C}}{R^{1-\alpha}} \rightarrow 0$$

quando  $R \rightarrow \infty$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ .

Logo,  $\nabla u(x^0) = 0$ . Como  $x^0$  é arbitrário, segue o resultado. ■

**Definição 3** *Seja*

$$\Gamma(x - y) = \Gamma(|x - y|) = \begin{cases} \frac{1}{n(2-n)\gamma_n} |x - y|^{2-n}, & n > 2; \\ \frac{1}{2\pi} \log |x - y|, & n = 2. \end{cases} \quad (1)$$

onde  $\gamma_n$  é o volume da bola unitária em  $\mathbb{R}^n$ . Para uma função integrável  $f$ , a integral  $\int_{\Omega} \Gamma(x - y) f(x) dx$  é chamado potencial newtoniano de  $f$ .

**Teorema 3** *Seja  $f$  uma função limitada e localmente Hölder contínua em  $\Omega$ , e seja  $w$  o potencial newtoniano de  $f$ . Então  $w \in C^2(\Omega)$  e  $\Delta w = f$  em  $\Omega$  e para cada  $x \in \Omega$ ,*

$$D_{ij}w(x) = \int_{\Omega_0} D_{ij}\Gamma(x - y)(f(y) - f(x))dx - f(x) \int_{\partial\Omega_0} D_i\Gamma(x - y)\nu_j ds_y$$

com  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , onde  $\Omega_0$  é um domínio contido em  $\Omega$  onde vale o Teorema da divergência e  $f$  é estendida pela função nula fora de  $\Omega$ .

**Demonstração:**

Ver [15], página 55. ■

**Teorema 4** *Seja  $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$  com  $\int_{\mathbb{R}^2} f < \infty$ . Definamos*

$$u(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \log |x - y| f(x) dx$$

Então,  $u$  é de classe  $C^2$  e é solução para a equação de Poisson

$$\Delta u - f = 0$$

em  $\mathbb{R}^2$ .

**Demonstração:**

Temos

$$u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log |x - y| f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \log |y - x| f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^2} \log |x| f(y - x) dx.$$

Como o lado direito é contínua em relação a  $y$ , segue em particular que  $u$  é contínua. Além disso, denotando por  $\{e_1, e_2\}$  os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^2$ ,

$$\frac{u(y + he_i) - u(y)}{h} = \int_{\mathbb{R}^2} \log |x| \frac{f(y + he_i - x) - f(y - x)}{h} dx.$$

Como

$$\frac{f(y + he_i - x) - f(y - x)}{h} \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_i}(y - x) \text{ uniformemente em } \mathbb{R}^2,$$

Segue que

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log |x| \frac{\partial f}{\partial x_i}(y - x) dx. \quad (2)$$

Analogamente,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log |x| \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(y - x) dx. \quad (3)$$

Como as expressões no lado direito são contínuas na variável  $y$ , concluímos que  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ . Além disso, como  $f$  é limitada e a função logaritmo é localmente integrável, temos que  $u, \nabla u$  e  $\Delta u$  são localmente limitados.

Agora, fixemos  $\epsilon > 0$ , temos

$$\Delta u(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log |x| \Delta f(x - y) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{B_\epsilon} \log |x| \Delta f(x - y) dx + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \log |x| \Delta f(x - y) dx. \quad (4)$$

Vamos estimar essas integrais. Em primeiro lugar, consideremos  $C_2 = C_2(\epsilon) \sup_{B_\epsilon} |\Delta f|$ , verificamos

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{B_\epsilon} \log |x| \Delta f(x - y) dx \right| \leq C_2 \frac{1}{2\pi} \int_{B_\epsilon} \log |x| dx.$$

E temos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{B_\epsilon} \log |x| dx = \frac{1}{2\pi} 2\pi \int_0^\epsilon r \log r dr = \epsilon^2 |\log \epsilon|.$$

Assim, quando  $\epsilon \rightarrow 0$  segue que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{B_\epsilon} \log |x| \Delta f(x - y) dx \rightarrow 0 \quad (5)$$

Para estimarmos a outra integral, usamos a Primeira Identidade de Green, obtemos

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \log |x| \Delta f(y - x) dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\epsilon} \log |x| \frac{\partial f}{\partial \nu}(y - x) ds(x) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \nabla \log |x| \cdot \nabla f(y - x) dx \quad (6)$$

onde  $\nu$  denota o vetor unitário normal que aponta para o centro da bola  $B_\epsilon$ , pela convenção usual de orientação da fronteira de  $\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon$ . Considerando  $C_1 = C_1(\epsilon) = \sup_{B_\epsilon} |\nabla f|$ , temos

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\epsilon} \log |x| \frac{\partial f}{\partial \nu}(y - x) ds(x) \right| \leq C_1 \frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\epsilon} \log |x| dx = C_1 \epsilon \log \epsilon,$$

logo, quando  $\epsilon \rightarrow 0$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\epsilon} \log |x| \frac{\partial f}{\partial \nu}(y - x) ds(x) \rightarrow 0. \quad (7)$$

Por outro lado, usando novamente a Primeira Identidade de Green, temos

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \nabla \log |x| \cdot \nabla f(x - y) dx \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial \log |x|}{\partial \nu} f(y - x) ds(x) + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \Delta \log |x| f(x - y) dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial \log |x|}{\partial \nu} f(y-x) ds(x)$$

pela harmonicidade do logaritmo. Como

$$\nabla \log |x| = \frac{x}{|x|^2} \text{ e } \nu = -\frac{x}{\epsilon}$$

segue que

$$\frac{\partial \log}{\partial \nu}(x) = \nabla \log |x| \cdot \nu = -\frac{|x|^2}{\epsilon |x|^2} = \frac{1}{\epsilon}$$

em  $\partial B_\epsilon$ , donde

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\partial \log |x|}{\partial \nu} f(y-x) ds(x) = \frac{1}{2\pi\epsilon} \int_{\partial B_\epsilon} f(y-x) ds(x) = \frac{1}{|\partial B_\epsilon|} \int_{\partial B_\epsilon} f(x) ds(x).$$

Segue pelo Teorema do Valor Médio para integrais que

$$-\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \setminus B_\epsilon} \nabla \log |x| \cdot \nabla f(x-y) dx \rightarrow -f(y) \tag{8}$$

quando  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Concluimos de (4), (5), (6), (7) e (8) que

$$\Delta u = f(y).$$

■

**Observações 1** Resultado semelhante e obtido quando temos essas hipóteses em  $\overline{\mathbb{R}^2_+}$ .

**Teorema 5** (Fórmula da Co-área). Seja  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função lipschitziana tal que para qualquer  $r \in \mathbb{R}$ , o conjunto de nível

$$\{x \in \mathbb{R}^n; u(x) = r\}$$

é uma  $(n-1)$ -hipersuperfície suave em  $\mathbb{R}^n$ . Suponhamos também que  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função contínua e integrável. Então,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{\{u=r\}} f ds \right) dr$$

**Demonstração:**

Ver [8], página, 112.

■

**Teorema 6** (Princípio do Máximo)

Seja  $Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u$  um operador elíptico e  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Se  $c(x) \equiv 0$  e  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$  satisfaz

$$Lu \geq 0 (\leq 0) \text{ em } \Omega.$$

Então o máximo (mínimo) de  $u$  em  $\overline{\Omega}$  é atingido sobre  $\partial\Omega$ , ou seja,

$$\sup_{\Omega} u = \sup_{\partial\Omega} (\inf_{\Omega} u = \inf_{\partial\Omega}).$$

**Demonstração:**

Ver [15], página, 32. ■

**Teorema 7** (*Lema de Hopf*)

Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  e  $Lu \leq 0$  em  $\Omega$ . Se existe um ponto  $x^0$  tal que

$$u(x^0) > u(x) \text{ para todo } x \in \Omega.$$

Assumamos ainda que  $\Omega$  satisfaça a condição da esfera interior em  $x^0$ , ou seja, existe uma bola aberta  $B \subset \Omega$  tal que  $x^0 \in \partial B$ , então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0,$$

onde  $\nu$  é o vetor unitário normal exterior a  $B$  em  $x^0$ .

**Demonstração:**

Ver [7], página, 330. ■

**Teorema 8** (*Princípio do Máximo e Lema de Hopf para domínios não necessariamente limitados*)

Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  fronteira suave. Se  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$  e satisfaz

$$\begin{aligned} Lu = a^{ij}(x)D_{ij}u + b^i(x)D_iu + c(x)u &\geq 0, & x \in \Omega \\ u(x) &= 0, & x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{9}$$

com  $c(x)$  e  $b_i(x)$  funções limitadas. Então

- i) se  $u$  assume o valor 0 em algum ponto de  $\Omega$ , então  $u \equiv 0$  em  $\Omega$ ; e
- ii) se  $u \not\equiv 0$  em  $\Omega$ , então sobre  $\partial\Omega$  a derivada normal exterior  $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ .

**Demonstração:**

Ver [6], página 223. ■

**Teorema 9** (*Princípio do Máximo para domínios estreitos.*) Seja  $\phi$  uma função positiva em  $\bar{\Omega}$  satisfazendo

$$-\Delta\phi + \lambda(x)\phi \geq 0.$$

E seja  $u$  solução de

$$\begin{cases} -\Delta u + c(x)u \geq 0 & \text{para } x \in \Omega; \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

com  $c(x)$  limitada. Então quando a largura  $l$  da região  $\Omega$  é suficientemente pequeno, se  $c(x) > \lambda(x) = -\frac{1}{l^2}$ , então  $u \geq 0$  em  $\Omega$ .

**Demonstração:**

Ver [6], página 226. ■

**Teorema 10** Suponhamos que  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$  satisfazendo.

$$-\Delta u = V(x)e^u \text{ em } \mathbb{R}^2$$

com  $V \in L^p(\mathbb{R}^2)$  e  $e^u \in L^{p'}(\mathbb{R}^2)$  para algum  $1 < p' \leq \infty$ . Então  $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

**Demonstração:**

Ver [2]. ■

**Teorema 11** *Sejam  $a_0(x), \dots, a_{n-1}(x)$  funções contínuas num intervalo aberto  $I$  e  $x_0 \in I$ , então o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + ay' + a_0y = 0; \\ y(x_0) = K_0; \\ y'(x_0) = K_1; \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) = K_{n-1} \end{cases}$$

tem uma única solução  $y(x)$  em  $I$ .

**Demonstração:**

Ver [14], página 19. ■

**Teorema 12** (*Desigualdade Isoperimétrica*) *Seja  $C$  uma curva plana simples fechada com comprimento  $l$ , e seja  $A$  a área da região limitada por  $C$ . Então*

$$l^2 - 4\pi A \geq 0,$$

e verificamos a igualdade se, e somente se,  $C$  é um círculo.

**Demonstração:**

Ver [4], página 39. ■

**Lema 2** (*Desigualdade de Harnach para forma divergente de equações elípticas de segunda ordem com condição de fronteira tipo Neumann.*)

Consideremos

$$Lu = \partial_i(a_{ij}(x)\partial_j u + b_i(x)u) + c_i(x)\partial_i u + d(x)u$$

em  $B_3^+ \subset \mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$ , onde  $B_3^+ = \{x = (x^1, \dots, x^n); x^n > 0\}$ .

Se existe  $\alpha > 1$  tal que

$$\alpha^{-1}|\xi|^2 \leq a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \alpha|\xi|^2, \text{ para todo } x \in B_3^+, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

com

$$|b_i(x)| + |c_i(x)| + |d_i(x)| \leq \alpha \text{ para todo } x \in B_3^+,$$

e  $|h(x)| \leq \alpha$  para todo  $x \in B_3^+$ . Seja  $u \in C^2(B_3^+) \cap C^1(\overline{B_3^+})$  satisfazendo

$$\begin{cases} -Lu = 0, & u > 0 \text{ em } B_3^+ \\ a_{nj}\partial_j u = h(x)u, & \text{sobre } \partial' B_3^+. \end{cases} \quad (10)$$

Então existe  $C = (n, \alpha) > 1$  tal que

$$\max_{B_1^+} u \leq C \min_{B_1^+} u$$

**Demonstração:**

Ver [9]. ■

**Lema 3** *Seja  $\Omega$  um domínio de  $\mathbb{R}^n$ , com  $n \geq 2$  com a origem em sua fronteira. Assumindo que próximo de 0 a fronteira é a interseção transversal de duas hipersuperfícies  $C^2$   $\rho = 0$  e  $\sigma = 0$ . Supondo também  $\rho, \sigma > 0$  em  $\Omega$ . Seja  $\nu_0(y)$  o vetor unitário normal exterior da superfície  $\{\sigma = 0\} \cap \partial\Omega$  sobre  $y$ .*

*Seja  $(b_i(y)) \in \infty$ , e  $\{a_{ij}(y)\}$  uma  $n \times n, n \geq 2$  matriz simétrica de funções, satisfazendo para constantes positivas  $\lambda$  e  $\Lambda$ ,*

$$\lambda|\xi|^2 \leq \sum_{i,j} a_{ij}(y)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2 \text{ para } \xi \in \mathbb{R}^n, y \in \Omega.$$

*Definamos*

$$M := \sum_{i,j} a_{ij}(y) \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \sum_i b_i(y) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

*Seja  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  positiva em  $\Omega$ , e assumamos que  $u$  satisfaz, para uma constante positiva  $A$ ,*

$$\begin{cases} Mu \leq Au, & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} \geq -Au & \text{sobre } \{\sigma = 0, \rho > 0\}, \\ u(0) = 0. \end{cases}$$

*então temos*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(0) > 0$$

*onde  $\nu$  é um vetor no espaço tangente de  $\{\sigma = 0\}$  apontando para dentro de  $\{\rho > 0\}$ .*

**Demonstração:**

Ver [11]. ■

**Definição 4** *Seja  $f : U \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função. Dizemos que  $f$  é uma função holomorfa se dado  $z \in U$ ,  $f$  tem derivada complexa em uma vizinhança de  $z$ . Dizemos que  $f$  é uma função inteira, se  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é uma função holomorfa.*

**Teorema 13** *(Pequeno Teorema de Picard) Se  $f$  é uma função inteira que não assume pelo menos dois valores, então  $f$  é constante.*

**Demonstração:**

Ver [3], página 297. ■

**Teorema 14** *(Grande Teorema de Picard) Seja  $f$  uma função analítica com uma singularidade essencial sobre  $a$ . Então em cada vizinhança de  $a$ ,  $f$  assume todos os valores, com exceção de um número finito deles, uma infinidade de vezes.*

**Demonstração:**

Ver [3], página 300. ■

## Parte I

# O Método dos Planos Móveis e o Método das Esferas Móveis

Nesta parte mostraremos dois métodos, relativamente recentes, usados no estudo de equações diferenciais parciais: o Método dos Planos Móveis e, seu variante, o Método das Esferas Móveis.

No **Capítulo 1**, exibiremos o Método dos Planos Móveis, mostrando quais as principais ideias embutidas nos seus argumentos afim de obter a monotonicidade e a simetria da solução para uma dada equação diferencial parcial ao longo de uma determinada direção. Em seguida, mostramos algumas de suas aplicações. Primeiramente, demonstraremos um resultado clássico, demonstrado por Gidas, Ni e Nirenberg, utilizando os Planos Móveis. Esta prova favoreceu a popularização desse método, a partir da década de 80.

Neste capítulo ainda, classificaremos as soluções da equação  $\Delta u + e^u = 0$ , assumindo que  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u$  é finito. A classificação é possível, pois graças ao Método dos Planos Móveis provaremos que a solução  $u$  é radialmente simétrica em relação a um ponto de  $\mathbb{R}^2$  e assume a forma

$$u(x) = \ln \left( \frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2|x - x^0|^2)^2} \right), \lambda > 0, x^0 \in \mathbb{R}^2.$$

No **Capítulo 2**, inicialmente, tratamos da Transformada de Kelvin verificando algumas de suas propriedades quando estamos em  $\mathbb{R}^2$ . Posteriormente, a exemplo do que foi feito na seção sobre o Método dos Planos Móveis, explanaremos as ideias de como aplicar o Método das Esferas Móveis. Para finalizar, mostraremos uma de suas aplicações, demonstrando que sob certas hipóteses em relação a  $R(|x|)$  a equação

$$\Delta u(x) + R(|x|)e^u = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^2$$

não possui solução.

# Capítulo 1

## O Método dos Planos Móveis e Aplicações

O estudo de soluções para problemas elípticos é fonte de várias pesquisas, utilizando-se de diversas ferramentas, como teoria dos pontos críticos e métodos variacionais. Neste capítulo utilizaremos, basicamente uma, o Método dos Planos Móveis, para resolver algumas equações elípticas.

O Método dos Planos Móveis é uma técnica que é utilizada para estabelecer algumas propriedades qualitativas de soluções de equações elípticas não-lineares, como monotonicidade e simetria. O uso do Princípio do Máximo, nas suas mais diferentes versões, é primordial para se aplica esse método.

No Método dos Planos Móveis, comparamos a solução de uma equação elíptica em dois diferentes pontos, no par formado por um ponto e sua reflexão sobre um hiperplano. Em seguida movemos esse plano a uma posição crítica. Mais especificamente, a partir de um domínio simétrico, utilizamos uma função teste, definida pela diferença entre a solução do problema aplicada em um ponto e sua reflexão em relação a um hiperplano, que será movido paralelamente até uma posição limite, onde esperamos que essa diferença se anule, garantindo assim a simetria da solução em relação a esse plano nesta posição crítica.

Este argumento pode ser repetido em qualquer direção e daí concluímos a simetria radial da solução em relação a um ponto. Como obtemos a simetria radial da solução de problemas elípticos em relação a um ponto, verificamos assim que a solução dependerá apenas da distância em relação ao eixo de simetria, e portanto, transformamos as Equações Diferenciais Parciais em Equações Diferenciais Ordinárias, o que simplifica bastante a resolução do problema.

Esse método foi desenvolvido inicialmente pelo soviético A. D. Alexandroff, em 1956, em seus estudos sobre simetria com problemas em superfícies mínimas com curvaturas médias constantes. Na década de 1971, J. Serrin trabalhou com soluções para equações elípticas de segunda ordem satisfazendo algumas condições de fronteira. Para equações com simetria esférica, provou-se que o domínio, no qual a solução é definida, é, necessariamente, uma bola e que as soluções são esféricamente simétricas. A partir dessa formulação houve um impulso no uso do método.

Em 1979, Gidas, Ni e Nirenberg estabeleceram a simetria radial de soluções positivas para a equação

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Usando o Método dos Planos Móveis, Gidas, Ni e Nirenberg obtiveram resultados de simetria e monotonicidade para as soluções deste problema. Sua demonstração original requeria que o domínio tivesse fronteira suave, que  $f \in C^1(\Omega)$  e também que as soluções  $u \in C^2(\bar{\Omega})$ . Aplicando o princípio do máximo para domínios estreitos, Berestycki e Nirenberg foram capazes de generalizar os resultados obtidos para qualquer domínio, requerendo apenas que  $f$  fosse localmente de Lipschitz e que  $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$ , ou seja, requerendo apenas continuidade da solução até a fronteira. Além disso, no processo de obter estes resultados mais gerais, eles simplificaram consideravelmente a demonstração original. Desde então, várias extensões foram desenvolvidas utilizando o Método dos Planos Móveis.

Neste capítulo, falaremos inicialmente dos passos básicos para aplicação do método, mostrando os principais argumentos utilizados em cada uma de suas etapas. Em seguida, aplicaremos o método em dois problemas elípticos. No primeiro, demonstraremos a simetria das soluções do problema acima citado, como foi feito por Gida, Ni e Nirenberg. Posteriormente, buscaremos provar que as soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u + e^u = 0, & x \in \mathbb{R}^2; \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^u(x) < +\infty, \end{cases}$$

são da forma

$$\phi_{\lambda, x^0}(x) = \ln \left( \frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2|x - x^0|^2)^2} \right), \lambda > 0, x^0 \in \mathbb{R}^2.$$

Para isso, utilizando o Método dos Planos Móveis, estabeleceremos a simetria das soluções.

## 1.1 Descrição do Método do Planos Móveis

Para termos uma ideia de como funciona o Método dos Planos Móveis. Tomemos o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$  como um exemplo. Seja  $u$  uma solução de uma dada equação diferencial parcial. Suponhamos que se queira provar a simetria e a monotonicidade de  $u$  em uma dada direção, digamos na direção do eixo  $x_1$ . Tomemos  $\lambda$  um número real. Definamos,

$$T_\lambda = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 = \lambda\}.$$

um plano perpendicular ao eixo  $x_1$ , que será movido.

Seja  $\Sigma_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 < \lambda\}$ , a região situada à esquerda de  $T_\lambda$ . Agora, consideremos,  $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n)$  a reflexão do ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  em relação a  $T_\lambda$ . Como ilustrado na Figura 1.1.

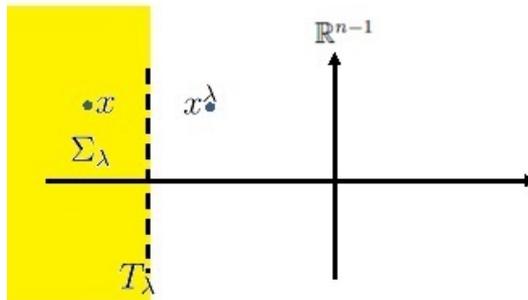


Figura 1.1: Reflexão de um ponto  $x$  em relação a um hiperplano  $T_\lambda$ .

Vamos comparar os valores de  $u$  nos pontos  $x$  e  $x^\lambda$  e pretendemos obter a simetria de  $u$  em relação a algum plano  $T_{\lambda_0}$ . Desse modo, definamos

$$w_\lambda = u(x^\lambda) - u(x) \text{ em } \Sigma_\lambda.$$

E devemos mostrar que para algum  $\lambda_0$ ,  $w_{\lambda_0} \equiv 0$ , para todo  $x \in \Sigma_{\lambda_0}$ .

Geralmente, dividimos desenvolvemos o método em dois passos:

**Passo 1:** Mostramos que para  $\lambda < 0$  com módulo suficientemente grande, verificamos

$$w_\lambda \geq 0 \text{ em } \Sigma_\lambda. \quad (1.2)$$

Assim, poderemos começar a mover o plano  $T_\lambda$  de uma vizinhança de  $x_1 = -\infty$  ao longo da direção  $x_1$  para a direita, de modo que a ainda valha a desigualdade acima.

**Passo 2:** Continuamos movendo o plano a uma posição limite, mas precisamente, definimos

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda; w(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Sigma_\lambda\}.$$

E finalmente, concluímos que  $w_{\lambda_0} \equiv 0$  para todo  $x \in \Sigma_{\lambda_0}$ , ou seja,  $u(x^\lambda) = u(x)$ , em outras palavras, obtemos simetria de  $u$  sobre  $T_{\lambda_0}$ .

Este último passo, normalmente, obtido por um argumento de contradição. Supondo que  $w_{\lambda_0} \not\equiv 0$ , então existe  $\lambda > \lambda_0$  de modo que ainda temos  $w_\lambda \geq 0$  em  $\Sigma_\lambda$ , contradizendo a definição de  $\lambda$ .

Assim, podemos observar que (1.2) é a chave para do Método dos Planos Móveis para Equações Diferenciais Parciais, pois permite o uso de uma outra poderosa ferramenta: o Princípio do Máximo.

Agora iremos exemplificar aplicações desse método. Primeiro, em um domínio limitado do  $\mathbb{R}^n$ , em seguida, para um domínio não limitado, o  $\mathbb{R}^2$ .

## 1.2 Aplicação para domínio limitado

A título de motivação poderemos considerar o seguinte teorema.

**Teorema 15** (*Gidas, Ni, Nirenberg*) *Seja  $u \in C^2(B_1) \cap C^1(\overline{B_1})$  uma solução positiva de*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } B_1, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases} \quad (1.3)$$

onde  $f$  é localmente lipschitziana em  $\mathbb{R}$ . Então  $u$  é radialmente simétrica em  $B_1$  e  $\frac{\partial u}{\partial r} < 0$ , se  $x \neq 0$ .

Provaremos uma versão mais geral do teorema anterior, veja o seguinte Lema:

**Lema 4** Seja  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um domínio limitado, convexo na direção  $x_1$  e simétrico com relação ao plano  $\{x_1 = 0\}$ . Se  $u \in C^2(\bar{\Omega}) \cap C(\bar{\Omega})$  é uma solução positiva de

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.4)$$

onde  $f$  é localmente lipschitziana em  $\mathbb{R}$ . Então  $u$  é simétrica com respeito a  $x_1$  e  $D(x_1)u(x) < 0$  para todo  $x \in \Omega$  com  $x_1 \neq 0$ .

Façamos as seguintes considerações:

Sejam  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  e  $a = \sup x_1$  para  $(x_1, y) \in \Omega$ , onde  $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ . Para  $0 < \lambda < a$ . Consideremos:

- $\Sigma_\lambda = \{(x_1, y) \in \Omega; x_1 > \lambda\}$ ;
- $T_\lambda = \{(x_1, y) \in \Omega; x_1 = \lambda\}$ ;
- $x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_n)$  para  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Como esquematizado na Figura 1.2.

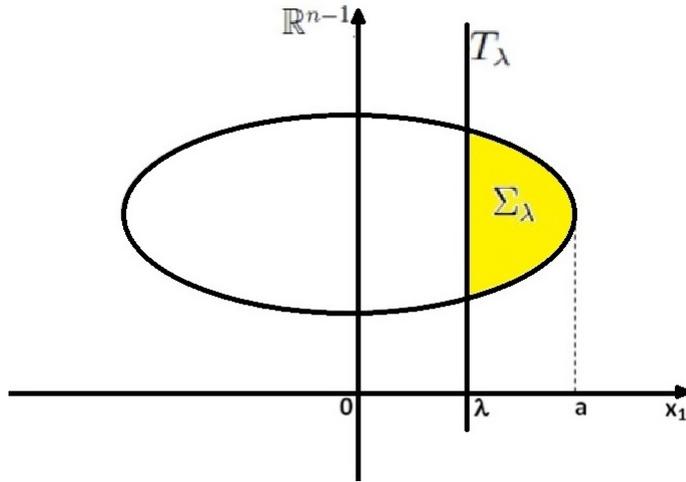


Figura 1.2: Região  $\Sigma_\lambda$  definida a partir do hiperplano  $T_\lambda$ .

Afim de comparar o valor da solução  $u$  em  $\Sigma_\lambda$  com a sua reflexão, definamos

$$w_\lambda(x) = u(x) - u(x^\lambda), \text{ para todo } x \in \Sigma_\lambda.$$

Observemos que

$$\Delta w_\lambda(x) = \Delta(u(x) - u(x^\lambda)) = f(u(x)) - f(u(x^\lambda)) = c(x, \lambda)w_\lambda(x). \quad (1.5)$$

onde

$$c(x, \lambda) = \begin{cases} \frac{f(u(x)) - f(u(x^\lambda))}{u(x) - u(x^\lambda)}, & x \in \Sigma_\lambda \text{ com } u(x) \neq u(x^\lambda) \\ 0, & x \in \Sigma_\lambda \text{ com } u(x) = u(x^\lambda). \end{cases}$$

Como  $f$  é localmente lipschitziana em  $\mathbb{R}$  temos existe  $C > 0$  tal que

$$|f(a) - f(b)| \leq C|a - b|,$$

para quaisquer  $a, b \in \mathbb{R}$ . De outra forma,

$$\frac{|f(a) - f(b)|}{|a - b|} \leq C$$

então para  $a = u(x)$  e  $b = u(x^\lambda)$  segue que  $c(x, \lambda)$  é uma função limitada em  $\Sigma_\lambda$ .

**Passo 1:**

**Afirmção 1** *Existe  $\lambda \in (0, a)$  tal que  $w_\lambda \leq 0$  para todo  $x \in \Sigma_\lambda$ .*

**Demonstração:**

Inicialmente, verificamos  $u(x) \equiv u(x^\lambda)$  sobre  $T_\lambda$  e quando  $x \in \partial\Sigma_\lambda \setminus T_\lambda$  temos que  $u(x) = 0$  e  $u(x^\lambda) > 0$ . Dessa forma, temos que  $w_\lambda(x)$  não é a função identicamente nula quando  $x \in \partial\Sigma_\lambda$ . Mais ainda,  $w_\lambda(x) \leq 0$ , sobre  $\partial\Omega_\lambda$ .

Considerando agora o problema:

$$\begin{cases} \Delta w_\lambda(x) + c(x, \lambda)w_\lambda = 0, & \text{em } \Sigma_\lambda; \\ w_\lambda \leq 0 & \text{e } w_\lambda \not\equiv 0 \text{ sobre } \partial\Sigma_\lambda. \end{cases} \quad (1.6)$$

Então, devido ao princípio do máximo para domínios estreitos, observemos que para todo  $\lambda$  suficientemente próximo de  $a$ , temos que  $w_\lambda < 0$  em  $\Omega_\lambda$ .

■

**Passo 2:**

**Afirmção 2** *Agora consideremos*

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda; w_\lambda(x) \leq 0, \forall x \in \Sigma_\mu, \mu < \lambda\}.$$

Então,  $\lambda_0 = 0$ .

**Demonstração:**

Suponha, por absurdo, que  $\lambda_0 > 0$ , então pela continuidade de  $u$ , segue que  $w_{\lambda_0} \leq 0$  em  $\Sigma_{\lambda_0}$  e  $w_{\lambda_0} < 0$ , sobre  $\partial\Sigma_{\lambda_0}$ . Assim, pelo Princípio do Máximo Forte, obtemos  $w_{\lambda_0} < 0$  em  $\Sigma_{\lambda_0}$ , ou seja,  $\lambda_0 \in \{\lambda > 0; w_\mu < 0, \text{ em } \Sigma_\mu < 0, \text{ quando } \lambda < \mu < a\}$ .

Afirmamos ainda que para todo  $\epsilon > 0$ ,

$$w_{\lambda_0 - \epsilon} < 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_0 - \epsilon}.$$

De fato, consideremos  $\delta$  fixo e seja  $K \subseteq \Sigma_{\lambda_0}$  subconjunto fechado tal que  $|\Sigma_{\lambda_0} \setminus K| < \frac{\delta}{2}$ . Como ilustrado na Figura 1.3.

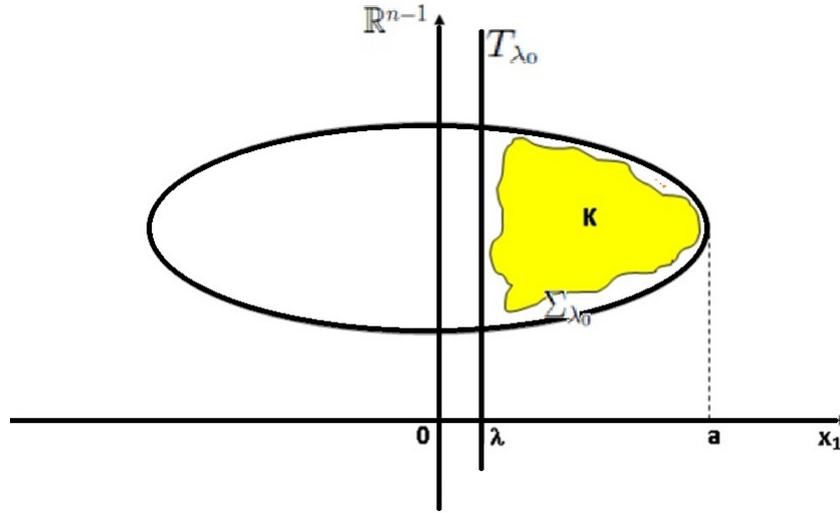


Figura 1.3: Aplicando o Princípio do Máximo em  $\Sigma_{\lambda_0} \setminus K$ .

Como  $w_{\lambda_0}$  em  $\Sigma_{\lambda_0}$ , segue que

$$w_{\lambda_0}(x) < -\eta < 0, \text{ para todo } x \in K.$$

Por continuidade, temos que

$$w_{\lambda_0-\epsilon}(x) < -\eta < 0, \text{ para todo } x \in K. \tag{1.7}$$

Considere  $\epsilon$  suficientemente pequeno tal que  $|\Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K| < \delta$ . Escolhendo, convenientemente,  $\delta$ , podemos aplicar o Princípio do Máximo para domínios estreitos a  $w_{\lambda_0-\epsilon}$  em  $\Sigma_{\lambda_0-\epsilon}$  e dessa forma, como temos

$$w_{\lambda_0-\epsilon} \leq 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K. \tag{1.8}$$

Por (1.7) e (1.8), segue que

$$w_{\lambda_0-\epsilon} < 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_0-\epsilon} \setminus K.$$

Logo obtemos para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno

$$w_{\lambda_0-\epsilon} < 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_0}.$$

Contrariando a escolha de  $\lambda_0$  e, portanto, devemos ter  $\lambda_0 = 0$ . ■

### Prova do Lema (4)

#### Demonstração:

Em particular, temos que  $w_\lambda$  atinge seu máximo em  $T_\lambda$  e, portanto,  $w_\lambda < 0$  em  $\Sigma_\lambda$ , ou seja,

$$u(x_1, \dots, x_n) < u(2\lambda - x_1, \dots, x_n)$$

Fazendo  $\lambda \rightarrow 0$ , segue que

$$u(x_1, \dots, x_n) \leq u(-x_1, \dots, x_n).$$

Pela simetria de  $\Omega$ , usando raciocínio análogo, para  $\lambda \in (-a, 0)$  concluímos que

$$u(-x_1, \dots, x_n) \leq u(x_1, \dots, x_n).$$

Dessa forma obtemos a simetria de  $u$  em relação ao plano  $\{x_1 = 0\}$ . Temos ainda que

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial x_1}(\lambda, 0, 0, \dots, 0) = 2 \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_1}(\lambda, 0, 0, \dots, 0)$$

para todo  $\lambda \in (-a, a)$ , e como consequência do Lema de Hopf, aplicado a  $w_\lambda$  e  $\Sigma_\lambda$  segue que

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_1} < 0 \text{ para todo } x \in \Omega. \quad \blacksquare$$

### Prova do Teorema (1.3)

#### Demonstração:

Apliquemos o Lema (7) e obtemos a simetria a direção  $x_1$ , mas como o laplaciano é invariante por rotação, verificamos a simetria em qualquer direção e usando argumento análogo, portanto, temos que  $u$  é uma função simétrica em relação à origem.  $\blacksquare$

## 1.3 Aplicação para domínio não limitado

Nesta seção, iremos provar o seguinte resultado:

**Teorema 16** *Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  solução de*

$$\begin{cases} \Delta u + e^u = 0, & x \in \mathbb{R}^2 \\ \int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)} < +\infty. \end{cases} \quad (1.9)$$

*então  $u$  é radialmente simétrica com respeito a algum ponto  $x^0$  de  $\mathbb{R}^2$  e, portanto, assume a forma*

$$\phi_{\lambda, x^0}(x) = \ln \left( \frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2|x - x^0|^2)^2} \right), \lambda > 0, x^0 \in \mathbb{R}^2. \quad (1.10)$$

$\phi_{\lambda, x^0}(x)$  é uma família de soluções explícitas para (1.9).

De fato, escrevendo  $v(r) = \log \left( \frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2 r^2)^2} \right)$ , onde  $r = |x - x^0|$ . Daí,

$$\begin{aligned} v'(r) &= -4\lambda^2(4 + \lambda^2 r^2)^{-1}; \\ v''(r) &= 8\lambda^4(4 + \lambda^2 r^2)^{-2} r^2 - 4\lambda^2(4 + \lambda^2 r^2)^{-1} \end{aligned}$$

e assim temos

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) = -\frac{32\lambda^2}{(4 + \lambda^2 r^2)^2}.$$

Logo,

$$v''(r) + \frac{1}{r}v'(r) + e^{v(r)} = 0.$$

Portanto,

$$\Delta \phi_{\lambda, x^0} + e^{\phi_{\lambda, x^0}} = 0 \text{ em } \mathbb{R}^n. \quad (1.11)$$

Então, é natural verificar se estas são as únicas soluções desse problema. Dessa maneira, o teorema (16) vem responder afirmativamente a este questionamento. Então, para atingirmos nosso objetivo nos basearemos em uma estimativa do limite superior para a solução no infinito,

e depois aplicaremos o Método dos Planos Móveis.

Primeiro obteremos uma estimativa para comportamento assintótico para as soluções. Em seguida, para mostrarmos a simetria, moveremos a família de linhas que são ortogonais para uma dada direção do infinito negativo a uma posição crítica e assim verificamos que a solução é simétrica nessa direção sobre a posição crítica. Mostraremos também que a solução é estritamente crescente antes da posição crítica. E como a direção pode ser escolhida arbitrariamente, concluiremos que a solução será radialmente simétrica sobre algum ponto. Finalmente, pela unicidade da solução do problema de Equações Diferenciais Ordinárias.

$$\begin{cases} u''(r) + \frac{1}{r}u'(r) = f(u) \\ u'(x^0) = 0 \\ u(x^0) = y^0, \end{cases} \quad (1.12)$$

verificamos que a solução de (1.9) deve assumir a forma de  $\phi_{\lambda, x^0}(x)$ .

Agora, usando a estimativa de Ding para o limite inferior da integral  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u dx$ , estudaremos o crescimento das soluções no infinito e obteremos um resultado essencial para aplicação do método dos planos móveis.

**Lema 5** (Ding) *Se  $u$  é solução de  $\Delta u = e^{u(x)}$  em  $\mathbb{R}^2$  e  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)} dx < +\infty$ , então  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)} dx \geq 8\pi$ .*

**Demonstração:**

Para  $-\infty < t < +\infty$  dado  $\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2; u(x) > t\}$  podemos obter

$$\int_{\Omega_t} e^u(x) dx = - \int_{\Omega_t} \Delta u = \int_{\partial\Omega_t} |\nabla u| ds, \quad (1.13)$$

pois pela identidade de Green, temos

$$\int_{\Omega_t} \Delta u dx = \int_{\partial\Omega_t} \frac{\partial u}{\partial \nu} = \int_{\partial\Omega_t} \langle \nabla u, \nu \rangle ds,$$

onde  $\nu$  é um vetor exterior unitário. Tomando  $\nu = -\frac{\nabla u}{|\nabla u|}$ , obtemos (1.13).

A fórmula da co-área nos diz que

$$\int_{\Omega_t} f|\nabla u| dx = \int_{-\infty}^t \left( \int_{\partial\Omega_t} f ds \right) dt.$$

Usando-a para  $f = \frac{1}{|\nabla u|}$  temos

$$\int_{\Omega_t} \frac{1}{|\nabla u|} \cdot |\nabla u| dx = \int_{-\infty}^t \left( \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{|\nabla u|} \right) dt.$$

Daí

$$\int_{\Omega_t} 1 dx = \int_{-\infty}^t \left( \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{|\nabla u|} ds \right) dt.$$

E assim,

$$|\Omega_t| = \int_{-\infty}^t \left( \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{|\nabla u|} ds \right) dt = - \int_t^{\infty} \left( \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{|\nabla u|} ds \right) dt.$$

Derivando em relação a  $t$  temos

$$-\frac{d}{dt}|\Omega_t| = \int_{\partial\Omega_t} \frac{ds}{|\nabla u|}. \quad (1.14)$$

Pela desigualdade de Schwartz segue que

$$\int_{\partial\Omega_t} \frac{ds}{|\nabla u|} \cdot \int_{\partial\Omega_t} |\nabla u| \geq \left| \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{|\nabla u|} \cdot |\nabla u| ds \right|^2 = \left| \int_{\partial\Omega_t} 1 ds \right|^2 = |\partial\Omega_t|^2.$$

e pela desigualdade isoperimétrica, temos

$$|\partial\Omega_t|^2 \geq 4|\Omega_t| \quad (1.15)$$

Assim,

$$\int_{\partial\Omega_t} \frac{ds}{|\nabla u|} \cdot \int_{\partial\Omega_t} |\nabla u| \geq 4|\Omega_t|, \quad (1.16)$$

e, portanto,

$$-\left(\frac{d}{dt}|\Omega_t|\right) \int_{\Omega_t} e^{u(x)} dx \geq 4\pi|\Omega_t|. \quad (1.17)$$

Além disso, usando a fórmula da co-área para  $f = \frac{e^u}{\nabla u}$  temos

$$\int_{\Omega_t} e^u dx = \int_t^\infty \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{e^u}{\nabla u} ds d\tau$$

mas como  $\partial\Omega_t = \{x \in \mathbb{R}^2; u(x) = t\}$  temos

$$\int_{\Omega_t} e^u dx = \int_t^\infty e^\tau \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{1}{\nabla u} ds d\tau = - \int_\infty^t e^\tau \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{1}{\nabla u} ds d\tau.$$

Dessa forma, derivando a expressão acima em relação a  $t$  e usando (1.14) segue que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} e^u dx = \frac{d}{dt} \left( - \int_\infty^t e^\tau \int_{\partial\Omega_\tau} \frac{1}{\nabla u} ds d\tau \right) = -e^t \int_{\partial\Omega_t} \frac{1}{\nabla u} ds = e^t \frac{d}{dt} |\Omega_t|. \quad (1.18)$$

Temos também

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} e^u dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_0^{e^u} d\tau dx = \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^u e^t dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \int_{-\infty}^\infty e^t \chi_{\{u>t\}} dt dx = \int_{-\infty}^\infty \int_{\mathbb{R}^2} e^t \chi_{\{u>t\}} dx dt = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^2} e^t \chi_{\Omega_t} dx dt \\ &= \int_{-\infty}^\infty e^t \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{\Omega_t} dx dt = \int_{-\infty}^\infty e^t |\Omega_t| dt. \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^u dx = \int_{-\infty}^\infty e^t |\Omega_t| dt. \quad (1.19)$$

Agora calculemos

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} e^{u(x)} dx \right)^2 = 2 \int_{\Omega_t} e^{u(x)} dx \cdot \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} e^{u(x)} dx \right),$$

Por (1.18) e (1.15), segue então

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega_t} e^{u(x)} dx \right)^2 = 2e^t \left( \frac{d}{dt} |\Omega_t| \right) \cdot \int_{\Omega_t} e^{u(x)} dx \leq -8\pi e^t \cdot |\Omega_t|. \quad (1.20)$$

Integrando de  $-\infty$  a  $+\infty$  temos, por (1.19)

$$- \left( \int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)} dx \right)^2 \leq -8\pi \int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)} dx \quad (1.21)$$

o que implica  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u dx \leq 8\pi$ , já que por hipótese  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u dx < \infty$ . ■

É importante observar que esse Lema nos permite obter o comportamento assintótico para as soluções de (1.9) no infinito.

**Lema 6** *Se  $u(x)$  é solução de (1.9), então quando  $|x| \rightarrow \infty$ ,*

$$\frac{u(x)}{\ln|x|} \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)} \text{ uniformemente.} \quad (1.22)$$

**Demonstração:**

Pelo Teorema (10), segue da condição  $\int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)} dx < \infty$  que a solução  $u$  é limitada superiormente.

$$\begin{aligned} \text{Dado } w(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} (\log|x-y| - \log(|y|+1)) e^{u(y)} dy, \text{ temos} \\ w(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log|x-y| e^{u(y)} dy - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log(|y|+1) e^{u(y)} dy, \end{aligned}$$

Observemos que

$$\Delta w = \Delta \left( \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \log|x-y| e^{u(y)} dy \right)$$

Então pelo Teorema (4), segue que

$$\Delta w = e^u \text{ para todo } x \in \mathbb{R}^2.$$

Agora mostraremos que

$$\frac{w(x)}{\log|x|} \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} e^{u(x)} dx, \text{ uniformemente quando } |x| \rightarrow \infty. \quad (1.23)$$

Para obtermos isto precisamos verificar que

$$I := 2\pi \frac{w(x)}{\log|x|} - \int_{\mathbb{R}^2} e^{u(y)} dy = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\log|x-y| - \log(|y|+1) - \log|x|}{\log|x|} e^{u(y)} dy \rightarrow 0 \quad (1.24)$$

quando,  $|x| \rightarrow \infty$ .

Escrevamos  $I = I_1 + I_2 + I_3$ , onde  $I_1, I_2$  e  $I_3$  são, respectivamente, as integrais sobre as três regiões seguintes

$$D_1 = \{y \in \mathbb{R}^2; |y - x| \leq 1\},$$

$$D_2 = \{y \in \mathbb{R}^2; |x - y| > 1 \text{ e } |y| \leq K\},$$

e

$$D_3 = \{y \in \mathbb{R}^2; |x - y| > 1 \text{ e } |y| > K\},$$

com  $K > 0$ . Como mostra a Figura 1.4:

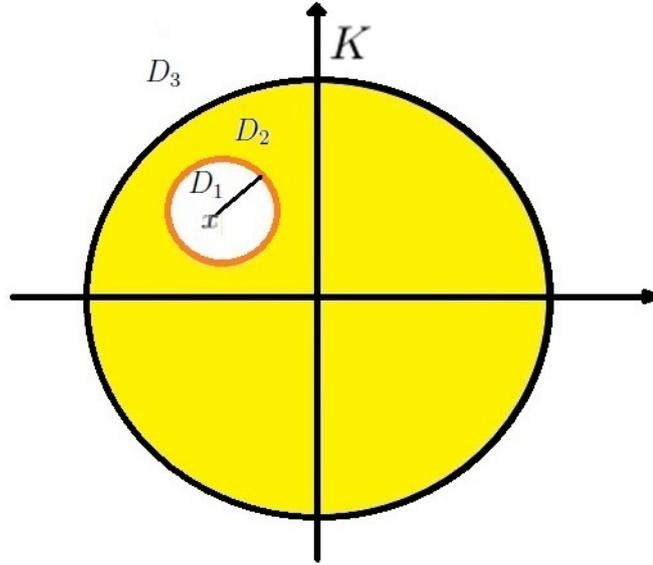


Figura 1.4: Regiões  $D_1, D_2$  e  $D_3$ .

Admitamos que  $|x| \geq 3$ .

a) Para estimar

$$I_1 = \int_{|x-y| \leq 1} \frac{\log|x-y| - \log(|y|+1) - \log|x|}{\log|x|} e^{u(y)} dy, \quad (1.25)$$

notemos que como  $|x-y| \leq 1$  segue que  $\log|x-y| \leq 0$ , portanto,  $I_1$  é negativo e dessa forma  $|I_1| = -I_1$ .

Assim,

$$|I_1| = \int_{|x-y| \leq 1} \frac{-\log|x-y| + \log(|y|+1) + \log|x|}{\log|x|} e^{u(y)} dy.$$

Mas como  $|x-y| \leq 1$ , temos que  $|y|+1 \leq |x-y|+|x|+1 \leq 2+|x|$  e, desse modo,  $\log(|y|+1) \leq \log(|x|+2)$ , assim,

$$|I_1| \leq \int_{|x-y| \leq 1} \left( \frac{-\log|x-y| + \log(|x|+2)}{\log|x|} + 1 \right) e^{u(y)} dy.$$

Observemos que  $|x| \rightarrow \infty$  temos que  $\frac{\log|x|+2}{\log|x|} \rightarrow 1$ . Logo, para  $|x|$  suficientemente

grande temos que  $\frac{\log|x|+2}{\log|x|} \leq C_1$  e, portanto,

$$|I_1| \leq C_1 \int_{|x-y| \leq 1} e^{u(y)} dy - \int_{|x-y| \leq 1} \frac{\log|x-y|}{\log|x|} e^{u(y)} dy.$$

Como  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u dy < \infty$ , segue dado  $\epsilon > 0$  existe  $R_1 > 0$  tal que  $\int_{|y| > R_1} e^{u(y)} dy < \epsilon$ . Desse modo, para  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2C_1}$  temos

$$C_1 \int_{|y| > R_1} e^u dy < \frac{\epsilon}{2}.$$

Agora estudaremos o comportamento de  $\tilde{I}_1 = \int_{|x-y| \leq 1} \frac{\log|x-y|}{\log|x|} e^{u(y)} dy$ . Devemos observar que quando  $y \rightarrow x$  temos que  $\log|x-y| \rightarrow -\infty$ . Para evitarmos esse problema, definamos  $\tilde{I}_{1\delta} = \int_{\delta < |x-y| \leq 1} \frac{\log|x-y|}{\log|x|} e^{u(y)} dy$ , onde  $0 < \delta < 1$ . Temos, assim, que em  $D_{1\delta} = \{y \in \mathbb{R}^2; \delta < |x-y| \leq 1\}$ , como  $e^u$  é limitado uniformemente, temos

$$\tilde{I}_{1\delta} = C_2 \left| \int_{\delta < |x-y| < 1} \frac{\log|x-y|}{\log|x|} dy \right|.$$

Para  $|x|$  suficientemente grande temos

$$\tilde{I}_{1\delta} \leq \frac{C_2}{\log|x|} \left| \int_{\delta < |x-y| < 1} \log|x-y| dy \right|.$$

Usando coordenadas polares calculemos

$$\int_{\delta < |x-y| < 1} \log|x-y| dy = 2\pi \int_{\delta}^1 r \log r dr = 2\pi(\delta^2 \log \delta - 1/4 + \delta^2/4)$$

Fazendo  $\delta \rightarrow 0$  temos

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\delta}^1 \log|x-y| dy = -\frac{\pi}{2}$$

Dessa maneira, para  $|x|$  grande o suficiente temos que

$$\tilde{I}_1 \leq \frac{\pi C_2}{2 \log|x|} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

Logo  $I_1 \rightarrow 0$ .

b) Para cada  $K$  fixado, verificamos em  $D_2$  que  $|x-y| \leq |x| + |y| \leq |x| + K$ . Temos, assim

$$\begin{aligned} \left| \frac{\log|x-y| - \log(|y|+1) - \log|x|}{\ln|x|} \right| &\leq \left| \frac{\log(|x|+K) - \log(K+1) - \log|x|}{\log|x|} \right| \\ &= \left| \frac{\log\left(\frac{|x|+K}{|x|}\right) - \log(K+1)}{\log|x|} \right|. \end{aligned}$$

Daí,

$$\left| \frac{\log|x-y| - \log(|y|+1) - \log|x|}{\log|x|} \right| \leq \left| \frac{\log\left(1 + \frac{K}{|x|}\right)}{\log|x|} \right| + \left| \frac{\log(K+1)}{\log|x|} \right| \rightarrow 0,$$

quando  $|x| \rightarrow \infty$ . E assim, como  $e^u$  é limitado,  $I_2 \rightarrow 0$ .

c) Para vermos que  $I_3 \rightarrow 0$ , fixado  $K$ , observemos que  $|x-y| \leq |x|+|y| \leq |x|+K$ , e usados o fato de que  $|x-y| > 1$ , temos assim,  $0 < \log|x-y| \leq \log(|x|+K)$ , e para  $|x|$  suficientemente grande temos  $\frac{\log(|x|+K)}{\log|x|}$  é limitado.

$$\begin{aligned} \left| \frac{\log|x-y| - \log(|y|+1) - \log|x|}{\log|x|} \right| &\leq \left| \frac{\log|x-y|}{\log|x|} \right| + \left| \frac{\log(|y|+1)}{\log|x|} \right| + 1 \\ &\leq \left| \frac{\log|x-y|}{\log|x|} \right| + \left| \frac{\log(|K|+1)}{\log|x|} \right| + 1 \leq C \end{aligned}$$

e fazendo  $|x| \rightarrow \infty$ , usando o fato de que  $\int_{\mathbb{R}^2} e^u(y)dy < \infty$ , por argumento análogo utilizado em a) verificamos que  $I_3 \rightarrow 0$ . Portanto, por a), b) e c) segue (1.24).

Consideremos a função  $v(x) = u(x) + w(x)$ . Então  $\Delta v = \Delta u(x) + \Delta w(x) \equiv 0$ , e

$$v(x) \leq C + C_1 \log(|x| + 1),$$

para algumas constante  $C$  e  $C_1$ . Notemos que, para  $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C + C_1 \log(t + 1)}{t^\alpha} \rightarrow 0,$$

logo  $C + C_1 \log(|x| + 1) = O(|x|^\alpha)$  e , portanto,  $v(x) = O(|x|^\alpha)$  e pelo Lema (1),  $v$  é constante. Logo  $u \equiv -w + C$ , com  $C \in \mathbb{R}$ , e o resultado segue. ■

### 1.3.1 Prova do Teorema (16)

Verificaremos que a solução de (1.9) deve assumir a forma de  $\phi_{\lambda, x^0}(x)$ . Para isso, basta verificar a simetria da solução em relação a uma direção qualquer, pois dessa forma, pela invariância do operador elíptico de segunda ordem pela rotação, obtemos a simetria em qualquer direção. Logo nossa equação vai depender apenas do raio, ou seja, a equação passa a depender de um número real. Portanto, nosso problema se transforma em uma Equação Diferencial Ordinária, e como sabemos que (1.10) é uma família de soluções para (1.9), obtemos pelo Teorema (11) que essas são as únicas solução.

Assumindo que  $u$  é solução do problema (1.9), mostraremos a monotonicidade e a simetria da solução na direção  $x_1$ , sem perda de generalidade.

Primeiro, estabeleceremos um sistema de coordenadas de  $\mathbb{R}^2$  adequado, de maneira que os pontos de máximos de  $u$  fiquem à esquerda da reta  $x_1 = -3$ . Isto é possível graças ao Lema (6), que garante o comportamento assintótico de  $u$  no infinito.

Para  $\lambda \in \mathbb{R}$ , definimos

$$\Sigma_\lambda = \{(x_1, x_2); x_1 < \lambda\}$$

e

$$\partial\Sigma_\lambda = T_\lambda = \{(x_1, x_2); x_1 = \lambda\}.$$

Tomemos

$$x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2),$$

a reflexão do ponto  $x = (x_1, x_2)$  sobre a reta  $T_\lambda$ .

Definimos  $w_\lambda = u(x^\lambda) - u(x)$  e  $\bar{w}_\lambda = \frac{w_\lambda}{g(x)}$ , com  $g(x) = \log(|x| - 1)$ . Notemos que  $w_\lambda$  e  $\bar{w}_\lambda$  estão bem definidas pois  $\lambda < -2$ ,  $x \in \Sigma_\lambda$ .

Observemos que

$$\Delta w_\lambda(x) = \Delta u(x^\lambda) - \Delta u(x) = -e^{u(x^\lambda)} + e^{u(x)}.$$

Mas pela continuidade de  $e^u$  e pelo teorema do valor intermediário, temos que existe um  $\psi(x)$  entre  $u(x^\lambda)$  e  $u(x)$  tal que

$$-e^{u(x^\lambda)} + e^{u(x)} = -e^{\psi(x)}(u(x^\lambda) - u(x)) = -e^{\psi(x)}w_\lambda(x).$$

Assim, obtemos

$$\Delta w_\lambda(x) + e^{\psi(x)}w_\lambda(x) = 0. \quad (1.26)$$

notemos que para  $f, g \in C(\mathbb{R}^2)$  com  $g(x) \neq 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}^2$  temos

$$\nabla \frac{f}{g} = \frac{\nabla f \cdot g + \nabla g \cdot f}{g^2} = \frac{\nabla f + \nabla g \cdot \frac{f}{g}}{g}$$

Desse modo, obtemos

$$\nabla \bar{w}_\lambda = \frac{\nabla w_\lambda - \nabla g \cdot \bar{w}_\lambda}{g}. \quad (1.27)$$

Também verificamos que

$$\Delta \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{1}{g} \Delta f - \frac{2}{g} \nabla \left( \frac{f}{g} \right) \cdot \nabla g - \frac{f}{g^2} \Delta g.$$

Desse modo, obtemos

$$\nabla \bar{w}_\lambda = \frac{\nabla w_\lambda \cdot g - \nabla g \cdot f}{g^2} \quad (1.28)$$

e

$$\Delta \bar{w}_\lambda + \frac{2}{g} \nabla g \cdot \nabla \bar{w}_\lambda - \frac{1}{g} \Delta w_\lambda + \frac{w_\lambda}{g^2} \Delta g = 0,$$

usando (??) segue que

$$\Delta \bar{w}_\lambda + \frac{2}{g} \nabla g \cdot \nabla \bar{w}_\lambda - \frac{1}{g} (-e^{\psi(x)} w_\lambda) + \frac{w_\lambda}{g} \frac{\Delta g}{g} = 0,$$

ou seja,

$$\Delta \bar{w}_\lambda + \frac{2}{g} \nabla g \cdot \nabla \bar{w}_\lambda + \left( e^{\psi(x)} + \frac{\Delta g}{g} \right) \frac{w_\lambda}{g} = 0$$

e assim,

$$\Delta \bar{w}_\lambda + \frac{2}{g} \nabla g \cdot \nabla \bar{w}_\lambda + \left( e^{\psi} + \frac{\Delta g}{g} \right) \bar{w}_\lambda = 0, \quad (1.29)$$

onde  $\psi(x)$  é um número real entre  $u(x)$  e  $u(x^\lambda)$ .

Antes de começarmos a aplicar o método, vamos verificar o seguinte resultado:

**Lema 7** Existe um  $R_0 > 0$  (independente de  $\lambda$ ), tal que se  $x^0$  um ponto de mínimo de  $\bar{w}_\lambda$  e  $\bar{w}_\lambda(x^0) < 0$ , então  $|x^0| < R_0$ .

**Demonstração:**

Suponhamos, por absurdo, dado  $R$  exista  $\lambda_R$  tal que se  $x^0$  um ponto é de mínimo de  $\bar{w}_{\lambda_R}$ , com  $|x^0| > R$  e  $\bar{w}_{\lambda_R}(x^0) < 0$ . Dessa forma, temos

$$-\Delta \bar{w}_{\lambda_R}(x^0) \leq 0 \text{ e } \nabla \bar{w}_{\lambda_R}(x^0) = 0 \quad (1.30)$$

E aplicando em (1.29) segue que

$$\left( e^{\psi_\lambda(x^0)} + \frac{\Delta g(x^0)}{g(x^0)} \right) \bar{w}_\lambda(x^0) > 0.$$

Por outro lado, como temos  $w_\lambda(x^0) < 0$ , verificamos que  $u(x^{0\lambda}) - u(x^0) < 0$ , portanto,  $u(x^{0\lambda}) < u(x^0)$ . Desse modo,  $\psi(x^0) \leq u(x^0)$ .

Pelos Lemas (6) e (5), temos que existe um  $R_1$  tal que se  $|x^0| > R_1$  verificamos que  $\frac{u(x^0)}{\log|x^0|} < -4$  e, portanto,  $e^{\psi(x^0)} < |x^0|^{-4}$ .

Agora calculemos  $\frac{\Delta g}{g}$ .

Primeiro, notemos que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\frac{x_i}{|x|}}{|x| - 1} = \frac{x_i}{|x|^2 - |x|},$$

logo,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = \frac{|x|^2 - |x| - 2x_i^2 - \frac{x_i^2}{|x|}}{(|x|^2 - |x|)^2}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \Delta g &= \frac{|x|^2 - |x| - 2x_1^2 - \frac{x_1^2}{|x|}}{(|x|^2 - |x|)^2} + \frac{|x|^2 - |x| - 2x_2^2 - \frac{x_2^2}{|x|}}{(|x|^2 - |x|)^2} \\ &= \frac{2|x|^2 - 2|x| - 2|x|^2 + |x|}{(|x|^2 - |x|)^2} = -\frac{|x|}{(|x|^2 - |x|)^2} = -\frac{1}{|x|(|x| - 1)^2}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\frac{\Delta g}{g} = -\frac{1}{|x|(|x| - 1)^2 \log(|x| - 1)}. \quad (1.31)$$

Logo,

$$e^{\psi(x^0)} + \frac{\Delta g}{g} < 0, \text{ se } |x^0| > R_1. \quad (1.32)$$

Tomando  $R > R_1$ , obtemos uma contradição, assim, devemos ter  $|x^0| < R_0$  para algum  $R_0$ . ■

**Observações 2** Em outras palavras, o Lema (7) nos garante que os pontos de mínimos negativos de  $\bar{w}_\lambda$  pertencem na bola  $B_{R_0}$ .

Agora estamos prontos para aplicar o Método dos Planos Móveis.

**Passo 1:**

**Afirmção 3** Para  $\lambda < 0$  com módulo suficientemente grande, temos que

$$w_\lambda \geq 0, \text{ para todo } x \in \Sigma_\lambda. \quad (1.33)$$

**Demonstração:**

Consideremos  $R_0$  como no Lema (7) e tomemos  $\lambda < R_0$ . De fato, supondo, por absurdo, que exista algum  $x \in \Sigma_\lambda$  tal que  $w_\lambda(x) < 0$ . Pelo Lema (6), temos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\log |x|}$$

é finito e, portanto, obtemos que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \bar{w}_\lambda = 0$ . Dessa forma, dado  $\epsilon > 0$  existe  $R_2$  tal que se  $|x| > R_2$ , verificamos que  $|\bar{w}_\lambda| < \epsilon$ , daí como  $\bar{w}_\lambda$  é contínua, para  $x \in B_{R_2} \cap \overline{\Sigma_\lambda}$  temos que  $\bar{w}_\lambda$  é limitada. Como  $w_\lambda$  e  $\bar{w}_\lambda$  têm o mesmo sinal, podemos achar  $x^0$ , um ponto de mínimo negativo de  $\bar{w}_\lambda$  com  $|x^0| > R_0$ . Contradizendo o Lema (7). ■

Agora, moveremos o plano  $T_\lambda$  para a posição limite afim de obtermos a simetria.

**Passo 2:**

Seja  $\lambda_0 = \sup\{\lambda; w_\nu(x) \geq 0, \forall x \in \Sigma_\nu, \nu \leq \lambda\}$ .

Pelo comportamento assintótico de  $u$  quando,  $|x| \rightarrow \infty$  temos que  $\lambda_0$  é finito. Agora, afim de obter a simetria de  $u$  afirmamos que

**Afirmção 4** Para  $\lambda_0$ , temos  $w_{\lambda_0}(x) \equiv 0$  para todo  $x \in \Sigma_{\lambda_0}$ .

**Demonstração:**

Pela continuidade de  $u$  já temos que  $w_{\lambda_0} \geq 0$ .

Agora, verificamos que  $w_{\lambda_0} > 0$  para todo  $x \in \Sigma_{\lambda_0}$ .

De fato, por (1.26) e c pelo Princípio do Máximo Forte constatamos que o mínimo de  $w_{\lambda_0}$  é atingido sobre  $T_{\lambda_0}$ , onde  $w_{\lambda_0} \equiv 0$  dessa forma devemos ter

$$w_{\lambda_0}(x) > 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_0}. \quad (1.34)$$

Afirmamos ainda que existe um  $\delta_0 > 0$  tal que, para todo  $0 < \delta < \delta_0$  e temos

$$w_{\lambda_0+\delta}(x) \geq 0 \text{ em } \Sigma_{\lambda_0+\delta} \quad (1.35)$$

Suponha, por absurdo, que isto não ocorra, então podemos tomar uma sequência  $\{\delta_i\} \subset \mathbb{R}$  tendendo para zero. Para cada  $i$ , tomemos um  $x^i$  correspondente que seja um ponto de mínimo negativo de  $\bar{w}_{\lambda_0+\delta_i}$ , pelo Lema (7) temos que  $|x^i| \leq R_0$  para todo  $i = 1, 2, 3, \dots$ . Logo, existe uma subsequência  $\{x^{i_k}\}$  convergindo para algum ponto  $x^0 \in \mathbb{R}^2$ , como  $u, g \in C^2(\mathbb{R}^2)$  temos que

$$\nabla \bar{w}_{\lambda_0}(x^0) = \lim_{i_k \rightarrow \infty} \nabla \bar{w}_{\lambda_0+\delta_{i_k}}(x^{i_k}) = 0 \text{ e } \bar{w}_{\lambda_0}(x^0) = \lim_{i_k \rightarrow \infty} \bar{w}_{\lambda_0+\delta_{i_k}}(x^{i_k}) \leq 0. \quad (1.36)$$

Mas pela definição de  $\lambda_0$  temos que  $\bar{w}_{\lambda_0} \geq 0$ , portanto, devemos ter  $\bar{w}_{\lambda_0}(x^0) = 0$ . Agora, aplicando em (1.28), segue que

$$\nabla w_{\lambda_0}(x^0) = \nabla \bar{w}_{\lambda_0}(x^0)g(x^0) + \nabla g(x^0)\bar{w}_{\lambda_0}(x^0) = 0 + 0 = 0. \quad (1.37)$$

Como  $\bar{w}(x^0) = 0$ , também temos  $w_{\lambda_0}(x^0) = 0$ , daí pelo Princípio do Máximo, temos que  $x^0 \in \partial\Sigma_{\lambda_0} = T_{\lambda_0}$ . Mas pelo Lema de Hopf, temos que a derivada normal exterior

$$\frac{\partial w_{\lambda_0}}{\partial \nu}(x^0) < 0$$

contradizendo (1.37). Desse modo, devemos ter  $w_{\lambda_0+\delta}(x) \geq 0$  para todo  $x \in \Sigma_{\lambda_0+\delta}$ . Isto gera uma contradição com a definição de  $\lambda_0$ . Portanto, o resultado segue. ■

E como podemos repetir o argumento para qualquer direção, obtemos a simetria radial de  $u$  em torno de  $x^0$ . Então, temos nosso problema simplificado para o problema de Equações Parciais Ordinárias (1.12), donde segue a unicidade da solução, e temos a família (1.10) é a única solução para (1.9).

**Observações 3** *Um resultado semelhante ao Teorema (16) é obtido par  $n \geq 3$ . Para isso, trabalhamos com as condições*

$$\Delta u(x) + u^p, u > 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n$$

com  $p = n + 2/n - 2$ . e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{C|x|^{2-n}} < \infty.$$

## Capítulo 2

# Transformada de Kelvin e Método das Esferas Móveis

Para diversos problemas sobre um domínio não-limitado, inicialmente, tratamos de resolvê-los em uma parte limitada deste domínio, sem perda de generalidade, uma bola. Então, posteriormente, faz-se necessário seu estudo fora da esfera que delimita esta bola. Assim, podemos pensar em usar uma inversão, que transforma o exterior da esfera em seu interior, conservando sua fronteira, possibilitando resolver esse problema de forma mais simples. A transformada de Kelvin, desenvolvida em 1847 pelo próprio Lord Kelvin, é uma inversão que também preserva o sinal do laplaciano. E assim, torna-se uma ferramenta bastante utilizada para tratar de alguns problemas elípticos .

Um variante do Método dos Planos Móveis, o Método das Esferas Móveis, utiliza a Transformada de Kelvin como ferramenta indispensável na sua aplicação. Este método foi desenvolvido por Naito-Suzuki(1991). Posteriormente P. Padilla generalizou essa ideia para domínios anelares, na sua tese de Ph.D (1994), sob a supervisão de Nirenberg. A partir daí, Chou-Chu (1993) e Chen-Li (1995) utilizaram essa técnica em seus trabalhos. Recentemente, este método tem sido aplicado com bastante sucesso em trabalhos de Yan Yan Li (e colaboradores) para equações com propriedades de invariância conformal, incluindo equações não-lineares.

### 2.1 A Transformada de Kelvin.

**Definição 5** *Seja  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$ , definimos a reflexão de  $y$  com respeito a  $B_\lambda(x)$  como sendo o ponto*

$$y^\lambda = x + \frac{\lambda^2(y - x)}{|y - x|^2}.$$

É importante salientar uma propriedade geométrica interessante dessa reflexão. Dado  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda > 0$ , a reflexão de qualquer ponto  $y$  fora(dentro) da bola  $B_\lambda(x)$  será um elemento de dentro(fora) desta bola, e se  $y \in \partial B_\lambda(x)$ , então  $y$  coincide com sua reflexão. Veja Figura 2.1:



E assim,

$$\sum_{l=1}^2 \frac{\partial y_l}{\partial \zeta_j} \frac{\partial y_l}{\partial \zeta_k} = \frac{1}{|\zeta|^4} \delta_{jk}.$$

Consideremos  $\zeta$  como um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais de  $y$ , deduziremos que o tensor métrico do espaço euclidiano em coordenadas curvilíneas.

$$g_{jk}(\zeta_j, \zeta_k) = \sum_{l=1}^2 \frac{\partial y_l}{\partial \zeta_j} \frac{\partial y_l}{\partial \zeta_k} = \frac{1}{|\zeta|^4} \delta_{jk}.$$

Isto implica que os coeficientes de Lamé são da forma

$$h_j = \sqrt{g_{j,j}(\zeta_j, \zeta_j)} = \frac{1}{|\zeta|^2}.$$

E calculamos o laplaciano da função  $u$  da seguinte forma

$$\Delta u = \frac{1}{\prod_{k=1}^2 h_k} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial y_j} \left( \frac{\prod_{k=1}^2 h_k}{h_j^2} \frac{\partial u}{\partial \zeta_j} \right),$$

o que implica

$$\Delta u(y) = |\zeta|^4 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial}{\partial \zeta_j} \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta_j} \right),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} \Delta u(y) &= |\zeta|^4 \sum_{j=1}^2 \frac{\partial^2}{\partial \zeta_j^2} (u(y)) = \frac{1}{|y|^4} \sum_{j=1}^2 (u(\zeta)) \\ &= \frac{1}{|y|^4} \Delta(u(\zeta)) = \frac{1}{|y|^4} \Delta \left( u \left( \frac{y}{|y|^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Assim

$$\Delta \left( u \left( \frac{y}{|y|^2} \right) \right) = |y|^4 \Delta u(y),$$

E portanto, de (2.1), temos que

$$\Delta u_{0,1}(y) = |y|^4 \Delta u(y).$$

E dessa forma, segue o resultado. ■

**Observações 4** Para  $\mathbb{R}^n$  com  $n \geq 3$ , obtemos o mesmo resultado, que é demonstrado de forma análoga, no entanto, podemos verificar que

$$\Delta u_{x,\lambda} = \left( \frac{\lambda}{|y-x|} \right)^{n+2} \Delta u \left( x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|x-y|^2} \right).$$

**Lema 8** Suponhamos  $f \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  satisfazendo

$$f(y) - f_{x,\lambda}(y) \geq 0 \text{ para cada } x \in \partial \mathbb{R}_+^2, \lambda > 0, \text{ e } y \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$$

onde

$$f_{x,\lambda}(y) = f \left( x + \frac{\lambda^2(y-x)}{|x-y|^2} \right) - 4 \log \frac{|y-x|}{\lambda}.$$

Então

$$f(y) = f(y_1, y_2) = f(0, y_2) \text{ para todos } y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$$

**Demonstração:**

Para cada  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$ , isto é,  $x = (s, 0)$ ,  $\lambda > 0$ , definamos

$$g_{x,\lambda}(y) = f(y) - f_{x,\lambda}(y), y \in \mathbb{R}_+^2, |y - x| \geq \lambda.$$

Então para  $x = (s, 0)$  temos

$$g_{x,|x-y|}(y) = f(y) - f\left(x + \frac{|x-y|^2(y-x)}{|x-y|^2}\right) - 4 \log \frac{|y-x|}{|x-y|} = f(y) - f(y) = 0.$$

E para  $0 < r \leq 1$  temos por hipótese que

$$g_{x,r|x-y|}(y) \leq 0.$$

Consequentemente, verificamos que

$$\frac{d}{dr}\{g_{x,r|x-y|}\}_{r=1} \leq 0$$

Observemos, ainda, que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dr}\{g_{x,r|x-y|}\}_{r=1} &= -\nabla f(x + (y-x)) \cdot 2(y-x) + 4 \\ &= -\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)(y_1 - s) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)y_2\right) + 4 \leq 0 \end{aligned}$$

Daí,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)(y_1 - s) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)y_2\right) \geq 2$$

e dividindo ambos os membros por  $|s|$ , obtemos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)\left(\frac{y_1 - s}{|s|}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)\frac{y_2}{|s|}\right) \geq \frac{2}{|s|},$$

ou seja,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)\left(\frac{y_1}{|s|} - \frac{s}{|s|}\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)\frac{y_2}{|s|}\right) \geq \frac{2}{|s|}$$

Fazendo  $s$  tender ao infinito temos

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)\left(\frac{y_1}{|s|} - 1\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)\frac{y_2}{|s|}\right) \geq \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2}{|s|}$$

Dessa forma, segue que  $-\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) \geq 0$ . Fazendo, agora,  $s$  tender ao infinito negativo temos

$$\lim_{s \leftarrow -\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(y)\left(\frac{y_1}{|s|} + 1\right) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(y)\frac{y_2}{|s|}\right) \geq \lim_{s \leftarrow -\infty} \frac{2}{|s|}$$

segue que  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) \geq 0$  e, portanto,  $\frac{\partial f}{\partial x_1}(y) = 0$ , donde concluímos que  $f$  é constante com relação a  $x_1$ . ■

**Lema 9** Suponha  $f \in C^1(\mathbb{R})$  tal que para todo  $b \in \mathbb{R}$  existe algum  $\nu_b > 0$  satisfazendo

$$f(s+b) = f\left(\frac{\nu_b}{s} + b\right) - 4 \log\left(\frac{|s|}{\nu_b}\right) \text{ para todo } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Então para algum  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a, d > 0$ ,

$$f(s) = \log\left(\frac{a}{(s-s_0)^2 + d}\right), \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

**Demonstração:**

Consideremos

$$h(s) = e^{-f(s)/2}, \text{ para todo } s \in \mathbb{R}.$$

Então, por hipótese, segue que

$$h(s+b) = e^{-f(s+b)/2} = e^{(f(\frac{\nu_b}{s} + b) - 4 \log(\frac{|s|}{\nu_b}))/2} = \frac{s^2}{\nu_b^2} h\left(\frac{\nu_b^2}{s} + b\right), \text{ para } s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Dessa maneira, para  $|s|$  grande

$$h(s) = h(s+0) = \frac{s^2}{\nu_0^2} h\left(\frac{\nu_0^2}{s} + b\right) = \frac{s^2}{\nu_0^2} \left( h(0) + h'(0) \frac{\nu_0^2}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right),$$

ou seja,

$$h(s) = h(0) \frac{h(0)}{\nu_0^2} s^2 + h'(0) s + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \frac{s^2}{\nu_0^2}. \quad (2.2)$$

e, também,

$$\begin{aligned} h(s) &= h((s-b)+b) = \frac{(s-b)^2}{\nu_b} h\left(\frac{\nu_b^2}{s-b} + b\right) = \frac{(s-b)^2}{\nu_b} \\ &= \frac{(s-b)^2}{\nu_b} \left( h(b) + h'(b) \frac{\nu_b^2}{s-b} + O\left(\frac{1}{s^2}\right) \right), \end{aligned}$$

ou ainda,

$$h(s) = \frac{h(b)}{\nu_b} s^2 \left( h'(s) - \frac{2bh(b)}{\nu_b} \right) s + \frac{b^2 h(b)}{\nu_b} + h'(b)b + O\left(\frac{1}{(s-b)^2}\right) \frac{(s-b)^2}{\nu_b^2} \quad (2.3)$$

Comparando as equações (2.2) e (2.3), obtemos

$$\frac{h(b)}{\nu_b^2} = \frac{h(0)}{\nu_0^2} \quad h'(b) - \frac{2bh(b)}{\nu_b^2} = h'(0).$$

Assim, fazendo a substituição  $h(b) = \frac{h(0)\nu_b}{\nu_0}$  em  $h'(b) - \frac{2bh(b)}{\nu_b^2} = h'(0)$  temos

$$h'(b) - \frac{2bh(0)}{\nu_0^2} = h'(0).$$

Integrando ambos os lados da equação acima na variável  $b$ , obtemos

$$h(b) - \frac{h(0)}{\nu_0^2} b^2 = h'(0)b + C,$$

para algum  $C \in \mathbb{R}$ . Fazendo  $b = 0$ , verificamos que  $C = h(0)$ . Daí segue que

$$h(b) = \frac{h(0)}{\nu_0^2} b^2 + h'(0)b + h(0), \text{ para todo } b \in \mathbb{R},$$

assim,

$$h(s) = \frac{h(0)}{\nu_0^2} \left( b^2 + \nu_0^2 \frac{h'(0)}{h(0)} b + \nu_0^2 \right) = \frac{h(0)}{\nu_0^2} \left( \left( b + \frac{h'(0)\nu_0^2}{2h(0)} \right)^2 - \frac{\nu_0^4 h'(0)^2}{4h(0)^2} + \nu_0^2 \right)$$

Então, tomemos

$$a = \frac{\nu_0^2}{h(0)}, \quad s_0 = -\frac{h'(0)\nu_0^2}{2h(0)} \quad e \quad d = -\frac{\nu_0^4 h'(0)^2}{4h(0)^2} + \nu_0^2$$

e dessa forma,  $h(s) = \frac{1}{a}((s - s_0)^2 + d)$  com  $a > 0$  e  $d > 0$ , pois, por definição,  $h(s) > 0$  para todo  $s \in \mathbb{R}$ . ■

## 2.2 O Método das Esferas Móveis

O Método das Esferas Móveis funciona semelhantemente ao Método dos Planos Móveis, no entanto, ao invés de tomarmos um plano perpendicular a uma direção fixada, partimos de uma esfera com o centro fixado.

A título de exemplo tomemos o espaço euclidiano  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $u$  uma solução de uma dada Equação Diferencial Parcial. Suponhamos que se queira provar a monotonicidade e simetria radial de  $u$  em relação a um ponto  $x_0$ . Seja  $\lambda$  um número real e consideremos  $\partial B_\lambda$  a esfera que será movida.

Seja  $\Sigma_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| > \lambda\}$ , a região situada fora de  $\partial B_\lambda$ . Agora, consideremos,  $x^\lambda = \lambda^2 x / |x|^2$  a reflexão pela Transformada de Kelvin do ponto  $x \in \Sigma_\lambda$  em relação a  $\partial B_\lambda$ . Como ilustrado na Figura 2.2.

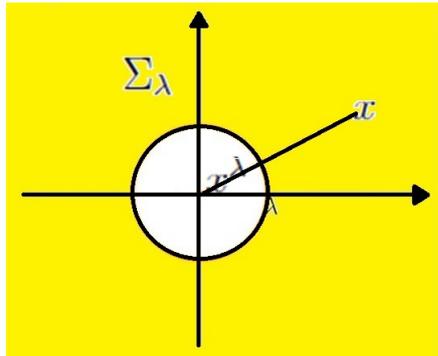


Figura 2.2: Reflexão de um ponto  $x$  em relação a uma esfera  $B_\lambda$ .

Vamos comparar os valores de  $u$  nos pontos  $x$  e  $x^\lambda$  e pretendemos obter a simetria de  $u$  em relação a alguma esfera  $\partial B_{\lambda_0}$ . Desse modo, definamos

$$w_\lambda = u_{0,\lambda}(x) - u(x) \text{ em } \Sigma_\lambda.$$

E devemos mostrar que para algum  $\lambda_0$

$$w_{\lambda_0} \equiv 0, \text{ para todo } x \in \Sigma_{\lambda_0}.$$

Geralmente, dividimos o problema em dois passos.

**Passo 1:** Mostramos que para algum  $\lambda > 0$ , verificamos

$$w_\lambda \geq 0 \text{ em } \Sigma_\lambda. \quad (2.4)$$

Assim, poderemos começar a mover a esfera  $\partial B_\lambda$  de modo que a ainda valha a desigualdade acima.

**Passo 2:** Continuamos movendo a esfera uma posição limite, definimos, por exemplo,

$$\lambda_0 = \inf\{\lambda; w(x)_\lambda \geq 0, \text{ para todo } x \in \Sigma_\lambda\}.$$

**Observações 5** Dependendo do comportamento da solução  $u$  do problema considerado podemos definir

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda; w_\lambda(x) \geq 0, \text{ para todo } x \in \Sigma_\lambda\}.$$

E finalmente, concluímos que  $w_{\lambda_0} \equiv 0$  para todo  $x \in \Sigma_{\lambda_0}$ , ou seja,  $u_{0,\lambda_0}(x) = u(x)$ , em outras palavras, obtemos simetria de  $u$  em  $\partial B_{\lambda_0}$ .

Observer que (2.4) é indispensável para do Método das Esferas Móveis, pois permite o uso de uma outra poderosa ferramenta: o Princípio do Máximo.

Agora iremos exemplificar uma aplicação desse método.

## 2.2.1 Aplicação do Método das Esferas Móveis

**Teorema 17** Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  satisfazendo

$$\Delta u(x) + R(|x|)e^u = 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^2. \quad (2.5)$$

com

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{4 \log |x|} < \infty$$

e  $R$  uma função contínua e radialmente simétrica, se  $R$  é monótona na região em que  $R > 0$  e  $R$  não constante. Então, (2.5) não tem solução.

Sem perda de generalidade, suponhamos que

$$\begin{aligned} R(|x|) > 0, \quad R'(|x|) \leq 0 \quad \text{para } |x| < 1 \\ \text{e} \quad R(|x|) \leq 0 \quad \text{para } |x| \geq 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

A prova deste Teorema é baseado nas seguinte fórmula de comparação.

**Lema 10** Sejam  $R$  uma função contínua satisfazendo (2.6) e  $u$  uma solução de (2.5) e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{4 \log |x|} < \infty, \text{ então}$$

$$u(\lambda x) > u\left(\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right) \text{ para todo } x \in B_1(0) \text{ e } 0 < \lambda \leq 1. \quad (2.7)$$

**Demonstração:**

Inicialmente, faremos a comparação entre  $u(x)$  e  $u\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right)$ . No Passo 1, começaremos com a esfera unitária, ou seja, mostraremos que (2.7) é verdadeiro par  $\lambda = 1$ . Isto será feito aplicando a Transformada de Kelvin e o Princípio do Máximo Forte. No Passo 2, moveremos (reduzindo) a esfera  $\partial B_\lambda$  em direção a origem, ou seja, mostraremos que podemos reduzir a esfera  $\partial B_\lambda$  sempre a uma vizinhança da origem. Dessa forma, estabeleceremos a desigualdade para toda  $x \in B_1$  e todo  $\lambda \in (0, 1]$ .

**Passo 1**

Neste passo, vamos verificar a desigualdade para  $x \in B_1$  e  $\lambda = 1$ . Mostraremos que

$$u(x) > u\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x| \quad (2.8)$$

para  $x \in B_1$ . Seja  $v(x) = u\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x|$  como  $|x/|x|^2| = 1/|x|$  verificamos

$$\Delta v(x) = -R\left(\frac{1}{|x|}\right) e^v \text{ para todo } x \in B_1 \setminus \{0\}. \quad (2.9)$$

Como  $|x| < 1$ , segue que  $1/|x| > 1$ , então por (2.6) temos

$$\Delta u < 0 \quad e \quad \Delta v \geq 0 \quad \text{em } B_1.$$

Assim, para  $w = u - v$  temos que

$$\Delta w = \Delta(u - v) = \Delta u - \Delta v < 0.$$

Aplicando o Princípio do Máximo, obtemos

$$w_\lambda > 0,$$

o que equivale,

$$u > v \text{ em } B_1 \quad (2.10)$$

E obtemos (2.9).

**Passo 2**

Neste passo, moveremos a esfera  $\partial B_\lambda$  para  $\lambda = 0$ . Mostraremos que o movimento não pode ser parado antes de atingir a origem. Novamente aplicaremos a Transformada de Kelvin e o Princípio do Máximo. Definamos

$$u_\lambda(x) = u(\lambda x) - 2 \ln \lambda,$$

para  $x \in B_1$ , assim temos

$$\Delta u_\lambda(x) = -R(\lambda|x|)e^{u_\lambda(x)}. \quad (2.11)$$

Seja

$$v_\lambda(x) = u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x|.$$

e obtemos

$$\Delta v_\lambda(x) = -R\left(\frac{\lambda}{|x|}\right) e^{v_\lambda} \quad (2.12)$$

$$w_\lambda = u_\lambda - v_\lambda \text{ em } \overline{B_1}/\{0\}.$$

$$\Delta w_\lambda + R\left(\frac{\lambda^2}{|x|}\right) \psi_\lambda w_\lambda = \left(R\left(\frac{\lambda}{|x|}\right) - R(|x|)\right) e^u, \quad (2.13)$$

onde  $\psi_\lambda$  é alguma função que assume valores entre  $e^u$  e  $e^{u_0, \lambda}$ . Então de acordo com (2.6), temos que

$$R\left(\frac{\lambda}{|x|}\right) - R(|x|) \leq 0$$

para  $|x| \leq 1$  e  $\lambda \leq 1$ . Assim segue de (2.13) que

$$\Delta w_\lambda + C_\lambda(x) w_\lambda \leq 0 \quad (2.14)$$

onde  $C_\lambda(x)$  é uma função limitada e  $\lambda > 0$ .

Dessa maneira, verificamos que fixado  $\lambda$  temos (2.14). Assim aplicando o Princípio do Máximo Forte segue que

$$w_\lambda \geq 0 \quad (2.15)$$

sendo equivalente a (2.7). Agora, faremos  $\lambda$  tender a zero. Seja

$$\lambda_0 = \inf \left\{ \lambda > 0; u(\lambda x) > u\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x| \text{ para todo } x \in B_1 \text{ e } 0 < \lambda \leq 1 \right\}$$

Suponhamos, por absurdo, que  $\lambda_0 > 0$ . Aplicando o Princípio do Máximo Forte e em seguida o Lema de Hopf em (2.14) para  $\lambda = \lambda_0$ , temos

$$w_{\lambda_0} > 0 \text{ em } B_\lambda \text{ e } \frac{\partial w_\lambda}{\partial r} < 0 \text{ sobre } \partial B_\lambda \quad (2.16)$$

onde  $r = |x|$ .

Isto combinados com o fato de  $w_\lambda \equiv 0$  sobre  $\partial B_1$  implica que (2.14) também é válida para  $\lambda$  próximo de  $\lambda_0$  e  $\lambda < \lambda_0$ . Contradizendo a definição de  $\lambda_0$ , dessa maneira, devemos ter  $\lambda_0 = 0$ . ■

### Prova do Teorema (17).

#### Demonstração:

Pela continuidade de  $u$  em  $B_1$ , fazamos  $\lambda \rightarrow 0$  em

$$u(\lambda x) > u\left(\frac{\lambda x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x|$$

com  $x \in B_1$  assim

$$u(0) \geq u(0) - 4 \log |x|$$

Daí teríamos  $\log |x| \geq 0$ , o que é um absurdo, pois  $|x| < 1$ . Dessa maneira, concluímos que não existe  $u$  solução de (2.7). ■

**Observações 6** Um resultado semelhante ao Teorema (17) é obtido par  $n \geq 3$ . Para isso, trabalhamos com as condições

$$\Delta u(x) + R(|x|)u^\tau, u > 0 \text{ para } x \in \mathbb{R}^n$$

com  $\tau = (n+2)/(n-2)$ . e

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{C|x|^{2-n}} < \infty.$$

## Parte II

Classificação da Métricas Conformais  
sobre  $\mathbb{R}_+^2$  com curvatura gaussiana  
constante e curvatura geodésica sobre a  
fronteira com diversas condições de  
finitude da integral

Nesta parte do trabalho classificaremos as soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u + \alpha e^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \text{ com } a, c \in \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.17)$$

assumindo condições apropriadas sobre a finitude a integral tanto no interior do domínio quanto na fronteira.

Em nosso trabalho nos preocuparemos em demonstrar os resultados com o enfoque analítico. No entanto, este problema tem uma motivação geométrica: o Problema de Yamabe, cujo objetivo é provar que para uma variedade riemanniana, a menos de mudança conforme da métrica, sempre existe uma métrica para o qual a curvatura escalar é constante. Esse problema foi anunciado em 1690 por Yamabe. Cerca de 8 anos depois, Trudinger descobriu um erro na sua prova e estabeleceu o resultado adicionando novas hipóteses. Para este problema também podemos ter uma formulação em termos de Equações Diferenciais Parciais.

No nosso trabalho, para  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  solução de (2.17), verificamos que  $e^u \delta_{ij}$  é uma métrica riemanniana definida sobre  $\mathbb{R}_+^2$  conformal com a métrica padrão, tal que a curvatura gaussiana em relação a nova métrica é  $\alpha/2$  e a curvatura geodésica sobre  $\mathbb{R}_+^2$  é  $-c/2$ .

Com o nosso enfoque, é importante salientar que basta considerar três casos:

1.  $\alpha = 1$ , ou seja,  $u$  super-harmônica;
2.  $\alpha = -1$ , ou seja,  $u$  sub-harmônica; e
3.  $\alpha = 0$ , ou seja,  $u$  harmônica.

Antes de tratarmos de cada caso, no **Capítulo 3** faremos alguns resultados que nos auxiliarão nos capítulos seguintes.

No **Capítulo 4**, abordaremos o caso super-harmônico, provando que a condição

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty \quad (2.18)$$

implica em

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty \quad (2.19)$$

e assumindo (2.18), verificamos que todas as soluções de (2.17), para  $\alpha = 1$ , são da forma

$$u(s, t) = \log \frac{8\lambda^2}{(\lambda^2 + (s - s_0)^2 + (t - t_0)^2)^2}, \quad (2.20)$$

para algum  $\lambda > 0, s_0 \in \mathbb{R}$  e  $t_0 = c\lambda/\sqrt{2}$ .

Depois mostraremos exemplos de soluções para (2.17) com  $\alpha = 1$ , que cumprem a condição (2.19), mas não (2.18) e, evidentemente, não pertencem à família de soluções (2.20).

No **Capítulo 5**, buscaremos classificar as soluções para o problema (2.17) no caso sub-harmônico. Mostraremos que para  $c \geq 0$ , não há solução e que para  $c < 0$  e  $\alpha = -1$  as condições (2.18) e (2.19) são equivalente. Mais ainda, verificaremos que  $c < -\sqrt{2}$  e todas as soluções para este caso do problema são da forma

$$u(s, t) = \log \frac{8\lambda^2}{((s - s_0)^2 + (t - t_0)^2 - \lambda^2)^2}, \quad (2.21)$$

para algum  $\lambda > 0$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}$  e  $t_0 = -c\lambda/\sqrt{2}$ .

Exibiremos também que existem soluções de (2.17), que não satisfazem as condições (2.18) e (2.19) e, portanto, não são da forma (2.21).

Neste capítulo, também mostramos que não existe solução para  $\Delta u - e^u = 0$ , em  $\mathbb{R}^2$ .

No **Capítulo 6**, classificaremos as soluções para o caso harmônico. Nele verificamos o problema (2.17), não tem solução quando  $\alpha = 0$  e  $c \geq 0$ . Mas para  $c < 0$ , usando argumentos de análise complexa, concluímos que suas soluções têm a forma

$$u(s, t) = 2 \log \frac{2t_1}{(s - s_1)^2 + (t + t_1)^2} + 2 \log \frac{2}{|c|}, \quad (2.22)$$

onde  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $t_0 = -c\lambda/\sqrt{2}$  e  $\lambda > 0$ . Concluímos que (2.18) implica em (2.19) e mostramos exemplos de funções harmônicas que não satisfazem as condições (2.18) nem (2.19), são soluções para (2.17), mas não pertencem à família (2.22).

Dessa maneira, classificaremos todas as soluções clássicas possíveis para o problema proposto.

# Capítulo 3

## Resultados Técnicos

Neste capítulo apresentaremos uma série de lemas técnicos que tratam de determinar estimativas *a priori* para soluções de alguns problemas elípticos em bolas do  $\mathbb{R}_+^2$  ou  $\mathbb{R}^2$ . Esses resultados serão utilizados de maneira imprescindíveis nos próximos capítulos.

**Lema 11** *Seja  $u \in C^2(B_R^+(x_0)) \cap C^1(\overline{B_R^+(x_0)})$  tal que*

$$\begin{cases} \Delta u + v_1 e^u = 0 & \text{em} & B_R^+(x_0); \\ \frac{\partial u}{\partial t} = v_2 e^{u/2} & \text{sobre} & \partial' B_R^+(x_0); \\ u(x_0) = 1 & \text{para algum} & x_0 \in \overline{B_r^+(x_0)}; \\ u \leq A & \text{em} & \overline{B_r^+(x_0)}, \end{cases} \quad (3.1)$$

onde  $v_1, v_2$  são funções contínuas que satisfazem  $|v_1| \leq a$  e  $|v_2| \leq a$ ,  $a$  e  $A$  são constantes positivas e  $0 < r < R$ . Então existe uma constante  $C_1 = C_1(a, A) > 0$  tal que  $u(x) \geq -C_1$  em  $\overline{B_r^+(x_0)}$ .

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, consideremos  $x_0 = 0$ ,  $R = 3$  e  $r = 1$ .

Seja  $u_1 = A + 1 - u$ , logo  $u_1 \in C^2(B_3^+) \cap C^1(\overline{B_3^+})$  e satisfaz:

$$\Delta u_1 = -\Delta u \quad e \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x) = -\frac{\partial u}{\partial t}(x).$$

Dessa forma, como  $A - u \geq 0$  em  $\overline{B_3^+}$ , temos que

$$u_1 \geq 1, \quad (3.2)$$

logo

$$\begin{cases} \Delta u_1(x) - \frac{v_1(x)e^{u(x)}}{u_1(x)} u_1(x) = 0 & \text{em} & B_3^+; \\ \frac{\partial u_1(x)}{\partial t} = -\frac{v_2(x)e^{u(x)/2}}{u_1(x)} u_1(x) & \text{sobre} & \partial' B_3^+; \\ u_1(x_0) = A & \text{para algum} & x_0 \in \overline{B_1^+}; \end{cases} \quad (3.3)$$

Pela monotonicidade da exponencial e como  $u(x) \leq A$  temos que

$$e^{u(x)/2} < e^A/2 < e^A \quad e \quad e^{u(x)} < e^A,$$

e por (3.2) verificamos que  $1/u_1(x) \leq 1$ , para todo  $x \in B_3^+$ . E como sabemos que  $|v_1| \leq a$  e  $|v_2| \leq a$ , segue que  $\left| \frac{v_1(x)e^{u(x)}}{u_1(x)} \right| \leq ae^A$  e  $\left| \frac{v_2(x)e^{u(x)/2}}{u_1(x)} \right| \leq ae^A$ .

E decorre do Lema (2) que

$$\max_{B_1^+} u_1 \leq C(2, ae^A) \min_{B_1^+} u_1.$$

E como  $u_1(x_0) = A$ ,

$$-u(x) \leq u_1(x) \leq \max_{B_1^+} u_1,$$

e

$$\min_{B_{1+}} u_1 \leq u_1(x_0)$$

para  $x \in B_1^+$ , temos

$$-u \leq C(2, ae^A) = C_1(a, A) = C_1$$

e, portanto,

$$u \geq -C_1 \text{ em } \overline{B_1^+}.$$

Como queríamos. ■

**Lema 12** *Suponha que  $u \in C^2(B_R(x_0))$  satisfaz*

$$\Delta u + v_1 e^u = 0 \text{ em } B_R(x_0), \tag{3.4}$$

onde  $v_1 \in C(B_R)$  e  $|v_1(x)| \leq a$  para todo  $x \in B_R(x_0)$ . Se existe  $\epsilon_0 = \epsilon_0(a)$  tal que

$$\int_{B_r(x_0)} e^u < \epsilon_0, \tag{3.5}$$

com  $r < R$ , então temos

$$\max_{B_r(x_0)} u \leq C_3, \tag{3.6}$$

para algum  $C_3 = C_3(a)$ .

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, consideremos  $x_0 = 0$ ,  $R = 2$  e  $r = 1/2$ . Provaremos por contradição, usando um argumento de *blow-up*.

Suponhamos que existe uma sequência  $(u_i) \subset C^2(B_2)$ , satisfazendo (3.4) de modo que para todo  $i$  exista  $\epsilon_i > 0$ , verificando

$$\int_{B_2} e^{u_i} < \epsilon_i, \tag{3.7}$$

tal que  $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0$  e tendo  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x_i) = \infty$  com  $x_i \in \overline{B_{1/2}}$ .

Para cada  $i$ , definamos  $s_i(y) = (\frac{1}{2} - |y - x_i|)^2 e^{u_i(y)}$  uma função contínua em  $\overline{B_{1/2}(x_i)}$ . Tomemos  $s_i(y_i) = \max_{y \in \overline{B_{1/2}(x_i)}} s_i(y)$ . Temos que  $y_i = (y_{i1}, y_{i2}) \in B_{1/2}(x_i)$ , pois  $s_i(y)$  é uma função não-negativa que se anula na fronteira de  $\overline{B_{1/2}(x_i)}$ . Como esquematizado na Figura 3.1.

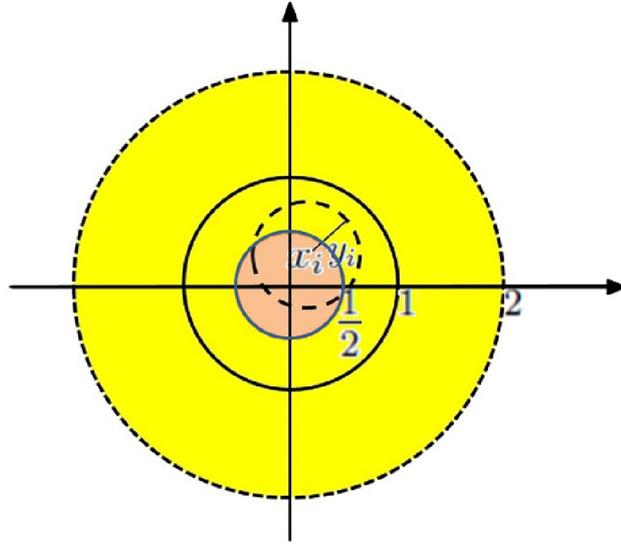


Figura 3.1: Bola  $B_{1/2}(x_i)$ .

Pela definição de  $y_i$ , segue que

$$s_i(y_i) \geq s_i(x_i),$$

isto é,

$$s_i(y_i) \geq \frac{1}{4}e^{u_i(x_i)},$$

e como, por hipótese,  $\lim_{i \rightarrow \infty} u(x_i) = \infty$ , segue que  $\lim_{i \rightarrow \infty} s_i(y_i) = \infty$ .

Seja  $\sigma_i = (1/2 - |y_i - x_i|)/2$ , observemos que  $\sigma_i > 0$ , já que  $y_i \notin \partial B_{1/2}(x_i)$  e como  $x_i, y_i \in B_2$  temos também que  $\sigma_i$  é limitado.

Como a função logaritmo é crescente, segue que

$$\log s_i(y_i) \geq \log s_i(x_i),$$

ou seja,

$$\log \left( \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right)^2 e^{u_i(y_i)} \right) \geq \log \left( \frac{1}{4} e^{u_i(x_i)} \right).$$

Dessa forma,

$$u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) \geq u(x_i) - \log 4$$

e somando  $-\log 4$  em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\left( u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) \right) - \log 4 \geq (u(x_i) - \log 4) - \log 4,$$

o que é equivalente a

$$u_i(y_i) + 2 \left( \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) - \log 2 \right) \geq u(x_i) - 2 \log 4.$$

Usando propriedades de logaritmos, verificamos

$$u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1/2 - |y_i - x_i|}{2} \right) \geq u(x_i) - 2 \log 4,$$

e, portanto,

$$u_i(y_i) + 2 \log(\sigma_i) \geq u(x_i) - 2 \log 4. \quad (3.8)$$

Donde segue que  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(y_i) = \infty$  já que  $\sigma_i$  é limitado e  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x_i) = \infty$ .

Agora, seja  $y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}$ , temos que

$$\frac{1}{2} - |y - x_i| \geq \sigma_i. \quad (3.9)$$

De fato,

$$|y - x_i| \leq |y - y_i| + |y_i - x_i| \leq \sigma_i + |y_i - x_i|.$$

Pela definição de  $\sigma_i$ , verificamos

$$|y - x_i| \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{2}|y_i - x_i| + |y_i - x_i| = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}|y_i - x_i|.$$

Multiplicando a desigualdade por  $-1$  e adicionando  $1/2$  em ambos os lados, obtemos

$$\frac{1}{2} - |y - x_i| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}|y_i - x_i| = \sigma_i,$$

como queríamos.

Mais ainda

$$\overline{B_{\sigma_i}(y_i)} \subseteq \overline{B_{\frac{1}{2}}(x_i)} \quad (3.10)$$

De fato, tomemos  $y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}$ , assim

$$|y - x_i| \leq |y - y_i| + |y_i - x_i| \leq \sigma_i + \frac{1}{2},$$

por (3.9), segue

$$|y - x_i| = \frac{1}{4} - \frac{1}{2}|y_i - x_i| + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Logo,  $y \in \overline{B_{1/2}(x_i)}$  e temos (3.10).

Pela definição de  $y_i$  e por (3.10) segue que

$$s_i(y_i) \geq \max_{y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}} s_i(y).$$

Dessa maneira,

$$\left(\frac{1}{2} - |y_i - x_i|\right)^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}.$$

Multiplicando e dividindo o primeiro termo da desigualdade por 4, obtemos

$$4 \cdot \frac{(1/2 - |y_i - x_i|)^2 e^{u_i(y_i)}}{4} \geq \max_{y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}} (1/2 - |y - x_i|)^2 e^{u_i(y)},$$

o que é equivalente a

$$4 \cdot \left(\frac{1/2 - |y_i - x_i|}{2}\right)^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}.$$

Pela definição de  $\sigma_i$ , segue

$$4\sigma_i^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left( \frac{1}{2} - |y - x_i| \right)^2 e^{u_i(y)}, \quad (3.11)$$

por (3.9), verificamos que

$$\max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left( \frac{1}{2} - |y - x_i| \right)^2 e^{u_i(y)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \sigma_i^2 e^{u_i(y)}. \quad (3.12)$$

Como

$$\max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \sigma_i^2 e^{u_i(y)} = \sigma_i^2 \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)},$$

segue de (3.20) e de (3.12) que

$$4\sigma_i^2 e^{u_i(y_i)} \geq \sigma_i^2 \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)}.$$

Daí, temos

$$4e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)}.$$

Desse modo, novamente, pela monotonicidade do logaritmo obtemos

$$\log 4 + u_i(y_i) \geq \max_{y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}} u_i(y) \geq u_i(y) \text{ para todo } y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)},$$

ou seja,

$$u_i(y) - u_i(y_i) \leq \log 4 \text{ em } \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}. \quad (3.13)$$

Consideremos, agora,  $w_i(y) = u_i(e^{-u(y_i)/2}y + y_i) - u_i(y_i)$ . Seja  $R_i = e^{u(y_i)/2}\sigma_i$ .

Observemos que se  $y \in B_{R_i}$ , se, e somente se,  $\bar{y} = e^{-u(y_i)/2}y + y_i \in B_{\sigma_i}(y_i)$ .

De fatos para  $y \in B_{R_i}$ , tomemos  $\bar{y} \in \mathbb{R}^2$ , então

$$|\bar{y} - y_i| = |e^{-u(y_i)/2}y| = e^{-u(y_i)/2}|y| \leq e^{-u(y_i)/2} \cdot R_i = \sigma_i,$$

portanto,  $\bar{y} \in B_{\sigma_i}(y_i)$ .

E para  $\bar{y} \in B_{\sigma_i}(y_i)$ , tomando  $y \in \mathbb{R}^2$ , temos

$$e^{-u(y_i)/2}|y| = \left| e^{-u(y_i)/2}y \right| = \left| e^{-u(y_i)/2}y + y_i - y_i \right| = |\bar{y} - y_i| \leq \sigma_i,$$

o que é equivalente a

$$|y| = e^{u(y_i)/2}\sigma_i = R_i.$$

Logo,  $y \in B_{R_i}$ . Provando, a equivalência.

Obtemos ainda,

$$\Delta w_i(y) = \Delta u(\bar{y}) \cdot e^{-u_i(y_i)} = -v_1(\bar{y}) \cdot e^{-u_i(y_i)} \text{ para } y \in B_{R_i}.$$

Também verificamos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_{R_i}} e^{w_i(y)} dy = 0. \quad (3.14)$$

De fato,

$$\int_{B_{R_i}} e^{w_i(y)} dy = \int_{B_{R_i}} e^{u_i(\bar{y}) - u_i(y_i)} dy = e^{-u_i(y_i)} \int_{B_{R_i}} e^{u_i(\bar{y})} dy$$

Como  $y \in B_{R_i}$ , se, e somente se,  $\bar{y} \in B_{\sigma_i}(y_i)$ . Fazendo a mudança de variável, temos

$$\int_{B_{R_i}} e^{u_i(\bar{y})} dy = e^{-u_i(y_i)} \int_{B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)} dy,$$

e assim,

$$\int_{B_{R_i}} e^{w_i(y)} dy \leq e^{-2u_i(y_i)} \int_{B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)} dy \leq e^{-2u_i(y_i)} \int_{B_2} e^{u_i(y)} dy.$$

Como  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(y_i) = \infty$ , temos  $e^{-2u_i(y_i)}$  limitado. Assim, o resultado segue pelo fato de supormos  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_2} e^{u_i(y)} dy = 0$ .

Mais ainda, pela definição de  $w_i$ , temos que  $w(0) = 0$  e por (3.13), verificamos que  $w_i \leq \log 4$ . Agora, seja  $g$  a solução de

$$\begin{cases} \Delta g + v_1(e^{-u_i(y_i)/2}y + y_i)e^{w_i(y)} = 0, & \text{em } B_2 \\ g(y) = 0 & \text{sobre } \partial B_2. \end{cases}$$

Pelas estimativas usuais de  $W^{2,p}$ , temos que  $|g| \leq C_g$ , assim, estendendo  $w_i$  por zero em  $B_2$ , podemos observar que

$$w_i(y) - g(y) \leq \log 4 + C_g, \text{ para todo } y \in B_2.$$

Definamos  $h(y) = -w_i(y) + g(y) + \log 4 + C_g$  em  $B_2$ . Desse modo, temos que  $h(y) \geq 0$  e que

$$\Delta h(y) = -\Delta w_i(y) + \Delta g = v_1(e^{-u_i(y_i)/2}y + y_i)e^{w_i(y)} - v_1(e^{-u_i(y_i)/2}y + y_i)e^{w_i(y)} = 0$$

Logo, aplicando a desigualdade de Harnack em  $h$ , obtemos para  $y \in B_{R_i}$

$$h(y) \leq \max_{B_2} h(y) \leq C_0 \min_{B_2} h(y) \leq C_0 h(0).$$

Desse modo,

$$-w_i(y) + g(y) + \log 4 + C_g \leq C_0(-w_i(0) + g(0) + \log 4 + C_g),$$

o que é equivalente

$$-w_i(y) \leq C_0(-w_i(0) + g(0) + \log 4 + C_g) - g(y) + \log 4 + C_g.$$

Usando as estimativas em  $W^{2,p}$

$$-w_i(y) \leq C_0(-w_i(0) + g(0) + \log 4 + C_g) + C_g - \log 4 - C_g = C,$$

com  $C > 0$ , portanto,  $w_i(y) \geq -C$  para todo  $y \in B_{R_i}$ . Isto significa que

$$\int_{B_{R_i}} e^{w_i} \geq \int_{B_{R_i}} e^{-C} > 0.$$

Contradizendo (3.14). Logo o resultado é válido. ■

**Lema 13** Seja  $u \in C^2(B_R^+(x_0)) \cap C^1(\overline{B_r^+(x_0)})$  satisfazendo

$$\begin{cases} \Delta u + v_1 e^u = 0 & \text{em } B_R^+(x_0); \\ \frac{\partial u}{\partial t} = v_2 e^{\frac{u}{2}} & \text{sobre } \partial' B_R^+(x_0). \end{cases} \quad (3.15)$$

com  $0 < r < R$ , onde  $v_1, v_2 \in C(B_R^+(x_0))$  com  $|v_1(x)| \leq a$  e  $|v_2(x)| \leq a$  para  $a > 0$  e  $x \in B_R^+(x_0)$ . Se existe  $\epsilon_0 = \epsilon_0(a)$  tal que

$$\int_{B_R^+(x_0)} e^u < \epsilon_0, \quad (3.16)$$

então temos

$$\max_{B_r^+} u \leq C, \quad (3.17)$$

para algum  $C = C(a)$ .

**Demonstração:** Provaremos no estilo do Lema anterior. Consideremos sem perda de generalidade  $R = 2, r = 1/4$  e  $x_0 = 0$ .

Suponhamos que existe uma sequência  $(u_i) \subset C^2(B_2^+) \cap C^1(\overline{B_2^+})$ , satisfazendo (3.15) de modo que exista  $\epsilon_i > 0$ , verificando

$$\int_{B_2^+} e_i^u < \epsilon_i \quad (3.18)$$

e  $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0$ , mas  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x_i) = \infty$  com  $x_i \in \overline{B_{1/4}^+}$ . Para cada  $i$ , definamos

$$s_i(y) = \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}$$

uma função contínua em  $\overline{B_{1/2}^+(x_i)}$ . Dessa forma, tomemos  $s_i(y_i) = \max_{y \in B_{1/2}^+(x_i)} s_i(y)$ . Temos que

$y_i = (y_{i1}, y_{i2}) \in B_{1/2}^+(x_i) \cup \partial' B_{1/2}^+(x_i)$ , uma vez que  $s_i \geq 0$  e se anula apenas em  $\partial'' B_{1/2}^+(x_i)$ . Veja Figura 3.2.

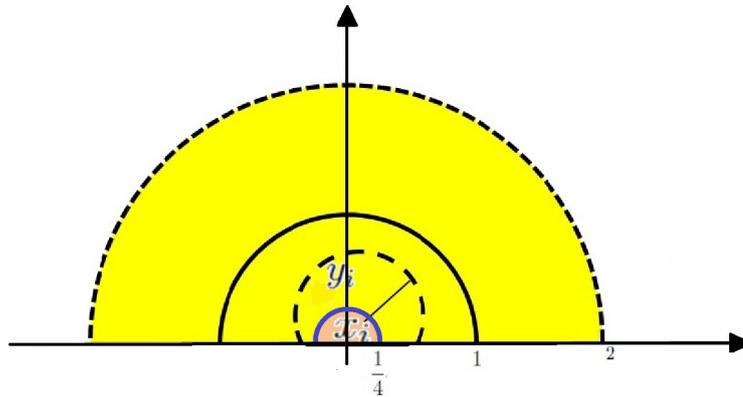


Figura 3.2: Bola  $B_{1/2}^+(x_i)$  com  $x_i \in B_{1/4}^+$ .

Pela definição de  $y_i$ , segue que

$$s_i(y_i) \geq s_i(x_i),$$

isto é,

$$\left(\frac{1}{2} - |y_i - x_i|\right)^2 e^{u_i(y_i)} \geq \frac{1}{4} e^{u_i(x_i)} \rightarrow \infty,$$

já que  $u(x_i) \rightarrow \infty$ , por hipótese.

Seja  $\sigma_i = (1/2 - |y_i - x_i|)/2$ , observemos que  $\sigma_i > 0$ , já que  $y_i \in B_{1/2}^+(x_i) \cup \partial' B_{1/2}^+(x_i)$ .

Segue pela monotonicidade do logaritmo que

$$\log s_i(y_i) \geq \log s_i(x_i),$$

ou seja,

$$\log \left( \left(\frac{1}{2} - |y_i - x_i|\right)^2 e^{u_i(y_i)} \right) \geq \log \left( \frac{1}{4} e^{u_i(x_i)} \right).$$

Dessa forma,

$$u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) \geq u(x_i) - \log 4$$

e somando  $-\log 4$  em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\left( u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) \right) - \log 4 \geq (u(x_i) - \log 4) - \log 4,$$

o que é equivalente a

$$u_i(y_i) + 2 \left( \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) - \log 2 \right) \geq u(x_i) - 2 \log 4.$$

Usando propriedades de logaritmos, verificamos

$$u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1/2 - |y_i - x_i|}{2} \right) \geq u(x_i) - 2 \log 4,$$

e, portanto,

$$u_i(y_i) + 2 \log(\sigma_i) \geq u(x_i) - 2 \log 4. \quad (3.19)$$

Donde segue que  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(y_i) = \infty$  já que  $\sigma_i$  é limitado e  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x_i) = \infty$ .

Verificamos, analogamente a (3.9) e (3.10), que dado  $y \in \overline{B_{\sigma_i}^+(y_i)}$ , temos que

$$\frac{1}{2} - |y - x_i| \geq \sigma_i \quad (3.20)$$

e

$$\overline{B_{\sigma_i}^+(y_i)} \subseteq \overline{B_{\frac{1}{2}}^+(x_i)}, \quad (3.21)$$

respectivamente.

Pela definição de  $y_i$  e por (3.21) segue que

$$s_i(y_i) \geq \max_{y \in \overline{B_{\sigma_i}^+(y_i)}} s_i(y).$$

Dessa maneira,

$$\left(\frac{1}{2} - |y_i - x_i|\right)^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}.$$

Multiplicando e dividindo o primeiro termo da desigualdade por 4, obtemos

$$4 \cdot \frac{(1/2 - |y_i - x_i|)^2 e^{u_i(y_i)}}{4} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} (1/2 - |y - x_i|)^2 e^{u_i(y)},$$

o que é equivalente a

$$4 \cdot \left(\frac{1/2 - |y_i - x_i|}{2}\right)^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}.$$

Pela definição de  $\sigma_i$ , segue

$$4\sigma_i^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}, \quad (3.22)$$

por (3.20), verificamos que

$$\max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \sigma_i^2 e^{u_i(y)}. \quad (3.23)$$

Como

$$\max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \sigma_i^2 e^{u_i(y)} = \sigma_i^2 \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)},$$

segue de (3.22) e de (3.23) que

$$4\sigma_i^2 e^{u_i(y_i)} \geq \sigma_i^2 \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)}.$$

Daí, temos

$$4e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)}.$$

Desse modo, novamente, pela monotonicidade do logaritmo obtemos

$$\log 4 + u_i(y_i) \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} u_i(y) \geq u_i(y) \text{ para todo } y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)},$$

ou seja,

$$u_i(y) - u_i(y_i) \leq \log 4 \text{ em } \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}. \quad (3.24)$$

Consideremos  $w_i(y) = u_i(\bar{y}) - u_i(y_i)$ , onde  $\bar{y} = e^{-u(y_i)/2}y + y_i$ . Seja  $R_i = e^{u(y_i)/2}\sigma_i$ ,  $T_i = e^{u_i(y_i)/2}y_{i2}$ , e observemos que  $y \in B_{R_i}^{-T_i}$ , se, e somente se,  $\bar{y} \in B_{\sigma_i}^+(y_i)$ .

Primeiro, observemos que  $y \in B_{R_i}^{-T_i}$  e  $\bar{y} \in \mathbb{R}_+^2$

$$|\bar{y} - y_i| = |e^{-u(y_i)/2}y| = e^{-u(y_i)/2}|y| \leq e^{-\frac{u(y_i)}{2}} \cdot R_i = \sigma_i.$$

Temos que mostrar então que  $\bar{y}_2 \geq 0$ , onde  $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2) = (e^{-\frac{u(y_i)}{2}}y_1 + y_{i1}, e^{-\frac{u(y_i)}{2}}y_2 + y_{i2})$ . De fato, como  $y \in B_{R_i}^{-T_i}$ , então  $y_2 > -T_i$ , daí

$$\bar{y}_2 = e^{-\frac{u(y_i)}{2}}y_2 + y_{i2} > e^{-\frac{u(y_i)}{2}} \cdot (-e^{-\frac{u(y_i)}{2}}y_{i2}) + y_{i2} = -y_{i2} + y_{i2} = 0,$$

como queríamos.

Para  $\bar{y} \in B_{\sigma_i}^+(y_i)$  e  $y \in \mathbb{R}_+^2$ , temos

$$e^{-u(y_i)/2}|y| = |e^{-u(y_i)/2}y| = |e^{-u(y_i)/2}y + y_i - y_i| \leq \sigma_i,$$

daí

$$|y| \leq e^{u(y_i)/2}\sigma_i = R_i.$$

Resta mostrar  $y_2 > -T_i$ , onde  $y = (y_1, y_2)$ . Como  $\bar{y} \in B_{\sigma_i}^+(y_i)$ , temos

$$e^{-u(y_i)/2}y_2 + y_{i2} > 0,$$

ou ainda,

$$y_2 > -y_{i2}e^{u(y_i)/2} = -T_i,$$

portanto,  $y \in B_{R_i}^{-T_i}$ .

E verificamos que  $w_i$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w_i(y) + v_1(e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}y + y_i)e^{w_i(y)} = 0, & \text{em } B_{R_i}^{-T_i}; \\ \frac{\partial w_i(y)}{\partial t} = v_2(e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}y + y_i)e^{w_i(y)} & \text{sobre } B_{R_i} \cap \{t = -T_i\}, \\ w_i(0) = 0. \end{cases} \quad (3.25)$$

Mais ainda, temos

$$\int_{B_{R_i}^{-T_i}} e^{w_i(y)} dy \rightarrow 0, \quad (3.26)$$

De fato,

$$\int_{B_{R_i}^{-T_i}} e^{w_i(y)} dy = \int_{B_{R_i}^{-T_i}} e^{u_i(\bar{y}) - u_i(y_i)} dy = e^{-u_i(y_i)} \int_{B_{R_i}^{-T_i}} e^{u_i(\bar{y})} dy$$

Como  $y \in B_{R_i}^{-T_i}$ , se, e somente se,  $\bar{y} \in B_{\sigma_i}^+(y_i)$ . Fazendo a mudança de variável, temos

$$\int_{B_{R_i}^{-T_i}} e^{u_i(\bar{y})} dy = e^{-u_i(y_i)} \int_{B_{\sigma_i}^+(y_i)} e^{u_i(y)} dy,$$

e assim,

$$\int_{B_{R_i}^{-T_i}} e^{w_i(y)} dy = e^{-2u_i(y_i)} \int_{B_{\sigma_i}^+(y_i)} e^{u_i(y)} dy \leq e^{-2u_i(y_i)} \int_{B_2^+} e^{u_i(y)} dy.$$

Como  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(y_i) = \infty$ , temos  $e^{-2u_i(y_i)}$  limitado. Assim, o resultado segue pelo fato de supormos  $\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{B_2^+} e^{u_i(y)} dy = 0$ .

E pela definição de  $w_i$ , temos que  $w(0) = 0$  e verificamos que  $w_i \leq \log 4$  para  $x \in \overline{B_{R_i}^{-T_i}}$ . Queremos mostrar  $w_i \geq -C$  em  $B_{\bar{r}} \subset B_{R_i}^{-T_i}$  com  $C > 0$ .

Então sem perda de generalidade fixemos  $\bar{r} = 1/2$ , temos dois casos a analisar:

1º *caso*:  $T_i \leq \frac{1}{2}$ .

Neste caso, como  $T_i \leq \frac{1}{2}$  estaremos trabalhando em região homeomorfa a  $B_3^+$ . Como podemos visualizar na Figura 3.3.

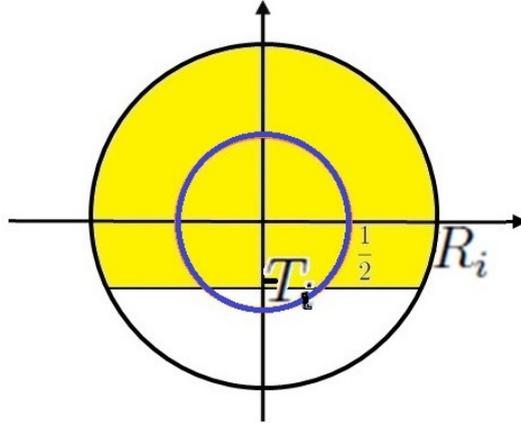


Figura 3.3: Bola  $B_{R_i}^{-T_i}$  com  $T_i \leq 1/2$ .

Desse modo, usaremos o Lema 11 para  $v = w_i + 1$  e  $B_{R_i}^{T_i}$  para concluirmos que  $w(x) \geq -C$  em  $\overline{B_{\frac{1}{2}}^{-T_i}}$ . Agora notemos que

$$\Delta v = \Delta w_i = -\frac{v_1(e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}y + y_i)e^{w_i(y)}}{e} \cdot e = -\frac{v_1(e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}y + y_i)e^{v(y)}}{e}$$

em  $B_{\frac{1}{2}}^{T_i}$  e

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w_i(y)}{\partial t} = \frac{v_2(e^{-u_i(y_i)/2}y + y_i)e^{w_i(y)}}{e^{1/2}} \cdot e^{1/2} = \frac{v_2(e^{-u_i(y_i)/2}y + y_i)e^{v(y)}}{e^{1/2}}$$

sobre  $B_{R_i} \cap \{x = (s, t) \in \mathbb{R}_+^2; t = -T_i\}$ , com

$$v(0) = 1 \text{ e } v \leq \log 4 + 1.$$

Observemos ainda que

$$\left| \frac{v_1(e^{-u_i(y_i)/2}y + y_i)}{e} \right| \leq ae$$

e

$$\left| \frac{v_2(e^{-u_i(y_i)/2}y + y_i)}{e} \right| \leq ae^{1/2}$$

Então pelo Lema 11, verificamos que  $u(x) \geq -C_1$  em  $\overline{B_{\frac{1}{4}}^{T_i}} \subset B_{R_i}^{-T_i}$ .

2º caso:  $T_i > \frac{1}{2}$ .

Neste caso,  $\overline{B_{\frac{1}{2}}^{-T_i}} = \overline{B_{\frac{1}{2}}}$ , como podemos ver na Figura 3.4.

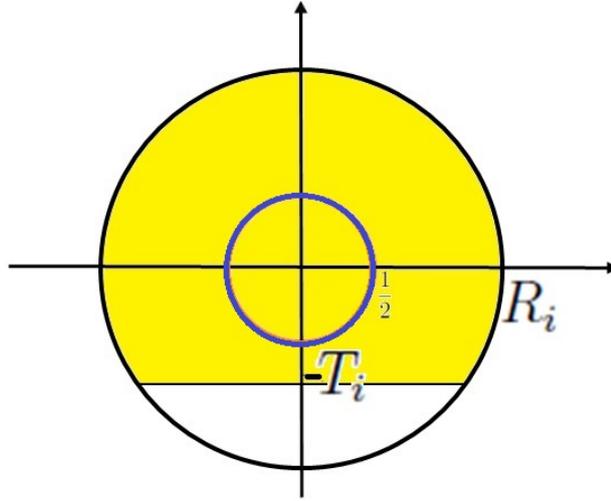


Figura 3.4: Bola  $B_{R_i}^{-T_i}$  com  $T_i > 1/2$ .

Assim, nesse contexto, usamos o Lema 12 e verificamos que

$$w_i(x) \geq -C \text{ para todo } x \in B_{1/4}^{-T_i}.$$

Dessa maneira, nos dois casos temos que  $w_i(x) \geq -C$ , de modo que obtemos,

$$\int_{B_{\frac{1}{2}}^{-T_i}} e^{w_i} \geq \int_{B_{1/4}^{-T_i}} e^{w_i} \geq C,$$

para alguma constante positiva  $C$ . Contradizendo (3.26). E portanto o resultado segue. ■

**Lema 14** *Seja  $u \in C^2(\overline{B_R(x_0)})$  solução de*

$$\Delta u - e^u = 0 \text{ em } B_R(x_0), \tag{3.27}$$

então  $u(x_0) \leq \log 8 - 2 \log R$ .

**Demonstração:** Sem perda de generalidade consideremos  $x_0 = 0$ . Definamos

$$v(x) = v(r) = \log \frac{8R^2}{(R^2 - r^2)^2}$$

onde  $r = |x|$  para  $x \in B_R$ , e, portanto,  $\lim_{r \rightarrow R} v = \infty$ . Verificamos que

$$\Delta v(r) = v''(r) + \frac{1}{r}v'(r),$$

ou seja,

$$\Delta v(r) = \frac{8R^2}{(R^2 - r^2)^2} = e^{\log\left(\frac{8R^2}{(R^2 - r^2)^2}\right)}.$$

Logo,

$$\Delta v - e^v = 0 \text{ em } B_R.$$

Agora, seja  $w = v - u$  então  $w$  satisfaz

$$\Delta w - \xi w = 0, \text{ em } B_R,$$

onde

$$\xi = \begin{cases} \frac{e^{v(x)} - e^{u(x)}}{v(x) - u(x)} & \text{para } u(x) \neq v(x) \\ 0 & \text{para } u(x) = v(x) \end{cases}$$

é uma função não negativa em  $B_R$ , devido a monotonicidade da exponencial.

Como  $u$  é contínua sobre o compacto  $\overline{B_R}$  temos que  $u$  é limitada. Assim, como  $\lim v = \infty$  quando  $x$  se aproxima de  $\partial\overline{B_R}$ , segue que para  $\epsilon > 0$ , suficiente pequeno,  $w = v - u \geq 0$  sobre  $\overline{B_R} \setminus B_{R-\epsilon}$ . Como representado na Figura 3.5.

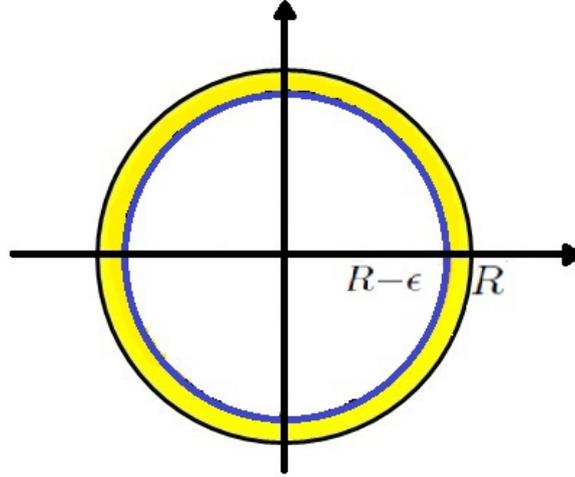


Figura 3.5: Anel  $\overline{B_R} \setminus B_{R-\epsilon}$

Em particular, temos que  $w(x) > 0$  para todo  $x \in \partial B_{R-\epsilon}$ . Observemos ainda que  $w \in L^\infty(\overline{B_{R-\epsilon}})$ , já que para  $u \in L^\infty(\overline{B_R})$  e  $v \in L^\infty(\overline{B_{R-\epsilon}})$  para  $0 < \epsilon < R$ .

Então pelo Princípio do Máximo temos que o mínimo de  $w$  é atingido na fronteira. Assim  $w(x) > 0$  para todo  $x \in B_{R-\epsilon}$ . Logo,  $w(0) = v(0) - u(0) > 0$ . E, portanto,

$$u(0) < \log 8 - 2 \log R.$$

■

**Lema 15** *Seja  $u \in C^2(B_R^+(x_0)) \cap C^1(\overline{B_R^+(x_0)})$  tal que*

$$\begin{cases} \Delta u - e^u = 0 & \text{em } B_2^+; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} \text{ sobre } \partial B_R^+, & \text{com } c < 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

*Se existe  $\epsilon > 0$  tal que  $\int_{\partial B_R^+(x_0)} e^{u/2} < \epsilon$ , temos*

$$\max_{B_r^+} u \leq C$$

*para algum  $C$  independente de  $u$  e  $R > r > 0$ .*

**Demonstração:** Sem perda de generalidade, façamos  $x_0 = 0, r = 1$  e  $R = 2$ . Suponhamos, por absurdo, exista  $(u_i) \subset C^2(B_2^+) \cap C^1(\overline{B_2^+})$ , satisfazendo (3.28) de modo que exista  $\epsilon_i > 0$ , de modo que

$$\int_{B_2^+} e^{u_i} < \epsilon_i \quad (3.29)$$

com  $\lim_{i \rightarrow \infty} \epsilon_i = 0$  e  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x_i) = \infty$  para  $x_i \in \overline{B_1^+}$ .

Para cada  $i$ , definamos  $s_i(y) = \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}$  uma função contínua em  $\overline{B_{1/2}^+(x_i)}$ .

Tomemos  $s_i(y_i) = \max_{y \in \overline{B_{1/2}^+(x_i)}} s_i(y)$ . Temos que  $y_i = (y_{i1}, y_{i2}) \in B_{1/2}^+(x_i) \cup \partial B_{1/2}^+(x_i)$  e do modo que foi construído temos ainda que  $|y_i| < 3/2$ . Veja Figura 3.6.

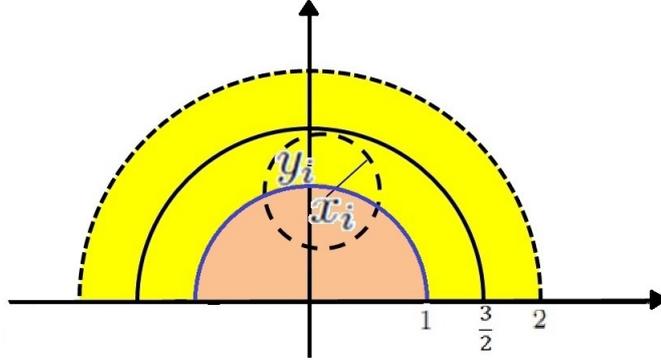


Figura 3.6: Bola  $B_{1/2}^+(x_i)$  com  $x_i \in B_1^+$ .

Pela definição de  $y_i$ , segue que

$$s_i(y_i) = \left(\frac{1}{2} - |y_i - x_i|\right)^2 e^{u_i(y_i)} \geq \frac{1}{4} e^{u_i(x_i)} = s_i(x_i) \rightarrow \infty,$$

já que  $u(x_i) \rightarrow \infty$ , por hipótese.

Seja  $\sigma_i = 1/2 - |y_i - x_i|/2$ , observemos que  $\sigma_i > 0$ , pois  $y_i \in B_{1/2}^+(x_i) \cup \partial B_{1/2}^+(x_i)$ .

Segue, então, pela monotonicidade do logaritmo que

$$\log s_i(y_i) \geq \log s_i(x_i),$$

ou seja,

$$\log \left( \left(\frac{1}{2} - |y_i - x_i|\right)^2 e^{u_i(y_i)} \right) \geq \log \left( \frac{1}{4} e^{u_i(x_i)} \right).$$

Dessa forma,

$$u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) \geq u(x_i) - \log 4$$

e somando  $-\log 4$  em ambos os lados da desigualdade, obtemos

$$\left( u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) \right) - \log 4 \geq (u(x_i) - \log 4) - \log 4,$$

o que é equivalente a

$$u_i(y_i) + 2 \left( \log \left( \frac{1}{2} - |y_i - x_i| \right) - \log 2 \right) \geq u(x_i) - 2 \log 4.$$

Usando propriedades de logaritmos, verificamos

$$u_i(y_i) + 2 \log \left( \frac{1/2 - |y_i - x_i|}{2} \right) \geq u(x_i) - 2 \log 4,$$

e, portanto,

$$u_i(y_i) + 2 \log(\sigma_i) \geq u(x_i) - 2 \log 4. \quad (3.30)$$

Donde segue que  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(y_i) = \infty$  já que  $\sigma_i$  é limitado e  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x_i) = \infty$ .

Verificamos, analogamente como em (3.9) e (3.10) que dado  $y \in \overline{B_{\sigma_i}^+(y_i)}$ , temos que

$$\frac{1}{2} - |y - x_i| \geq \sigma_i \quad (3.31)$$

e

$$\overline{B_{\sigma_i}^+(y_i)} \subseteq \overline{B_{\frac{1}{2}}^+(x_i)}, \quad (3.32)$$

respectivamente.

Pela definição de  $y_i$  e por (3.32) segue que

$$s_i(y_i) \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} s_i(y).$$

Dessa maneira,

$$\left(\frac{1}{2} - |y_i - x_i|\right)^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}.$$

Multiplicando e dividindo o primeiro termo da desigualdade por 4, obtemos

$$4 \cdot \frac{(1/2 - |y_i - x_i|)^2 e^{u_i(y_i)}}{4} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} (1/2 - |y - x_i|)^2 e^{u_i(y)},$$

o que é equivalente a

$$4 \cdot \left(\frac{1/2 - |y_i - x_i|}{2}\right)^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}.$$

Pela definição de  $\sigma_i$ , segue

$$4\sigma_i^2 e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)}, \quad (3.33)$$

por (3.31), verificamos que

$$\max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \left(\frac{1}{2} - |y - x_i|\right)^2 e^{u_i(y)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \sigma_i^2 e^{u_i(y)}. \quad (3.34)$$

Como

$$\max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} \sigma_i^2 e^{u_i(y)} = \sigma_i^2 \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)},$$

segue de (3.33) e de (3.34) que

$$4\sigma_i^2 e^{u_i(y_i)} \geq \sigma_i^2 \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)}.$$

Daí, temos

$$4e^{u_i(y_i)} \geq \max_{y \in B_{\sigma_i}(y_i)} e^{u_i(y)}.$$

Desse modo, novamente, pela monotonicidade do logaritmo obtemos

$$\log 4 + u_i(y_i) \geq \max_{y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}} u_i(y) \geq u_i(y) \text{ para todo } y \in \overline{B_{\sigma_i}(y_i)},$$

ou seja,

$$u_i(y) - u_i(y_i) \leq \log 4 \text{ em } \overline{B_{\sigma_i}(y_i)}. \quad (3.35)$$

Sendo  $y_i = (y_{i1}, y_{i2})$ , definamos  $\hat{y}_i = (y_{i1}, 0)$  e

$$w_i = u_i(e^{-u_i(y_i)/2}y + \hat{y}_i) - u_i(y_i),$$

em  $\Omega_i := \{y \in \mathbb{R}_+^2; e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}y + \hat{y}_i \in B_2^+\}$ .

Seja  $T_i = e^{u_i(y_i)/2}y_{i2} > 0$ , pois  $y_i \in B_{1/2}^+(x_i)$  e  $A_i = (0, T_i)$ , então temos:

$$\begin{aligned} \Delta w_i(y) &= \Delta u_i(e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}y + \hat{y}_i)e^{-u_i(y_i)} - \Delta u_i(y_i) \\ &= e^{u_i(e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}y + \hat{y}_i)}e^{-u_i(y_i)} - 0 = e^{w_i(y)} \text{ em } \Omega_i. \end{aligned}$$

Observemos, inicialmente, que

$$\Omega_i = B^+(e^{u_i(x_i)/2}\hat{y}_i, 2e^{u_i(x_i)/2}). \quad (3.36)$$

De fato,  $y = (y_1, y_2) \in \Omega_i$  se, e somente se,  $e^{-u_i(x_i)/2}y + \hat{y}_i \in B_2^+$ , isto é,

$$|e^{-u_i(x_i)/2}y + \hat{y}_i| = |(e^{-u_i(x_i)/2}y_1 - y_{i1} - e^{-u_i(x_i)/2}y_2)| < 2 \text{ e } e^{-u_i(x_i)/2}y_2 > 0,$$

o que é equivalente a

$$|y - e^{u_i(x_i)/2}\hat{y}_i| < 2e^{u_i(x_i)/2} \text{ e } y_2 > 0,$$

ou seja,  $y \in B^+(e^{u_i(x_i)/2}\hat{y}_i, 2e^{u_i(x_i)/2})$ .

Portanto, segue a igualdade  $\Omega_i = B^+(e^{u_i(x_i)/2}\hat{y}_i, 2e^{u_i(x_i)/2})$ .

Também verificamos que

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_i(y)}{\partial t} &= \frac{\partial u_i(e^{-u_i(y_i)/2}y + \hat{y}_i)}{\partial t}e^{-u_i(y_i)/2} - \frac{\partial u_i(y_i)}{\partial t} \\ &= ce^{u_i(e^{-u_i(y_i)/2}y + \hat{y}_i)}e^{-u_i(y_i)/2} - 0 = ce^{w_i(y)} \end{aligned}$$

sobre  $\partial'\Omega_i = \partial\Omega_i \cap \{x(s, t) \in \mathbb{R}^2; t = 0\}$ , pois, pela definição de  $\Omega_i$  segue que se  $y \in \partial'\Omega_i$  então  $e^{-u_i(y_i)/2}y + \hat{y}_i \in \partial'B_2^+$ .

Por (3.35) e pela definição de  $\Omega_i$  obtemos que  $w_i(y) \leq \log 4$  quando  $y \in \overline{B(A_i)_{e^{-\frac{u_i(x_i)}{2}}\sigma_i} \cap \Omega_i}$  e

$$\begin{aligned} w_i(A_i) &= u_i(e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}A_i + \hat{y}_i) - u_i(y_i) \\ &= u_i(e^{-\frac{u_i(y_i)}{2}}(0, e^{\frac{u_i(y_i)}{2}}y_{i2}) + (y_{i1})) - u_i(y_i) = u_i(y_1) - u_i(y_i) = 0. \end{aligned}$$

E por argumentos análogos aos usados para provar (3.26) segue que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{\partial'\Omega_i} e^{w_i/2} = 0.$$

Dessa maneira, temos

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta w_i - e^{w_i} = 0 & \text{em } \Omega_i; \\ \frac{\partial w_i(y)}{\partial t} = ce^{w_i(y)/2} & \text{sobre } \partial' \Omega_i; \\ w_i(y) \leq \log 4 & \text{em } \overline{B(A_i)_{e^{\frac{u_i(x_i)}{2}\sigma_i}} \cap \Omega_i} \\ w_i(A_i) = 0 \\ \int_{\partial' \Omega_i} e^{\frac{w_i}{2}} \rightarrow 0 \end{array} \right. \quad (3.37)$$

**Afirmção 5**  $T_i$  é uniformemente limitado.

Suponhamos, por absurdo, que  $T_i$  não seja uniformemente limitado.

Sabemos que  $\Omega_i = B^+(e^{u_i(x_i)/2}\widehat{y}_i, 2e^{u_i(x_i)/2})$ . Agora tomemos  $A_i$  e calculemos sua distância a  $e^{u_i(x_i)/2}\widehat{y}_i$ , obtendo

$$|A_i - e^{u_i(x_i)/2}\widehat{y}_i| = \sqrt{e^{u_i(x_i)/2}y_{i2} + e^{u_i(x_i)/2}y_{i1}} = |y_i|e^{u_i(x_i)/2}.$$

Definamos,  $R_i = (2e^{u_i(x_i)/2} - |y_i|e^{u_i(x_i)/2}) = e^{u_i(x_i)/2}(2 - |y_i|)$ . Verificamos, ainda, que  $B(A_i, R_i) \subset \Omega_i$ .

De fato, para  $y \in B(A_i, R_i)$ , temos  $|y - A_i| < R_i$  e assim

$$|y - e^{u_i(x_i)/2}\widehat{y}_i| \leq |y - A_i| + |A_i - e^{u_i(x_i)/2}\widehat{y}_i| < R_i + |y_i|e^{u_i(x_i)/2} = 2e^{u_i(x_i)/2}.$$

Veja Figura 3.7.

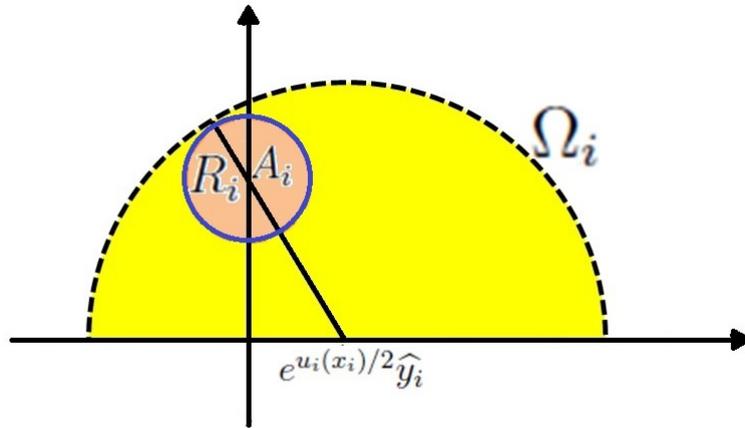


Figure 3.7: Bola  $B(A_i, R_i)$ .

Como  $|y_i| < 3/2$  temos que  $2 - |y_i| > 1/2$ , e por supormos que  $T_i$  não é uniformemente limitado, segue que  $e^{u_i(x_i)}$  também não o é. Dessa forma, existe  $i$  tal que

$$R_i^2 = e^{u_i(x_i)}(2 - |y_i|)^2 > e^{u_i(x_i)}(1/2)^2 > 8.$$

Agora aplicando o Lema 14 em  $w_i$  restrita a  $B(A_i, R_i)$  segue que

$$w_i(A_i) \leq \log 8 - 2 \log R_i < 0,$$

Contradizendo o fato de  $w_i(A_i) = 0$ . Portanto, devemos ter  $T_i$  uniformemente limitado e concluímos a Afirmação 5.

Agora definamos

$$v_i(y) = \frac{c}{\pi} \int_{\partial'\Omega_i} (\log|y-x| - \log|x-A_i|) e^{w_i(x)/2} dx \text{ para } y \in \Omega_i.$$

Vamos obter estimativas para  $v_i(y)$  para  $y \in B_R \cap \overline{\Omega_i}$  para algum  $R > 1$  fixo.

**Afirmação 6** Para cada  $R > 1$ , existe  $i_0 > 1$  tal que  $i > i_0$  e  $|y| \leq R$ , temos que

$$\begin{aligned} |v_i(y)| &= \left| \frac{c}{\pi} \int_{\partial'\Omega_i} (\log|y-x| - \log|x-A_i|) e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \right| \\ &= \left| \frac{c}{\pi} \int_E \log|x-A_i| e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \right| + \left| \frac{c}{\pi} \int_{\partial'\Omega_i \setminus E} \log|x-A_i| e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \right| < C(c). \end{aligned}$$

Primeiramente, consideremos a integral sobre a região

$$E = \{x \in \mathbb{R}_+^2; |y-x| \leq 1 \text{ ou } |x-A_i| \leq 1\} \cup \partial'\Omega_i.$$

Queremos mostrar que

$$\left| \frac{c}{\pi} \int_E (\log|y-x| - \log|x-A_i|) e^{w_i(x)/2} dx \right| \leq C(c)/2$$

Temos três situações a analisar:

- a)  $|y-x| \leq 1$  e  $|x-A_i| \geq 1$ ;
- b)  $|y-x| \geq 1$  e  $|x-A_i| \leq 1$ ;
- c)  $|y-x| \leq 1$  e  $|x-A_i| \leq 1$ .

a) Consideremos  $|y-x| \leq 1$  e  $|x-A_i| \geq 1$  temos

$$\left| \frac{c}{\pi} \int_E (\log|y-x| - \log|x-A_i|) e^{w_i(x)/2} dx \right| = \left| \frac{c}{\pi} \int_E \frac{\log|y-x|}{|x-A_i|} e^{w_i(x)/2} dx \right|$$

com  $0 \leq \log|y-x|/|x-A_i| \leq 1$ . E como  $w \leq \log 4$ , segue que

$$\left| \frac{c}{\pi} \int_E (\log|y-x| - \log|x-A_i|) e^{w_i(x)/2} dx \right| \leq \left| \frac{4c}{\pi} \int_E \frac{\log|y-x|}{|x-A_i|} dx \right|.$$

Mas sabemos, que

$$\int_0^1 \log s ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_\delta^1 \log s ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} s \log s - s \Big|_\delta^1 = -1.$$

Como podemos identificar  $\partial'\Omega_i$  com um intervalo real, temos que

$$\left| \frac{4c}{\pi} \int_E \frac{\log|y-x|}{|x-A_i|} dx \right| \leq C(c)/2$$

onde  $C(c)$  é independente de  $y$  e  $i$ .

b) Inteiramente análogo ao caso anterior, basta observarmos que

$$\left| \frac{c}{\pi} \int_E (\log |y - x| - \log |x - A_i|) e^{w_i(x)/2} dx \right| = \left| \frac{c}{\pi} \int_E (-\log |y - x| + \log |x - A_i|) e^{w_i(x)/2} dx \right|.$$

c) Como  $w_i \leq 4$  e

$$\left| \frac{c}{\pi} \int_E (\log |y - x| - \log |x - A_i|) e^{w_i(x)/2} dx \right| \leq \left| \frac{4c}{\pi} \int_E \log |y - x| dx \right| + \left| \frac{4c}{\pi} \int_E \log |x - A_i| dx \right|.$$

e, ainda, sabemos que  $|y - x| \leq 1$  e  $|x - A_i| \leq 1$ , o resultado segue pelo mesmo argumento dos casos anteriores.

Agora para  $x \in \partial' \Omega_i \setminus E$ , daí temos que  $|y - x| > 1$  e  $|x - A_i| > 1$ , para  $|y| < R$ , temos e pela Afirmação 5 temos que  $T_i = |A_i|$  e uniformemente limitado. Como  $\lim_{i \rightarrow 0} \int_{\partial \Omega_i} e^{w_i/2} = 0$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i \setminus E} (\log |y - x| - \log |x - A_i|) e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \right| \\ & \leq \left| \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i \setminus E} \log |y - x| e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \right| + \left| \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i \setminus E} \log |x - A_i| e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \right|. \end{aligned}$$

E assim

$$\left| \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i \setminus E} (\log |y - x| - \log |x - A_i|) e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \right| \leq \frac{C(c)}{2} \text{ para } |y| \leq R.$$

Consequentemente, obtemos o resultado.

**Afirmação 7**  $v_i$  é harmônica em  $\Omega_i$ .

Inicialmente, verificamos pela regra de Leibniz podemos permutar as operações de derivação e integração. Assim

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} (\log |y - x| - \log |x - A_i|) e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \right) \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( (\log |y - x| - \log |x - A_i|) e^{\frac{w_i(x)}{2}} \right) dx \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \log |y - x| e^{\frac{w_i(x)}{2}} \right) dx \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} \frac{(y_j - x_j)}{|y - x|^2} e^{\frac{w_i(x)}{2}} dx \text{ com } j = 1, 2. \end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} \frac{(y_j - x_j)}{|y - x|^2} e^{w_i(x)/2} dx \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{(y_j - x_j)}{|y - x|^2} e^{w_i(x)/2} dx \right) \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} \left( 1 \cdot |y - x|^2 - 2|y - x| \frac{y_j - x_j}{|x - y|} \cdot (y_j - x_j) \right) e^{w_i(x)/2} dx \end{aligned}$$

$$= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} (|y - x|^2 - 2(y_j - x_j)^2) e^{w_i(x)/2} dx \text{ para } j = 1, 2.$$

Logo,

$$\begin{aligned} \Delta v_i(y) &= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} (|y - x|^2 - 2(y_1 - x_1)^2) e^{w_i(x)/2} dx + \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} (|y - x|^2 - 2(y_2 - x_2)^2) e^{w_i(x)/2} dx \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} (2|y - x|^2 - 2((y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2)) e^{w_i(x)/2} dx \\ &= \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} (2|y - x|^2 - 2|y - x|^2) e^{w_i(x)/2} dx = 0. \end{aligned}$$

Como queríamos.

**Afirmção 8** Para  $y \in \partial' \Omega_i$  temos que  $\frac{\partial v_i}{\partial t}(y) = ce^{\frac{w_i(y)}{2}}$

Para verificarmos isso, inicialmente fixemos  $y = (s, y_2)$ , em seguida faremos  $y_2$  tender a zero, já que a regra de Leibniz não pode ser aplicada, pois temos uma singularidade em nosso domínio. Consideremos  $x = (x_1, 0)$ . Daí,

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}(y) = \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} \frac{(y_2 - 0)}{|y - x|^2} e^{w_i(x)/2} dx.$$

Fazendo a identificação  $x = (x_1, 0) = x_1$ , obtemos

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}(y) = \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i} \frac{y_2}{(s - x_1)^2 + y_2^2} e^{w_i(x_1)/2} dx_1.$$

Temos também que

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}(y) = I_1 + I_2,$$

onde

$$I_1 = \frac{c}{\pi} \int_{\partial' \Omega_i \setminus B^+((s,0), \epsilon)} \frac{y_2}{(s - x_1)^2 + y_2^2} e^{w_i(x_1)/2} dx_1,$$

e

$$I_2 = \frac{c}{\pi} \int_{\partial' B^+(x, \epsilon)} \frac{y_2}{(s - x_1)^2 + t^2} e^{w_i(x_1)/2} dx_1,$$

para  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, de modo que  $B^+((s, 0), \epsilon) \subset \Omega_i$ .

Para  $I_1$  como  $w_i(y) \leq \log 4$  em  $\bar{\Omega}_i$ , quando  $y_2 \rightarrow 0$  segue que  $I_1 \rightarrow 0$ .

Para  $I_2$  consideremos a seguinte mudança de variável  $tz = x_1 - s$  e conseqüentemente temos  $tdz = dx_1$ . Façamos também a identificação de  $\partial' B^+((s, 0), \epsilon)$  com o intervalo  $[s - \epsilon, s + \epsilon]$ .

Assim, temos  $I_2 = \frac{c}{\pi} \int_{-\epsilon/t}^{\epsilon/t} \frac{1}{z^2 + 1} e^{w_i(tz+s)/2} dz$ .

Agora estimemos  $I_2 - ce^{w(s,0)/2}$ .

$$|I_2 - ce^{w(s)/2}| \leq |c| \max_{x \in \partial' B((s,0), \epsilon)} e^{w_i(x)/2} \frac{1}{\pi} \int_{-\epsilon/y_2}^{\epsilon/y_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz - e^{w(s)/2}|$$

Agora, observemos que

$$\int_{-\epsilon/y_2}^{\epsilon/y_2} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \arctan |z| \Big|_{-\epsilon/y_2}^{\epsilon/y_2} = \arctan |\epsilon/y_2| - \arctan |-\epsilon/y_2|.$$

Então quando  $y_2 \rightarrow 0$  temos que  $\int_{-\epsilon/y_2}^{\epsilon/y_2} \frac{1}{z^2+1} dz \rightarrow \pi$ . Logo,

$$|I_2 - ce^{w(s)/2}| \leq |c| \max_{x \in \partial' B((s,0),\epsilon)} |e^{w_i(x)/2} - e^{w(s)/2}|.$$

E fazendo  $\epsilon \rightarrow 0$  temos que  $\max_{x \in \partial' B((s,0),\epsilon)} e^{w_i(x)/2} \rightarrow e^{w(s)/2}$ , portanto,  $|I_2 - ce^{w(s)/2}| \rightarrow 0$  e consequentemente,  $\frac{\partial v_i}{\partial t}(y) = ce^{w_i(y)/2}$ . Demonstrando a Afirmação 8.

Dessa forma temos

$$\begin{cases} \Delta v_i = 0 & \text{em } \Omega_i; \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} = ce^{\frac{w_i}{2}} & \text{sobre } \partial' \Omega_i; \\ v_i(A_i) = 0. \end{cases}$$

Seja  $h_i(x) = w_i(x) - v_i(x)$  para  $x \in \overline{B_R^+}$ , que satisfaz

$$\Delta h_i = \Delta w_i - \Delta v_i = e^{w_i} - 0 = e^{v_i} e^{(w_i - v_i)} = e^{v_i} e^h \text{ em } B_R^+$$

e

$$\frac{\partial h_i}{\partial t} = \frac{\partial(w_i - v_i)}{\partial t} - \frac{\partial v_i}{\partial t} = ce^{w_i/2} - ce^{w_i/2} = 0 \text{ sobre } \partial' B_R^+.$$

Observemos também que  $h_i(A_i) = w_i(A_i) - v_i(A_i) = 0 - 0$ . Assim, obtemos

$$\begin{cases} \Delta(w_i - v_i) - e^{v_i} e^{(w_i - v_i)} = 0 & \text{em } B_R^+ \\ \frac{\partial(w_i - v_i)}{\partial t} = 0 & \text{sobre } \partial' B_R^+ \\ w_i(A_i) - v_i(A_i) = 0. \end{cases} \quad (3.38)$$

Definamos

$$\overline{w_i}(y_1, y_2) = \begin{cases} w_i(y_1, y_2) & \text{se } y = (y_1, y_2) \in \overline{B_R^+} \\ w_i(y_1, -y_2) & \text{se } y = (y_1, y_2) \in B_R \cap \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2; x_2 < 0\}. \end{cases}$$

De maneira, inteiramente análoga definimos  $\overline{v}$  a partir de  $v$ .

Agora seja  $\overline{h_i} = \overline{w_i} - \overline{v_i} - C(c)$  e como  $|v_i| < C(c)$ , verificamos que  $-C(c) < \overline{v} < C$  e temos que  $e^{\overline{v_i}} > e^{-C(c)}$ . Portanto, verificamos que

$$\begin{cases} \Delta \overline{h_i} = \Delta(\overline{w_i} - \overline{v_i} - C(c)) = e^{\overline{v}} e^{(\overline{w_i} - \overline{v_i})} \leq e^{-C} e^{(\overline{w_i} - \overline{v_i})} & \text{em } B_R \\ \overline{h_i}(A_i) = \overline{w_i}(A_i) - \overline{v_i}(A_i) - C(c) = -C(c). \end{cases} \quad (3.39)$$

Definamos

$$\overline{g}(y) = \log \frac{8R^2}{(R^2 - |y|^2)^2}$$

para  $y \in B_R$ , e, portanto,  $\overline{g} \rightarrow \infty$  sobre  $\partial B_R$ . Verificamos que

$$\Delta \overline{g}(y) = \overline{g}''(|y|) + \frac{1}{|y|} \overline{g}'(|y|),$$

ou seja,

$$\Delta \overline{g}(y) = \frac{8R^2}{(R^2 - |y|^2)^2}.$$

Logo,

$$\Delta \overline{g} - e^{\overline{g}(y)} = 0 \text{ em } B_R.$$

Agora, seja  $f = \bar{g}(y) - \bar{h}_i(y)$  então  $f$  satisfaz

$$\Delta f - \xi f \geq 0, \text{ em } B_R,$$

onde  $\xi = \frac{e^{\bar{g}} - e^{\bar{h}_i}}{\bar{g} - \bar{h}_i}$  é uma função positiva em  $B_R$ , devido a monotonicidade da exponencial.

E como  $\bar{h}_i$  é contínua sobre o compacto  $\overline{B_R}$  temos que  $u$  é limitada. Notemos ainda que  $\lim_{x \rightarrow x_0} \bar{g} = \infty$  com  $x_0 \in \partial B_R$ , daí segue que  $f = \bar{g} - \bar{h} \geq 0$  sobre  $\partial B_R$ .

Então, pelo Princípio do Máximo, temos  $f(y) > 0$  para todo  $y \in B_R$ . Em particular,  $f(A_i) = \bar{g}(A_i) - \bar{h}(A_i)$ . E, portanto,

$$\bar{h}(A_i) < \bar{g}(A_i).$$

Assim,

$$-C(c) \leq \bar{w}_i(A_i) - \bar{v}_i(A_i) - C(c) \leq \log \left( \frac{8R^2}{(R^2 - |y|^2)^2} \right). \quad (3.40)$$

Mas temos  $\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{8R^2}{(R^2 - |y|^2)^2} = 0$  e próximo de zero o logaritmo não é limitado inferiormente. Dessa forma, obtemos uma contradição em (3.40). E portanto, segue o resultado. ■

**Lema 16** *Seja  $u \in C^2(B_{R_1}(x_0) \setminus \overline{B_{R_2}(x_0)} \cap \mathbb{R}_+^2)$  solução de*

$$\begin{cases} \Delta u = e^u & \text{em } \Omega := (B_{R_1}(x_0) \setminus B_{R_2}(x_0)) \cap \mathbb{R}_+^2; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2 \end{cases} \quad c \geq 0. \quad (3.41)$$

Então existe  $C_1 = C_1(c)$  tal que  $\max_{|x|=r} u(x) \leq C_1$ , com  $R_2 < r < R_1$

**Demonstração:** Sem perda de generalidade assumamos  $R_1 = 2$ ,  $R_2 = 1$  e  $x_0 = 0$ . Analisaremos dois casos:

**Caso 1:**  $c > 0$ .

Definamos

$$v(x) = -4 \log|x - A| + B - 2 \log(4 - |x|^2) - 2 \log(|x|^2 - 1), \text{ com } x \in \Omega$$

onde  $A = (0, 1/2)$  e  $B$  grande o suficiente a ser determinado posteriormente.

Pela definição de  $v$  e sabendo que  $1 < |x| < 2$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty, \text{ quando } x_0 \in \partial\Omega \setminus \partial\mathbb{R}_+^2. \quad (3.42)$$

Verificamos ainda que

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = -\frac{4(x_i - 1/2)}{|x - A|^2} + \frac{4x_i}{4 - |x|^2} - \frac{4x_i}{|x|^2 - 1}$$

e

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i^2} = \frac{-4|x - A|^2 + 8(x_i^2 - (1/2)^2)}{|x - A|^4} + \frac{4(4 - |x|^2) + 8x_i^2}{(4 - |x|^2)^2} + \frac{8(|x|^2 - 1) - 8x_i^2}{|x|^2 - 1}.$$

Daí segue que

$$\Delta v(x) = \frac{8(4 - |x|^2) + 8|x|^2}{(4 - |x|^2)^2} - \frac{8(|x|^2 - 1) - 8|x|^2}{(|x|^2 - 1)^2}$$

$$= 8 \cdot \frac{(5|x|^4 - 16|x|^2 + 20)}{(4 - |x|^2)^2(|x|^2 - 1)^2}.$$

Observemos que

$$e^{v(x)} = \frac{1}{(4|x|^2)^2(|x|^2 - 1)^2} \cdot \frac{e^B}{|x - A|^4}.$$

Portanto,

$$\Delta v(x) - e^{v(x)} = \frac{1}{(4|x|^2)^2(|x|^2 - 1)^2} \cdot \left( 40|x|^4 - 128|x|^2 + 160 - \frac{e^B}{|x - A|^4} \right).$$

Assim podemos escolher  $B$  grande o suficiente de modo que  $\Delta v(x) - e^{v(x)} < 0$  para  $x \in \Omega$ .

Agora, definamos  $w = v - u$  em  $\Omega$ , temos que  $\Delta w - (e^v - e^u) \leq 0$ , reescrevendo, temos

$$\Delta w - \xi w \geq 0 \text{ em } \Omega$$

onde

$$\xi = \begin{cases} \frac{e^{v(x)} - e^{u(x)}}{v(x) - u(x)} & \text{para } x \in \Omega \text{ quando } v(x) \neq u(x) \\ 0 & \text{para } x \in \Omega \text{ quando } v(x) = u(x). \end{cases}$$

Dessa forma,  $\xi \geq 0$  em  $\Omega$ . Seja  $z = (s, 0) \in \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2$ , verificamos que

$$\frac{\partial v(z)}{\partial t} = \frac{2}{s^2+1/4} \quad e \quad ce^{v(z)/2} = \frac{ce^{B/2}}{(s^2+1/4)(4-s^2)(s^2-1)}.$$

Então, se necessário, podemos escolher  $B$  grande o suficiente para obtermos

$$\frac{\partial v}{\partial t} < ce^{v/2} \text{ sobre } \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2.$$

Assim

$$\frac{\partial w}{\partial t} < ce^{v/2} - ce^{u/2} = \xi_1 w \text{ sobre } \partial\Omega \cap \mathbb{R}_+^2,$$

onde

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{e^{v(x)} - e^{u(x)}}{v(x) - u(x)} & \text{quando } x \in \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2 \text{ tal que } v(x) \neq u(x) \\ 0 & \text{para } x \in \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2 \text{ quando } v(x) = u(x). \end{cases}$$

Dessa maneira, pelo princípio do máximo, segue que  $w \geq 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ . Em particular, para  $|x| = r$  temos

$$\max_{|x|=r} w(x) \leq 0,$$

isto é

$$\max_{|x|=r} u(x) \leq \max_{|x|=r} v(x).$$

Portanto, para  $|x| = r$  temos

$$v(x) \leq -4 \log(|x| - |A|) + B - 2 \log(2 - |x|^2) - 2 \log(|x|^2 - 1),$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} v(x) &\leq -4 \log(r - 1/2) + B - 2 \log(4 - r^2) - 2 \log(|r|^2 - 1) \\ &= B + \frac{1}{\log(r - 1/2)^4 (4 - r^2)^2 (|r|^2 - 1)^2} = C_1. \end{aligned}$$

Assim,  $\max_{|x|=r} u(x) \leq C_1$ .

**Caso 2:**  $c = 0$

Definamos

$$v(x) = B - 2 \log(4 - |x|^2) - 2 \log(|x|^2 - 1), \text{ com } x \in \Omega$$

onde  $A = (0, 1/2)$  e  $B$  grande o suficiente a ser determinado posteriormente.

Pela definição de  $v$  e sabendo que  $1 < |x| < 2$ , temos que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v(x) = \infty, \text{ quando } x_0 \in \partial\Omega \setminus \partial\mathbb{R}_+^2. \quad (3.43)$$

Verificamos ainda que

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = \frac{4x_i}{4 - |x|^2} - \frac{4x_i}{|x|^2 - 1}$$

e

$$\frac{\partial^2 v(x)}{\partial x_i^2} = + \frac{4(4 - |x|^2) + 8x_i^2}{(4 - |x|^2)^2} + - \frac{8(|x|^2 - 1) - 8x_i^2}{|x|^2 - 1}.$$

Daí segue que

$$\Delta v(x) = \frac{8(4 - |x|^2) + 8|x|^2}{(4 - |x|^2)^2} - \frac{8(|x|^2 - 1) - 8|x|^2}{(|x|^2 - 1)^2} = 8 \cdot \frac{(5|x|^4 - 16|x|^2 + 20)}{(4 - |x|^2)^2(|x|^2 - 1)^2}.$$

Observemos que

$$e^{v(x)} = \frac{1}{(4|x|^2)^2(|x|^2 - 1)^2} \cdot e^B.$$

Portanto,

$$\Delta v(x) - e^{v(x)} = \frac{1}{(4|x|^2)^2(|x|^2 - 1)^2} \cdot (40|x|^4 - 128|x|^2 + 160 - e^B).$$

Assim podemos escolher  $B$  grande o suficiente de modo que  $\Delta v(x) - e^{v(x)} < 0$  para  $x \in \Omega$ .

Agora, definamos  $w = v - u$  em  $\Omega$ , temos que  $\Delta w - (e^v - e^u) \leq 0$ , reescrevendo, temos

$$\Delta w - \xi w \geq 0 \text{ em } \Omega$$

onde

$$\xi = \begin{cases} \frac{e^{v(x)} - e^{u(x)}}{v(x) - u(x)} & \text{para } x \in \Omega \text{ quando } v(x) \neq u(x) \\ 0 & \text{para } x \in \Omega \text{ quando } v(x) = u(x). \end{cases}$$

Dessa forma,  $\xi \geq 0$  em  $\Omega$ .

Seja  $z = (s, 0) \in \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2$ , verificamos que

$$\frac{\partial v(z)}{\partial t} = 0$$

E temos

$$\frac{\partial v}{\partial t} < e^{v/2} \text{ sobre } \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2.$$

Assim

$$\frac{\partial w}{\partial t} < e^{v/2} - 0 = e^{v/2} = \xi_1 w \text{ sobre } \partial\Omega \cap \mathbb{R}_+^2,$$

onde

$$\xi_1 = \begin{cases} \frac{e^{v(x)} - e^{u(x)}}{v(x) - u(x)} & \text{para } x \in \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2 \text{ quando } v(x) \neq u(x) \\ 0 & \text{para } x \in \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2 \text{ quando } v(x) = u(x). \end{cases}$$

Dessa maneira, pelo princípio do máximo, segue que  $w \geq 0$  sobre  $\bar{\Omega}$ . Em particular para  $|x| = r$  temos

$$\max_{|x|=r} w(x) \leq 0,$$

ou seja,

$$\max_{|x|=r} u(x) \leq \max_{|x|=r} v(x).$$

Portanto, para  $|x| = r$  temos

$$v(x) = B - 2 \log(4 - r^2) - 2 \log(|r|^2 - 1) = B + \frac{1}{\log(4 - r^2)^2 (|r|^2 - 1)^2} = C_1$$

Portanto,  $\max_{|x|=r} u(x) \leq C_1$ . ■

# Capítulo 4

## Caso Super-harmônico

Neste capítulo, trataremos de classificar as soluções do problema (2.17) para  $\alpha = 1$ . Vamos considerar a condição

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty. \quad (4.1)$$

Verificaremos que (4.1) implica necessariamente em

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty. \quad (4.2)$$

Dessa forma, mostraremos o seguinte resultado:

**Teorema 18** *Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  uma solução de*

$$\begin{cases} \Delta u + e^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \end{cases} \quad (4.3)$$

*satisfazendo*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty. \quad (4.4)$$

*Então  $u$  é da forma*

$$u(x, t) = \log \left( \frac{8\lambda^2}{(\lambda^2 + (x - x_0)^2 + (t - t_0)^2)^2} \right) \quad (4.5)$$

*para algum  $\lambda > 0$ ,  $x_0 \in \mathbb{R}$  e  $t_0 = c\lambda/\sqrt{2}$ .*

Finalmente, mostraremos que a condição (4.1) não pode ser retirada nem substituída por (4.2).

### 4.1 Demonstração do Teorema 18.

Para demonstrar este resultado, temos dois casos a analisar

1º caso  $\left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} ce^{u/2} \right| = \infty.$

Neste caso, aplicando o Método das Esferas Móveis, chegaremos a uma contradição, concluindo que (4.1) implica em (4.2).

2º caso  $\left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} ce^{u/2} \right| < \infty.$

Neste caso, mostraremos uma família de soluções para (4.3). Inicialmente, buscamos determinar um comportamento assintótico das soluções no infinito, para em seguida utilizarmos a Transformada de Kelvin e o Método das Esferas Móveis, obtendo a simetria radial das soluções, e portanto, permitindo sua classificação de maneira bastante simples.

### 4.1.1 Integral sobre $\partial\mathbb{R}_+^2$ infinita.

Mostraremos aqui que a condição

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$$

implica em

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} ce^{u/2} < \infty.$$

Faremos a demonstração por contradição, usando um argumento de esfera móveis. Dividiremos essa prova em 4 passos.

#### Passo 1

Para cada  $A > 1$ , existe  $R_A > 1$  tal que

$$u(x) \geq (-4) \log |x| + A \text{ para } x \in \overline{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_{3R_A}}. \quad (4.6)$$

quando

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} ce^{u/2} \right| = \infty. \quad (4.7)$$

#### Demonstração:

Para  $R > 0$  suficientemente grande, a ser determinado posteriormente, fixemos  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_{3R}}$  e definamos

$$g(y) = u(|x_0|y) + 2 \log |x_0| \text{ para } y \in \Omega := \overline{\mathbb{R}_+^2} \cap B_2 \setminus B_{1/2}.$$

Observemos que

$$\Delta g(y) = \Delta u(|x_0|y) \cdot |x_0|^2 = -e^{u(|x_0|y)} \cdot |x_0|^2$$

para  $y \in \Omega$ . Portanto,

$$\Delta g(y) + e^{u(|x_0|y)} \cdot |x_0|^2 = 0,$$

ou seja,

$$\Delta g(y) + e^{u(|x_0|y)} \cdot e^{\log |x_0|^2} = \Delta g(y) + e^{u(|x_0|y) + 2 \log |x_0|}.$$

Assim,

$$\Delta g(y) + e^{g(y)} = 0. \quad (4.8)$$

Também verificamos que

$$\frac{\partial g(y)}{\partial t} = \frac{\partial u(|x_0|y)}{\partial t} \cdot |x_0| = ce^{u(|x_0|y)/2} \cdot e^{\log |x_0|} = ce^{u(|x_0|y)/2 + 2 \log |x_0|/2}$$

Dessa forma,

$$\frac{\partial g(y)}{\partial t} = ce^{g(y)/2} \quad (4.9)$$

quando  $y \in \partial\mathbb{R}_+^2 \cap (B_2 \setminus B_{1/2})$ .

Notemos ainda que se  $y \in \Omega$ , então  $|x_0|y \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_R$ .

De fato, como  $x_0 \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{3R}$ , temos que  $|x_0| \geq 3R$  com  $R \gg 1$  e para  $y \in \Omega$  segue que  $1/2 \leq |y| \leq 2$ . Assim,  $||x_0|y| = |x_0| \cdot |y| \geq 3R \cdot 1/2 = 3R/2 > R$ .

Assim, temos

$$\int_{\Omega} e^{g(y)} dy = \int_{\Omega} e^{u(|x_0|y)+2\log|x_0|} dy = \int_{\Omega} e^{u(|x_0|y)} \cdot |x_0|^2 dy$$

Usando o teorema da mudança de variáveis para

$$T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y \mapsto y/|x_0|$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{u(|x_0|y)} \cdot |x_0|^2 dy &= \int_{T(\Omega)} e^{u(x)} \cdot |x_0|^2 \cdot |\det(J(T))| dx \\ &= \int_{T(\Omega)} e^{u(x)} \cdot |x_0|^2 \cdot 1/|x_0|^2 dx = \int_{T(\Omega)} e^{u(x)} dx \end{aligned}$$

E como  $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^2 \setminus B_R$  segue que

$$\int_{T(\Omega)} e^{u(x)} dx \leq \int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} e^{u(x)} dx.$$

Como  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ , dado  $\epsilon$ , existe  $R_0 > 0$  de modo que  $\int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} e^{u(x)} dx < \epsilon$ . Fazendo  $R > R_0$ , temos

$$\int_{\Omega} e^{g(y)} dy < \epsilon.$$

Como  $B(5/4, 3/4) \subset \Omega$ , temos

$$\begin{cases} \Delta g + e^g = 0 & \text{em } B^+(5/4, 3/4); \\ \frac{\partial g}{\partial t} = ce^g & \text{sobre } \partial' B^+(5/4, 3/4); \\ \int_{B(5/4, 3/4)} e^g < \epsilon \end{cases}$$

Dessa forma, temos que  $g|_{B^+(5/4, 3/4)}$  satisfaz as condições do Lema 13. Donde segue que

$$\max g(y) \leq C_{01} \text{ para } y \in B^{01} = B^+(5/4, 5/8) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Veja Figura 4.1.

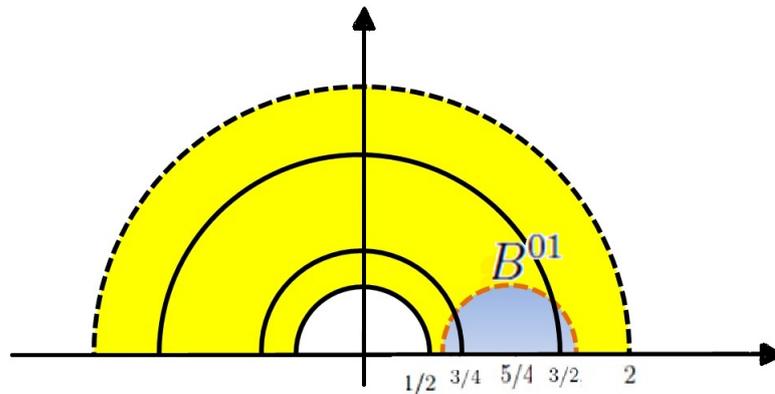


Figura 4.1: Bola  $B(5/4, 5/8) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$ .

Analogamente, verificamos que  $g|_{B(-5/4, 3/4)}$  satisfaz as condições do Lema 13 e assim, obtemos  $C_{02}$

$$\max g(y) \leq C_{02} \text{ para } y \in B^{02} = B(-5/4, 5/8) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Agora, seja  $\Omega_0 = \{y \in \overline{\mathbb{R}_+^2}; 3/4 \leq |y| \leq 3/2\}$ . Tomemos  $x \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})$ , consideremos,  $B(x, 2\epsilon_x)$  com  $\epsilon_x$  suficientemente pequeno de modo que  $B(x, 2\epsilon_x) \subset \Omega$ . Desse modo verificamos que  $g|_{B(x, 2\epsilon_x)}$  satisfaz as condições do Lema 12, daí para cada  $x \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})$  existe  $C_x$  tal que

$$\max g(y) \leq C_x \text{ para } y \in B(x, \epsilon_x).$$

Notemos que  $\Omega_0 \subset \left( \bigcup_{x \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})} B(x, \epsilon) \right) \cup B^{01} \cup B^{02}$ .

Como  $\Omega_0$  é compacto, existe uma subcobertura finita de modo que

$$\Omega_0 \subset \left( \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \epsilon_i) \right) \cup B^{01} \cup B^{02},$$

com  $x_i \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})$ . Veja Figura 4.2.

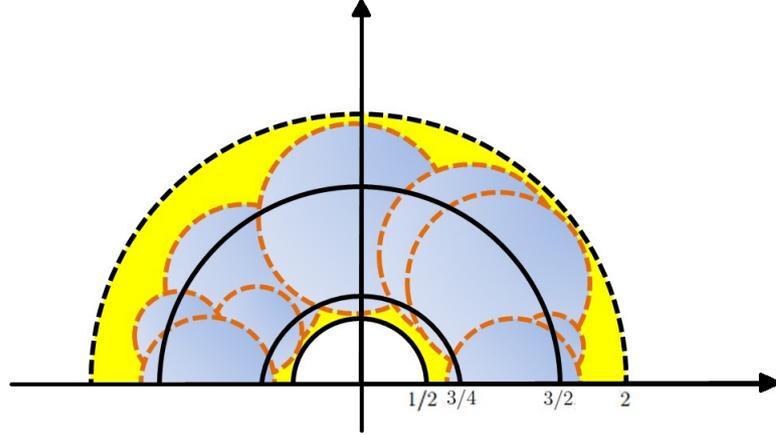


Figura 4.2: Uma cobertura finita para  $\{y \in \overline{\mathbb{R}_+^2}; 3/4 \leq |y| \leq 3/2\}$ .

Considere  $C_1 = \max\{C_{x_i}, C_{01}, C_{02}\}$ , então temos que

$$\max g(y) \leq C_1 \text{ para } 3/4 \leq |y| \leq 3/2, y \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$$

Consequentemente, temos

$$g\left(\frac{x_0}{|x_0|}\right) = u(x_0) + 2 \log |x_0| \leq C_1 \text{ para } |x_0| > 3R. \quad (4.10)$$

Dessa forma, para  $|x_0| \geq 10R$ , definamos

$$g_1(y) = u(|x_0|y) + 2 \log |x_0| - C_1 - 5.$$

Verificamos que

$$g_1(y) = u(|x_0|y) + 2 \log |x_0| - C_1 - 5 \leq C_1 - C_1 - 5 \leq -5 + 2 \log 2 < 0$$

para todo  $y \in B_{3/2} \setminus B_{3/2} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$ , já que  $\log 2 > 0$ . Observemos agora que

$$\Delta g_1(y) = \Delta u(|x_0|y)|x|^2$$

$$\begin{aligned}
 &= -e^{u(|x_0|y)} \cdot |x_0|^2 = -e^{u(|x_0|y)+2 \log |x_0|} \\
 &= -e^{u(|x_0|y)+2 \log |x_0|+(-5-C_1)-(-5-C_1)} = -e^{g_1-2 \log |x_0|+C_1}
 \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta g_1 + \frac{e^{g_1+5+C_1}}{g_1} g_1 = 0 \text{ em } B_{3/2} \setminus B_{3/2} \cap \mathbb{R}_+^2 \quad (4.11)$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_1(y)}{\partial t} &= \frac{\partial u(|x_0|y)}{\partial t} |x_0| = c e^{u/2} \cdot e^{\frac{2 \log |x_0|}{2}} \\
 &= c e^{g_1+C_1+5}/2 = c \frac{e^{(g_1+C_1+5)/2}}{g_1} g_1
 \end{aligned}$$

sobre  $\partial \mathbb{R}_+^2 \cap B_{3/2} \setminus B_{3/2}$ .

Como  $g_1$  é limitada superiormente segue que  $|e^{g_1}/g_1|$  e  $|e^{g_1/2}/g_1|$  são limitados. Então pelo Lema 2, aplicado em  $-g_1$ , temos a desigualdade

$$\max_{|y|=1} -g_1(y) \leq C_3 \min_{|y|=1} (-g_1(y)), \text{ para algum } C_3 > 1.$$

Consequentemente,

$$-\min_{|y|=1} g_1(y) \leq C_3 (-\max_{|y|=1} (g_1(y)))$$

e, portanto,

$$\min_{|y|=1} g_1(y) \geq C_3 \max_{|y|=1} (g_1(y)),$$

ou seja,

$$\min_{|y|=1} (u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5) \geq C_3 \max_{|y|=1} (u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5),$$

Tomando  $y = x/|x_0|$  com  $|x| = |x_0|$  e  $C_2 = C_1 + 5$ , obtemos

$$\min_{|x|=|x_0|} (u(x) + 2 \log |x_0| - C_2) \geq C_3 \max_{|x|=|x_0|} (u(x) + 2 \log |x_0| - C_2).$$

**Afirmção 9** Como  $|c| \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} = \infty$ , para  $0 < e < \min\{10/c_3, 1/5\}$ , obtemos uma sequência  $\{x_i\} \subset \partial \mathbb{R}_+^2$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots$  tal que  $|x_1| \geq 10R$ , com  $|x_{i+1}| > |x_i|$  e

$$u(x_i) + 2 \log |x_i| > \frac{\epsilon}{C_3} (-\log |x_i|). \quad (4.12)$$

De fato, inicialmente, identifiquemos  $\partial \mathbb{R}_+^2 = \{x = (y, t) \in \mathbb{R}^2; t = 0\}$  com  $\mathbb{R}$ . Assim fazendo uma simples mudança de variáveis de obtemos

$$\int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u(x)/2} dx = \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u((y,0))/2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u((y,0))/2} dy = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{+M} e^{u((y,0))/2} dy = \infty$$

Escrevamos

$$\begin{aligned}
 \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{+M} e^{u((y,0))/2} dy &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{-10R} e^{u((y,0))/2} dy + \\
 &+ \int_{-10R}^{10R} e^{u((y,0))/2} dy + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{10R}^{+M} e^{u((y,0))/2} dy
 \end{aligned}$$

Como  $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  segue que  $e^{u(y,0)/2}$  é  $C^1(\mathbb{R})$ . Daí

$$\int_{-10R}^{10R} e^{u((y,0))/2} dy < K$$

para algum  $K \in \mathbb{R}$ .

Agora, suponhamos, por absurdo, que para todo  $(y, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^2$  com  $|(y, 0)| \geq 10R$  tenhamos

$$u((y, 0)) + 2 \log |(y, 0)| \leq \frac{\epsilon}{C_3} (-\log |(y, 0)|),$$

ou seja,

$$\frac{u((y, 0))}{2} + \log |(y, 0)| \leq \frac{\epsilon}{2C_3} (-\log |(y, 0)|),$$

então pela monotonicidade da função exponencial, obtemos

$$e^{u((y,0)/2) + \log |(y,0)|} \leq e^{\frac{\epsilon}{2C_3} (-\log |(y,0)|)},$$

o que é equivalente a

$$e^{u((y,0)/2)} \cdot |(y, 0)| \leq |(y, 0)|^{-\frac{\epsilon}{2C_3}},$$

ou seja,

$$e^{u((y,0)/2)} \leq |(y, 0)|^{-\frac{\epsilon}{2C_3}-1}$$

Notemos que  $|(y, 0)| = y$ , então segue que

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{10R}^M e^{u((y,0)/2)} dy &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^{10R} |(y, 0)|^{-\frac{\epsilon}{2C_3}-1} dy = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{y^{-\frac{\epsilon}{2C_3}}}{-\frac{\epsilon}{2C_3}} \right|_{10R}^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{-\frac{\epsilon}{2C_3}}}{-\frac{\epsilon}{2C_3}} - \frac{10R^{-\frac{\epsilon}{2C_3}}}{-\frac{\epsilon}{2C_3}} = \frac{10R^{-\frac{\epsilon}{2C_3}}}{\frac{\epsilon}{2C_3}}. \end{aligned}$$

Analogamente concluímos que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{-10R} e^{u((y,0)/2)} dy = \frac{(-10R)^{-\frac{\epsilon}{2C_3}}}{\frac{\epsilon}{2C_3}}$$

Desse modo, temos que

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} \leq \frac{(-10R)^{-\frac{\epsilon}{2C_3}}}{\frac{\epsilon}{2C_3}} + K + \frac{10R^{-\frac{\epsilon}{2C_3}}}{\frac{\epsilon}{2C_3}},$$

gerando uma contradição com o fato de

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u(x)/2} dx = \infty$$

Portanto, obtemos  $x_1 = (y_1, 0)$  satisfazendo (4.12).

Usando um argumento de recorrência, suponhamos, por absurdo, que para todo  $x = (y, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^2$  com  $|(y, 0)| \geq |x_i| + 1$  tenhamos

$$u((y, 0)) + 2 \log |(y, 0)| \leq \frac{\epsilon}{C_3} (-\log |(y, 0)|),$$

chegaremos a uma contradição, implicando na existência de  $x_{i+1}$  com  $|x_{i+1}| > |x_i|$  satisfazendo (4.12).

Dessa forma, obtemos a sequência desejada, provando a Afirmação (9). Observemos, ainda, que da forma que foi construída esta sequência, temos que  $\lim_{i \rightarrow \infty} |x_i| = \infty$ .

Agora para  $i$  fixado, temos

$$\min_{|x|=|x_i|} (u(x) + 2 \log |x_i| - C_2) \geq C_3 \max_{|x|=|x_i|} (u(x) + 2 \log |x_i| - C_2) \geq C_3(u(x_i) + 2 \log |x_i| - C_3)$$

Assim, segue de (4.12) que

$$\min_{|x|=|x_i|} (u(x) + 2 \log |x_i| - C_2) \geq -\epsilon \log |x_i| - C_2 C_3,$$

ou seja,

$$\min_{|x|=|x_i|} u(x) \geq -(\epsilon + 2) \log |x_i| - C_2(C_3 - 1).$$

**Afirmação 10** Para  $i$  suficientemente grande

$$(\epsilon + 2) \log |x_i| + C_2(C_3 - 1) \leq \frac{5}{2} \log |x_i|.$$

Basta mostrar que

$$\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \log |x_i| \leq +C_2(C_3 - 1).$$

Sabemos que  $C_3 > 1$  e  $0 < \epsilon < 1/5$ , então se  $C_2 \leq 0$ , nada há o que demonstrar. Se  $C_2 > 0$ , como  $|x_i| \rightarrow \infty$ , tomemos  $i_1$  grande o suficiente de modo que  $\left(\frac{1}{2} - \epsilon\right) \log |x_i| \geq C_2(C_3 - 1)$ , sempre que  $i \geq i_1$ , provando a Afirmação 10.

Consequentemente, verificamos que

$$\min_{|x|=|x_i|} u(x) \geq -\frac{5}{2} \log |x_i| \text{ para } i \geq i_1. \quad (4.13)$$

Seja  $R_A = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \geq |x_{i_1}|\}$  com  $i_0$  suficientemente grande tal que

$$-\frac{5}{2} \log |x| > -4 \log |x| + A \text{ para } x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{R_A}.$$

Definamos

$$h_i(x) = u(x) + \frac{5}{2} \log |x|,$$

com  $x \in (B_{|x_{i+1}|} \setminus \overline{B_{|x_i|}}) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$ , com  $i \geq i_0$ .

Verificamos que

$$\Delta h_i(x) = \Delta(u(x) + \frac{5}{2} \log |x|) = -e^{u(x)} < 0, \text{ para } x \in (B_{|x_{i+1}|} \setminus \overline{B_{|x_i|}}) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

E por (4.13) temos que  $u(x_{i+1}) \geq -\frac{5}{2} \log |x_{i+1}|$ , ou seja,

$$h_i(x_{i+1}) \geq 0, \text{ com } x_{i+1} \in \partial(B_{|x_{i+1}|} \setminus \overline{B_{|x_i|}}) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Então, pelo Princípio do Máximo temos que

$$h_i(x) = u(x) + \frac{5}{2} \log |x| \geq 0 \text{ em } (B_{|x_{i+1}|} \setminus \overline{B_{|x_i|}}) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

E como  $i \geq i_0$  é arbitrário e  $|x_i| \rightarrow \infty$ , obtemos que

$$u(x) \geq -\frac{5}{2} \log |x|,$$

sempre que  $x \in \mathbb{R}_+^2$  e  $|x| \geq |R_A|$ .

Resta mostrar que a desigualdade é válida também quando  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$  com  $|x| \geq |R_A|$ . Para isso, concentremo-nos nas condições de fronteiras de  $u$

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^u / 2 \right| = \infty$$

e

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} \text{ sobre } \partial\mathbb{R}_+^2$$

Notemos que como  $\left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^u / 2 \right| = \infty$ , necessariamente, temos  $c \neq 0$ . Então analisaremos duas possibilidades:  $c < 0$  e  $c > 0$ .

Para  $c < 0$ , consideremos, ainda,  $h_i(x)$  e verificamos que

$$\frac{\partial h_i}{\partial t}(x) = \frac{\partial(u(x) + \frac{5}{2} \log |x|)}{\partial t} = ce^{u/2} < 0 \text{ sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \cap B_{|x_{i+1}|} \setminus \overline{B_{|x_i|}},$$

Então pelo Lema de Hopf, concluimos que  $u(x) + \frac{5}{2} \log |x| > 0$  sobre  $(B_{|x_{i+1}|} \setminus \overline{B_{|x_i|}}) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$ .

Como  $i \geq i_0$  é arbitrário, e  $|x_i| \rightarrow \infty$  concluimos que

$$u(x) > -\frac{5}{2} \log |x| > -4 \log |x| + A,$$

quando  $|x| > R_A$ .

E o Passo 1 é verificado para  $c < 0$ .

Para  $c > 0$ , definamos  $f(x) = -4 \log |x - B| + A + 1$ , onde  $B = (0, b)$  com  $b > ce^{A+1}$ . Observemos que para  $x$  suficientemente grande, verificamos que

$$-\frac{5}{2} \log |x| < f(x).$$

De fato, notemos inicialmente as equivalências

$$-\frac{5}{2} \log |x| > f(x) \Leftrightarrow e^{-\frac{5}{2} \log |x|} > e^{f(x)} \Leftrightarrow \frac{1}{|x|^{5/2}} > \frac{e^{A+1}}{|x - B|^4}.$$

Dessa forma devemos ter

$$\frac{|x - B|^4}{|x|^{5/2}} > e^{A+1}.$$

Observemos que para cada  $x$  verificamos

$$\frac{|x - B|^4}{|x|^{5/2}} \geq \frac{(|x| - |B|)^4}{|x|^{5/2}} = \left( |x|^{3/8} - \frac{|B|}{|x|^{5/8}} \right)^4.$$

Como  $A$  é fixado, temos que para  $|x| > R_1$ , com  $R_1$  suficientemente grande, temos que

$$\left(|x|^{3/8} - \frac{|B|}{|x|^{5/8}}\right)^4 > e^{A+1}.$$

Daí segue que  $-\frac{5}{2} \log |x| > f(x)$ , quando  $|x| > R_1$ .

Também podemos verificar que para  $|x|$  suficientemente grande

$$f(x) > (-4) \log |x| + A.$$

Evidentemente,

$$f(x) > (-4) \log |x| + A$$

é equivalente a

$$e^{f(x)} > e^{(-4) \log |x| + A},$$

ou ainda,

$$\frac{e^{A+1}}{|x-B|^4} > \frac{e^A}{|x|^4}.$$

Assim, devemos verificar que

$$\left(\frac{|x-B|}{|x|}\right)^4 < e.$$

Observemos ainda que

$$\frac{|x-B|}{|x|} < \frac{|x|+|B|}{|x|} = 1 + \frac{|B|}{|x|}$$

e para  $|x| > R_2$  com  $R_2$  suficientemente grande, temos que

$$\left(1 + \frac{|B|}{|x|}\right)^4 < e,$$

e, portanto,  $f(x) > (-4) \log |x| + A$ , quando  $|x| > R_2$ .

Definamos  $R_A = |x_{i_0}| \geq \max\{R_1, R_2\}$ . Dessa forma, para  $|x| > R_A$ .

$$-\frac{5}{2} \log |x| > f(x) > -4 \log |x| + A.$$

Então sobre  $|x| = |x_i|$  ou  $|x| = |x_{i-1}|$  para  $i > i_0 + 1$ , verificamos que  $f(x) < u(x)$ , pela escolha de  $B$  podemos verificar que

$$\frac{\partial(u-f)}{\partial t} = ce^{u/2} - \frac{4b}{|x-B|^2} < ce^{u/2} - \frac{4ce^{A+1}}{|x-B|^2}$$

e assim,

$$\frac{\partial(u-f)}{\partial t} < ce^{u/2} - ce^{f/2} \text{ sobre } B_{|x_i|} \setminus B_{|x_{i-1}|} \cap \partial\mathbb{R}_+^2.$$

Verificamos que

$$\Delta(u(x) - f(x)) = -e^{u(x)} < 0 \text{ para } x \in B_{|x_i|} \setminus B_{|x_{i-1}|} \cap \mathbb{R}_+^2,$$

então se houvesse  $y \in B_{|x_i|} \setminus B_{|x_{i-1}|} \cap \partial\mathbb{R}_+^2$  tal que  $u(y) - f(y) = 0$  teríamos

$$\frac{\partial(u-f)}{\partial t} < 0,$$

contrariando o Lema de Hopf. E assim, também verificamos o passo 1 para  $c > 0$ . Como queríamos. ■

**Passo 2**

Para cada  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$ , existe  $\lambda_x > 0$  tal que para  $0 \leq \lambda \leq \lambda_x$ ,

$$u_{x,\lambda}(x) < u(y)$$

para  $y \in \mathbb{R}_+^2$ ,  $|y - x| > \lambda$ , onde  $u_{x,\lambda}$  é a Transformada de Kelvin de  $u$ .

**Demonstração:**

**Afirmção 11** *Existe  $r_0$  tal para  $y \in B_{r_0}^+ \setminus B_\lambda^+$ , temos  $u_{x,\lambda}(x) < u(y)$  para  $0 < \lambda < r_0$ .*

Sem perda de generalidade assumamos  $x = 0$ . Consideremos  $w(y) = u(y) + 2 \log |y|$  em  $\mathbb{R}_+^2$  em suas coordenadas polares, ou seja,

$$w(y) = w(\theta, R) = u(\theta, R) + 2 \log R \text{ com } \theta \in (0, 2\pi] \text{ e } R \in \mathbb{R}_+.$$

Assim, temos que

$$\frac{\partial w(\theta, R)}{\partial r} = \frac{\partial u(\theta, R) + 2 \log R}{\partial r} = \frac{\partial u(\theta, R)}{\partial r} + 2 \frac{1}{R}.$$

Então, como  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$ , temos que  $\frac{\partial u}{\partial r}$  é localmente limitada, e como  $\lim_{R \rightarrow 0} \frac{1}{R} = \infty$ , temos que para  $R$  suficientemente pequeno

$$\frac{\partial w}{\partial r} > 0.$$

Isto significa que fixada uma direção, temos que  $w$  é uma função real monótona crescente na variável  $R$ , dessa forma existe  $r_0 > 0$  tal que para  $0 < R_1 < R_2 \leq r_0$  tal que

$$w(R_1) < w(R_2).$$

Observemos que  $y$  e  $y_\lambda = \lambda^2 y / |y|^2$  são colineares e tomando  $0 < \lambda < |y| \leq r_0$  segue que  $|y| > |y_\lambda|$ , daí  $w(y) > w(y_\lambda)$  para  $y \in B_{r_0} \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$  e  $0 < \lambda \leq r_0$ , ou seja,

$$u(y) + 2 \log |y| > u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) + 2 \log \left|\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right| \text{ para } y \in B_{r_0} \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Notemos ainda que

$$u(y) + 2 \log |y| > u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) + 2 \log \left|\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right| = u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) + 4 \log \lambda - 2 \log |y|,$$

ou ainda,

$$u(y) + 2 \log |y| - u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) - 4 \log \lambda + 2 \log |y| > 0,$$

o que é equivalente a

$$u(y) - u_\lambda(y) > 0 \text{ para } y \in B_{r_0} \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2},$$

o que prova a Afirmção 11.

Dessa maneira, temos que a desigualdade é obtida para um anel do  $\mathbb{R}_+^2$  como representado na Figura 4.3.

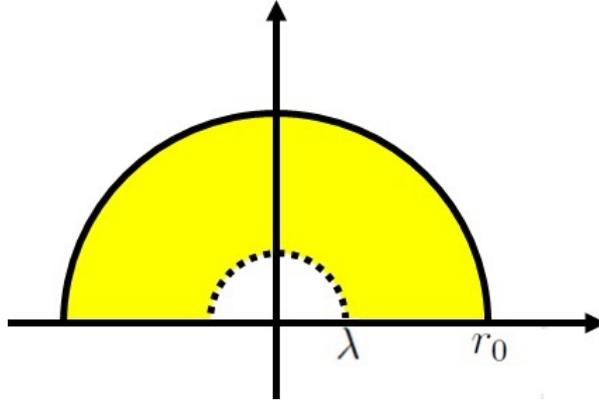


Figura 4.3: Anel  $B_{r_0} \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$  onde vale  $u_{0,\lambda}(y) > u(y)$ .

Agora, devemos verificar a desigualdade para  $y \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{r_0}$ .

**Afirmção 12** *Existe  $r_1 < r_0$  suficientemente pequeno tal que para  $0 < \lambda < r_1$  e  $|y| > r_0$  temos  $u(y) - u_{0,\lambda}(y) > 0$ .*

Suponhamos, por absurdo, que para todo  $0 < r_1 < r_0$  exista  $0 < \lambda_{r_1} < r_1$  tal que tenhamos  $u(y) - u_{0,\lambda_{r_1}}(y) > 0$  para  $|y| > r_0$ .

Então  $\lambda_{r_1}$ , sabemos que para  $|y| > r_0 \geq \lambda_{r_1}$ , verificamos que  $|\lambda_{r_1}^2 y / |y|^2| \leq \lambda_{r_1}$ , ou seja,  $\lambda_{r_1}^2 y / |y|^2 \in B_{\lambda_{r_1}}$ . Pela continuidade de  $u$  existe  $K > 0$  tal que  $|u(x)| \leq K$  para todo  $x \in \overline{B_{\lambda_{r_1}}}$

$$u(y) - u_{\lambda_{r_1}}(y) = u(y) + 4 \log |y| - u\left(\frac{\lambda_{r_1}^2 y}{|y|^2}\right) - 4 \log \lambda_{r_1} < 0, \text{ para } |y| > r_0,$$

isto é,

$$u(y) + 4 \log |y| < u\left(\frac{\lambda_{r_1}^2 y}{|y|^2}\right) + 4 \log \lambda_{r_1} \text{ para } |y| > r_0$$

Daí segue que

$$u(y) + 4 \log |y| < K + \log \lambda < K + \log \lambda_{r_1} + K_1 \text{ para } |y| > r_0 \tag{4.14}$$

com  $K_1$  grande o suficiente para  $K + \log \lambda_{r_1} + K_1 > 0$ .

Pelo passo 1, temos que dado  $A > 1$ , existe um  $R_A$  tal que se  $|y| > R_A$ , verificamos que  $u(y) + \log |y| \geq A$ . Tomando  $A = K + \log \lambda + K_1$  temos que

$$u(y) + 4 \log |y| \geq K + \log \lambda + K_1$$

para  $|y| > R_A$ , em particular, para  $|y| > r_0$ , contradizendo (4.14). E segue a Afirmção (12).

Verificamos a afirmação na região onde  $|y| > r_0$ , como pode ser vista na Figura 4.4.

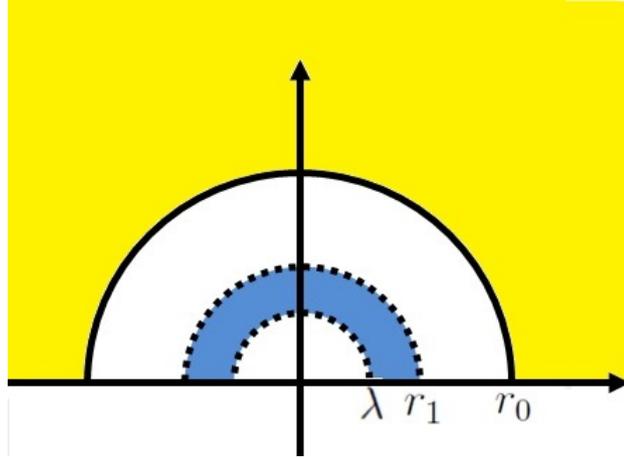


Figura 4.4: Região fora do anel  $B_{r_0}^+ \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$  onde vale  $u_{0,\lambda}(y) > u(y)$ .

Dessa maneira, pelas Afirmações 11 e 12 estabelecemos Passo 2. ■

### Passo 3

Para  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$ , seja

$$\overline{\lambda}_x = \sup\{\lambda; u(y) > u_{x,\lambda}(y); y \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus \overline{B(x, \mu)} \leq \lambda\}.$$

Então  $\overline{\lambda}_x = \infty$ .

### Demonstração:

Supondo, por absurdo, que existe  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$  tal que  $\overline{\lambda}_x < \infty$ . Sem perda de generalidade, tomemos  $x = 0$ . Seja

$$w_{\overline{\lambda}_0} = u - u_{0,\overline{\lambda}_0} \text{ em } \Sigma_{\overline{\lambda}_0} := \mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{B_{\overline{\lambda}_0}}.$$

E verificamos que

$$\begin{cases} \Delta w_{\overline{\lambda}_0} + \xi_1 w_{\overline{\lambda}_0} = 0 & \text{em } \Sigma_{\overline{\lambda}_0}; \\ \frac{\partial w_{\overline{\lambda}_0}}{\partial t} = \xi_2 w_{\overline{\lambda}_0} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{B_{\overline{\lambda}_0}}, \end{cases}$$

onde,

$$\xi_1 = \frac{e^u - e^{u_{\overline{\lambda}_0}}}{u - u_{\overline{\lambda}_0}} \quad \xi_2 = c \frac{e^{u/2} - e^{u_{\overline{\lambda}_0}}}{u - u_{\overline{\lambda}_0}} \quad (4.15)$$

são funções contínuas e estão bem definidas sobre  $\Sigma_{\overline{\lambda}_0}$  e  $\partial\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{B_{\overline{\lambda}_0}}$ , respectivamente, devido a maneira que consideramos  $\overline{\lambda}_0$ .

Primeiramente, pelo passo 1, verificamos que para  $A = \max_{B_{\overline{\lambda}_0}} u(x) + 4 \log \overline{\lambda}_0 + K_2$ , com  $K_2$  grande o suficiente de modo que  $A > 1$  temos

$$u(y) + 4 \log |y| > A, \text{ para } |y| > R_A,$$

ou seja,

$$u(y) + 4 \log |y| > \max_{B_{\overline{\lambda}_0}} u(x) + 4 \log \overline{\lambda}_0 + K_2 \text{ para } |y| > R_A.$$

Dessa forma,

$$u(y) + 4 \log |y| > u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) + 4 \log \bar{\lambda}_0 + K_2,$$

temos, assim,

$$u(y) + 4 \log |y| - u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) - 4 \log \bar{\lambda}_0 > K_2,$$

e segue que

$$u(y) - u_{0, \bar{\lambda}} > K_2 > 0 \text{ para } |y| > R_A$$

e assim

$$w_{\bar{\lambda}_0}(y) > K_2 > 0 \in \overline{\Sigma_{\bar{\lambda}_0}} \text{ e } |y| > R_A.$$

Assim pelo Princípio do Máximo forte segue que  $w_{\bar{\lambda}_0}(y) > 0$  para  $y \in \Sigma_{\bar{\lambda}_0}$  e  $|y| < R_A$ .

Notemos ainda que para  $y \in \partial B_{\bar{\lambda}_0} \setminus \partial \mathbb{R}_+^2$  temos que  $u(y) = u_{0, \bar{\lambda}_0}(y)$ , ou seja,  $w_{\bar{\lambda}_0} = 0$ . Então pelo Lema de Hopf segue que

$$\frac{\partial w_{\bar{\lambda}_0}(y)}{\partial \nu} > 0,$$

onde  $\nu$  é o vetor exterior normal unitário de  $B_{\bar{\lambda}_0}$ . Para  $x = (\pm \bar{\lambda}_0, 0)$  pelo Lema 3, verificamos que

$$\frac{\partial w_{\bar{\lambda}_0}(\bar{\lambda}_0, 0)}{\partial \nu} > 0 \text{ e } \frac{\partial w_{\bar{\lambda}_0}(-\bar{\lambda}_0, 0)}{\partial \nu} < 0.$$

Isto é uma contradição, que vem do fato de supormos  $\bar{\lambda}_0$  finito.

Portanto, estabelecemos o passo 3. ■

#### Passo 4

Então pelo Lema 8 segue que  $u(s, t)$  é um função que depende apenas de  $t$ , ou seja,  $u(s, t) = u(0, t)$ . Contradizendo a condição de finitude de  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u$ .

Essa, contradição veio do fato de supormos  $\int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} = \infty$ . Assim, para  $u$  solução de (4.3), com  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ . Devemos necessariamente ter

$$\int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty.$$

#### 4.1.2 Integral sobre $\partial \mathbb{R}_+^2$ finita.

Inicialmente, vamos estabelecer um certo comportamento assintótico da solução  $u$  de (4.3) para  $|x|$  grande, quando as condições  $\left| \int_{\mathbb{R}_+^2} c e^{u/2} \right| < \infty$  e  $\left| \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} c e^{u/2} \right| < \infty$  são satisfeitas.

**Proposição 2** *Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  satisfazendo (4.3) com  $\left| \int_{\mathbb{R}_+^2} e^u \right| < \infty$  e  $\left| \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} \right| < \infty$  então  $\sup_{\mathbb{R}_+^2} u < \infty$ .*

**Demonstração:** De fato, dado  $\epsilon > 0$  existe  $R > 0$  tal que

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} e^u < \epsilon$$

daí, temos que  $e^{u(x)} \leq C_1$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_R$ , portanto, existe  $C_2$  tal que  $u(x) < C_2$  em  $\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R$  e, uma vez que  $u \in C^1(\mathbb{R}_+^2)$  segue que existe  $C_3$  tal que  $u(x) < C_3$  para  $x \in \overline{B_R^+}$ , portanto,

$$\sup_{\mathbb{R}_+^2} u \leq C_3$$

com  $C_3 = \max\{C_2, C_3\}$ . De maneira, análoga concluímos que  $\sup_{\partial\mathbb{R}_+^2} u \leq C_4$ , logo,

$$\sup_{\mathbb{R}_+^2} u \leq C$$

para  $C = \max\{C_3, C_4\}$ . ■

**Proposição 3** *Seja  $u$  nas condições do Teorema 18 e que  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ , então*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\log|x|} = d := \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{u(x)} dx - \frac{c}{\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u(x)/2} dx.$$

**Demonstração:** Seja

$$\begin{aligned} v_1(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\log|x-y| + \log|\bar{x}-y| - 2\log|y|) e^{u(y)} dy \\ &\quad - \frac{c}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} (\log|x-y| + \log|\bar{x}-y| - 2\log|y|) e^{u(y)} dy \end{aligned}$$

onde  $\bar{x}$  é a reflexão de  $x$  sobre  $\partial\mathbb{R}_+^2$ .

Verificamos analogamente ao Teorema 4 que  $\Delta v_1 = e^u$  em  $\mathbb{R}_+^2$  e de forma semelhante à Afirmação 8, obtemos  $\frac{\partial v_1}{\partial t} = -ce^{u/2}$  sobre  $\partial\mathbb{R}_+^2$ , ou seja,

$$\begin{cases} \Delta v_1 = e^u & \text{em } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial v_1}{\partial t} = -ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2. \end{cases}$$

Agora verificamos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{v_1}{\log|x|} = -d.$$

De fato, dado  $\epsilon_1 > 0$  temos existe  $R_1 > 0$  tal que para  $|x| > R_1$ , temos que

$$\left| \frac{\log|x-y| + \log|\bar{x}-y| - 2\log|y|}{\log|x|} - 2 \right| \leq \epsilon_1$$

Como  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ , dado  $\epsilon_2 > 0$  existe  $R_2 > 0$  tal que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_{R_2}} e^u < \epsilon_2.$$

Dado  $\epsilon > 0$ , tomemos  $\epsilon_1 = \epsilon/(2 \sup_{\mathbb{R}_+^2})$  e  $\epsilon_2 = \epsilon/(2\epsilon_1)$  e  $R \geq \max\{R_1, R_2\}$ . Definamos

$$D := \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{(\log|x-y| + \log|\bar{x}-y| - 2\log|y|)}{\log|x|} e^{u(y)} dy - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{u(y)} dy \right|.$$

Então

$$D \leq \left| \frac{1}{2\pi} \int_{B_R^+} \frac{(\log|x-y| + \log|\bar{x}-y| - 2\log|y|)}{\log|x|} - 2 \right| e^{u(y)} dy$$

$$+ \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{B_R^2}} \frac{(\log |x - y| + \log |\bar{x} - y| - 2 \log |y| - 2)e^{u(y)} dy}{\log |x|} \right|.$$

Logo,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{B_R^+}} \frac{(\log |x - y| + \log |\bar{x} - y| - 2 \log |y| - 2)e^{u(y)} dy}{\log |x|} \right| \\ & \leq \sup_{\mathbb{R}_+^2} e^u \left| \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{B_R^+}} \frac{(\log |x - y| + \log |\bar{x} - y| - 2 \log |y| - 2) dy}{\log |x|} \right|. \end{aligned}$$

E assim,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\overline{B_R^+}} \frac{(\log |x - y| + \log |\bar{x} - y| - 2 \log |y| - 2)e^{u(y)} dy}{\log |x|} \right| < \sup_{\mathbb{R}_+^2} e^u \frac{\epsilon}{2 \sup_{\mathbb{R}_+^2} e^u} = \frac{\epsilon}{2}.$$

E ainda,

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{B_R^2}} \frac{(\log |x - y| + \log |\bar{x} - y| - 2 \log |y| - 2)e^{u(y)} dy}{\log |x|} \right| \leq \epsilon_1 \frac{\epsilon}{2\epsilon_1} = \frac{\epsilon}{2}.$$

Daí, temos

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{(\log |x - y| + \log |\bar{x} - y| - 2 \log |y|)}{\log |x|} e^{u(y)} dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{u(y)} dy.$$

De maneira análoga, concluímos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{c}{2\pi} \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} \frac{(\log |x - y| + \log |\bar{x} - y| - 2 \log |y|)}{\log |x|} e^{u(y)/2} dy = \frac{c}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{u(y)/2} dy.$$

Portanto, temos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{v_1(x)}{\log |x|} = -d.$$

Consideremos  $\bar{v} = u + v_1$ , portanto,

$$\begin{cases} \Delta \bar{v} = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} = 0 & \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^2. \end{cases}$$

Observemos que

$$\bar{v} \leq C(1 + \log(|x| + 1)),$$

para algum  $C > 0$ . Portanto,  $\bar{v}$  é constante. Consequentemente,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\log |x|} = d$ . ■

**Observações 7** A Proposição 3 nos fornece o comportamento assintótico de  $u$  no infinito. Isso será de extrema importância, pois através do Método das Esferas Móveis, poderemos utilizar o Princípio do Máximo para chegarmos ao resultado desejado.

Para prosseguirmos, vamos analisar o sinal do coeficiente  $c$  na equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ce^u.$$

1º subcaso:  $c \geq 0$ .

**Proposição 4** *Seja  $u$  nas condições do Teorema 18, com  $c \geq 0$ . Então  $d = -4$  e para todo  $b \in \mathbb{R}$  existe algum  $\lambda_b > 0$ , tal que*

$$u_b(x) = u_b \left( \frac{x}{\lambda_b^2 |x|^2} \right) - 4 \log |x| + 4 \log \lambda_b \text{ para todo } x \in \mathbb{R}_+^2,$$

onde  $u_b = u(s+b, t)$  para todo  $x = (s, t) \in \mathbb{R}_+^2$ .

**Demonstração:**

Para mostrarmos que  $d = -4$ , obteremos contradições quando assumirmos que  $d > -4$  ou  $d < -4$ .

Inicialmente, assumamos  $d > -4$ .

Definamos

$$v_b(x) = u_b \left( \frac{x}{|x|^2} \right) - 4 \log |x|$$

e

$$w_{\lambda, b} = v_b - \left( v_b \left( \frac{\lambda^2 x}{|x|^2} \right) - 4 \log \frac{|x|}{\lambda} \right).$$

Sem perda de generalidade, trabalharemos com  $b = 0$ , consideremos

$$v_{\lambda, 0} = v_0(\lambda^2 x / |x|^2) - 4 \log(|x|/\lambda)$$

e

$$w_{\lambda, 0}(x) = v_0(x) - v_{\lambda, 0}(x).$$

Dessa maneira, verificamos que

$$\begin{cases} \Delta w_{\lambda, 0} + c_1 w_{\lambda, 0} = 0 & \text{em } B_\lambda^+ \\ \frac{w_{\lambda, 0}}{\partial t} = c_2 w_{\lambda, 0} & \text{sobre } \partial' B_\lambda^+, \end{cases} \quad (4.16)$$

onde  $c_1 = e^{\xi_1(x)}$  e  $c^2 = (c/2)e^{\xi_2}$ , e  $\xi_1$  e  $\xi_2$  são funções que assumem valores entre  $v_\lambda$  e  $v_0$ .

Obteremos uma contradição das quatro afirmações seguintes:

**Afirmção 13** *Para  $\lambda$  grande o suficiente, verificamos que  $w_{\lambda, 0} \geq 0$  para todo  $x \in B_\lambda^+ \setminus \{0\}$ .*

Provaremos esta afirmação em três passos.

### Passo 1

Existe  $R_0$  suficientemente grande tal que para todo  $R_0 \leq |x| \leq \lambda/2$ , temos  $w_{\lambda, 0} \geq 0$ .

De fato,

$$\begin{aligned} w_{\lambda, 0} &= v_0(x) - \left( v_0 \left( \frac{\lambda^2 x}{|x|^2} \right) - \log \frac{|x|}{\lambda} \right) \\ &= u \left( \frac{x}{|x|^2} \right) - 4 \log |x| - \left( u \left( \frac{x}{\lambda^2} \right) - 4 \log \frac{\lambda^2 |x|}{|x|^2} - 4 \log \frac{|x|}{\lambda} \right) \\ &= u \left( \frac{x}{|x|^2} \right) - 4 \log |x| - u \left( \frac{x}{\lambda^2} \right) + 4 \log \frac{\lambda^2 |x|}{|x|^2} + 4 \log \frac{|x|}{\lambda} - 4 \log \frac{\lambda}{|x|} + 4 \log \frac{\lambda}{|x|} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x| - u\left(\frac{x}{\lambda^2}\right) - 4 \log \frac{1}{|x|} + 4 \log \frac{\lambda}{|x|} \\ &= u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - u\left(\frac{x}{\lambda^2}\right) + 4 \log \frac{\lambda}{|x|}. \end{aligned}$$

Agora, observemos que como  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\log |x|} = d$  para  $R_0$  suficientemente grande e  $R_0 \leq |x| \leq \lambda/2$  temos que dado  $\epsilon > 0$

$$\left| \frac{u(x)}{\log |x|} + d \right| \leq \epsilon.$$

Daí,

$$\left| \frac{u(x)}{\log |x|} \right| - |d| < \epsilon,$$

que é equivalente a

$$\left| \frac{u(x)}{\log |x|} \right| < |d| + \epsilon < C,$$

logo,

$$|u(x)| < C \log |x|,$$

e, portanto,

$$\frac{|u(x)|}{1/|x|} < \frac{C \log |x|}{1/|x|},$$

o que é equivalente a

$$|u(x)||x| < C|x| \log |x|$$

Como  $|x| \log |x|$  é contínua, temos que  $|x| \log |x|$  é limitada em  $R_0 \leq |x| \leq \lambda/2$ . Daí segue que

$$u(x) = O\left(\frac{1}{|x|}\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} w_{\lambda,0} &= u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - u\left(\frac{x}{\lambda^2}\right) + 4 \log \frac{\lambda}{|x|} \\ &= O\left(\frac{1}{|x|}\right) + 4 \log \frac{\lambda}{|x|} > O\left(\frac{1}{|x|}\right) + 4 \log 2 > 0. \end{aligned}$$

E estabelecemos o passo 1.

### Passo 2

Existe  $R_1 \geq R_0$ , tal que para  $R_1 \leq \lambda/2 \leq |x| \leq \lambda$ , temos que  $w_{\lambda,0} \geq 0$ .

Sejam  $g(x) = \log(|x| - 1)$  e  $\overline{w_{\lambda,0}}(x) = w_{\lambda,0}(x)/g(x)$ . De (4.16), segue

$$\begin{cases} \Delta \overline{w_{\lambda,0}} + \frac{2}{g} \nabla g \nabla \overline{w_{\lambda,0}} + \left( c_1(x) + \frac{\Delta g}{g} \right) \overline{w_{\lambda,0}} = 0 & \text{em } B_\lambda^+ \\ \frac{\overline{w_{\lambda,0}}}{\partial t} = c_2 \overline{w_{\lambda,0}} & \text{sobre } \partial' B_\lambda \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Agora, suponhamos, por absurdo, que exista  $x_0 = (s_0, t_0)$  com  $\lambda \leq |x_0| \leq \lambda$  tal que

$$\overline{w_{\lambda,0}}(x_0) = \min_{\lambda \leq |x| \leq \lambda} < 0.$$

Notemos que pelo passo 1, temos que  $|x_0| \neq \lambda/2$  e pela definição de  $w_{\lambda,0}$ , se  $|x_0| = \lambda$  teríamos  $w_{\lambda,0} = 0$ . Dessa maneira,  $\lambda/2 < |x_0| < \lambda$  e também

$$\begin{aligned} v_\lambda(x_0) &= v\left(\frac{\lambda^2 x_0}{|x_0|^2}\right) - 4 \log \frac{|x_0|}{\lambda} \\ &= u\left(\frac{x_0}{\lambda^2}\right) - 4 \log \frac{\lambda^2}{|x_0|} - 4 \log \frac{|x_0|}{\lambda} = u\left(\frac{x_0}{\lambda^2}\right) - 4 \log \lambda. \end{aligned}$$

Como  $|x_0| \leq \lambda$ , segue que  $x_0/\lambda^2 \in \overline{B_1^+}$ . Pela continuidade de  $u$  temos que existe  $C_1$  tal que  $u(y) \leq C_1$ , com  $y \in \overline{B_\lambda^+}$ , em particular,  $u\left(\frac{x_0}{\lambda^2}\right) < C_1$ . Segue então que

$$v_\lambda \leq C_1 - 4 \log \lambda \leq C_2 - 4 \log |x_0|,$$

para  $C_2$  suficientemente grande.

Como  $\overline{w_{\lambda,0}}(x_0) < 0$ , segue que  $w_{\lambda,0} < 0$ , temos que  $v_0(x_0) \leq v_\lambda(x_0) \leq C_2 - 4 \log |x_0|$ . Sabendo que  $\xi_1(x)$  assume valores entre  $v_0(x)$  e  $v_\lambda(x)$ , em particular, temos

$$\xi_1(x_0) \leq C_2 - 4 \log |x_0|.$$

Pela monotonicidade da função exponencial, obtemos

$$c_1(x_0) = e^{\xi_1(x_0)} \leq e^{C_2 - 4 \log |x_0|} = C/|x_0|^4. \quad (4.18)$$

Verificamos, também que

$$\frac{\Delta g}{g}(x_0) = -\frac{1}{|x_0|(|x_0| - 1)^2 \log(|x_0| - 1)}. \quad (4.19)$$

Então segue de (4.18) e (4.19) que para  $R_1 \geq R_0$  suficientemente grande temos

$$c_1(x_0) + \frac{\Delta g}{g}(x_0) < 0.$$

Então, pelo Princípio do Máximo e pelo Lema de Hopf aplicados em (4.17) chegamos a uma contradição, devido  $x_0$  ser um ponto de mínimo negativo interior.

Portanto, o passo 2 fica estabelecido.

### Passo 3

Existe  $R_3 \geq R_2$  tal que para  $\lambda \geq R_2$ , temos

$$w_{\lambda,0} \geq 0 \text{ para } x \in B_{R_0}^+ \setminus \{0\}.$$

De fato, tomemos  $0 < |x| \leq R_0$  e  $\lambda$  suficientemente grande. Observemos que

$$w_{\lambda,0} = u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x| - u\left(\frac{x}{\lambda^2}\right) + 4 \log \lambda. \quad (4.20)$$

Agora, notemos que

$$u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x| = \left(\frac{u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)}{\log |x|} - 4\right) \log |x| = \left(-\frac{u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)}{\log |x|^{-1}} - 4\right) \log |x|,$$

temos como  $d > -4$ ,  $|x| \rightarrow 0$  temos

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{u\left(\frac{x}{|x|^2}\right)}{\log\frac{|x|}{|x|^2}} - 4 \right) \log|x| \\ &= (-d - 4 + o(1)) \log|x| > 0 \end{aligned}$$

Portanto, pela continuidade, de  $u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 4 \log|x|$ , dado  $\epsilon$  sabemos que existe  $C > 0$ , independente de  $\epsilon$  tal que para  $x \in B_{R_0}^+ \setminus B_\epsilon^+$ , temos que

$$u\left(\frac{x}{|x|^2}\right) - 4 \log|x| \geq -C.$$

Fazendo  $\epsilon$  tender a zero, segue que

$$w_{\lambda,0}(x) \geq -C \text{ para } x \in B_{R_0} \setminus \{0\}.$$

Observemos ainda, que para  $\lambda \geq R_0$  temos que  $x/\lambda^2 \in B_{R_0}$ , portanto limitado. Assim, para  $R_2$  suficientemente grande, se  $\lambda > R_2$  temos que  $C + u\left(\frac{x}{\lambda^2}\right) \leq 4 \log \lambda$  e verificamos que

$$w_{\lambda,0} \geq -C + u\left(\frac{x}{\lambda^2}\right) + 4 \log \lambda \geq 0.$$

E assim, estabelecemos o passo 3.

E a Afirmação 13 segue dos passos 1, 2 e 3.

Agora, definamos para cada  $b \in \partial\mathbb{R}_+^2$  identificado com  $\mathbb{R}$

$$\lambda_b = \inf\{\lambda > 0; w_{\mu,b} \geq 0 \text{ em } \overline{B}^+ \setminus \{0\} \text{ para todo } \lambda < \mu < \infty\}.$$

**Afirmação 14** Existe  $\bar{b} \in \partial\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}$ , tal que  $\lambda_{\bar{b}} > 0$ .

Supondo que a afirmação não é verdadeira, então para todo  $b \in \mathbb{R}$  verificamos que  $\lambda_b = 0$ , logo pelo Lema (8), segue que  $v(x)$  depende apenas de  $t$ , contrariando as hipóteses de finitude das integrais. Portanto, a afirmação é verdadeira.

**Afirmação 15** Seja  $\lambda_b > 0$  para algum  $b \in \partial\mathbb{R}_+^2 = \mathbb{R}$ , então  $w_{\lambda_b,b}(x) = 0$ , para todo  $x \in \mathbb{R}_+^2$ .

Sem perda de generalidade, tomemos  $b = (0, 0) = 0$ , e suponhamos que a afirmação é falsa. Verificamos que  $w_{\lambda_0,0}$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta w_{\lambda_0,0} \leq 0 & \text{em } B_{\lambda_0}^+, \\ \frac{\partial w_{\lambda_0,0}}{\partial t} = ce^{v/2} - ce^{v\lambda/2} & \text{sobre } \partial' B_{\lambda_0}^+ \setminus \{0\}, \\ w_{\lambda_0,0} \geq 0 & \text{em } B_{\lambda_0}^+. \end{cases} \quad (4.21)$$

Então, pelo Princípio do Máximo e pelo Lema de Hopf (usado a condição de fronteira de  $w_{\lambda_0,0}$  em (4.21)) temos que

$$\begin{cases} w_{\lambda_0,0} > 0 & \text{em } B_{\lambda_0}^+, \\ \frac{\partial w_{\lambda_0,0}}{\partial \nu} > 0 & \text{sobre } \partial'' B_{\lambda_0}^+, \end{cases} \quad (4.22)$$

onde  $\nu$  denota o vetor normal exterior a esfera  $\partial'' B_{\lambda_0}$ . Para finalizarmos a prova da afirmação, precisaremos dos seguintes resultados auxiliares

**Lema 17** Existe  $\gamma = \gamma(\lambda_0) > 0$  tal que  $w_{\lambda_0}(x) \geq 0$  para  $x \in \overline{B_{\lambda_0/2}^+} \setminus \{0\}$ .

**Demonstração:**

Notemos que

$$v_{\lambda_0} = v\left(\frac{\lambda_0 x}{|x|^2}\right) - 4 \log \frac{|x|}{\lambda_0} = u\left(\frac{x}{\lambda_0} - 4 \log \lambda_0\right) \leq C_1(\lambda_0). \quad (4.23)$$

De (4.22) segue que  $\min_{\partial'' B_{\lambda/2}^+} w_{\lambda_0,0} \geq \epsilon$  para algum  $0 < \epsilon < 1$ .

Sem perda de generalidade, assumamos,  $\lambda_0 = 2$ . Para  $0 < r < 1$ , introduzimos a função auxiliar

$$\varphi(x) = \frac{\epsilon\mu}{2(c+1)} - \frac{\log|x|}{\log r} \cdot \epsilon + \frac{\epsilon t(1-\mu)}{2} \text{ para } x \in B_1^+ \setminus \overline{B_r^+},$$

onde  $0 < \mu < 1$  a ser escolhido posteriormente.

Agora, definamos  $P(x) = w_{\lambda_0,0} - \varphi(x)$  e observamos que

$$\begin{cases} \Delta P(x) \leq 0 & \text{em } B_1^+ \setminus B_r^+, \\ \frac{\partial P(x)}{\partial t} = ce^{v/2} - ce^{v_1} - \frac{\epsilon(1-\mu)}{2} & \text{sobre } \partial(B_{\lambda_0}^+ \setminus \overline{B_r^+}). \end{cases} \quad (4.24)$$

Mostraremos que

$$P(x) \geq 0, \text{ para } x \in B_{\lambda_0}^+ \setminus \overline{B_r^+} \quad (4.25)$$

De fato, sobre  $\partial'' B_1^+$ , temos que  $|x| = 1$  e  $t \leq 1$ . Como  $c \geq 0$  segue que

$$\varphi(x) = \frac{\epsilon\mu}{2(c+1)} - \frac{\log|x|}{\log r} \cdot \epsilon + \frac{\epsilon t(1-\mu)}{2} \leq \frac{\epsilon\mu}{2} - 0 + \frac{1 \cdot (1-\mu)}{2} = \epsilon.$$

E como  $w_{\lambda_0,0} \geq \epsilon$  segue que  $P(x) \geq \epsilon - \epsilon = 0$  sobre  $\partial'' B_1^+$ .

Para  $x \in \partial'' B_r^+$ , temos que

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{\epsilon\mu}{2(c+1)} - \frac{\log|x|}{\log r} \cdot \epsilon + \frac{\epsilon t(1-\mu)}{2} \\ &= \frac{\epsilon\mu}{2(c+1)} - \epsilon + \frac{\epsilon t(1-\mu)}{2} = \frac{\epsilon\mu}{2(c+1)} + \frac{\epsilon t(1-\mu)}{2} > 0. \end{aligned}$$

Logo, pela definição de  $P$  segue que  $P(x) > w_{\lambda_0,0} \geq 0$ .

Agora, suponhamos que ocorre  $P(x_0) = \min x \in \overline{B_1^+} \setminus B_r^+ P(x) < 0$  e seja  $x_0 = (s_0, t_0)$ .

Pelas considerações acima e pelo princípio do máximo, segue que

$$x_0 \in \partial'(\overline{B_1^+} \setminus B_r^+),$$

logo  $t_0 = 0$  e  $r < |s_0| < 1$ , então  $(\partial P/\partial t)(x_0) \geq 0$ .

De  $P(x_0) < 0$ , obtemos

$$v_0(x_0) - v_{\lambda_0}(x_0) - \varphi(x_0) < 0.$$

Assim de (4.23) segue que

$$v_0(x_0) < C_2, \quad (4.26)$$

para  $C_2 = C_2(\epsilon, C_1)$ . Também, como  $t_0 = 0$ , obtemos

$$w_{\lambda_0,0}(x_0) < \frac{\epsilon\mu}{2(c+1)} - \frac{\log|x|}{\log r} \cdot \epsilon < \frac{\epsilon\mu}{2(c+1)}. \quad (4.27)$$

De (4.23) e (4.26) e pelo Teorema do Valor Médio, segue que  $e^{v_0/2} - e^{v_1/2} < C_3 w_{\lambda_0,0}(x_0)$  para uma constante  $C_3 > 0$ .

$$w_{\lambda_0,0}(x_0) \leq \frac{e^{v_0/2} - e^{v_1/2}}{C_3} > \frac{\epsilon}{2c \cdot C_3} \cdot (1 - \mu) > \frac{\epsilon}{2(c+1)C_3} \cdot (1 - \mu). \quad (4.28)$$

Então de (4.27) e (4.28), verificamos que

$$\mu > \frac{1}{1 + C_3}.$$

escolhendo  $\mu$  tal que  $0 < \mu < 1/(1 + C_3)$  verificamos (4.25). Fazendo  $r \rightarrow 0$ , em  $P$ , provamos o Lema para  $\gamma = \epsilon/(2(1+c)(1+C_3))$ .

Da definição de  $\lambda_0$ , sabemos que existe uma sequência  $\lambda_k$  de modo que  $\lambda_k \rightarrow \lambda_0$  com  $\lambda_k < \lambda_0$  tal que

$$\inf_{\overline{B}_{\lambda_k}^+} w_{\lambda_k} < 0.$$

Pelo Lema (17) e pela continuidade da  $u$ , para  $k$  suficientemente grande segue que

$$w_{\lambda_k}(x) \geq \gamma/2 \text{ para } x \in \overline{B}_{\lambda_0/2} \setminus \{0\}.$$

Temos ainda que existe  $x_k = (s_k, t_k) \in B_{\lambda_k} \setminus B_{\lambda_0/2}$  tal que

$$w_{\lambda_k}(x_k) = \min_{B_{\lambda_k}^+ \setminus \{0\}} w_{\lambda_k} < 0.$$

Claramente temos que  $\lambda_0 < |x_k| < \lambda_k$  e pela condição de fronteira,  $t_k > 0$ . Observemos ainda que  $\nabla w_{\lambda_k}(x_k) = 0$ . Passando a uma subsequência, se necessário, temos que  $x_k \rightarrow x_0 = (s_0, t_0)$  e como  $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}}_+^2)$ , segue que

$$w_{\lambda_0}(x_0) = 0 \quad \nabla w_{\lambda_0}(x_0) = 0 \quad (4.29)$$

De (4.29) e (4.22) segue que  $x_0 \in \partial' B_{\lambda_0} \setminus \{0\}$  daí temos que  $t_0 = 0$  e  $|s_0| = \lambda_0$ . ■

**Lema 18** *Se (4.21) e (4.22) são satisfeitas, então  $\frac{\partial w_{\lambda_0,0}}{\partial \nu}(x_0) > 0$  para todo  $x_0 = (s_0, 0)$  e  $|s_0| = \lambda_0$ .*

Uma vez verificado o Lema (18) termos uma contradição, implicando que afirmação é verdadeira.

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade, assumamos  $\lambda_0 = 1$  e  $s_0 = 1$ . Seja

$$\Omega = \{x = (s, t); 1/2 < s^2 + t^2 < 1, s > 0 \text{ e } 0 < t < 1/4\},$$

como pode ser observado na Figura 4.5.

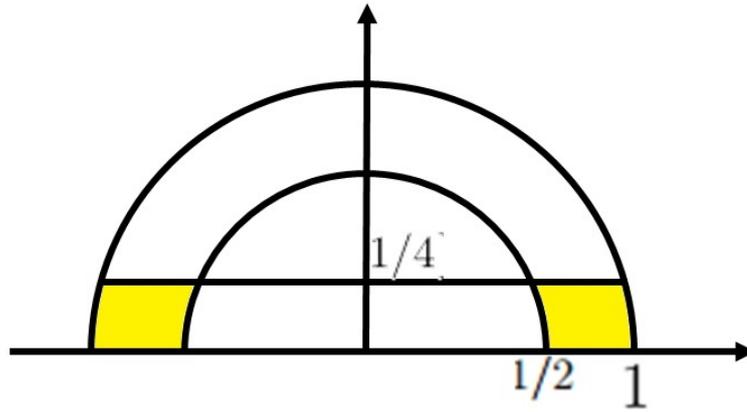


Figura 4.5:  $\Omega = \{x = (s, t); 1/2 < s^2 + t^2 < 1, s > 0 \text{ e } 0 < t < 1/4\}$ .

Definamos

$$h(x) = \epsilon(1 - s)(t - \mu) \quad \varphi_1(x) = h(x) - h\left(\frac{x}{|x|^2}\right),$$

com  $0 < \epsilon, \mu < 1$  a serem escolhidos posteriormente. E verificamos que

$$\Delta\varphi_1(x) = 0 \text{ para } x \in \Omega.$$

Consideremos  $Q(x) = w_{\lambda_0,0}(x) - \varphi_1(x)$  e dessa maneira temos

$$\begin{cases} \Delta Q \leq 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial Q}{\partial t} = c_2(x)w_{\lambda_0,0}(x) - \frac{\varphi_1}{\partial t} & \text{sobre } \partial\Omega \cap \partial\mathbb{R}_+^2, \end{cases} \quad (4.30)$$

onde  $c_2 = (c/2)e^{\xi/2}$ ,  $\xi$  é uma função entre  $v_{\lambda_0}$  e  $v_0$ . Para  $\epsilon$  e  $\mu$ , convenientemente escolhidos, queremos mostrar que

$$Q(x) = w_{\lambda_0,0}(x) - \varphi_1(x) \geq 0 \text{ em } \Omega. \quad (4.31)$$

Usando (4.22), escolhendo  $\epsilon_0 > 0$  pequeno o suficiente, tal que para todo  $0 < \epsilon < \epsilon_0$  temos  $G(x) \geq 0$  sobre  $\partial\Omega \cap (\partial B_{1/2}\{t = 1/4\})$ . Pela construção de  $\varphi_1$ , temos também que  $G(x) = 0$  sobre  $\Omega \cap \partial B_1$ . Agora suponhamos que  $G(x) \leq 0$  em  $\Omega$ , dessa forma, existe  $x_1 = (s_1, t_1)$  em  $\bar{\Omega}$  tal que

$$G(x_1) = \min_{\bar{\Omega}} G < 0 \quad (4.32)$$

Então pelas considerações acima e pelo princípio do máximo temos  $t_1 = 0$  e  $1/2 < s_1 < 1$ . Assim

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x_1) \geq 0 \quad (4.33)$$

Ainda verificamos que

$$\frac{\partial G}{\partial t}(x_1) = \epsilon(1 - s_1^{-3})(s_1^{-3} + 1). \quad (4.34)$$

Combinando (4.30), (4.33) e (4.34), temos

$$c_2(x_1)w_{\lambda_0}(x_1) - \epsilon(1 - s_1)(s_1^{-3} + 1) \geq 0 \quad (4.35)$$

E segue de (4.32)

$$c_2(x_1)w_{\lambda_0,0} - \epsilon(1 - s_1^{-3})(s_1^{-3} + 1) \geq 0. \quad (4.36)$$

Combinando (4.35) e (4.36), segue que

$$c_2(x_1)\mu > 1.$$

Então escolhendo desde o início  $0 < \mu < \min_{1/2 \leq |x| \leq 1} (c_2(x) + 1)^{-1}$  chegamos a uma contradição. Dessa maneira, temos que (4.31) é verdadeira. Como sabemos que  $Q(x_0) = 0$  devemos ter

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(x_0) \geq 0.$$

Dessa maneira,

$$\frac{\partial w_{\lambda_0,0}}{\partial \nu}(x_0) = \frac{\partial Q}{\partial \nu}(x_0) + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) \geq \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}(x_0) = 2\epsilon\mu > 0.$$

Dessa forma estabelecemos o Lema (18) e a Afirmação (15) também. ■

Das Afirmações (14) e (15), verificamos que  $d \leq -4$ .

Agora, assumamos que  $d < -4$  e encontraremos uma contradição usando um argumento de esferas móveis.

Da prova da Proposição 4.1.2 segue que  $u = v_1 + C$ . Definamos

$$w(x) = u(x) + 2 \log |x|$$

**Afirmação 16** *Seja  $w$  em coordenadas polares, então existe  $R_0$  suficientemente tal que*

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + \frac{2}{r} < 0$$

para  $\theta \in (0, 2\pi)$  e  $r \geq R_0$ .

Suponhamos, por absurdo, que para todo  $R > 0$ , existe  $\theta_R$  tal que

$$\frac{\partial u(r, \theta_R)}{\partial r} + \frac{2}{r} \geq 0$$

para todo  $r > R$ . Assim, integrando em relação a variável  $r$ , temos

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial u(r, \theta_R)}{\partial r} + \frac{2}{r} dr \geq 0$$

com  $r_1 > R$  e  $r_2 > R$ . Daí temos,

$$w(r_2, \theta_R) - w(r_1, \theta_R) \geq 0.$$

E como  $u(x) \leq -4 \log |x|$  temos que  $w(x) \leq -2 \log |x|$ . Assim, fixando  $r_1$  temos  $w(r_1, \theta_r) = C_1$  e temos

$$0 \leq w(r_2, \theta_R) - w(r_1, \theta_R) \leq C - 2 \log r_2$$

Fazendo  $r_2 \rightarrow \infty$  temos uma contradição. E assim provamos a Afirmação (16).

Dessa maneira, para  $r \geq R_0$  fixada uma direção, observamos que  $w$  é monótona decrescente. Consideremos para cada  $x \in \partial \mathbb{R}_+^2$ , definimos  $u_{y,\lambda}$  como sendo sua Transformada de Kelvin. E sem perda de generalidade apliquemos para  $y = 0$ . Assim temos,

$$u_{0,\lambda}(x) - u(x) = u\left(\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right) + 2 \log \left| \frac{\lambda^2 x}{|x|^2} \right| - (u(x) - 2 \log |x|)$$

para  $x \in \Sigma_\lambda := \mathbb{R}_+^2 \setminus B_\lambda$ , ou seja,

$$u_{0,\lambda}(x) - u(x) = w\left(\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right) - w(x).$$

Como  $\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}$  e  $x$  estão na mesma direção de  $x/|x|$ . Então para  $\lambda > R_0$  e  $\lambda < |x| \leq \lambda^2/R_0$ , temos que  $R_0 \leq \frac{\lambda^2 x}{|x|^2} \leq |x|$  e, portanto, segue que  $w\left(\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right) > w(x)$ . Donde obtemos

$$u_{0,\lambda}(x) > u(x) \text{ para } \lambda < |x| \leq \lambda^2/R_0. \quad (4.37)$$

Resta mostrar para  $x > \lambda^2/R_0$ . Escrevamos

$$u_{0,\lambda} - u(x) = u\left(\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x| + 4 \log \lambda - u(x).$$

Como  $|x| \geq \lambda^2/R_0$ , temos que  $\lambda^2 x/|x|^2 \in B_{R_0}^+$ , pois

$$\left|\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right| = \frac{\lambda^2}{|x|} \leq \frac{\lambda^2}{\lambda^2/R_0} = R_0.$$

Daí  $u\left(\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right) \leq \max_{B_{R_0}^+} u$ . Também, verificamos que  $-4 \log |x| - u(x) > 0$ , uma vez que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\log |x|} < -4$ . Dessa, forma, escolhemos  $\lambda$  tão grande que

$$u_{0,\lambda} - u(x) = u\left(\frac{\lambda^2 x}{|x|^2}\right) - 4 \log |x| + 4 \log \lambda - u(x) > 0. \quad (4.38)$$

Portanto, por (4.37) combinado com (4.38) segue que existe  $\lambda_0$  grande suficientemente tal que para  $\lambda > \lambda_0$ ,  $u_{0,\lambda}(x) - u(x) > 0$  em  $\Sigma_\lambda$ . Agora, vamos mover a esfera até a posição crítica.

**Afirmção 17** *Seja*

$$\bar{\lambda} = \inf\{\lambda > 0; \text{ para todo } \nu \geq \lambda, u_{0,\nu} > u \text{ em } \Sigma_\nu\},$$

então

$$\bar{\lambda} > 0. \quad (4.39)$$

De fato, fazendo  $r = |x|$  e verificamos que para  $r$  suficientemente pequeno temos

$$\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial u(r, \theta)}{\partial r} + \frac{2}{r}$$

então para  $r$  suficientemente pequeno,

$$\frac{\partial w(r, \theta)}{\partial r} > 0 \quad (4.40)$$

Então temos que  $\bar{\lambda} > 0$ .

E fica provada a Afirmção (17).

Mas podemos obter que dado  $\epsilon >$  suficientemente pequeno, ainda temos para  $\bar{\lambda} - \epsilon$ , ainda verificamos que  $u_{0,\bar{\lambda}-\epsilon} > u$ , devido ao decaimento de  $u$  no infinito. Isso contradiz a definição de  $\bar{\lambda}$ . Então, podemos descartar o fato de  $d < -4$ . E como já tínhamos que  $d > -4$ , então verificamos que  $d = 4$ .

**Afirmção 18** Para todo  $b \in \mathbb{R}$ , temos que  $\lambda_b$ .

Das Afirmções (14) e (15), temos que existe  $\bar{b} \in \mathbb{R}$  tal que  $\lambda_{\bar{b}} > 0$  e  $w_{\lambda_{\bar{b}}, \bar{b}} = 0$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+^2$ , ou seja,

$$u_{\bar{b}}(x) = u_{\bar{b}} \left( \frac{x}{\lambda_{\bar{b}}^2 |x|} \right) - 4 \log(\lambda_{\bar{b}} |x|) \text{ para } x \in \mathbb{R}_+^2,$$

o que é equivalente

$$u_{\bar{b}}(x) + 4 \log |x| = u_{\bar{b}} \left( \frac{x}{\lambda_{\bar{b}}^2 |x|} \right) - 4 \log \lambda_{\bar{b}},$$

daí segue que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (u_{\bar{b}}(x) + 4 \log |x|) = u(\bar{b}, 0) - 4 \log \lambda_{\bar{b}},$$

ou ainda,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (x) + 4 \log |x| = u(\bar{b}, 0) - 4 \log \lambda_{\bar{b}}. \quad (4.41)$$

Supondo que a Afirmção (18) não é verdade para algum  $b \in \mathbb{R}$ , isto é,

$$w_{\lambda, b}(x) = v_b - \left( v_b \left( \frac{\lambda^2 x}{|x|^2} \right) - 4 \log \left( \frac{\lambda}{|x|} \right) \right) \geq 0,$$

para todo  $\lambda > 0$  e para todo  $x \in \bar{B}_\lambda^+ \setminus \{0\}$ . Daí segue que

$$u_b \left( \frac{x}{|x|^2} \right) \geq u_b \left( \frac{x}{\lambda^2} \right) - 4 \log \left( \frac{\lambda}{|x|} \right),$$

para todo  $\lambda > 0$  e para todo  $x \in \bar{B}_\lambda^+ \setminus \{0\}$ .

Fixando  $\lambda > 0$  na equação acima e fazendo  $|x|$  tendendo a zero, usando (4.41),

$$u(\bar{b}, 0) - 4 \log \lambda_{\bar{b}} \geq u_b(0) - 4 \log \lambda.$$

E fazendo  $\lambda \rightarrow 0$ , chegamos a uma contradição. Desse modo, segue a Afirmção (18).

Portanto, temos que segue a Proposição (3). ■

**Prova do Teorema (18) para  $c \geq 0$ .**

Usando a Proposição (3) e o Lema (8), sabemos que para algum  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $a, d > 0$  temos

$$u(s, 0) = \log \left( \frac{a}{(s - s_0)^2 + d} \right)^2, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}. \quad (4.42)$$

Sejam  $x_0 = (s_0, -\sqrt{d})$ ,

$$B = \left\{ x = (s, t) \in \mathbb{R}^2; \frac{(t + \sqrt{d})}{|s - s_0|^2 + (t + \sqrt{d})^2} - \sqrt{d} \geq 0 \right\},$$

e

$$\bar{\varphi}(x) = u \left( \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2 + x_0} \right) - 4 \log |x - x_0|,$$

para  $x \in B$ .

Pela definição, temos que  $B$  é uma bola de  $\mathbb{R}^2$ . Por (4.3), sobre

$$\partial B = \left\{ x = (s, t) \in \mathbb{R}^2; \frac{t + \sqrt{d}}{|s - s_0|^2 + (t + \sqrt{d})^2} - \sqrt{d} = 0 \right\},$$

temos

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}(s, t) &= 2 \log a - 2 \log \left( \frac{|s - s_0|^2}{(|s - s_0|^2 + (t + \sqrt{d})^2)} + d \right) \\ &\quad - 2 \log(|s - s_0|^2 + (t + \sqrt{d})^2) \\ &= 2 \log a - 2 \log \left( \frac{|s - s_0|^2}{(|s - s_0|^2 + (t + \sqrt{d})^2)} + d(|s - s_0|^2 + (t + \sqrt{d})^2) \right) \\ &= 2 \log a. \end{aligned}$$

Logo, para  $\rho = \bar{\varphi} - \log a = 0$  sobre  $\partial B$ , portanto, pelo Princípio do Máximo temos  $\rho \geq 0$  e pelo Teorema (15), segue que  $\rho$ , é radialmente simétrica em relação ao centro de  $B$ . Verificamos que

$$\Delta \rho(x) = \Delta \bar{\varphi}(x) = \Delta u(y) = e^{u(y)}, \quad (4.43)$$

onde  $y = (x - x_0/|x - x_0|^2) + x_0$ . Pela unicidade das soluções das Equações Diferenciais Ordinárias para (4.43), temos que existe um  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que

$$\bar{\varphi}(x) = \log \left( \frac{8\lambda^2}{(\lambda^2 + |x - x_0|^2)^2 |x - x_0|^2} \right)$$

Observemos, ainda,

$$|x - x_0| = \left| \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} + x_0 - x_0 \right| = |y - x_0|.$$

e temos ainda que

$$u(y) = \bar{\varphi} \left( \frac{y - x_0}{|y - x_0|^2} \right) - 4 \log |y - x_0|.$$

Dessa maneira, obtemos (4.5).

[2º subcaso]  $c < 0$ .

Para provar este caso usaremos todos os passos do caso anterior, a mudança ocorre apenas no passo 2 da afirmação 1. Provaremos esta passo, usando a função teste  $g(x) = \log(|z| - 1)$  com  $z = x + (0, -\lambda/4)$ . E procedemos de forma semelhante ao caso  $c > 0$ , definimos similarmente,  $v(x), v_b(x), w_{\lambda,b}$  e  $w_\lambda$ .

**Proposição 5** *Seja  $u(x)$  satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta u + e^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty \quad e \quad \int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$$

então existe  $\lambda_b > 0$ , tal que

$$u_b(x) = u_b \left( \frac{x}{\lambda_b^2 |x|^2} \right) - \log \lambda |x|.$$

Analogamente, ao que foi feito anteriormente, temos que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\log |y|} = -4$$

**Afirmção 19** Para  $\lambda$  grande o suficiente, temos  $w_\lambda \geq 0$  para toda  $x \in \overline{B}_\lambda^+ \setminus \{0\}$ .

**Passo 1** Existe  $R_0$ , tal que para todo  $R_0 \leq |x| \leq \lambda/2$ , temos que  $w_\lambda(x) \geq 0$ . Verificamos da mesma forma que para o caso  $c > 0$ .

**Passo 2** Existe  $R_1 \geq R_0$  tal que  $R_1 \geq \lambda/2 \geq |x| \geq \lambda$ , temos que  $w_\lambda(x) \geq 0$ . Seja  $g(x) = \log(|z| - 1)$  com  $z = x + (0, \lambda/4)$  e  $\overline{w}_\lambda(x)/g(x)$ . De (4.16) segue que

$$\begin{cases} \Delta \overline{w}_\lambda + \frac{2}{g} \nabla g \cdot \nabla \overline{w}_\lambda + \left( c_1(x) + \frac{\delta g}{g} \right) \overline{w}_\lambda = 0 & \text{em } B_\lambda^+, \\ \frac{\overline{w}_\lambda}{\partial t} = \left( c_2(x) - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} \right) \overline{w}_\lambda & \text{sobre } \partial' B_\lambda^+. \end{cases} \quad (4.44)$$

Supondo contrário, teríamos que existe  $x_0 = (s_0, t_0)$  com  $\lambda/2 \geq |x_0| \leq \lambda$ , tal que

$$\overline{w}_\lambda(x_0) = \min_{\lambda/2 \leq |x| \leq \lambda} \overline{w}_\lambda(x) < 0.$$

Então,  $|x_0| \neq \lambda$  pela definição de  $w_\lambda$  e  $|x_0| \neq \lambda_0$  pelo passo 1 e, devido a condição de fronteira, obtemos  $t_0 > 0$ . Portanto,  $x_0 \in B_\lambda^+ \setminus B_{\lambda/2}^+$  e, ainda,

$$v_\lambda(x_0) \leq C - 4 \log \lambda \leq C_1 - \log |x_0|,$$

$$v(x_0) \leq v_\lambda(x_0) \leq C_1 - 4 \log |x_0|.$$

Assim, para  $\lambda$  suficientemente grande verificamos que

$$|c_1(x_0)| \leq \frac{C_1}{|x_0|^4}, \quad |c_2(x_0)| \leq \frac{C_2}{|x_0|^2}, \quad |x_0| \sim |z_0| \sim \lambda,$$

onde  $z_0 = (x_0, -\lambda/4)$ . Também verificamos que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta g}{g}(x_0) &= -\frac{1}{|z_0|(|z_0| - 1)^2 \log(|z_0| - 1)}, \\ \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t}(x_0) &= -\frac{\lambda}{4|z_0|(|z_0| - 1) \log(|z_0| - 1)}. \end{aligned}$$

Então para  $\lambda$  grande o suficiente, temos

$$c_1(x_0) + \frac{\Delta g}{g}(x_0) < 0$$

e

$$c_2(x_0) - \frac{1}{g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t}(x_0) > 0.$$

Usando o Princípio do Máximo e o Lema Hopf chegamos a uma contradição usando (4.44). Portanto, verificamos que o passo 2 fica estabelecido.

**Passo 3** Existe  $R_2 \leq R_1$ , tal que para todo  $\lambda \geq R_2$ .

$$w_\lambda(x) \geq 0$$

para  $x \in B_{R_0}^+ \setminus \{0\}$ . Exatamente igual ao passo 3 da Afirmção(13). O restante da prova é similar a prova do caso  $c \geq 0$ .

E dessa forma concluímos o Teorema (18).

## 4.2 Considerações sobre as condições da finitude da integral para o caso super-harmônico.

É importante salientar que no Teorema (18) a condição

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$$

é muito forte. Ela não pode ser removida, nem ser substituída pela condição de fronteira

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$$

como será visto nos exemplos a seguir:

**Exemplo 1** Para  $c \neq 0$ , seja,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$f(z) = \frac{e^z + i}{e^z - i}$$

e

$$u_1(z) = \log \frac{8K|f'(z)|^2}{(1 + K|f(z)|^2)^2}$$

onde  $K = \left( -\frac{1}{\sqrt{2c} + \sqrt{1 + \frac{1}{2c^2}}} \right)^2$ . E verificamos que

$$\begin{cases} \Delta u_1 + e_1^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2; \\ \frac{\partial u_1}{\partial t} = ce^{u_1/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

e

$$\left| c \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u_1/2} \right| < \infty \quad e \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{u_1} = \infty.$$

**Exemplo 2** Para  $c = 0$ , seja,  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  dada por

$$g(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1}$$

e

$$u_2(z) = \log \frac{8K|g'(z)|^2}{(1 + K|g(z)|^2)^2}$$

onde  $K \neq 1$ . E verificamos que

$$\begin{cases} \Delta u_2 + e_2^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^2; \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} = ce^{u_2/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \end{cases}$$

e

$$\left| \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u_2/2} \right| < \infty \quad e \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} e^{u_2} = \infty.$$

Nestes exemplos, temos funções que satisfazem as equações (4.3), mas não pertencem à família de soluções (4.5). Assim, percebemos que se a condição  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ , for retirada, ainda existem soluções para (4.3), no entanto, não podemos classificá-las como determina o Teorema (18).

**Observações 8** Para  $n \geq 3$ , temos o seguinte resultado

**Teorema 19** Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  seja uma solução não negativa de

$$\begin{cases} \Delta u + n(n-2)u^{(n+2)/(n-2)} = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = cu^{n/(n-2)} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2. \end{cases}$$

Então  $u \equiv 0$  ou  $u$  é da forma

$$u(s, t) = \left( \frac{\epsilon}{\epsilon^2 + |(s, t) - (s_0, t_0)|^2} \right)^{(n-2)/2},$$

com  $\epsilon > 0$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $t_0 = \frac{\epsilon c}{(n-2)}$ .

A demonstração desse resultado pode ser visto em [12].

# Capítulo 5

## Caso Sub-harmônico

Neste capítulo, inicialmente, mostraremos de forma simples que não há solução para a equação

$$\Delta u - e^u = 0 \text{ em } \mathbb{R}^2.$$

Em seguida, trataremos problema (2.17) para  $\alpha = -1$ . Neste caso, verificaremos que as condições

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty \quad \text{e} \quad \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$$

são equivalentes.

Assim, mostraremos o seguinte resultado:

**Teorema 20** *Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  uma solução para*

$$\begin{cases} \Delta u - e^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2, \end{cases} \quad (5.1)$$

*satisfazendo  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$  ou  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ , então  $c < -\sqrt{2}$  e  $u$  é da forma*

$$u(s, t) = \log \frac{8\lambda^2}{((s - s_0)^2 + (t - t_0)^2 - \lambda^2)^2} \quad (5.2)$$

*onde  $s_0 \in \mathbb{R}, t_0 = -c\lambda/\sqrt{2}, \lambda > 0$ .*

Em seguida, mostremos que uma das condições de finitude na integral e, portanto, ambas, não pode ser retirada das hipóteses.

### 5.1 A não solução da equação $\Delta u - e^u = 0$ em $\mathbb{R}^2$ .

Como uma consequência imediata do Lema 14, temos o Teorema.

**Teorema 21** *Não existe  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  para  $\Delta u - e^u = 0$ .*

**Demonstração:**

Suponhamos, por absurdo, que exista  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$  tal que  $\Delta u - e^u = 0$  e seja  $u(0) = a$ . Restrinjamos  $u$  a bola  $B_R$ . Então pelo Lema 14, segue que

$$u(0) \leq \log 8 - 2 \log R.$$

Tomando  $R$  suficientemente grande, chegamos a uma contradição.

Portanto, não existe  $u$  satisfazendo a equação desejada. ■

## 5.2 Demonstração do Teorema 20.

Nesta seção, temos dois casos a analisar relativos ao coeficiente  $c$  da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2}.$$

Se  $c \geq 0$  verificamos que a equação (5.1) não tem solução. Já quando  $c < 0$ , mostremos que as condições  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$  e  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$  são equivalentes, e mais ainda, a equação (5.1) tem soluções e estas são da forma (5.2).

### 5.2.1 Demonstração do Teorema 20 para $c \geq 0$ .

Mostraremos que nesse caso, não há solução para (5.1).

Suponhamos, por absurdo, que existe  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$  satisfazendo (5.1). Dado  $x_0 \in \mathbb{R}_+^2$ , definamos

$$v(y) = u(|x_0|y) + 2 \log |x_0| \text{ em } (B_2 \setminus \overline{B_{1/2}}) \cap \mathbb{R}_+^2$$

Verificamos que

$$\Delta v = \Delta u \cdot |x_0|^2 = e^u \cdot |x_0|^2 = e^u \cdot e^{\log |x_0|^2} = e^{u+2 \log |x_0|} = e^v$$

em  $(B_2 \setminus \overline{B_{1/2}}) \cap \mathbb{R}_+^2$  e

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \partial u \cdot |x_0| = ce^{u/2} \cdot e^{\log |x_0|} = ce^{u/2+2(\log |x_0|)/2} = ce^v$$

sobre  $B_2 \setminus \overline{B_{1/2}} \cap \partial\mathbb{R}_+^2$ .

Então pelo Lema 16, temos que  $\max_{|x|=1} v(y) \leq C_1$ , para algum  $C_1 = C$ . Isto é equivalente a

$$\max_{|x|=|x_0|} u(x) \leq -2 \log |x| + C_1$$

Consequentemente,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = -\infty.$$

Pela sub-harmonicidade de  $u$  em  $\mathbb{R}_+^2$ , tomemos  $x_1$  um ponto de máximo de  $u$  sobre  $\partial\mathbb{R}_+^2$ , então podemos escolher  $R$  suficientemente grande de maneira que

$$\max_{|x|=R} u(x) < u(x_1).$$

Como  $u$  é sub-harmônica em  $B_R^+$ , temos pelo princípio do máximo que

$$u(x_1) = \max_{B_R^+} u(x).$$

Por outro lado, temos  $\frac{\partial u(x_1)}{\partial t} \geq 0$ , já que  $c \geq 0$ , violando o Lema de Hopf.

Portanto, necessariamente, devemos ter  $c < 0$ .

### 5.2.2 Demonstração do Teorema 20 para $c < 0$ .

Para provarmos este teorema faremos quatro passos.

#### 5.2.3 $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ implica em $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ .

##### Passo 1

Primeiro, mostraremos que existe  $C_1 = C_1(c) > 0$  e  $R$  suficientemente grande tal que

$$u(x) + 2 \log |x| < C_1 \text{ para } x \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus B_R. \quad (5.3)$$

Como  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ , então dado  $\epsilon_0 > 0$  existe  $R = R(\epsilon_0) > 1$  tal que  $\int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} e^u < \epsilon_0$ . Para  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus B_{3R}$ , definamos

$$v(y) = u(|x|y) + 2 \log |x| \text{ para } y \in \Omega := \overline{B_2} \setminus \overline{B_{1/2}} \cap \mathbb{R}_+^2. \quad (5.4)$$

Observemos que  $\Delta v(y) = \Delta u(|x|y) \cdot |x|^2 = -e^{u(|x|y)} \cdot |x|^2$  para  $y \in \Omega$ . Daí

$$\Delta v(y) + e^{u(|x|y)} \cdot |x|^2 = 0,$$

ou ainda,

$$v(y) + e^{u(|x|y)} \cdot e^{\log |x|^2} = \Delta v(y) + e^{u(|x|y)+2 \log |x|} = \Delta v(y) + e^{v(y)} = 0.$$

Também verificamos que

$$\frac{\partial v(y)}{\partial t} = \frac{\partial u(|x|y)}{\partial t} \cdot |x| = ce^{u(|x|y)/2} \cdot e^{\log |x|} = ce^{u(|x|y)/2+2 \log |x|/2} = ce^{v(y)/2},$$

quando  $y \in \partial\mathbb{R}_+^2 \cap B_2 \setminus B_{1/2}$ .

Notemos que se  $y \in \Omega$ , então  $|x|y \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_R$ .

De fato, como  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{3R}$ , temos que  $|x| \geq 3R$  com  $R \gg 1$  e para  $y \in \Omega$  segue que  $1/2 \leq |y| \leq 2$ . Assim,  $||x|y| = |x| \cdot |y| \geq 3R \cdot 1/2 = 3R/2 > R$ .

Assim, temos

$$\int_{\Omega} e^{v(y)} dy = \int_{\Omega} e^{u(|x|y)+2 \log |x|} dy = \int_{\Omega} e^{u(|x_0|y)} \cdot |x_0|^2 dy$$

Usando o teorema da mudança de variáveis para

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ y &\mapsto y/|x| \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} e^{u(|x|y)} \cdot |x|^2 dy &= \int_{T(\Omega)} e^{u(x)} \cdot |x|^2 \cdot |\det(J(T))| dx \\ &= \int_{T(\Omega)} e^{u(x)} \cdot |x|^2 \cdot 1/|x|^2 dx = \int_{T(\Omega)} e^{u(x)} dx \end{aligned}$$

E como  $T(\Omega) \subset \mathbb{R}_+^2 \setminus B_R$  segue que

$$\int_{T(\Omega)} e^{u(x)} dx \leq \int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} e^{u(x)} dx.$$

e temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} e^{u(x)} dx < \epsilon_0. \quad (5.5)$$

Dessa forma, temos que  $v|_{B(5/4, 3/4)}$  satisfaz as condições do Lema 13. E assim, segue que

$$\max v(y) \leq C_{01} \text{ para } y \in B^{01} = B(5/4, 5/8) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Analogamente, verificamos que  $v|_{B(-5/4, 3/4)}$  satisfaz as condições do Lema 13 e assim, obtemos  $C_{02}$

$$\max g(y) \leq C_{02} \text{ para } y \in B^{02} = B(-5/4, 5/8) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Agora, seja  $\Omega_0 = \{y \in \mathbb{R}^2; 3/4 \leq |y| \leq 3/4\}$ . Tomemos  $x \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})$  e consideremos  $B(x, 2\epsilon_x)$  com  $\epsilon_x$  suficientemente pequeno de modo que  $B(x, 2\epsilon_x) \subset \Omega$ .

Desse modo verificamos que  $g|_{B(x, 2\epsilon_x)}$  satisfaz as condições do Lema 13, daí para cada  $x \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})$  existe  $C_x$  tal que

$$\max v(y) \leq C_x \text{ para } y \in B(x, \epsilon_x).$$

Notemos que  $\Omega_0 \subset \left( \bigcup_{x \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})} B(x, \epsilon_x) \right) \cup B^{01} \cup B^{02}$ .

Como  $\Omega_0$  é compacto, existe uma subcobertura finita de modo que

$$\Omega_0 \subset \left( \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \epsilon_i) \right) \cup B^{01} \cup B^{02},$$

com  $x_i \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})$  Considere  $C_1 = \max\{C_{x_i}, C_{01}, C_{02}\}$ , então temos que

$$\max v(y) \leq C_1 \text{ para } 3/4 \leq |y| \leq 3/2, y \in \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Em particular,  $\max_{|y|=1} v(y) \leq C_1$ . Consequentemente, temos

$$v\left(\frac{x}{|x|}\right) = u(x) + 2 \log |x| \leq C_1 \text{ para } |x| > 3R.$$

e, dessa forma, segue (5.3).

Para finalizar a prova do passo 1, usaremos um argumento de contradição. Suponhamos, por absurdo, que

$$\int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} = \infty. \quad (5.6)$$

Agora, fixemos  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{3R}$  e definamos

$$v_2(y) = u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5.$$

Verificamos que

$$v_2(y) = u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5 \leq C_1 - C_1 - 5 = -5$$

e como  $\log 2 > 0$ , temos

$$v_2(y) \leq -5 + 2 \log 2 < 0,$$

para todo  $y \in B_2 \setminus B_{1/2} \cap \mathbb{R}_+^2$ ,

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \Delta v_2(y) &= \Delta u(|x|y) |x|^2 = -e^{u(|x|y)} \cdot |x|^2 \\ &= -e^{u(|x|y) + 2 \log |x|} = -e^{u(|x|y) + 2 \log |x| + (-5 - C_1) - (-5 - C_1)} \\ &= -e^{g_1 - 2 \log |x| + C_1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta v_2 + \frac{e^{v_2 + 5 + C_1}}{v_2} v_2 = 0 \text{ em } B_2 \setminus B_{1/2} \cap \mathbb{R}_+^2 \quad (5.7)$$

Notemos ainda que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2(y)}{\partial t} &= \frac{\partial u(|x|y)}{\partial t} |x| = c e^{u/2} \cdot e^{\frac{2 \log |x|}{2}} \\ &= c e^{(v_2 + C_1 + 5)/2} = c \frac{e^{(v_2 + C_1 + 5)/2}}{v_2} v_2 \end{aligned}$$

sobre  $\partial \mathbb{R}_+^2 \cap B_2 \setminus B_{1/2}$ .

Como  $v_2$  é limitada superiormente segue que  $|e^{v_2}/v_2|$  e  $|e^{v_2/2}/v_2|$  são limitados. Então pelo Lema 2, aplicado em  $-v_2$ , temos a desigualdade

$$\max_{|y|=1} -v_2(y) \leq C \min_{|y|=1} (v_2(y)), \text{ para algum } C > 1.$$

Consequentemente,

$$- \min_{|y|=1} v_2(y) \leq C (- \max_{|y|=1} (v_2(y)))$$

e, portanto,

$$\min_{|y|=1} v_2(y) \geq C \max_{|y|=1} (v_2(y)),$$

ou seja,

$$\min_{|y|=1} (u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5) \geq C \max_{|y|=1} (u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5),$$

Tomando  $y = z/|x|$  com  $|z| = |x|$  e  $C_2 = C_1 + 5$ , obtemos

$$\min_{|z|=|x|} (u(z) + 2 \log |x| - C_2) \geq C \max_{|z|=|x|} (u(z) + 2 \log |x| - C_2).$$

**Afirmção 20** Como  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} = \infty$ , para  $0 < \epsilon < 1/10$ , fixado, obtemos uma sequência  $\{x_i\} \subset \partial\mathbb{R}_+^2$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots$  tal que  $|x_i| \rightarrow \infty$  e

$$u(x_i) + 2 \log |x_i| > -\frac{\epsilon}{2C} (\log |x_i|). \quad (5.8)$$

De fato, observemos, inicialmente que como  $\partial\mathbb{R}_+^2 = \{x = (y, t) \in \mathbb{R}^2; t = 0\}$ , assim fazendo uma simples mudança de variáveis de obtemos

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u(x)/2} dx = \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u((y,0))/2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{u((y,0))/2} dy = \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{+M} e^{u((y,0))/2} dy = \infty$$

Escrevamos

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{+M} e^{u((y,0))/2} dy &= \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{-10R} e^{u((y,0))/2} dy + \\ &+ \int_{-10R}^{10R} e^{u((y,0))/2} dy + \lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{10R}^{+M} e^{u((y,0))/2} dy \end{aligned}$$

Como  $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  segue que  $e^{u((y,0))/2}$  é  $C^1$  para todo  $y \in \mathbb{R}$ . Daí

$$\int_{-10R}^{10R} e^{u((y,0))/2} dy < K$$

para algum  $K \in \mathbb{R}$ .

Agora, suponhamos, por absurdo, que para todo  $(y, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^2$  com  $|(y, 0)| \geq 10R$  tenhamos

$$u((y, 0)) + 2 \log |(y, 0)| \leq \frac{\epsilon}{2C} (-\log |(y, 0)|),$$

ou seja,

$$u((y, 0))/2 + \log |(y, 0)| \leq \frac{\epsilon}{4C} (-\log |(y, 0)|),$$

então pela monotonicidade da função exponencial, obtemos

$$e^{u((y,0)/2) + \log |(y,0)|} \leq e^{\frac{\epsilon}{4C} (-\log |(y,0)|)},$$

ou seja,

$$e^{u((y,0)/2) \cdot |(y,0)|} \leq |(y, 0)|^{-\frac{\epsilon}{4C}},$$

ou ainda,

$$e^{u((y,0)/2)} \leq |(y, 0)|^{-\frac{\epsilon}{4C} - 1}.$$

Notemos que  $|(y, 0)| = y$ , então segue que

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow \infty} \int_{10R}^M e^{u((y,0))/2} dy &\leq \lim_{M \rightarrow \infty} \int_M^{10R} |(y, 0)|^{-\frac{\epsilon}{4C} - 1} dy = \lim_{M \rightarrow \infty} \left. \frac{y^{-\frac{\epsilon}{4C}}}{-\frac{\epsilon}{4C}} \right|_{10R}^M \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{M^{-\frac{\epsilon}{4C}}}{-\frac{\epsilon}{4C}} - \frac{10R^{-\frac{\epsilon}{4C}}}{-\frac{\epsilon}{4C}} = \frac{10R^{-\frac{\epsilon}{4C}}}{\frac{\epsilon}{4C}}. \end{aligned}$$

Analogamente, concluímos que

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \int_{-M}^{-10R} e^{u((y,0))/2} dy = \frac{(-10R)^{-\frac{\epsilon}{4C}}}{\frac{\epsilon}{4C}}$$

Desse modo, temos que

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} \leq \frac{(-10R)^{\frac{-\epsilon}{4C}}}{\frac{\epsilon}{4C}} + K + \frac{10R^{\frac{-\epsilon}{4C}}}{\frac{\epsilon}{4C}},$$

gerando uma contradição com o fato de

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u(x)/2} dx = \infty$$

Portanto, obtemos  $x_1 = (y_1, 0)$  satisfazendo (5.8).

Usando um argumento de recorrência, suponhamos, por absurdo, que para todo  $x = (y, 0) \in \partial\mathbb{R}_+^2$  com  $|(y, 0)| \geq |x_i| + 1$  tenhamos

$$u((y, 0)) + 2 \log |(y, 0)| \leq \frac{\epsilon}{C_3} (-\log |(y, 0)|),$$

chegaremos a uma contradição, implicando na existência de  $x_{i+1}$  com  $|x_{i+1}| > |x_i|$  satisfazendo (1.10). Dessa forma, obtemos a sequência desejada. Observemos, ainda, que da forma que foi construída esta sequência, temos que

$$|x_i| \rightarrow \infty$$

e a Afirmação 20 fica estabelecida.

Então fixado  $i$ , temos

$$\min_{|x|=|x_i|} (u(x) + 2 \log |x_i| - C_2) \geq C \max_{|x|=|x_i|} (u(x) + 2 \log |x_i| - C_2),$$

o que implica,

$$\min_{|x|=|x_i|} (u(x) + 2 \log |x_i| - C_2) \geq C \max_{|x|=|x_i|} (u(x) + 2 \log |x_i|) \geq -\frac{\epsilon}{2} \log |x_i| - C_2,$$

ou seja,

$$\min_{|x|=|x_i|} u(x) \geq (-2 - \frac{\epsilon}{2}) \log |x_i| - C_2.$$

Como  $|x_i| \rightarrow \infty$ , segue que para  $i_0$  suficientemente grande, temos que

$$\epsilon \log |x_i| > \frac{\epsilon}{2} \log |x_i| + C_2,$$

para todo  $i > i_0$ . Logo,

$$\min_{|x|=|x_i|} u(x) \geq (-2 - \epsilon) \log |x_i|.$$

Agora faremos a seguinte afirmação:

**Afirmação 21** Para  $x \in B_{|x_{i+1}|} \setminus B_{|x_i|} \cap \mathbb{R}_+^2$  temos

$$u(x) > v_3 := -3 \log |x| - 2 \log \log |x|. \quad (5.9)$$

Para provarmos esta afirmação, consideremos o conjunto

$$O_i = \{x \in \mathbb{R}_+^2; |x_i| < |x| < |x_{i+1}| \text{ tal que } u(x) < -3 \log |x| - \log \log |x|\}.$$

Se  $O_i = \emptyset$  nada há o que provar. Então suponhamos que  $O_i \neq \emptyset$ . Para  $y \in \partial O_i \cap \mathbb{R}_+^2$ , verificamos que

$$u(y) = -3 \log |y| - \log \log |y| > -3 \log |y| - 2 \log \log |y| = v_3(y)$$

e para  $y \in \overline{B_{|x_{i+1}|}} \setminus (B_{|x_i|} \cup O_i)$  também temos que  $u(y) > v_3(y)$ .

Agora, observemos que para  $y \in O_i$ , obtemos

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_i}(y) = -\frac{3y_i}{|y|^2} - \frac{2y_i}{|y|^2 \log |y|}$$

e

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_i^2}(y) = -\frac{3|y|^2 - 6y_i^2}{|y|^4} - \frac{2|y|^2 \log |y| - 4y_i^2 \log |y| + 2y_i^2}{(|y|^2 \log |y|)^2}.$$

Donde segue que, respectivamente,

$$\frac{\partial v_3}{\partial t}(y) = 0 \text{ sobre } \partial O_i \cap \partial \mathbb{R}_+^2,$$

e

$$\Delta v_3(y) = \frac{2}{|y|^2 (\log |y|)^2} \text{ em } O_i$$

Observemos, ainda, que

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{e^{u(x)} v_3(x)}{u(x) \Delta v_3(x)} \rightarrow 0.$$

De fato, em  $O_i$  temos que

$$u(x) < -3 \log |x| - \log \log |x| < 0,$$

daí

$$0 < \frac{e^{u(x)} v_3(x)}{u(x)} < \frac{1}{|x|^3 (\log |x|)^2} \cdot \frac{v_3(x)}{u(x)}.$$

E como  $u(x) < 0$  segue que

$$0 < (-3 \log |x| - \log \log |x|)/u(x) < 1$$

e para  $|x|$  suficientemente grande temos que

$$-3 \log |x| - 2 \log \log |x| < -3 \log |x| - \log \log |x|.$$

Daí temos

$$\frac{1}{|x|^3 (\log |x|)^2} \cdot \frac{v_3(x)}{u(x)} < \frac{1}{|x|^3 (\log |x|)^2} \frac{-3 \log |x| - \log \log |x|}{u(x)}.$$

mas

$$\frac{1}{|x|^3 (\log |x|)^2} \frac{-3 \log |x| - \log \log |x|}{u(x)} < \frac{1}{|x|^3 (\log |x|)^2}.$$

Logo,

$$0 < \frac{e^{u(x)} v_3(x)}{u(x) \Delta v_3(x)} < \frac{|x|^2 (\log |x|)^2}{2|x|^3 (\log |x|)^2} = \frac{2}{|x|} \rightarrow 0,$$

quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

Portanto, para  $i > i_0$  com  $i_0$  suficientemente grande, temos  $|x|$  também grande de modo a obtermos

$$\Delta v_3(x) - \frac{e^{u(x)} v_3(x)}{u(x)} \geq 0 \text{ para } x \in O_i.$$

Seja  $w = u - v_3$ , em  $\overline{O_i}$  então

$$\Delta w = \Delta u - \Delta v_3 = e^u - \Delta v_3 \leq \frac{e^u}{u} u - \frac{e^u}{u} v_3$$

e

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial v_3}{\partial t} = ce^{u/2} < 0$$

sobre  $\partial O_i \cap \partial \mathbb{R}_+^2$ , ou seja,

$$\begin{cases} \Delta w - \frac{e^u}{u} \leq 0 & \text{em } O_i \\ \frac{\partial w}{\partial t} < 0 & \text{sobre } \partial O_i \cap \partial \mathbb{R}_+^2 \end{cases} \quad (5.10)$$

Agora, notemos que

$$\left| \frac{e^u}{u} \right| \leq \frac{C}{|x|^3 (\log |x|)^2}.$$

Como  $u < 0$  segue que  $|u| = -u$ . Logo, para  $x \in i$  para  $i$  suficientemente grande, verificamos que

$$-u > 3 \log |x| + \log \log |x| > 3 \log |x|.$$

Donde segue que  $1/(-u) < 1/3 \log |x|$  e assim obtemos

$$\left| \frac{e^u}{u} \right| = \frac{e^u}{-u} = \frac{1}{(|x|^3 \log |x|) \cdot (-u)} < \frac{1}{(|x|^3 \log |x|) \cdot 3 \log |x|} \leq \frac{C}{|x|^3 (\log |x|)^2}.$$

Agora, sejam

$$g(x) = \log |x - 1| \quad e \quad \bar{w} = w/g.$$

Notemos que para  $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  com  $g(x) \neq 0$  verificamos

$$\Delta \left( \frac{f}{g} \right) = \frac{1}{g} \Delta f - \frac{2}{g} \nabla \left( \frac{f}{g} \right) \cdot \nabla g - \frac{f}{g^2} \Delta g.$$

Assim, temos

$$\Delta \bar{w} + \frac{2}{g} \nabla g \cdot \nabla \bar{w} - \frac{1}{g} \Delta w + \frac{w}{g^2} \Delta g = 0, \text{ em } O_i.$$

usando (5.10) segue que

$$\Delta \bar{w} + \frac{2}{g} \nabla g \cdot \nabla \bar{w} + \left( \frac{\nabla g}{g} - \frac{e^u}{u} \right) \leq 0$$

e observemos que

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} \cdot \frac{1}{g} \text{ sobre } \partial O_i \cap \partial \mathbb{R}_+^2,$$

portanto,  $\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} < 0$  sobre  $\partial O_i \cap \partial \mathbb{R}_+^2$ ,

Notemos que

$$\Delta g = -\frac{1}{|x|(|x| - 1)^2}.$$

Desse modo,

$$\frac{\Delta g}{g} = -\frac{1}{|x|(|x| - 1)^2 \log(|x| - 1)} \text{ para } x \in O_i. \quad (5.11)$$

Observemos, ainda, que

$$\left| \frac{e^u/u}{\Delta g/g} \right| \leq \frac{C/|x|^3(\log|x|)^2}{1/|x|(|x|-1)^2 \log(|x|-1)} = \frac{(C|x|-1)^2 \log(|x|-1)}{|x|^2(\log|x|)^2}$$

que tende a zero quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Assim, para  $i$  grande, temos

$$\frac{\Delta g}{g} - \frac{e^u}{u} < 0 \text{ em } O_i.$$

Então, pelo princípio do máximo, segue que  $\bar{w} > 0$  em  $O_i$  e, conseqüentemente,  $w > 0$ . Portanto, temos que  $u > v_3$ .

**Observações 9** Como  $|x_i| \rightarrow \infty$  e como podemos repetir o argumento para cada  $i \geq i_0$  com  $i_0$  suficientemente grande temos que  $u(x) > v_3(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{i_0}$ .

**Proposição 6** Para cada  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$ , devemos provar que existe  $\lambda_x > 0$  tal que para  $0 \leq \lambda \leq \lambda_x$

$$u_{x,\lambda}(x) < u(y) \text{ para } y \in \mathbb{R}_+^2, |y-x| > \lambda,$$

onde  $u_{x,\lambda}$  é a Transformada de Kelvin de  $u$ .

**Demonstração:**

Sem perda de generalidade assumamos  $x = 0$  e escrevamos  $u_{0,\lambda}$  como  $u_\lambda$ .

Inicialmente, consideremos  $w(y) = u(y) + 2 \log|y|$  em  $\mathbb{R}_+^2$  em suas coordenadas polares, ou seja,  $w(y) = w(\theta, R) = u(\theta, R) + 2 \log R$ , com  $(0, 2\pi]$  e  $R \in \mathbb{R}_+$ .

**Afirmção 22** Existe  $r_0 > 0$  suficientemente pequeno tal que

$$u(y) - u_{0,\lambda} > 0,$$

para  $\lambda < |x| < r_0$  e  $0 < \lambda < r_0$ .

Mostraremos inicialmente que

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial u(\theta, R) + 2 \log R}{\partial r} = \frac{\partial u(\theta, R)}{\partial r} + \frac{2}{R}$$

De fato, como  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2)$ , temos que  $\frac{\partial u}{\partial r}$  é localmente limitada, então para tome  $\bar{r}_0$  e

$$K_0 = \max_{B_{\bar{r}_0}} \frac{\partial u}{\partial r}.$$

Como  $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r} = \infty$ , então existe  $r_0$  tal que

$$\frac{1}{R} > K_0$$

para  $0 < R < r_0$  e, portanto,  $\frac{\partial w}{\partial r} > 0$ , para  $\theta \in (0, 2\pi]$  e  $0 < R < r_0$ .

Isto significa que fixada uma direção, temos que  $w$  é uma função real monótona crescente na variável  $r$ . Dessa forma, para  $0 < R_1 < R_2 \leq r_0$  obtemos  $w(R_1) < w(R_2)$ .

Observemos que  $y$  e  $y_\lambda = \lambda^2 y / |y|^2$  têm a mesma direção (são colineares) e tomando  $0 < \lambda < |y| \leq r_0$  segue que  $|y| > |y_\lambda|$ , daí  $w(y) > w(y_\lambda)$  para  $y \in B_{r_0} \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}$  e  $0 < \lambda \leq r_0$ , ou seja,

$$u(y) + 2 \log |y| > u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) + 2 \log \left|\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right| \text{ para } y \in B_{r_0} \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Observemos que

$$u(y) + 2 \log |y| > u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) + 2 \log \left|\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right|.$$

Temos ainda

$$\begin{aligned} u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) + 2 \log \left|\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right| &= u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) + 2 \log \left|\frac{\lambda^2}{|y|^2}\right| \\ &= u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2} |y|^2\right) + 4 \log \lambda - 2 \log |y|. \end{aligned}$$

Daí

$$u(y) + 2 \log |y| - u\left(\frac{\lambda^2 y}{|y|^2}\right) - 4 \log \lambda + 2 \log |y| > 0,$$

e portanto,

$$u(y) - u_\lambda(y) > 0 \text{ para } y \in B_{r_0} \setminus \overline{B_\lambda} \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

E segue a Afirmação 22.

Agora, tomemos  $y \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{r_0}$ .

**Afirmação 23** *Existe  $r_1 < r_0$  suficientemente pequeno tal que para  $0 < \lambda < r_1$  e  $|y| > r_0$  verificamos que  $u(y) - u_{0,\lambda} > 0$ .*

Suponhamos, por absurdo, que para todo  $0 < r < r_0$ , exista  $0 < \lambda_r < r_1$  tenhamos  $u(y) - u_{0,\lambda_r} < 0$  para  $|y| > r_0$ . Dessa maneira,

$$u(y) - \left( u\left(\frac{\lambda_r^2 y}{|\lambda_r^2|}\right) - 4 \log |y| + 4 \log \lambda_r \right) \leq 0.$$

Pela Observação 9, segue que temos que  $v_3(y) \leq u(y)$ , como  $|y|$  grande. Logo

$$v_3(y) - u\left(\frac{\lambda_r^2 y}{|\lambda_r^2|}\right) + 4 \log |y| - 4 \log \lambda_r \leq 0,$$

ou seja,

$$-3 \log |y| - 2 \log \log |y| - u\left(\frac{\lambda_r^2 y}{|\lambda_r^2|}\right) + 4 \log |y| - 4 \log \lambda_r \leq 0,$$

o que é equivalente a

$$\log |y| - \log(\log |y|)^2 \leq u\left(\frac{\lambda_r^2 y}{|\lambda_r^2|}\right) + 4 \log \lambda_r,$$

Tomando  $K_r = \max_{\overline{B_{\lambda_r}}} u(x) + 4 \log \lambda_r$ , temos

$$\log \frac{|y|}{(\log |y|)^2} \leq K_r \text{ para } |y| > r_0 \tag{5.12}$$

E atentemos para o fato de

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r / (\log r)^2 = \lim_{r \rightarrow \infty} r / 2 \log |r| = \infty.$$

Dessa maneira, sobre  $\partial\mathbb{R}_+^2$ , fazendo  $y \rightarrow \infty$ , temos que

$$\log \frac{|y|}{(\log |y|)^2} \rightarrow \infty,$$

contradizendo (5.12). Dessa forma, concluimos a Afirmação 23.

A Proposição 6, segue das Afirmações 22 e 23. ■

Agora, tomemos  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$  e seja

$$\bar{\lambda}_x = \sup\{\lambda; u(y) > u_{x,\lambda}(y) \text{ com } y \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus \overline{B(x, \mu)} \text{ e } \mu \leq \lambda\}.$$

Então  $\bar{\lambda}_x = \infty$ .

Este fato é provado de maneira totalmente análoga ao passo 3 do Teorema 16.

Portanto, pelo Lema 8 verificamos que  $u$  é uma função que depende apenas de uma variável, o que viola a condição

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty.$$

Esta contradição, vem do fato de supormos  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} = \infty$ . E assim, também devemos ter

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty.$$

### 5.2.4 $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ implica $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ .

#### Passo 2

Inicialmente, mostraremos que existe  $C_1 = C_1(c) > 0$  e  $R$  suficientemente grande tal que

$$u(x) + 2 \log |x| < C_1 \text{ para } x \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus B_R. \quad (5.13)$$

Como  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ , então dado  $\epsilon_0 > 0$  existe  $R = R(\epsilon_0) > 1$  tal que  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} e^{u/2} < \epsilon_0$ . Para  $x \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus B_{3R}$ , definamos

$$v(y) = u(|x|y) + 2 \log |x| \text{ para } y \in \Omega := \overline{B_2} \setminus B_{1/2} \cap \mathbb{R}_+^2. \quad (5.14)$$

Observemos que  $\Delta v(y) = \Delta u(|x|y) \cdot |x|^2 = -e^{u(|x|y)} \cdot |x|^2$  para  $y \in \Omega$ . Daí

$$\Delta v(y) + e^{u(|x|y)} \cdot |x|^2 = 0,$$

o que equivale a

$$\Delta v(y) + e^{u(|x|y)} \cdot e^{\log |x|^2} = \Delta v(y) + e^{u(|x|y) + 2 \log |x|} = 0$$

e assim,

$$\Delta v(y) + e^{v(y)} = 0.$$

Também verificamos que

$$\frac{\partial v(y)}{\partial t} = \frac{\partial u(|x|y)}{\partial t} \cdot |x| = ce^{u(|x|y)/2} \cdot e^{\log |x|} = ce^{u(|x|y)/2 + 2 \log |x|/2}$$

e assim

$$\frac{\partial v(y)}{\partial t} = ce^{v(y)/2},$$

quando  $y \in \partial\Omega' := \partial\mathbb{R}_+^2 \cap B_2 \setminus B_{1/2}$ .

Notemos que se  $y \in \overline{\Omega}$ , então  $|x|y \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_R$ .

De fato, como  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{3R}$ , temos que  $|x| \geq 3R$  com  $R \gg 1$  e para  $y \in \Omega$  segue que  $1/2 \leq |y| \leq 2$ . Assim,  $||x|y| = |x| \cdot |y| \geq 3R \cdot 1/2 = 3R/2 > R$ .

Assim, temos

$$\int_{\partial'\Omega} e^{v(y)/2} dy = \int_{\partial'\Omega} e^{(u(|x|y))/2 + \log|x|} dy = \int_{\partial'\Omega} e^{u(|x_0|y)/2} \cdot |x_0| dy$$

Usando o teorema da mudança de variáveis para

$$\begin{aligned} T: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto y/|x| \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} \int_{\partial'\Omega} e^{u(|x|y)/2} \cdot |x| dy &= \int_{T(\partial'\Omega)} e^{u(x)/2} \cdot |x| \cdot |\det(J(T))| dx \\ &= \int_{T(\partial'\Omega)} e^{u(x)/2} \cdot |x| \cdot 1/|x| dx = \int_{T(\partial'\Omega)} e^{u(x)/2} dx \end{aligned}$$

E como  $T(\partial'\Omega) \subset \partial'(\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R)$  segue que

$$\int_{T(\partial'\Omega)} e^{u(x)/2} dx \leq \int_{\partial'(\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R)} e^{u(x)/2} dx.$$

e temos

$$\int_{\partial'(\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R)} e^{u(x)/2} dx < \epsilon_0. \quad (5.15)$$

Dessa forma, temos que  $v|_{B(5/4, 3/4)}$  satisfaz as condições do Lema 15. E assim, segue que

$$\max v(y) \leq C_{01} \text{ para } y \in B^{01} = B(5/4, 5/8) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Analogamente, verificamos que  $v|_{B(-5/4, 3/4)}$  satisfaz as condições do Lema 15 e assim, obtemos  $C_{02}$

$$\max g(y) \leq C_{02} \text{ para } y \in B^{02} = B(-5/4, 5/8) \cap \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Agora, seja  $\Omega_0 = \{y \in \mathbb{R}^2; 3/4 \leq |y| \leq 3/4\}$ . Tomemos  $x \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})$  e consideremos  $B(x, 2\epsilon_x)$  com  $\epsilon_x$  suficientemente pequeno de modo que  $B(x, 2\epsilon_x) \subset \Omega$ .

Desse modo verificamos que  $g|_{B(x, 2\epsilon_x)}$  satisfaz as condições do Lema 15, daí para cada  $x \in \Omega_0$  existe  $C_x$  tal que

$$\max v(y) \leq C_x \text{ para } y \in B(x, \epsilon_x).$$

Notemos que  $\Omega_0 \subset \left( \bigcup_{x \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})} B(x, \epsilon_x) \right) \cup B^{01} \cup B^{02}$ .

Como  $\Omega_0$  é compacto, existe uma subcobertura finita de modo que

$$\Omega_0 \subset \left( \bigcup_{i=1}^k B(x_i, \epsilon_i) \right) \cup B^{01} \cup B^{02},$$

com  $x_i \in \Omega_0 \setminus (B^{01} \cup B^{02})$  Considere  $C_1 = \max\{C_{x_i}, C_{01}, C_{02}\}$ , então temos que

$$\max v(y) \leq C_1 \text{ para } 3/4 \leq |y| \leq 3/2, y \in \overline{\mathbb{R}_+^2}.$$

Em particular,  $\max_{|y|=1} v(y) \leq C_1$ . Consequentemente, temos

$$v\left(\frac{x}{|x|}\right) = u(x) + 2 \log |x| \leq C_1 \text{ para } |x| > 3R.$$

e, dessa forma, segue (5.13).

Agora, suponhamos, por absurdo, que

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u = \infty. \quad (5.16)$$

Fixado  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{3R}$ , definamos

$$v_2(y) = u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5.$$

Verificamos que

$$v_2(y) = u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5 \leq C_1 - C_1 - 5 = -C_1,$$

e como  $\log 2 > 0$ , segue que

$$v_2(y) \leq -5 + 2 \log 2 < 0$$

para todo  $y \in B_2 \setminus B_{1/2} \cap \mathbb{R}_+^2$ .

Observemos agora que

$$\begin{aligned} \Delta v_2(y) &= \Delta u(|x|y) |x|^2 = -e^{u(|x|y)} \cdot |x|^2 \\ &= -e^{u(|x|y) + 2 \log |x|} = -e^{u(|x|y) + 2 \log |x| + (-5 - C_1) - (-5 - C_1)} \\ &= -e^{g_1 - 2 \log |x| + C_1}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta v_2 + \frac{e^{v_2 + 5 + C_1}}{v_2} v_2 = 0 \text{ em } B_2 \setminus B_{1/2} \cap \mathbb{R}_+^2 \quad (5.17)$$

e mais

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_2(y)}{\partial t} &= \frac{\partial u(|x|y)}{\partial t} |x| = c e^{u/2} \cdot e^{\frac{2 \log |x|}{2}} \\ &= c e^{v_2 + C_1 + 5} / 2 = c \frac{e^{(v_2 + C_1 + 5)/2}}{v_2} v_2 \text{ sobre } \partial \mathbb{R}_+^2 \cap B_2 \setminus B_{1/2}. \end{aligned}$$

Como  $v_2$  é limitada superiormente segue que  $|e^{v_2}/v_2|$  e  $|e^{v_2/2}/v_2|$  são limitados. Então pelo Lema 2, aplicado em  $-v_2$ , temos a desigualdade

$$\max_{|y|=1} -v_2(y) \leq C \min_{|y|=1} (v_2(y)), \text{ para algum } C > 1.$$

Consequentemente,

$$- \min_{|y|=1} v_2(y) \leq C (- \max_{|y|=1} (v_2(y)))$$

e, portanto,

$$\min_{|y|=1} v_2(y) \geq C \max_{|y|=1} (v_2(y)),$$

ou seja,

$$\min_{|y|=1} (u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5) \geq C \max_{|y|=1} (u(|x|y) + 2 \log |x| - C_1 - 5),$$

Tomando  $y = z/|x|$  com  $|z| = |x|$  e  $C_2 = C_1 + 5$ , obtemos

$$\min_{|z|=|x|} (u(z) + 2 \log |x| - C_2) \geq C \max_{|z|=|x|} (u(z) + 2 \log |x| - C_2).$$

**Afirmção 24** Se  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u = \infty$ , para  $0 < \epsilon < 1/10$ , fixado, obtemos uma sequência  $\{x_i\} \subset \mathbb{R}_+^2$ , com  $i = 1, 2, 3, \dots$  tal que  $|x_i| \rightarrow \infty$  e

$$u(x_i) > (-2 - \epsilon) \log |x_i| \text{ para todo } i > i_0. \quad (5.18)$$

com  $i_0$  suficientemente grande.

De fato, suponhamos por absurdo, que, para todo  $x \in \mathbb{R}_+^2$ , tenhamos

$$u(x) \leq (-2 - \epsilon) \log |x|.$$

Assim

$$e^{u(x)} \leq e^{(-2-\epsilon) \log |x|} = e^{\log |x|^{-2-\epsilon}} = |x|^{-(2+\epsilon)}.$$

Então, fixado  $R$ , temos que como  $u \in C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$

$$\int_{B_R^+} e^u < K$$

para algum  $K > 0$ . Agora, tomando  $|x| > R$  temos,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} e^u < \int_{\mathbb{R}_+^2 \setminus B_R} |x|^{-(2+\epsilon)} < \infty.$$

Logo,  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u$  seria finita, contradizendo,  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{u(x)} = \infty$ . Dessa forma, existe  $x_1 \in \mathbb{R}_+^2$  tal que

$$u(x_1) > (-2 - \epsilon) \log |x_1|.$$

Agora, suponhamos que para todo  $x \in \mathbb{R}_+^2 \setminus B_{|x_1|+1}$ , verifiquemos

$$u(x) \leq (-2 - \epsilon) \log |x|.$$

Utilizando o mesmo raciocínio, chegaremos a uma contradição. Dessa forma, existe um  $x_2$  que satisfaz

$$u(x_2) > -(2 + \epsilon) \log |x_2|$$

Por recorrência, suponhamos, por absurdo, que para todo  $x \in \mathbb{R}_+^2$  com  $|x| \geq |x_i| + 1$  tenhamos

$$u(x) \leq (-2 - \epsilon) \log |x|,$$

chegaremos a uma contradição, implicando na existência de  $x_{i+1}$  com  $|x_{i+1}| > |x_i|$  satisfazendo (5.18).

Dessa forma, obtemos a sequência desejada. Observemos, ainda, que da forma que foi construída esta sequência, verificamos que  $|x_i| \rightarrow \infty$  e, portanto, a Afirmção 24 segue.

O restante do argumento é similar ao passo 1.

### 5.2.5 O comportamento assintótico da solução de (5.1) no infinito.

**Passo 3**

**Proposição 7** *Seja  $u$  como no Teorema 20. Assumindo que  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$  ou  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$  verificamos que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\log|x|} = -4.$$

**Demonstração:** Definimos

$$\begin{aligned} v_4(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\log|x-y| + \log|\bar{x}-y| - 2\log|y|) e^{u(y)} dy \\ &+ \frac{c}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} (\log|x-y| + \log|\bar{x}-y| - 2\log|y|) e^{u(y)} dy. \end{aligned}$$

Verificamos que

$$\begin{cases} \Delta v_4 = e^u & \text{em } \mathbb{R}_2^+ \\ \frac{\partial v_4}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2. \end{cases}$$

Como  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u$  e  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2}$  são finitos, temos que  $u$  é limitada superiormente, obtemos

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{v_4}{\log|x|} = d = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^u dy + \frac{c}{\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u(y)/2} dy.$$

Consideremos  $v_5 = u - v_4$ , portanto,

$$\begin{cases} \Delta v_5 = 0 & \text{em } \mathbb{R}_2^+ \\ \frac{\partial v_5}{\partial t} = 0 & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2. \end{cases}$$

Observemos que

$$v_5 \leq C(1 + \log(|x| + 1)),$$

para algum  $C > 0$ . Portanto,  $v_5$  é constante. Consequentemente,  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{u(x)}{\log|x|} = d$ . Para provar que  $d = -4$ , faz-se os mesmos argumentos que usamos na Proposição 3. ■

### 5.2.6 A simetria em relação a uma esfera.

**Passo 4**

**Proposição 8** *Para cada  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$  existe  $\bar{\lambda}_x$  tal que  $u \equiv u_{x,\lambda_x}$  em  $\overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus B(x, \bar{\lambda}_x)$ .*

Antes de provarmos a Proposição 8, estabeleceremos o seguinte resultado:

**Lema 19** *Temos que*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (u(x) + 4 \log|x|),$$

*existe e é finito e denotemos por*

$$A := \lim_{|x| \rightarrow \infty} (u(x) + 4 \log|x|).$$

*Mais ainda,*

$$|u(x) + 4 \log|x| - A| \leq \frac{C \log|x|}{|x|}, \text{ para } x \in \mathbb{R}_+^2, |x| \geq 2. \tag{5.19}$$

**Demonstração:**

Seja  $v_4$  é definida na prova da Proposição 7. Observemos que

$$v_4(x) + 4 \log |x| \rightarrow -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} \log |y| e^{u(y)} dy - \frac{c}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \log |y| e^{u(y)} dy. \quad (5.20)$$

De fato, dado  $x$ , com  $|x| > 2$  temos

$$\begin{aligned} & \frac{v_4 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} \log |y| e^{u(y)} dy + \frac{c}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \log |y| e^{u(y)} dy}{\log |x|} \\ &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} (\log |x - y| + \log |\bar{x} - y|) e^{u(y)} dy}{\log |x|} + \frac{\frac{c}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} (\log |x - y| + \log |\bar{x} - y|) e^{u(y)} dy}{\log |x|}. \end{aligned}$$

Fazendo  $|x| \rightarrow \infty$ , temos

$$\begin{aligned} & \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left( \frac{v_4 + \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} \log |y| e^{u(y)} dy}{\log |x|} + \frac{\frac{c}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} \log |y| e^{u(y)} dy}{\log |x|} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}_+^2} e^u dy + \frac{c}{\pi} \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u(y)/2} dy \right) = \frac{1}{2} \cdot (-4) = -2, \end{aligned}$$

o que é equivalente a

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} (v_4(x) + 4 \log |x|) = D$$

com  $D$  finito. Sabemos, ainda, que  $u = v_4 + C$ .

Então concluímos que  $A = D - C$  é finito.

E verificamos que (5.19), fazendo estimativas sobre (5.20). ■

**Demonstração da Proposição 8.**

Sem perda de generalidade, assumamos que  $x = 0$  e considere  $w_{0,\lambda} = u - u_{0,\lambda}$ . Pela Afirmação 22 sabemos que existe  $r_0 > 0$  tal que

$$u(x) - u_{0,\lambda}(x) = u(x) + 2 \log |x| - \left( u \left( \frac{\lambda^2 x}{|x|} \right) - 2 \log \left| \frac{\lambda^2 x}{|x|} \right| \right) > 0$$

para  $0 < \lambda < |x| \leq r_0$ . Para  $|x| \geq r_0$ , pela Afirmação 23 sabemos que existe  $r_1 \in (0, r_0)$  tal que

$$u(x) - u_{0,\lambda}(x) > 0.$$

e  $0 < \lambda \leq r_1$ .

Agora suponhamos, por absurdo, que para cada  $r \in (0, r_0)$ , exista  $0 < \lambda_r \leq r$ , de maneira que

$$u(x) - u_{0,\lambda_r}(x) = u(x) + 4 \log |x| - u \left( \frac{\lambda_r^2 x}{|x|} \right) - 4 \log \lambda_r \leq 0,$$

ou seja,

$$u(x) + 4 \log |x| \leq u \left( \frac{\lambda_r^2 x}{|x|} \right) + 4 \log \lambda_r,$$

o que contradiz o Lema 19.

Agora podemos começar a mover as esferas a partir de  $r_1$ .

Seja

$$\bar{\lambda} = \sup\{\lambda > 0; w_\nu > 0 \text{ em } \Sigma_\nu \text{ para } 0 < \nu < \lambda\},$$

onde  $\Sigma_\nu = \mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{B_\nu}$ . Segue do Lema 19 existe  $\lambda_1 > 0$  tal que  $\bar{\lambda} \leq \lambda_1$ . Verificamos que  $w_\lambda$  satisfaz:

$$\begin{cases} \Delta w_\lambda + \xi_1 w_\lambda = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ \frac{w_\lambda}{\partial t} = \xi_2 w_\lambda & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \setminus \overline{B_\lambda} \end{cases}$$

onde

$$\xi_1 = \frac{e^u - e^{u_\lambda}}{u - u_\lambda} \quad \text{e} \quad \xi_2 = c \frac{e^{u/2} - e^{u_\lambda}}{u - u_\lambda}.$$

Seja

$$g(x) = \log(|x| - 1) \text{ para } |x| > 1$$

e

$$\bar{w} = \frac{w_\lambda}{g} \text{ para } \lambda \in (\bar{\lambda}/2, 2\bar{\lambda}).$$

Então verificamos que

$$\begin{cases} \Delta \bar{w}_\lambda + 2 \frac{\nabla g}{g} \cdot \nabla \bar{w}_\lambda + \left( \frac{\Delta g}{g} + \xi_1 \right) \bar{w}_\lambda = 0 & \text{em } \Sigma_\lambda \\ \frac{\bar{w}_\lambda}{\partial t} = \xi_2 \bar{w}_\lambda & \text{sobre } \partial\Sigma_\lambda \cap \partial\mathbb{R}_+^2. \end{cases}$$

Como  $u$  decai como  $-4 \log|x|$  no infinito e  $w_\lambda \rightarrow 0$  para  $|x| \rightarrow \infty$ , podemos achar  $R > 0$  tal que

$$\frac{\Delta g}{g} + \xi_1 \text{ em } \Sigma_\lambda \setminus \overline{B_R} \text{ e } \lambda \in (\bar{\lambda}/2, 2\bar{\lambda}).$$

Consequentemente, se  $w_\lambda(x) < 0$  para algum  $x_0$  para  $\lambda \in (\bar{\lambda}, 2\bar{\lambda})$ , o ponto de mínimo sobre  $B_R$ . Então pela definição de  $\bar{\lambda}$  existe uma seqüência  $\lambda_i \rightarrow \bar{\lambda}$  e  $y_i \in \Sigma_{\lambda_i}$ , tal que

$$w_{\lambda_i}(y_i) = \min_{\Sigma_{\lambda_i}} w_{\lambda_i}(y_i) < 0, \text{ com } y_i \rightarrow y_0.$$

Então temos  $w_{\bar{\lambda}}(y_0) = 0$ . Se  $y_0 \in \Sigma_{\bar{\lambda}}$ , terminamos o passo 4 pelo Princípio do Máximo Forte. De fato, se  $y_0 \in \partial B_{\bar{\lambda}} \setminus \partial\mathbb{R}_+^2$ , então usando o Teorema do Valor Intermediário obtemos  $\frac{\partial w_{\bar{\lambda}}}{\partial \nu}(y_0) = 0$ . O Lema de Hopf implica que

$$w_{\bar{\lambda}} \equiv 0 \text{ em } \Sigma_{\bar{\lambda}}. \tag{5.21}$$

Se  $y_0 \in \partial\mathbb{R}_+^2 \setminus B_{\bar{\lambda}}$  temos  $\frac{\partial w_{\lambda_i}}{\partial \nu}(y_0) = 0$ , então novamente pelo Lema de Hopf temos (5.21). Se  $y_0 = (-\bar{\lambda}, 0)$  ou  $y_0 = (\bar{\lambda}, 0)$ . Então,  $\frac{\partial w_{\lambda_i}}{\partial s}(y_0) = 0$ , pelo Lema 3 segue (5.21). E estabelecemos o passo 4.

### 5.2.7 Prova do Teorema 20 para $c < 0$ .

#### Passo 5

Pelo Lema 9, obtemos

$$u(s, 0) = \log \left( \frac{a}{(s - s_0)^2 + d} \right)^2$$

Então, assumindo sem perda de generalidade que  $s_0 = 0$ , verificamos que

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} u(s, 0) + 2 \log(|s|^2 + d) = 2 \log a,$$

ou ainda,

$$\lim_{|s| \rightarrow \infty} u(s, 0) + 2 \log(|s|^2 + d) = 2 \log a \quad (5.22)$$

Segue que

$$u(x) \equiv u\left(b + \frac{\lambda_b^2(x-b)}{|x-b|^2}\right) - 4 \log \left| \frac{x-b}{\lambda_b} \right| \text{ para } x \in \overline{\mathbb{R}_+^2} \setminus B(b, \lambda_b)$$

Por (5.22), segue que

$$2 \log a = u((b, 0)) + 4 \log \lambda_b = 2 \log \frac{a}{b^2 + d} + 4 \log \lambda_b,$$

ou seja,  $\lambda_b = \sqrt{b^2 + d}$ . Então para todo o semicírculo superior  $\partial'' B^+(b, \lambda_b)$  passa pelo ponto  $(0, \sqrt{d})$ . Seja  $x_0 = (0, -\sqrt{d}) \in \mathbb{R}^2$  e

$$\phi(y) = u\left(x_0 + \frac{2d(y-x_0)}{|y-x_0|^2}\right) - 4 \log \frac{|y-x_0|}{\sqrt{2d}}.$$

Verificamos que

$$y = x_0 + \frac{2d(x-x_0)}{|x-x_0|^2}$$

pertence ao semi-plano superior para  $|y| < \sqrt{d}$  e por um cálculo direto temos que  $\phi$  satisfaz

$$\begin{cases} \Delta \phi(y) = e^{\phi(y)} & \text{para } |y| < \sqrt{d}; \\ \phi(y) = 2 \log \frac{a}{2d} & \text{para } |y| = \sqrt{d}; \\ \frac{\partial \phi(y)}{\partial \nu} = \frac{ca + 4\sqrt{d}}{-2d} & \text{para } |y| = \sqrt{d}. \end{cases} \quad (5.23)$$

Das duas primeiras equações de (5.23), aplicando o Teorema 15, concluímos que  $\phi$  é radialmente simétrica em relação ao centro de  $B$ . Assim, pela unicidade de soluções de Equações Diferenciais Ordinárias segue

$$\phi(y) = \log \frac{8\lambda^2}{(\lambda^2 - |y|^2)^2}$$

com  $\lambda^2$  satisfazendo

$$\log \frac{8A}{(A-d)^2} = 2 \log \frac{a}{2d}. \quad (5.24)$$

Observemos ainda que

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} > 0 \text{ sobre } \partial B_{\sqrt{d}}$$

onde  $\nu$  é o vetor normal exterior. Então da terceira equação de (5.23) e de (5.24) chegamos que  $c < -\sqrt{2}$ . Observemos, ainda,

$$|x - x_0| = \left| \frac{x - x_0}{|x - x_0|^2} + x_0 - x_0 \right| = |y - x_0|.$$

Verificamos, ainda, que

$$u(y) = \phi\left(\frac{y-x_0}{|y-x_0|^2}\right) + 4 \log |y-x_0|.$$

E o resultado segue.

### 5.3 Considerações sobre as condições da finitude da integral para o caso sub-harmônico.

Na secção anterior, já verificamos que as condições  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$  e  $\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$  são equivalentes.

Agora, podemos verificar que não é possível obter o mesmo resultado retirando a condição  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ . De fato,

$$u(s, t) = (-2) \log(1 + t)$$

satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u + e^u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2; \\ \frac{\partial u}{\partial t} = -2e^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2 \\ \int_{\mathbb{R}_+^2} e^u = \infty & \text{e } \int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} = \infty \end{array} \right.$$

e esta função não pertence à família do Teorema 20.

# Capítulo 6

## Caso Harmônico

Neste capítulo classificaremos as soluções do problema (2.17) para  $\alpha = 0$ . No caso harmônico, também podemos verificar que condição

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$$

implica em

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$$

e que, necessariamente, devemos ter  $c < 0$ .

Assim, mostraremos o seguinte resultado

**Teorema 22** *Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  satisfazendo*

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2, \\ \frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} & \text{sobre } \partial\mathbb{R}_+^2, \end{cases} \quad (6.1)$$

com

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty.$$

Então  $c < 0$  e

$$u(s, t) = 2 \log \frac{2t_1}{(s - s_1)^2 + (t - t_1)^2} + 2 \log \frac{4}{|c|} \quad (6.2)$$

onde  $s_1$  é um número real e  $t_1$  é algum número positivo.

E observaremos que a condição  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$  não pode ser retirada das hipóteses.

### 6.1 Demonstração do Teorema 22.

Pelo mesmo argumento usado no 1º caso do Teorema 18, concluímos que quando temos

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$$

obtemos

$$\int_{\partial\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty.$$

Aqui também teremos dois casos a analisar. No entanto, a análise se concentra no coeficiente  $c$  da equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = ce^{u/2} \text{ sobre } \partial\mathbb{R}_+^2.$$

### 6.1.1 Demonstração do Teorema 22 para $c \geq 0$ .

Pelo passo 4 do Teorema 20 segue que para todo  $x \in \partial\mathbb{R}_+^2$ , existe  $\lambda_x > 0$  tal que  $u(y) \equiv u_{x,\lambda_x}(y)$  para  $|y - x| \geq \lambda_x$ . Então aplicando o Lema 9 segue

$$u(s, 0) = \log \left( \frac{a}{(s - s_0)^2 + d} \right)^2 \quad (6.3)$$

para alguns  $a, d > 0$  e  $s_0 \in \mathbb{R}$ .

Agora excluiríamos a possibilidade de  $c \geq 0$ .

De fato, como no Teorema 18, definamos

$$g(x) = u(x|x_0|) + 2 \log |x_0|$$

para  $|x_0|$  grande. E como em (4.10) no passo 1 do Teorema 18, verificamos que existe  $C > 0$  tal que  $g(x) < C$  quando  $|x| \rightarrow \infty$ . Então escolhendo  $R$  suficientemente grande segue que

$$u(y) = \log \left( \frac{a}{(s - s_0)^2 + d} \right)^2 < \log \left( \frac{a}{d} \right)^2 \text{ para } y \in \partial B_R \cap \mathbb{R}_+^2.$$

Então pela harmonicidade de  $u$ , aplicando o Princípio do Máximo, temos que

$$u < \log \left( \frac{a}{d} \right)^2 \text{ em } B_R^+.$$

Assim para  $(s_0, 0) \in \partial B_R^+$ , pelo Lema de Hopf, devemos ter a derivada exterior

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s_0, 0) < 0. \quad (6.4)$$

Mas para  $(s_0, 0) \in \partial' B_R$ , temos  $u(s_0, 0) = \log \left( \frac{a}{d} \right)^2$  e  $\frac{\partial u}{\partial t}(s_0, 0) = ce^{u(s_0, 0)/2}$ , implicando que

$$\frac{\partial u}{\partial t}(s_0, 0) = ce^{u(s_0, 0)/2} = c \cdot (a/d) \geq 0$$

quando  $c \geq 0$ . Contrariando (6.4). Portanto, devemos ter  $c < 0$ .

### 6.1.2 Demonstração do Teorema 22 para $c < 0$ .

Neste caso, utilizaremos argumentos de análise complexa para obter a família de soluções. E para isso identificamos o plano complexo com  $\mathbb{R}^2$ . Dessa forma, para  $z = x + iy$  consideremos a identificação  $z = (x, y)$ .

Seja  $u$  solução de (22) e  $v$  um conjugado de  $u$  satisfazendo as condições de Cauchy-Riemann, ou seja,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial t} \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x_1}.$$

Definamos uma função analítica por

$$f(z) = \frac{|c|}{4} \int_0^z e^{(u+iv)/2} dz. \quad (6.5)$$

E obtemos o seguinte resultado

**Lema 20** *A função  $f(z)$  satisfaz*

1.  $|f'(z)| = \frac{|c|}{4} e^{(u(z)/2)} \neq 0$  para todo  $z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}$ ;
2.  $f(z)$  faz a correspondência entre  $\partial\mathbb{R}_+^2$  e um círculo unitário e temos também que a curvatura da curva plana  $\{f(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ , com  $x$  como parâmetro, é constante; e
3.  $\int_{\mathbb{R}_+^2} |f'(z)|^2 = \int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$ .

**Demonstração:**

1. Inicialmente, observemos que

$$f'(z) = \left( \frac{|c|}{4} \int_0^z e^{(u+iv)/2} \right)' = \frac{|c|}{4} (e^{(u(z)+iv(z))/2})' = \frac{|c|}{4} e^{u(z)/2} (\cos(v(z)/2) + i \sin(v(z)/2)),$$

e dessa maneira,

$$|f'(z)| = \frac{|c|}{4} e^{u(z)/2}.$$

2. Como  $|f'(z)| \neq 0$  para todo  $z$ , segue que  $f'(z) \neq 0$ . E como  $u \in C^2$ , devemos ter  $f'(z)$  com sinal definido. Assim, localmente  $u$  é bijetiva. Dessa forma, para  $z$  no círculo unitário, temos uma correspondência entre o círculo a reta determinado por  $f$ .

Agora, vamos calcular a curvatura da curva plana  $\{f(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ , com  $x$  como parâmetro. A equação da curvatura com  $z = x = (x, 0)$

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left( \frac{\overline{f'(z)} f''(z)}{|f'(z)|^3} \right) &= \operatorname{Im} \left( \frac{|c|/4 e^{(u(z)-iv(z))/2} \cdot |c|/16 e^{u(z)+iv(z)} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x_1}(z) \right)}{(|c|^3/64) e^{3u/2}} \right) \\ \operatorname{Im} \left( \frac{1}{|c| e^{u/2}} \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}(z) + i \frac{\partial v}{\partial x_1}(z) \right) \right) &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x_1}}{|c| e^{u/2}} = \frac{-\frac{\partial u}{\partial t}}{|c| e^{u/2}} = -\frac{ce^{u/2}}{|c| e^{u/2}} = 1. \end{aligned}$$

3. Segue diretamente do item 1. ■

Agora consideremos  $C$  a circunferência unitária contendo  $\{f(x, 0); x \in \mathbb{R}\}$ ,  $D$  o disco com fronteira  $C$  e  $w_0$  o centro de  $D$ .

**Teorema 23** *A função  $f$  definida em (6.5) é da forma*

$$f(z) = w_0 + e^{i\theta} \frac{z - z_1}{z - \overline{z_1}}, \quad (6.6)$$

onde  $\theta$  é um número real e  $z_1 = x_1 + iy_1 = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}_+^2$ .

**Demonstração:**

Seja  $\Omega = f(\mathbb{R}_+^2)$ , a imagem de  $f$  sobre  $\mathbb{R}_+^2$ . Para todo  $w \in \Omega$ , seja  $\chi(w)$  a quantidade de  $z \in \mathbb{R}_+^2$  tais que  $f(z) = w$ , ou seja, o número de raízes da equação  $f(z) - w = 0$ , para cada  $w$  fixado.

Nossa finalidade é verificar que  $\Omega$  é igual  $D$  e  $\chi(w) = 1$  para cada  $w$  em  $\Omega$ . Sabemos que  $\Omega$  é um conjunto aberto, pois  $f'(z) \neq 0$  sempre, e assim  $f$  é localmente bijetiva. Agora mostraremos que

$$\int_{\Omega} \chi(w) = \int_{\mathbb{R}_+^2} |f'(z)|^2. \tag{6.7}$$

De fato, seja  $\chi_R(w)$  o número de raízes da equação  $f(z) - w = 0$  em  $\mathbb{R}_+^2 \cap B_R$ . Então  $\chi_R(w)$  é seccionalmente constante e tem valor finito. Fazendo uma mudança de variável obtemos a igualdade

$$\int_{\Omega} \chi_R(w) = \int_{\mathbb{R}_+^2 \cap B_R} |f'(z)|^2.$$

Notemos que  $\chi_R(w) \rightarrow \chi(w)$ , crescentemente quando  $R \rightarrow \infty$ , e temos (6.7). Como  $\int_{\mathbb{R}_+^2} |f'(z)|^2 < \infty$  segue de (6.7) que  $\chi(w)$  é finito quase sempre sobre  $\Omega$ . Então existem três casos a analisar

1º **Caso:**  $w_0 \notin \Omega$ ;

2º **Caso:**  $w_0 \in \Omega$  and  $\chi(w_0)$  é finito; e

3º **Caso:**  $w_0 \in \Omega$  and  $\chi(w_0)$  é infinito.

1º **Caso:** Seja  $w_0$  o centro de  $D$  e com  $w_0 \notin \Omega$ .

Suponhamos, por absurdo, que existe  $f$ , satisfazendo as condições desse caso. Definamos assim

$$g(z) = \begin{cases} f(z) - w_0 & \text{para } z \in \overline{\mathbb{R}_+^2}. \\ \frac{1}{f(\bar{z})} & \text{para } z \in \mathbb{R}_-^2. \end{cases} \tag{6.8}$$

Pela definição, temos que  $g(z)$  é uma função inteira. Mais ainda, como  $\chi(w) < \infty$  para quase todo  $w \in \Omega$ , assim  $f(z)$  assume quase todos os valores  $w$  finitas vezes. O Pequeno Teorema de Picard nos garante que  $g$  deve ter um polo no infinito, por outro lado  $g(z)$  assume quase todos os valores infinitas vezes. Assim,  $g(z)$  deve ser um polinômio. Mas nenhum polinômio faz a correspondência entre a reta e o círculo. Dessa maneira, temos uma contradição. Portanto, não existe  $f$  que satisfaça a 1º caso.

2º **Caso:**  $w_0 \in \Omega$  and  $\chi(w_0) < \infty$ .

Seja  $z_1, z_2, \dots, z_n$  todas as raízes de  $f(z) = w_0$ . Definamos  $g(z)$  como em (6.8). Então  $g(z)$  tem raízes simples  $z_1, \dots, z_n$  e polos simples  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ . E  $g(z)$  assume quase todos os valores uma quantidade finita de vezes. O grande Teorema de Picard nos garante que não há pontos de singularidade no infinito. Assim,  $g(z)$  deve ser uma função racional da seguinte forma

$$g(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1} \dots \frac{z - z_n}{z - \bar{z}_n}$$

para algum número real  $\theta$ .

Mostraremos que  $n$  deve ser igual a 1.

Observemos, inicialmente, que  $g'(z) = f'(z)$  para  $z \in \mathbb{R}_2^+$  e

$$g'(z) = -\frac{\overline{f'(\bar{z})}}{(f'(\bar{z}) - w_0)^2}$$

em  $\mathbb{R}_2^-$ . Dessa maneira,  $g'(z)$  não tem raízes apenas os polos  $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ .

Agora, suponhamos, por absurdo, que  $n \geq 2$ . Dessa maneira, definamos

$$P_1(z) = (z - z_1)\dots(z - z_n) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_0$$

e

$$P_2(z) = \overline{P(\bar{z})} = (z - \bar{z}_1)\dots(z - \bar{z}_n) = z^n + \overline{a_{n-1}}z^{n-1} + \dots + \overline{a_0}.$$

Então,

$$g(z) = e^{i\theta} \frac{P_1(z)}{P_2(z)} = e^{i\theta} \frac{c_m z^m + \dots + c_0}{z^n + \overline{a_{n-1}}z^{n-1} + \dots + \overline{a_0}}$$

onde  $0 \leq m < n$  e  $c_m \neq 0$ . Assim, verificamos que

$$g'(z) = e^{i\theta} \frac{c_m(m-n)z^{m+n-1} + \dots}{(P_2(z))^2},$$

onde os termos omitidos no numerador tem potências menores que  $m + n - 1 \geq 1$ . Portanto, o numerador deve ter pelo menos uma raiz. Mais ainda, como o numerador também é igual a  $P_1'(z)P_2(z) - P_1(z)P_2'(z)$  que não se anula para nenhum dos valores  $z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n$ . Portanto, concluímos que  $g'(z)$  se anula em algum ponto quando  $n \geq 2$ . Gerando uma contradição. Assim, devemos ter  $n = 1$ . Logo,

$$g(z) = e^{i\theta} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1} \tag{6.9}$$

com  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $z_1 \in \mathbb{R}_+^2$ .

**3º Caso:**  $w_0 \in \Omega$  and  $\chi(w_0) = \infty$ .

Verificaremos que este caso também não pode acontecer. Seja  $w_1$  um outro ponto de  $D$  diferente do centro  $w_0$  e considere

$$h(z) = w_0 + \frac{(f(z) - w_0) - (w_1 - w_0)}{1 - \overline{(w_1 - w_0)}(f(z) - w_0)}.$$

Também podemos verificar que  $h(z)$  faz a correspondência entre a reta real e a circunferência  $C$ . Escolhermos  $w_1$  de modo que

1.  $f(z) - w_1 = 0$  tenha um número finito de raízes;
2.  $f(z) - (w_0 + 1/\overline{(w_1 - w_0)}) = 0$  tem um número finito de raízes, caso  $f(z)$  assumo o valor  $w_0 + 1/\overline{(w_1 - w_0)}$ .

Escolhermos  $w_1$  dessa forma, para assegurar que a função  $h(z) - w_0$  possua um número finito de zeros simples e nem de polos.

Mostremos que podemos tomar  $w_1$  satisfazendo as condições acima.

Consideremos  $\chi(w) = 0$ , se  $w \notin \Omega$ . Então  $\chi(w) < \infty$  para quase todo  $w$  sobre o plano complexo. Segue também que  $\chi(w_0 + 1/(\overline{w_1 - w_0})) < \infty$  para quase todo  $w$  no plano complexo. Portanto,

$$\chi(w) + \chi\left(\frac{1}{\overline{(w - w_0)}}\right) < \infty$$

quase sempre. Logo, podemos escolher  $w_1$  de modo que  $\chi(w_1)$  e  $\chi(w_0 + 1/(\overline{w_1 - w_0}))$  sejam finitos. Agora definamos a extensão analítica de  $h(z) - w_0$ :

$$g(z) = \begin{cases} h(z) - w_0 & \text{para } z \in \mathbb{R}_+^2; \\ \frac{1}{\overline{h(\bar{z}) - w_0}} & \text{para } \mathbb{R}_-^2. \end{cases}$$

A função  $g(z)$  também tem um número finito de zeros simples e de polos sobre o plano complexo. Novamente,  $g(z)$  assume quase todos os valores uma quantidade finita de vezes. O Grande Teorema de Picard nos garante que  $g(z)$  não tende ao infinito em nenhum ponto de singularidade essencial. Assim,  $g(z)$  é uma função racional. Dessa forma,  $f(z)$  deve também ser uma função racional. E portanto, temos  $\chi(w_0) < \infty$ , uma contradição com a hipótese desse caso.

Assim, concluímos que apenas o 2º é verificado. Logo

$$f(z) = w_0 + e^{i\theta} \frac{z - z_1}{z - \bar{z}_1}$$

com  $\theta \in \mathbb{R}$  e  $z_1 = x_1 + iy \in \mathbb{R}_+^2$  ■

Agora mostraremos que a família de soluções para (6.1) e da forma (6.2). Pelo primeiro item do Lema 20 temos que  $|f'(z)| = e^{u(z)/2}$ , por (6.5) segue que

$$f'(z) = e^{i\theta} \frac{2iy_1}{(z - \bar{z}_1)^2}.$$

Logo

$$|f'(z)| = \frac{2y_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} u(x, y)/2 &= u(z)/2 + \log \frac{|c|}{4} + \log \frac{4}{|c|} = \log \frac{|c|}{4} e^{u(z)/2} + \log \frac{4}{|c|} \\ &= \log |f'(z)| + \log \frac{4}{|c|} = \log \left( \frac{2y_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \right) + \log \frac{4}{|c|} \end{aligned}$$

Portanto,

$$u(x, y) = 2 \log \left( \frac{2y_1}{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} \right) + 2 \log \frac{4}{|c|}.$$

## 6.2 Considerações sobre as condições de finitude da integral para o caso harmônico.

No caso harmônico, analogamente ao que ocorreu nos casos super-harmônico e sub-harmônico, também verificamos que  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$  implica em  $\int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ , usando o mesmo

argumento do caso Super-harmônico.

Se retirarmos a condição  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u < \infty$  do Teorema 22, obtemos uma infinidade de outras soluções. De fato, seja  $h(z)$  uma função analítica inteira tal que  $h(z)$  assume valores reais para  $z$  sobre a reta real e  $h'(z) \neq 0$  para qualquer  $z$  (por exemplo,  $e^z, e^{e^z}$ ). Então  $u(z) = \ln |f'(z)|$  com

$$f(z) = \frac{h(z) - i}{h(z) + i}$$

é uma solução de (22).

Particularmente, a função analítica

$$f(z) = \frac{e^z - i}{e^z + i}$$

faz a correspondência entre a reta real uma circunferência. A função  $u(x, y)$  da forma  $f(z)$  não pertence à família de funções solução de (6.1), mas satisfaz as condições

$$\frac{\partial u}{\partial t} = e^{u/2}$$

e

$$\int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{u(x,0)/2} = \int_{-\infty}^{\infty} |f'(x, 0)| = \pi < \infty$$

e, obviamente,  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^u$  é infinito. Este exemplo também nos mostra que a condição  $\int_{\mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$  não pode ser substituída por  $\int_{\partial \mathbb{R}_+^2} e^{u/2} < \infty$ .

**Observações 10** Para  $n \geq 3$ , temos o seguinte resultado

**Teorema 24** Seja  $u \in C^2(\mathbb{R}_+^2) \cap C^1(\overline{\mathbb{R}_+^2})$  seja uma solução não negativa de

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \mathbb{R}_+^2 \\ \frac{\partial u}{\partial t} = cu^{n/(n-2)} & \text{sobre } \partial \mathbb{R}_+^2. \end{cases}$$

Para  $c \geq 0$ ,  $u = at + b$  com  $a, b \geq 0$ ,  $a = cb^{n/(n-2)}$ . Para  $c < 0$ , então  $u \equiv 0$  ou  $u$  é da forma

$$u(s, t) = \left( \frac{\epsilon}{|(s, t) - (s_0, t_0)|^2} \right)^{(n-2)/2},$$

para  $c < 0$ ,  $\epsilon > 0$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$  e  $t_0 = -\epsilon c / (n - 2)$ .

A demonstração desse resultado pode ser visto em [12].

# Referências Bibliográficas

- [1] BREZIS, Haim. *Analyse Fonctionnelle: théorie et applications*. Paris: Masson, 1987.
- [2] BREZIS, Haim e MERLE, Frank. *Uniform estimates and Blow-up behavior for solutions of  $-\delta(u) = v(x)e^u$  in two dimensions*. Communications in Partial Differential Equations, 1991.
- [3] CONWAY, Jonh B. *Functions of one Complex Variable*. Nova York: Springer, 1978.
- [4] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: SBM, 2005.
- [5] CHEN, Wenxiong e LI, Congming. *Classification of Solution of Some Nonlinear Elliptic Equations*. Duke Mathematical Journal. Vol.63.No 3, agosto de 1991.
- [6] CHEN, Wenxiong e LI, Congming. *Methods on Nonlinear Elliptic Equationn*. American Institute of Mathematical Sciences. New York,2010.(Series on Differential Equations and Dynamical Systems,vol.4).
- [7] EVANS, Lawrence C. *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society and Real Sociedad Matemática Espanola.
- [8] EVANS, Lawrence C. e Gariepy, Ronald F. *Measure Theory and Fine Properties of Funtions*. USA: CRC Press, 1992.
- [9] HAN, Zheng-Chao,LI, Yanyan. *The Yamabe problem on manifolds whith boundaries: Existence and compactness results*. Duke Math. J. 99(1999), 489-542.
- [10] LIMA, Elon Lages. *Curso de Análise - Volume 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
- [11] LI. Yanyan., ZHANG, Lei. *Liouville type theorema and Harnack type inequalities for semilinear elliptic equation*. Jornal d' Analyses Mathematique.
- [12] LI, Y.Y., ZHU, M. *Uniqueness theorems through the method of moving spheres*.Duke Math 80(2)(1995) 383-417.
- [13] OU, Biao. *A uniqueness theorem for harmonic functions on the upper-half plane*.Conformal Geometry and dynamics (4)(2000) 120-125.
- [14] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de equações diferenciais ordinárias*. Rio de Janiero: Impa, 1979.
- [15] TRUNDINGER, Neil S. and GILBARG, David. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. New York: Springer, 2001.
- [16] ZHANG, Lie. *Classification of conformal metrics on  $\mathbb{R}_+^2$  with constant Gauss curvature and geodesic curvature on the boundary under various integral finiteness assumptions*. Calculus of Variations. Vol.16, 2003.