Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Blow-up de Soluções para um Problema de Valor de Fronteira Não-Linear Bidimensional †

por

Ricardo Pinheiro da Costa

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Setembro/2010
João Pessoa - PB

†O presente trabalho foi realizado com apoio do CNPq, Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - Brasil

Existência e Blow-up de Soluções para um Problema de Valor de Fronteira Não-Linear Bidimensional

por

Ricardo Pinheiro da Costa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Cláudio Cuevas - UFPE

Prof. Dr. Eduardo Vasconcelos Oliveira Teixeira - UFC

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Setembro/2010

Agradecimentos

- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó e à Professora Flávia Jerônimo Barbosa que acreditam em mim desde o Ensino Médio, me ajudando a ter uma formação matemática sólida e concisa. Sendo, para mim, verdadeiros pai e mãe na Universidade.

- Aos professores de graduação e pós-graduação, que acreditaram em meu trabalho e me auxiliaram sempre. Em especial, aos professores Everaldo Souto de Medeiros, Uberlandio Batista Severo e Marivaldo Pereira Matos, que sempre foram ótimos professores.

- Aos colegas de graduação e pós-graduação e amigos pela troca de conhecimento, pelos momentos de descontração e por estarem sempre presentes. Sobretudo, aos que frequentam o Laboratório Milênio.

- A Professora Irani Geronimo Leite que tanto me ajudou quando eu era aluno do Ensino Médio e fazia extensão em Matemática na UFPB.

- A minha família, pela compreensão, paciência e apoio. Principalmente a minha mãe Vilma Pinheiro da Costa.

- A minha namorada Suelen de Souza Rocha por estar sempre ao meu lado me ajudando, me motivando e me fazendo feliz, desde o início do nosso curso de Graduação.

- Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta para a conclusão desse trabalho, em especial, a minha família, namorada e amigos.

Resumo

Neste trabalho provamos resultados de existência, multiplicidade e blow-up de soluções para um problema de valor de fronteira originado de "Modelos para Corrosão" (ou Corrosion Modeling em inglês) envolvendo um parâmetro $\lambda > 0$. Obtemos a existência de uma infinidade de soluções do problema usando a chamada teoria de Lyusternik-Schnirelman, além de ideias devidas a S.I. Pohozaev e A. Bahri. A base de nossa analise do comportamento limite, Blow-up, é uma estimativa uniforme de $\frac{\partial v_\lambda}{\partial \mathbf{n}}$ em $L^1(\partial\Omega)$, onde v_λ é a solução do problema para o parâmetro λ, combinada com uma adaptação de técnicas desenvolvidas por Brezis e Merle. Precisamente, provamos que quando $\lambda \to 0^+$ nossas soluções, passando a uma subsequência, desenvolve um número finito de singularidades sobre $\partial\Omega$.

Abstract

In this work we prove results of existence, multiplicity and blow-up solutions for a boundary value problem originated Corrosion Modeling and involving a parameter $\lambda > 0$. We obtain the existence of an infinity of solutions of the problem using the so-called theory of Lyusternik-Schnirelman, and ideas due to S.I. Pohozaev and A. Bahri. The basis of our analysis of limite behavior, Blow-up, is a uniform estimate $\frac{\partial v_\lambda}{\partial \mathbf{n}}$ in $L^1(\partial\Omega)$ where v_λ is the solution for the parameter λ, combined with an adaptation of techniques developed by Brezis and Merle. Precisely, we prove that when $\lambda \to 0^+$ our solutions, from to a subsequence, develops a finite number of singularities on $\partial\Omega$.

Sumário

Introdução

Neste trabalho estudamos um problema de valor de fronteira não-linear originado de “Modelos para Corrosão” (ou Corrosion Modeling em inglês). Em eletroquímica, a reação de oxirredução produz uma corrente que é normalmente modelada por um problema de valor de fronteira elíptico não-linear. Na verdade, tais sistemas eletroquímicos consistem de um eletrólito em contato com uma superfície metálica. A superfície pode ser anódica ou catódica, correspondendo a uma corrosão – ou a um processo de deposito, respectivamente. Uma condição comum para Modelos para Corrosão está associada aos nomes de Butler e Volmer. Eles afirmam que existe uma relação exponencial entre a voltagem na fronteira e a corrente normal na fronteira, isto é,

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = \lambda(e^{\beta w} - e^{-1(1-\beta)w}) + 2g,$$

onde o coeficiente $0 < \beta < 1$ (frequentemente referido com coeficiente de transferência) é uma “constante fundamental”; dependente dos componentes do sistema eletroquímico, mas muito suavemente de suas concentrações. A constante λ, por outro lado, é altamente dependente das concentrações podendo assumir tanto valores negativos como positivos - valores próximos de zero corresponde a uma transição entre o estado “passivo” e “ativo” da fronteira. A fonte, termo g, representa a corrente de fronteira imposta externamente.

Se tomarmos $\beta = 1/2$ e $v = w/2$ a condição de fronteira acima simplifica-se em

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \lambda \sinh(v) + g. \tag{1}$$

Analisamos a versão bidimensional deste cenário. Assumimos que o domínio em questão, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, não contem fontes ou dissipadores a reação é essencialmente modelado por um operador de Laplace simples, isto é, a voltagem potencial v satisfaz

$$\Delta v = 0 \quad \text{em } \Omega, \tag{2}$$

sujeito a condição de fronteira (1) em $\partial\Omega$. A corrente imposta externamente é equilibrada, isto é, $\int_{\partial\Omega} g \, d\sigma = 0$. Uma discussão mais detalhada disto e modelos de corrosão mais elaborados, encontram-se em [9], por exemplo.

O caso especial onde $\Omega = D =$ o disco unitário é estudada em detalhes em [4], o objetivo é examinar a multiplicidade de soluções e seus comportamento de “blow-up”. Com esta finalidade foi assumido que não existe a corrente de fronteira imposta externamente, isto é, a condição de fronteira torna-se

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \lambda \sinh(v) \quad \text{sobre } \partial\Omega. \tag{3}$$

Assim, a função $v = 0$ é uma solução para todos os valores de λ. Para $\lambda < 0$ é a única. Mas para cada valor inteiro não negativo de λ temos uma família não-vazia de soluções afastando-se da solução nula. Para $\lambda = 0$ a nova familia de soluções é trivial, é constituída simplesmente de constantes, mas as famílias correspondentes a $\lambda = 1, 2, \ldots$ são muito mais interessantes. Estas soluções continuam a existir para todos os valores entre 0 e λ, e conforme $\lambda \to 0^+$ elas apresentam um interessante comportamento de "blow up". Todas estas soluções são dadas por fórmulas explicitas. Sejam k um inteiro positivo, $K(x, y)$ denotando a função $K(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ e p_j, $0 \leq j \leq 2k - 1$, denotando os $2k$ pontos do círculo unitário que na "notação complexa" é dado por $p_j = e^{i\frac{j\pi}{k}}$, e defina $\mu_k(\lambda) = \left(\frac{k+\lambda}{k-\lambda}\right)^{1/2k}$. Então as funções

$$v_{2k,\lambda}(x, y) := \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^j K((x, y) - \mu_k(\lambda)p_j),$$

são de fato soluções do problema de valor de fronteira (2), (3) para $0 < \lambda < k$. Deste modo, podemos concluir que

> dado $\lambda > 0$ existe infinitas soluções não-trivial do problema de valor de fronteira (2), (3), nomeadas $v_{2k,\lambda}$, $k \geq [\lambda] + 1$, onde $[\lambda]$ denota a parte inteira de λ.

estas soluções tem as propriedades que

> quando $\lambda \to 0^+$, $v_{2k.\lambda}$ desenvolve $2k$ singularidades localizadas nos pontos p_j, $0 \leq j \leq 2k - 1$, quando $\lambda \to 0^+$, $\frac{\partial v_{2k,\lambda}}{\partial \mathbf{n}}$ converge para $2\pi \sum_{j=0}^{2k-1} (-1)^{j+1} \delta_{p_j}$ no sentido de medida,

e finalmente

$$\|\nabla v_{2k,\lambda}\|^2_{L^2(D)} = 8k\pi \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + O(1), \text{ quando } \lambda \to 0^+.$$

Se introduzirmos o funcional energia

$$E(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(D)} - \lambda \int_{\partial D} [\cosh(v(\sigma)) - 1] \, d\sigma.$$

então todas estas soluções tem energia que são de ordem $\log(1/\lambda)$ quando $\lambda \to 0^+$.

O objetivo deste trabalho é mostrar que o problema (2), (3) tem uma "estrutura de solução" muito similar para um domínio Ω bidimensional limitado $C^{2,\alpha}$. Com respeito a existência provamos que

Existência

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio $C^{2,\alpha}$ limitado. O problema de valor de fronteira (2) e (3) tem uma infinidade de soluções clássicas para cada $\lambda > 0$ fixo. Mais precisamente, podemos construir uma família enumerável de soluções $\{v_{k,\lambda}\}_{k=2}^{\infty}$. A família $v_{k,\lambda}$ está definida para $0 < \lambda < \mu_k$, onde μ_k é o k-ésimo autovalor de Steklov associado como problema de valor de fronteira linear

$$\Delta\varphi = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}} = \mu\varphi \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega.$$

Cada uma destas famílias de soluções satisfaz as seguintes estimativas quando $\lambda \to 0^+$:

$$c_*(k)\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \le \|\nabla v_{k,\lambda}\|^2_{L^2(\Omega)} \le C_*(k)\log\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{4}$$

$$c_*(k)\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \le E(v_{k,\lambda}) \le C_*(k)\log\left(\frac{1}{\lambda}\right). \tag{5}$$

Aqui $c_*(k)$ e $C_*(k)$ são duas constantes positivas, e $E(v)$ denota a expressão da energia

$$E(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(v(\sigma)) - 1]\, d\sigma.$$

Pode acontecer que o autovalor de Steklov μ_k tenha multiplicidade maior que um. Neste caso, não é improvável que a sequência de soluções que construiremos contenha elementos que estão repetidos um número finito de vezes. Suponhamos, entretanto, que tais múltiplos originem soluções adicionais. Considere, por exemplo, o caso de um disco unitário. Neste caso

$$\mu_1 = 0, \quad \text{e} \quad \mu_{2k} = \mu_{2k+1} = k \quad \text{para } k \ge 1.$$

Primeiramente damos uma forma explicita para a solução $v_{2k,\lambda}$; soluções adicionais aparecem por rotações arbitrarias desta solução. O autovalor $\mu_{2k} = \mu_{2k+1} = k$, de multiplicidade 2, é assim associado com um conjunto de soluções para (2) e (3) de gênero 2, tanto quanto poderíamos ter esperado.

Considerando o comportamento blow-up das soluções provamos que

Blow up

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio $C^{2,\alpha}$ limitado, e seja v_{λ_n}, $\lambda_n \to 0^+$ uma sequência de soluções do problema de valor de fronteira (2) e (3) satisfazendo (4) e (5), e chamando $v^0_{\lambda_n} = v_{\lambda_n} - |\partial\Omega|^{-1}\int_{\partial\Omega} v_{\lambda_n}\, d\sigma$. Então existe uma subsequência, por simplicidade também chamada λ_n, uma medida de Borel finita regular e positiva ν, definida em $\partial\Omega$, e um conjunto de pontos $S \subset \partial\Omega$ finito e não-vazio tal que

$$\left(\left|\frac{\partial v_{\lambda_n}}{\partial \mathbf{n}}\right|\right)\Big|_{\partial\Omega} \to \nu \quad \text{no sentido de medida, quando } \lambda \to 0^+.$$

e

S é o conjunto dos pontos blow-up para a sequência $\{v^0_{\lambda_n}\}$. O conjunto S também é exatamente o conjunto de pontos σ para os quais $\nu(\{\sigma\}) \neq 0$.

A principal técnica usada para classificar soluções do problema de valor de fronteira (2) e (3) é frequentemente associada com os nomes de Lyusternik e Shnirelman ou Palais e Smale. Estas técnicas caracteriza valores críticos da energia como lim sup apropriados envolvendo conjuntos de um gênero $\ge k$ fixo. Os pontos críticos associados são soluções de (2) e (3). Estimativas para o valor crítico conduzem à estimativas da energia e a correspondentes L^2-norma do gradiente.

A base de nossa analise do comportamento limite, Blow-up, é uma estimativa uniforme de $\frac{\partial v_\lambda}{\partial \mathbf{n}}$ em $L^1(\partial\Omega)$ (que segue diretamente das anteriormente mencionadas estimativas de energia) combinada com uma adaptação de técnicas desenvolvidas por Brezis e Merle [6]. No caso do disco unitário, a medida μ consiste simplesmente da soma de funções delta de Dirac com suporte no conjunto S.

A grande maioria dos resultado encontrados neste trabalho foram retirados do artigo "On the 'blow-up' of solutions to a two-dimensional nonlinear boundary-value problem arising corrosion modelling" (ver [13]) devido a Otared Kavian e Michael Vogelius. E está organizado da seguinte forma. No Capítulo 1 definimos alguns conceitos e enunciamos alguns resultados usados no decorrer do texto. No Capitulo 2 e provamos alguns resultados preliminares e a existência de uma quantidade infinita de soluções via um método variacional apropriado. No Capítulo 3 estabelecemos limitações superiores e inferiores para a energia das soluções construídas no Capítulo precedente. Neste Capítulo também estabelecemos as limitações L^1 uniforme da derivada normal. Finalmente no Capítulo 4 examinamos o comportamento limite destas soluções e suas derivadas normais quando $\lambda \to 0^+$.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo exibimos resultados e definições básicas que serão utilizados durante todo o trabalho. Além disso, apresentaremos o método de Lyusternik-Schnirelman utilizado na solução de algumas classes de equações diferenciais parciais. Estudamos também o problema da Steklov.

1.1 A Derivada Normal e o Teorema de Green

Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^N$ e $\partial\Omega$ sua fronteira. Se $x \in \mathbb{R}^N$, escrevemos $x = (x', x_N)$ com $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$.

O aberto Ω é dito de classe C^k para $k \geq 1$, se para todo ponto $\sigma_0 \in \partial\Omega$ podemos conseguir uma vizinhança aberta ω_0 de σ_0, uma bola $B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$, uma bijeção $\Psi : B(0,r) \to \omega_0$ e uma aplicação contínua φ de $B(0,r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})$ em $\mathbb{R}$ tal que:

$$\Psi(0) = \sigma_0, \quad \Psi, \varphi, \text{ e } \Psi^{-1} \text{ são de classe } C^k; \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \overline{\Omega} \cap \omega_0 = \Psi(B(0,r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times [0, +\infty))), \\ \partial\Omega \cap \omega_0 = \Psi(B(0,r) \cap (\mathbb{R}^{N-1} \times \{0\})); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \exists R_0 \text{ matriz de rotação e } b_0 \in \mathbb{R}^N \text{ tal que:} \\ \overline{\Omega} \cap \omega_0 \subset R_0(\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^N;\ y_N \geq \varphi(y') + b_0\}), \\ \partial\Omega \cap \omega_0 \subset R_0(\{(y', y_N) \in \mathbb{R}^N;\ y_N = \varphi(y') + b_0\}). \end{cases}$$

Se a primeira condição de regularidade (1.1) for substituída por: $\Psi, \varphi,\ \Psi^{-1}$ são lipschitziana (ou de classe $C^{k,\alpha}$), então dizemos que Ω é lipschitziano (ou de classe $C^{k,\alpha}$).

Se Ω é de classe C^k a *normal exterior* à $\partial\Omega$ em um ponto $\sigma_0 := R_0(y, \varphi(y)) + b_0$ é denotado por

$$\mathbf{n}(\sigma) := R_0 \frac{(\nabla\varphi(y), -1)}{\sqrt{1 + |\nabla\varphi(y)|^2}}. \tag{1.2}$$

Para $1 \leq i \leq N$, denotamos por $\mathbf{n}_i$ a i-ésima componente de $\mathbf{n}(\sigma)$. Verificamos que $\mathbf{n}(\sigma)$ depende unicamente de $\partial\Omega$.

Se u é uma função não nula em $\partial\Omega$, a *derivada normal* de u em σ é definida por

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} := \nabla u(\sigma) \cdot \mathbf{n}(\sigma) := (\nabla u(\sigma) | \mathbf{n}(\sigma)).$$

Teorema 1 (Fórmula de Integração por Partes)**.** *Seja* Ω *um aberto de classe* C^1. *Se* $u \in C_0^1(\mathbb{R}^N)$ *para* $1 \leq i \leq N$ *temos a fórmula de integração por partes:*

$$\int_\Omega \partial_i u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\mathbf{n}_i(\sigma)d\sigma. \tag{1.3}$$

Ou de forma equivalente, $\mathbf{u} \in C_0^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)$ *e* $\operatorname{div}\,\mathbf{u} := \sum_{i=1}^N \partial_i \mathbf{u}_i$, *temos*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\mathbf{u}(x))dx = \int_{\partial\Omega} \mathbf{u}(\sigma)\mathbf{n}(\sigma)d\sigma.$$

Demonstração: Ver [12], página 20. ■

Corolário 1 (Fórmula de Green)**.** *Seja* Ω *um aberto de classe* C^1 *e* u, v *duas funções de classe* $C_0^2(\mathbb{R}^N)$. *Então temos:*

$$\int_\Omega [v(x)\Delta u(x) - u(x)\Delta v(x)]dx = \int_{\partial\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\sigma)v(\sigma) - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\sigma)u(\sigma)\right] d\sigma,$$

e

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\; dx = \int_\Omega \nabla u \nabla v\; dx - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} v(\sigma)\; d\sigma.$$

1.2 Espaços de Sobolev

Seja Ω um aberto de $\mathbb{R}^N$ e $1 \leq i \leq N$. Uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tem uma i-ésima *derivada fraca* em $L^1_{loc}(\Omega)$ se existe $f_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ tal que para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega u(x)\partial_i\varphi(x)dx = -\int_\Omega f_i(x)\varphi(x)dx,$$

isto equivale a dizer que a i-ésima derivada no sentido das distribuições de u pertence a $L^1_{loc}(\Omega)$. Se f_i é como acima, denotamos

$$\partial_i u := \frac{\partial u}{\partial x_i} := f_i.$$

Se $\alpha \in \mathbb{N}^N$, denotamos $|\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_N$ o módulo de α e $\partial^\alpha u := \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_N^{\alpha_N} u$, onde $\partial^\alpha u$ designa a derivada fraca de uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Para $1 \leq p \leq \infty$, o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é definido por

$$W^{m,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega); \forall\ \alpha \in \mathbb{N}^N, |\alpha| \leq m, \partial^\alpha u \in L^p(\Omega)\}. \tag{1.4}$$

O espaço $L^p(\Omega)$ está munido da norma $\|u\|_{L^p(\Omega)} := \int_\Omega |u(x)|^p dx$ (para todo $1 \leq p < \infty$), e o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ da norma

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|\leq m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}. \tag{1.5}$$

O espaço $W^{m,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach, e se $0 \leq m \leq n$ a inclusão $W^{n,p}(\Omega) \subset W^{m,p}(\Omega)$ é contínua. Pondo,

$$\|D^m u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=m} \|\partial^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{1/p},$$

obtemos uma semi-norma em $W^{1,p}(\Omega)$, e além disto, a aplicação $u \mapsto \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|D^m u\|_{L^p(\Omega)}$ defini uma norma equivalente a definida em (1.5) quando Ω é suficientemente regular. O caso particular em que $p = 2$ denotamos $W^{m,2}(\Omega)$ por $H^m(\Omega)$.

Proposição 1. *O espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ é separável se $1 \leq p < \infty$, e é reflexivo e uniformemente convexo se $1 < p < \infty$. Em particular o espaço, $H^m(\Omega)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno*

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

onde $(u, v)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega u(x)v(x)\, dx$ é o produto interno em $L^2(\Omega)$.

O espaço $C_0^\infty(\Omega)$ (ou $\mathfrak{D}(\Omega)$) denota o espaço das funções de classe C^∞ com suporte compacto contido em Ω, para $1 \leq p < \infty$ denotamos:

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)} \tag{1.6}$$

(Naturalmente $H_0^m = W_0^{m,2}$).

Como, para $1 \leq p < \infty$, o espaço $\mathfrak{D}(\Omega)$ é por definição denso em $W_0^{m,p}(\Omega)$, podemos identificar o dual de $W_0^{m,p}(\Omega)$ com um subespaço das distribuições $\mathfrak{D}'(\Omega)$ (o dual de L^p é identificado a $L^{p'}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$). E denotamos,

$$W^{-m,p'}(\Omega) := (W_0^{m,p}(\Omega))'$$

(e $H^{-m}(\Omega)$ é o dual de $H_0^m(\Omega)$). Os elementos de $W^{-m,p'}(\Omega)$ são caracterizados pela seguinte proposição:

Proposição 2. *Dizer que uma distribuição $T \in \mathfrak{D}'(\Omega)$ é um elemento de $W^{-m,p'}(\Omega)$ equivale a dizer que existem, para todo multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}^N$ com $|\alpha| < m$, funções $f_\alpha \in L^{p'}(\Omega)$ tal que para todo $\varphi \in \mathfrak{D}'(\Omega)$:*

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{|\alpha| \leq \mathrm{m}} \int_\Omega f_n(x) \partial^\alpha \varphi(x) dx,$$

e $\|T\|_{W^{-m,p'}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|f_\alpha\|_{L^{p'}(\Omega)}$.

Demonstração: Ver [12], página 26. ■

Faz sentido, "intuitivamente", dizer que $W_0^{m,p}(\Omega)$ seria o conjunto das funções de $W^{m,p}(\Omega)$ que, de algum modo, se anulam sobre a fronteira. Com objetivo de deixar mais precisa a propriedade acima temos:

Proposição 3. *Sejam Ω um aberto de classe C^1 e $1 \leq p < \infty$. Consideremos uma função $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Então:*

$$u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \iff u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Demonstração: Ver [5], Teorema IX.17. ∎

Definição 1. *Seja Ω um aberto do $\mathbb{R}^n$ e $u, v\varphi \in W^{1,p}(\Omega)$. Dizemos que $u = v$ sobre $\partial\Omega$ no sentido de $W^{1,p}(\Omega)$ se $u - v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.*

Para mostrar resultados de regularidade relativos a espaços de Sobolev primeiro supomos que $\Omega := \mathbb{R}^N$. Em seguida, para o caso geral construímos um *operador prolongamento* associa cada função $u \in W^{m,p}(\Omega)$ a um prolongamento $\tilde{u} \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ tal que, para uma constante C dependente unicamente de Ω, m, p temos $\tilde{u}|_\Omega = u$ e

$$\|\tilde{u}\|_{W_0^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W_0^{m,p}(\Omega)} \quad \text{e} \quad \|\tilde{u}\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}. \tag{1.7}$$

Proposição 4 (Densidade)**.** *Seja Ω um aberto de classe C^m com fronteira limitada e $1 \leq p < \infty$. Então para toda função $u \in W^{m,p}(\Omega)$ existe uma sequência φ_n em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que se u_n é a restrição de φ_n a Ω, temos:*

$$\lim_{n\to\infty} \|u - u_n\|_{W^{m,p}(\Omega)} = 0 \quad \text{e, se } |\alpha| \leq m, \quad \partial^\alpha u_n \to \partial^\alpha u \text{ q.t.p sobre } \Omega.$$

Graças ao resultado de densidade da proposição acima, se supormos que Ω é de classe C^1 as funções de $W^{1,p}(\Omega)$ admitem um *traço* sobre sua fronteira. Mais precisamente, a aplicação

$$\gamma_0(u) := u|_{\partial\Omega} \tag{1.8}$$

definida sobre $C^1(\overline{\Omega})$ satisfaz uma desigualdade do tipo:

$$\|\gamma_0(u)\|_{L^p(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \tag{1.9}$$

e consequentemente se estende, por densidade, a uma aplicação contínua de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\partial\Omega)$. Esta aplicação não é sobrejetiva e nem injetiva e $W_0^{1,p}(\Omega)$ é precisamente o núcleo de γ_0:

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \ker(\gamma_0).$$

Considerando o espaço

$$W^{m-1/p,p}(\partial\Omega) := \{\{u\} + W_0^{m,p}(\Omega) : u \in W^{m,p}(\Omega)\}, \tag{1.10}$$

munido da norma

$$\|u\|_{W^{m-1/p,p}(\partial\Omega)} := \inf\{\|v\|_{W^{m,p}(\partial\Omega)} : u - v \in W_0^{m,p}(\Omega)\} \tag{1.11}$$

com $m \in \mathbb{N}$ e $1 \leq p < \infty$. A imagem da função γ_0 é precisamente o espaço de Banach definido em (1.10) e (1.11):

$$W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) = \gamma_0(W^{m,p}(\Omega)).$$

O espaço $W^{m-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ é também um espaço de Sobolev (ver [1], capítulo 7).

Definindo $\bar{p}^* = p\frac{N-1}{N-mp}$ vale o seguinte resultado de imersão:

Teorema 2 (Teorema do Traço). *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1 e $1 \leq p < \infty$. Então existe um operador linear contínuo*

$$\gamma_0 : W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\partial\Omega)$$

para $p \leq q \leq \bar{p}^*$ se $m < \frac{N}{p}$, e para $p \leq q < \infty$ se $m = \frac{N}{p}$, tal que $\gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}$ se $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (De fato, o operador traço $\gamma_0 : W^{m,p}(\Omega) \to L^q(\partial\Omega)$ é compacto para $1 < q < \bar{p}^*$ e contínuo para $q = \bar{p}^*$. Para obter estes resultados de compacidade, é necessário considerar espaços de Sobolev de Ordem Fracionária).

Demonstração: Ver [4], página 256. ■

Se $u \in W^{2,p}(\Omega)$, a derivada de u está em $W^{1,p}(\Omega)$, e assim podemos definir a *derivada normal* de u:

$$\gamma_1(u) := \gamma_0(\nabla u) \cdot \mathbf{n} =: \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}, \tag{1.12}$$

onde $\mathbf{n}$ é a normal exterior a $\partial\Omega$ e $\gamma_0(\nabla u)$ é o vetor de componentes $\gamma_0(\partial^i u)$ para $1 \leq i \leq N$. Temos então o seguinte resultado

Proposição 5. *Seja Ω um aberto de classe C^2 com fronteira limitada e $1 < p < \infty$. O operador γ e γ_1 definidos em (1.8) e (1.12), para todo $u \in W^{2,p}(\Omega)$ e pondo $\gamma(u) := (\gamma_0(u), \gamma_1(u))$. Então:*

$$\gamma : W^{2,p}(\Omega)/\ker(\gamma) \to W^{2-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega) \times W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$$

é um isomorfismo de espaços de Banach.

Proposição 6. *Seja Ω um aberto de classe C^1 com fronteira limitada. Então para toda função $u \in W^{1,1}(\Omega)$ temos*

$$\int_\Omega \partial_i u(x)dx = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\mathbf{n}_i(\sigma)d\sigma.$$

1.3 Imersões de Sobolev

Os seguintes resultados são conhecidos como desigualdades ou imersões de Sobolev.

Proposição 7. *Seja $m \geq 1$ um inteiro e $1 \leq p < \infty$.*

(i) Se $np < N$, pondo $p^{*m} := \frac{pN}{N-mp}$. Então $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset L^{p^{*m}}(\mathbb{R}^N)$. Mais precisamente existe uma constante $C(m,p,N) > 0$ tal que para todo $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos a desigualdade de Sobolev

$$\|u\|_{L^{p^{*m}}(\mathbb{R}^N)} \leq C(m,p,n)\|D^m u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \tag{1.13}$$

(ii) Se $mp = N$, para todo $q \geq p$ existe uma constante $C(m,q,N)$ tal que para todo $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$\|u\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \leq C(m,q,N)\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

(iii) *Se* $mp > N$ *pondo* $\alpha := 1 - \frac{N}{mp}$ *temos* $W^{m,p}(\mathbb{R}^N) \subset C_0^{0,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ *e existe uma constante* $C(m,p,N)$ *tal que para todo* $u \in W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ *temos a desigualdade de Morrey-Sobolev:*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^N, \quad |u(x) - u(y)| \leq C(m,p,N)\|u\|_{W^{m,p}(\mathbb{R}^N)}|x-y|^\alpha.$$

(iv) *Se* Ω *é um aberto da classe* C^m *com fronteira limitada, as propriedades (ii) e (iii) são válidas trocando* $\mathbb{R}^N$ *por* Ω *e a constante* C *por uma constante* $C(m,p,\Omega)$*. Além disso, se* $mp < N$*, existe uma constante* $C(m,p,\Omega)$ *tal que*

$$\|u\|_{L^{p^{*m}}(\Omega)} \leq C(m,p,\Omega)\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

Se $p < N$ definimos o expoente de Sobolev p^* por

$$p^* = \frac{pN}{N-p},$$

e vale o seguinte teorema sobre imersão de Sobolev

Teorema 3 (Rellich-Kondrachov)**.** *Seja* Ω *um aberto limitado do* $\mathbb{R}^N$ *e* $p \geq 1$*.*

(i) *Se* $p < N$*, então para todo* $q \geq 1$ *com* $q < p^*$*, a imersão* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *em* $L^q(\Omega)$ *é compacta.*

(ii) *Se* $p = N$*, então para todo* $q < \infty$*, a imersão* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *em* $L^q(\Omega)$ *é compacta.*

(iii) *Se* $p > N$ *e* $0 < \alpha < 1 - \frac{p}{N}$*, a imersão* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *em* $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ *é compacta.*

(iv) *Seja* Ω *um aberto limitado de classe* C^1*, os resultados acima são válidos trocando* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *por* $W^{1,p}(\Omega)$*.*

(v) *Quando* $N = 1$ *a imersão* $W^{1,1}(\Omega)$ *em* $C(\Omega)$ *é contínua e não é compacta, mas toda sequência limitada* $(u_n)_n$ *contem uma subsequência* $(u_{n_j})_j$ *tal que para todo* $x \in \Omega$*, a sequência* $(u_{n_j}(x))_j$ *é convergente.*

Uma adaptação da prova da desigualdade clássica de Poincaré (Teorema 1, página 275 de ver [10]) produz a seguinte desigualdade, que nos será útil por diversas vezes:

Proposição 8 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto limitado e conexo de classe* C^1 *e* $1 < p < \infty$*. Denotando* $|\partial\Omega|_1 := \int_{\partial\Omega} d\sigma$ *e* $m(u) := |\partial\Omega|_1^{-1} \int_{\partial\Omega} u(\sigma)d\sigma$ *então existe uma constante* $C > 0$ *dependente unicamente de* n*,* Ω*, e* p *tal que para todo* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *temos:*

$$\|u - m(u)\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Em particular, se $\int_{\partial\Omega} u(\sigma)d\sigma = 0$ *então*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração: Vamos raciocinar por contradição. Suponhamos que a estimativa é falsa. Então para cada $k \in \mathbb{N}$ existe uma função $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ satisfazendo

$$\|u_k - m(u)\|_{L^p(\Omega)} > k\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)}. \tag{1.15}$$

Definimos

$$v_k = \frac{u_k - m(u_k)}{\|u_k - m(u_k)\|_{L^p(\partial\Omega)}} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.16}$$

Então

$$m(v_k) = 0, \|v_k\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1;$$

e (1.15) implica

$$\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)} < \frac{1}{k} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Em particular as funções $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ são limitadas em $W^{1,p}(\Omega)$

Em virtude do Teorema do Traço (Teorema 2) existe uma subsequência $\{v_{k_j}\}_{j=1}^{\infty} \subset \{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ e uma função $v \in L^p(\partial\Omega)$ tais que

$$v_{k_j} \to v \quad \text{em } L^p(\partial\Omega). \tag{1.18}$$

De 1.16 segue que

$$m(v) = 0, \ \|v\|_{L^p(\partial\Omega)} = 1. \tag{1.19}$$

Por outro lado, (1.17) implica que par

$$\int_{\Omega} v\psi_{x_i} dx = \lim_{k_j \to \infty} \int_{\Omega} v_{k_j}\psi_{x_i} = \lim_{k_j \to \infty} \int_{\Omega} v_{k_j, x_i}\psi = 0.$$

Consequentemente $v \in W^{1,p}(\Omega)$, com $\nabla v = 0$ q.t.p. Assim v é constante, desde que Ω é conexo. Entretanto esta conclusão esta em divergência com (1.19): desde que v é constante e $m(u) = 0$ devemos ter $v \equiv 0$; neste caso $\|v\|_{L^p(\partial\Omega)} = 0$. Esta contradição estabelece (1.14). ■

1.4 Pontos críticos e Multiplicadores de Lagrange

Definição 2. *Seja X um espaço de Banach, $\omega \subset X$ um aberto e $J \in C^1(\omega, \mathbb{R})$. Dizemos que $u \in \omega$ é um **ponto crítico** de J, se $J'(u) = 0$. Se u não é um ponto crítico dizemos que u é um **ponto regular** de J. Se $c \in \mathbb{R}$, dizemos que c é valor crítico de J, se existe $u \in \omega$ tal que $J(u) = c$ e $J'(u) = 0$. Se c não é um valor crítico, dizemos que c é um **valor regular** de J.*

Seja X um espaço de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de restrições

$$S := \{v \in X : F(v) = 0\}$$

suponha que para todo $u \in S$, tenhamos $F'(u) \neq 0$. Se $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ (ou de classe C^1 numa vizinhança de S, ou então C^1 sobre S). Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é um **valor crítico** de J sobre S se existe $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $J(u) = c$ e $J'(u) = \lambda F'(u)$. O ponto u é um ponto crítico de J sobre S e o número real λ é chamado de **multiplicador de Lagrange** do valor crítico c (ou do ponto crítico u).

Teorema 4 (Teorema da Função Implícita). *Seja X, Y e Z três espaços de Banach, Ω um aberto de $X \times Y$ e $f \in C^1(\Omega, Z)$. Suponha que $(x_0, y_0) \in \Omega$ é tal que $f(x_0, y_0) = 0$ e que $\partial_y f(x_0, y_0)$ seja um homeomorfismo linear de Y sobre Z. Então existe $\omega \subset X$ vizinhança conexa de x_0 e uma única aplicação $\varphi \in C^1(\omega, Y)$ tal que $\varphi(x_0) = y_0$ e para todo $x \in \omega$ temos $f(x, \varphi(x)) = 0$. Além disso, se $x \in \omega$ e $f(x, y_*) = 0$ então $y_* = \varphi(x)$. A derivada φ' é dada por:*

$$\varphi'(x) = -(\partial_y f(x, \varphi(x)))^{-1} \circ (\partial_x f(x, \varphi(x))).$$

A definição acima é justificada pelo seguinte resultado que estabelece a existência de multiplicadores de Lagrange. e segue do Teorema da Função Implícita

Proposição 9. *Sobre as hipóteses e notações acima, suponha que $u_0 \in S$ é tal que $J(u_0) = \inf_{v \in S} J(v)$. Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que*

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

1.5 O gênero

Definição 3. *Seja X um espaço de Banach.*

*(i) Um subconjunto $A \subset X$ é **par** (ou **simétrico com respeito a origem**) quando $A = -A := \{-a : \ a \in A\}$.*

(ii) O gênero de um subconjunto $A \subset X$ fechado e par é o maior inteiro k para o qual existe uma função ímpar e contínua de A em $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Denotamos o gênero de A por $\gamma(A)$.

Exemplo: Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado aberto e par. Então $\gamma(\partial U) \geq n$ desde que a função identidade $I : \partial U \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ que é contínua e ímpar. Mas, por um corolário do Teorema de Borsuk (Corolário 2.4.5 p.62 de [14]) não existe uma função ímpar que nunca se anula em um subespaço próprio do $\mathbb{R}^n$. Então $\gamma(\partial U) = n$. Em particular $\gamma(S^{n-1}) = n$. ■

Proposição 10. *Sejam A e B conjuntos fechados e pares.*

(i) Se existe uma função contínua e ímpar $f : A \to B$, então

$$\gamma(A) \leq \gamma(B). \tag{1.20}$$

(ii) Se $A \subset B$ então (1.20) ainda é verdadeira.

(iii) Se $h : A \to B$ é um homeomorfismo, então $\gamma(A) = \gamma(B)$.

(iv) Subaditividade:

$$\gamma(A \cup B) \leq \gamma(A) + \gamma(B).$$

(v) Se $\gamma(B) < \infty$. Então

$$\gamma(\overline{A \setminus B}) \geq \gamma(A) - \gamma(B).$$

(vi) Se A é compacto, então $\gamma(A) < \infty$

(vii) Se A é compacto. Defina

$$N_\delta(A) = \{x \in E \mid \operatorname{dist}(x, A) < \delta\}.$$

Então para δ suficientemente pequeno,

$$\gamma(N_\delta(A)) = \gamma(A). \tag{1.21}$$

Demonstração: Ver [14] p. 64 Teorema 2.5.1 ■

1.6 A Teoria de Lyusternik-Shnirelman

Muitas vezes, para estudarmos soluções de certos problemas, é interessante estudar um funcional adequado sobre uma restrição bem escolhida. Isso se deve por múltiplas razões: podemos colocar as questões dos problemas com um ou mais parâmetros, e portanto, compreender alguns fenômenos que não parecem claros a priori; podemos obter as condições necessárias para a existência de solução ou eliminar as incógnitas do problema para obter soluções a posteriori (como no Teorema dos multiplicadores de Lagrange): é o caso de procurarmos valores próprios de um operador A auto-adjunto em um espaço de Hilbert onde os valores próprios aparecem como multiplicadores de Lagrange dos pontos críticos de $v \mapsto (Av|v)$ sobre a esfera unitária de H. Também podemos, em alguns casos, procurar uma solução com propriedades particulares, entre as possíveis soluções para um problema.

1.6.1 A Condição de Palais-Smale

Seja X um espaço de Banach. Consideremos restrições do tipo:

$$S := \{v \in X; F(v) = 0\}, \tag{1.22}$$

e supomos que:

$$F \in C^1(X, \mathbb{R}), \qquad \text{e} \qquad \forall v \in S, \quad F'(v) \neq 0. \tag{1.23}$$

Definição 4. *Sejam X um espaço de Banach, F satisfazendo* (1.23)*, S definido por* (1.22) *e $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Se $c \in \mathbb{R}$, dizemos que $J|_S$ verifica a* ***condição de Palais-Smale (no nível** c**)**, ou que J satisfaz* ***a condição de Palais-Smale sobre*** *S, se para toda sequência $(u_n, \lambda_n) \in S \times \mathbb{R}$ tal que;*

$$J(u_n) \to c \text{ em } \mathbb{R} \qquad e \qquad J'(u_n) \to \lambda_n F'(u_n) \text{ em } X',$$

possui uma subsequência (u_{n_k}, λ_{n_k}) convergindo para (u, λ) em $S \times \mathbb{R}$.

1.6.2 O Campo Pseudo-Gradiente Tangente

Seja X um espaço de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e S definido com em (1.22); suponhamos que F satisfaz a condição (1.23). Se $J \in C^1(X, \mathbb{R})$ para todo $x \in S$ defina:

$$\|J'(x)\|_* = \sup\{\langle J'(x), y\rangle; y \in X, \|y\| = 1, \text{ e } \langle F'(x), y\rangle = 0\}. \tag{1.24}$$

Note que a condição $\|J(u)\|_* = 0$ e $x \in S$ significa precisamente que para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ temos que $J'(x) = \lambda F'(x)$, ou seja, u é um ponto crítico de J sobre S. Em outras palavras, $\|J(x)\|_*$ é a norma da projeção de $J'(u)$ no hiperplano tangente a S em x.

Definição 5. *Seja X um espaço de Banach, J e $F \in C^1(X, \mathbb{R})$, S definida por* (1.22)*, F satisfazendo* (1.23)*. Para todo $u \in S$, dizemos que $v \in X$ é um* ***pseudo-gradiente tangente*** *(ao conjunto S) de J em u, se temos*

$$\begin{cases} \|v\| \leq 2\|J'(u)\|_* \\ \langle J'(u), v\rangle \geq \|J'(u)\|_*^2, \qquad \langle F'(u), v\rangle = 0. \end{cases} \tag{1.25}$$

E denotando por $S_r := \{u \in S;\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R},\ J'(u) - \lambda F'(u) \neq 0\}$ o conjunto dos pontos regulares de J sobre S, uma aplicação $V : S_r \to X$ é chamado de campo ***pseudo-gradiente tangente*** *de J se é localmente lipschitziana sobre S_r e para todo $u \in S_r$, $V(u)$ é um pseudo-gradiente tangente de J em u.*

Para garantir a existência de um campo pseudo-gradiente tangente. precisamos supor que a função F é um pouco mais regular que de classe $C^1(X, \mathbb{R})$. Mais especificamente designando por $C^{1,1}_{loc}(X, \mathbb{R})$ o conjunto das funções $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ tal que F' é localmente lipschitziana de X em X', temos

Lema 1. *Seja X um espaço de Banach, $J \in C^1(X, \mathbb{R})$, $F \in C^{1,1}_{loc}(X, \mathbb{R})$, S definido por* (1.22)*. Suponha que F satisfaz* (1.23) *e que J não é constante sobre S. Então existe V um campo pseudo-gradiente de J sobre S_r, tal que V seja localmente lipschitziana sobre uma vizinhança $\widetilde{S_r}$ de S_r. Mais ainda, se F e J forem pares, podemos escolher $\widetilde{S_r}$ simétrica com respeito a origem e V ímpar.*

Demonstração: Ver [12], página 205. ∎

1.6.3 O Lema da Deformação

Suponha que $J : S \to \mathbb{R}$ de classe C^1 numa vizinhança. Denotemos por $[J \leq a]$ o conjunto dos $x \in S$ tal que $J(x) \leq a$.

Lema 2 (Lema da Deformação)**.** *Seja X um espaço de Banach, $F \in C^{1,1}(X, \mathbb{R})$, S definida por* (1.22) *e satisfazendo* (1.23)*. Suponha que $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $J := E|_S$ satisfaz a condição de Palais-Smale sobre S; suponha também que J não é constante sobre S e que $c \in \mathbb{R}$ não é valor crítico de J sobre S. Então existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ existe uma aplicação $\eta \in C(\mathbb{R} \times S, S)$ satisfazendo as seguintes condições:*

1) Para todo $u \in S$, temos $\eta(0, u) = u$.

2) Para todo $t \in \mathbb{R}$ e $u \notin [c - \varepsilon_0 \leq J \leq c + \varepsilon_0]$, temos $\eta(t, u) = u$.

3) Para todo $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t, \cdot)$ é um homeomorfismo de S em S.

4) Para todo $u \in S$, a função $t \mapsto J(\eta(t, u))$ é decrescente sobre $\mathbb{R}$.

5) Se $u \in [J \leq c + \varepsilon]$, então $\eta(1, u) \in [J \leq c - \varepsilon]$.

6) Se J e F são pares, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\eta(t,\cdot)$ é um homeomorfismo ímpar.

Demonstração: Ver [12], página 207. ∎

Teorema 5 (O Princípio de min-max)**.** *Sejam X um espaço de Banach, $F \in C^{1,1}_{loc}(X,\mathbb{R})$ e S como em (1.22)e (1.23). Sejam $E \in C^1(X,\mathbb{R})$ tal que $J := E|_S$ é não constante e satisfaz a condição de Palais-Smale sobre S e $\mathfrak{B}$ uma familia não vazia de de subconjunto não-vazio de S. Suponha que para cada $c \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ suficiente pequeno, o fluxo $\eta(1,\cdot)$ construído no lema da deformação (Lema 2) fixe $\mathfrak{B}$ (isto é, se $A \in \mathfrak{B}$, então $\eta(1,A) \in \mathfrak{B}$). Pondo:*

$$c_* := \inf_{A\in\mathfrak{B}} \sup_{v\in A} J(u).$$

se $c_* \in \mathbb{R}$, então c_* é um valor crítico de J em S.

Demonstração: Ver [12], página 208. ∎

1.6.4 Teoremas Lyusternik-Shnirelman

O resultado seguinte é devido a L. Lyusternik & L. Shnirelman, demonstrado originalmente utilizando a noção de categoria (sobre o espaço projetivo $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$), mas mostraremos utilizando a noção de gênero:

Teorema 6 (Lyusternik-Shnirelman)**.** *Seja $E : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Seja S^{n-1} a esfera de $\mathbb{R}^n$ (munido da norma euclidiana) consideramos a função $J(u) := E(u)$ para $u \in S^{n-1}$. Então J admite no mínimo n dupla de pontos críticos sobre S^{n-1}, isto é, existe (pelo menos) n pares (u_k,λ_k) com $u_k \in S^{n-1}$ e $\lambda_k \in \mathbb{R}$ tal que $E'(u_k) = \lambda_k u_k$ para $1 \le k \le n$ (naturalmente $(-u_k,\lambda_k)$ possui a mesma propriedade).*

Demonstração: Denotemos por $s(\mathbb{R}^n)$ o conjunto dos subconjuntos não-vazios fechados do $\mathbb{R}^n$ que contem o zero e são simétricos com relação a origem, e $\gamma(A)$ é o gênero do conjunto A, quando $A \in s(\mathbb{R}^n)$. Seja, para $1 \le k \le n$:

$$\mathfrak{B}_k := \{A \subset S^{n-1}; A \in s(\mathbb{R}^n) \text{ e } \gamma(A) \ge k\}.$$

Temos $\mathfrak{B}_k \supset \mathfrak{B}_{k+1} \neq \emptyset$ se $1 \le k \le n-1$ (note que $\mathfrak{B}_{n+1} = \emptyset$). Definimos então:

$$c_k = \inf_{A\in\mathfrak{B}_k} \max_{v\in A} J(v).$$

Pondo $F(x) := \|x\|^2 - 1$ para rodo $x \in \mathbb{R}^n$ e $S := S^{n-1}$, as hipóteses do Lema da Deformação (Lema 2) são cumpridas e $\mathfrak{B}_k$ é fixo pelo fluxo ímpar $\eta(1,\cdot)$. Consequentemente, pelo Princípio de Minimax (Teorema 5), cada c_k é um valor crítico de J sobre S^{n-1}. Mais ainda, $c_k \le c_{k+1}$ se $1 \le k \le n-1$; por isto, vemos que se todos os c_k são distintos então J possui n valores críticos, isto é, n pares de pontos críticos. Para mostrar o teorema, nos resta estabelecer o lema seguinte (lembremos que se $\gamma(A) \ge 2$ então A contém um número infinito de pontos). ∎

Lema 3. *Se para os inteiros $1 \leq k \leq n-1$ e $1 \leq j \leq n-k$ temos $c_k = c_{k+j}$, então o gênero do conjunto*

$$K(c_k) := \{u \in S^{n-1}; J(u) = c_k \text{ e } \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } E'(u) = \lambda u\}$$

é pelo menos $j+1$ (isto é, $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$).

Este resultado é verdadeiro, independentemente de se está no contexto de um espaço de dimensão finita, vejamos um resultado análogo em contexto mais amplo:

Teorema 7. *Seja X um espaço de Banach, $F \in C^{1,1}_{loc}(X, \mathbb{R})$, S definido por (1.22) e verificando (1.23), $E \in C^1(X, \mathbb{R})$ e $J := E|_S$. Suponha que F e J são pares, que J não é constante, satisfaz a condição de Palais-Smale sobre S e que $0 \notin S$. Para todo inteiro $k \geq 1$ pomos:*

$$\mathfrak{B}_k := \{A \in s(X);\ A \subset S,\ \text{e } \gamma(A) \geq k\} \quad \text{e} \quad c_k = \inf_{A \in \mathfrak{B}_k} \sup_{v \in A} J(v).$$

(i) Para todo $k \geq 1$ tal que $\mathfrak{B}_k \neq 0$ e $c_k \in \mathbb{R}$ então c_k é um valor crítico de J sobre S. Além disso $c_k \leq c_{k+1}$ e se para para um inteiro $j \geq 1$ temos $\mathfrak{B}_k \neq \emptyset$ e $c_k = c_{k+j} \in \mathbb{R}$, então $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$, onde:

$$K(c_k) := \{u \in S;\ J(u) = c_k,\ \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \text{tal que } E'(u) = \lambda F'(u)\}.$$

(ii) Se para todo $k \geq 1$ temos $\mathfrak{B}_k \neq 0$ e $c_k \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{k \to \infty} c_k = +\infty.$$

Demonstração: Como a sequência $\mathfrak{B}_k$ é decrescente, é claro que $c_k \leq c_{k+1}$ sempre que $\mathfrak{B}_{k+1} \neq \emptyset$. Se $c_k \in \mathbb{R}$ (supondo $\mathfrak{B}_k \neq \emptyset$) é claro que o fluxo η construído no Lema da Deformação (Lema 2) fixa $\mathfrak{B}_k$ no sentido que se $A \in \mathfrak{B}_k$, então $\eta(1, A) \in \mathfrak{B}_k$. Como consequência do Princípio de Minimax (Teorema 5), c_k é valor crítico de J sobre S.

Suponhamos que $\mathfrak{B}_k \neq \emptyset$ e que $c_k = c_{k+1} \in \mathbb{R}$. Como J satisfaz a condição de Palais-Smale sobre S, temos que $K(c_k)$ é compacto, logo de gênero finito (pelo item (vi) da Proposição 10). Vamos provar, por redução ao absurdo que, $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$. Se $\gamma(K(c_k)) \leq j$, podemos ver facilmente (utilizando a propriedade (vii) da Proposição 10) que existe $\tau > 0$ tal que, se $\omega = \{v \in S; dist(v, K) < \tau\}$ e $\widetilde{K} = \overline{\omega}$, temos $\gamma(\widetilde{K}) = \gamma(K(c_k))$. Então (usando novamente o fata que J satisfaz a condição de Palais-Smale), existe $\varepsilon_1 > 0$ e $\delta > 0$ (com $\delta \leq 1$) tal que:

$$\forall v \in [J \leq c_k + \varepsilon_1] \setminus ([J \leq c_k - \varepsilon_1] \cup \omega), \quad \|J'(v)\|_* \geq \delta.$$

Seja $\varepsilon_0 := \min(\varepsilon_1, \delta^2/8)$. Aplicando o Lema 1.25, existe um campo pseudo-gradiente tangente V ímpar e uma vizinhança aberta $\widetilde{S_r}$ simétrica com respeito a origem e localmente Lipschitziana. Seja $R(v) := \frac{1}{2}\min(\|v\|, d(v, (\widetilde{S_r})^c))$ para $v \in S_r$, e

$$\Omega := \bigcup_{v \in S_r} B(v, R(v)).$$

Seja $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, escolhemos uma função localmente Lipschitziana $\alpha : X \to [0,1]$ tal que:

$$\begin{array}{lll} \alpha(v) = 0 & \text{se} & v \in [J \leq c_k - \varepsilon_0] \cup [J \leq c_k + \varepsilon_0] \cup \tilde{K} \cup \Omega^c, \\ \alpha(v) = 1 & \text{se} & v \in [c_k - \varepsilon \leq J \leq c_k + \varepsilon] \setminus \omega. \end{array}$$

Construímos o fluxo $\eta(t,x)$ com solução da equação diferencial:

$$\frac{d}{dt}\eta(t,x) = -\alpha(\eta)\min(1, \|V(\eta)\|)V(\eta), \qquad \eta(0,x) = x \in S$$

podemos mostrar que $\eta(t,\cdot)$ é um homeomorfismo ímpar de S em S e que $\eta(1,[J \leq c_k + \varepsilon] \setminus \omega) \subset [J \leq c_k - \varepsilon]$ (ver demostração do Lema 4.1 de [12]). Se $A \in \mathfrak{B}_{k+j}$ é tal que $c_k \leq \sup_{v\in A} J(v) \leq c_k + \varepsilon$, pela propriedade (vii) da Proposição 10, temos:

$$\gamma\left(\overline{A \setminus \tilde{K}}\right) \geq \gamma(A) - \gamma(\tilde{K}) \geq k + j - j.$$

Mas pondo $B := \eta\left(1, \overline{A \setminus \tilde{K}}\right)$ temos que $B \in \mathfrak{B}_k$, pois $\eta(1,\cdot)$ é um homeomorfismo de S sobre si mesmo. Isto implica a desigualdade $c_k \leq \sup_{v\in B} J(u) \leq c_k - \varepsilon$ que é impossível. Por consequência temos que $\gamma(K(c_k)) \geq j + 1$ e a parte (i) do Teorema esta provada.

Para mostrar a parte (ii) lembremos que é impossível que a sequência seja estacionária, isto é, que para algum inteiro $k \geq 1$ tenhamos $c_k = c_{k+j}$ para todo $j \geq 1$. Com efeito, como J satisfaz a condição de Palais-Smale e por consequência $K(c_k)$ é compacto, portanto de gênero finito, então se $c_k = c_{k+j}$ temos que $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$ Isso só é possível para um número finito de j's. Concluímos que se c_k não tende para o infinito, a outra possibilidade para c_k é convergir para $c \in \mathbb{R}$ com $c > c_k$ para todo k. Mas neste caso,

$$K := \{u \in S; c_1 \leq J(u) \leq c, \exists \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } E'(u) = \lambda u\},$$

é compacto (pois J verifica a condição de Palais-Smale), com gênero finito, por exemplo $\gamma(K) =: n$. Repetindo o argumento acima, podemos encontrar τ suficientemente pequeno tal que se

$$\omega := \{v \in S; dist(v,K) < \tau\},$$

e $\tilde{K} := \overline{\omega}$ então $\gamma(\tilde{K}) = \gamma(K) = n$. Então encontrando ε_1 e $\delta > 0$ como acima e pondo $\varepsilon_0 := \min(\varepsilon_1, \delta^2/8, c_1/2, (c - c_1)/2)$ e, para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ construímos o fluxo η de sorte que $\eta(1,[J \leq c + \varepsilon] \setminus \omega) \subset [J \leq c - \varepsilon]$. Agora, se $k \geq 1$ é um inteiro tal que $c_k > c - \varepsilon$, podemos tomar $A_0 \in \mathfrak{B}_{k+n}$ tal que $\sup_{v\in A_0} J(v) \leq c + \varepsilon$. Mas pondo $A := A_0 \setminus \omega$, sabemos que $A \in \mathfrak{B}_k$ e que $M := \eta(1,A) \in \mathfrak{B}_k$. Por isso, $c_k \leq \sup_{v\in M} J(v)$ e, ao mesmo tempo, $M \subset [J \leq c - \varepsilon]$, que é impossível pela hipótese $c - \varepsilon < c_k$. ■

Como em um espaço de dimensão infinita a esfera unitária tem gênero infinito, ela contém conjuntos de gênero k, para todo $k \geq 1$. Então podemos deduzir do Teorema 7 esta generalização do Teorema de Lyusternik-Shnirelman no caso de um espaço de dimensão infinita:

Teorema 8. *Seja H um espaço de Hilbert de dimensão infinita, $E \in C^1(H, \mathbb{R})$ uma função par e $J := E|_S$, onde S á a esfera unitária de H. Suponha que J satisfaz a condição de Palais-Smale sobre S, e é limitada inferiormente e não constante. Então J possui uma infinidade (de pares) de pontos críticos sobre S. Mais precisamente, se $\mathfrak{B}_k = \{A \in s(H); A \subset S, A$ compacto e $\gamma(A) \geq k\}$ e*

$$c_k := \inf_{A \in \mathfrak{B}_k} \max_{c \in A} J(v),$$

então c_k é um valor crítico de J sobre S, $c_k \leq c_{k+1}$; e se $c_k = c_{k+j}$ então $\gamma(K(c_k)) \geq j+1$. Além disto, $\lim_{k \to \infty} c_k = +\infty$.

1.7 Autovalores de Steklov

O problema de autovalores de Steklov em um domínio limitado suave Ω consiste de procurar soluções não triviais u para

$$\Delta u = 0 \text{ em } \Omega, \quad \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = \mu u \text{ sobre } \partial\Omega.$$

Este problema também é chamado de problema de autovalor de funções Dirichlet-para-Neumann do laplaciano em Ω.

De maneira mais geral, consideremos o operador elíptico de segunda ordem linear

$$Pu \equiv Au + au \equiv \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x) u_{x_i})_{x_j} + a(x)u \tag{1.26}$$

definido em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, onde $\partial\Omega$ é suave. Vamos assumir que os coeficientes de P são suave, e que $a_{ij} = a_{ji}$ em Ω. Assumimos ainda que A é fortemente elíptico em Ω, no sentido de que existe um $\alpha > 0$ tal que para todo ξ,

$$\sum_{i,j} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \geq \alpha |\xi|^2, \quad x \in \Omega. \tag{1.27}$$

Vamos considerar o operador (1.26) junto com a condição de fronteira da forma

$$\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + \beta(x) u = 0 \quad \text{sobre } \partial\Omega \tag{1.28}$$

onde $\alpha(x) \geq 0$, $\beta \geq 0$, $\alpha^2(x) + \beta^2(x) \neq 0$.

Estamos interessados no espectro do operador P, onde consideramos P como um operador agindo nas funções de $H^2(\Omega)$ que satisfazem (1.28) sobre $\partial\Omega$ em $L^2(\Omega)$.

Definição 6. *O espectro de P é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ para os quais $P - \lambda I$ não é invertível. Vamos denotar $\sigma(P)$ o espectro de P.*

Desde que P é auto-adjunto o espectro de P é um subconjunto dos números reais.

Lembremos que um operador compacto C em um espaço de Hilbert H é tal que as imagens de conjuntos limitados são precompactos. È fáil ver que os operadores compactos não são invertíveis, assim $0 \in \sigma(P)$. Mais ainda, se C é compacto, e $\lambda \in \mathbb{C}$, então $K = C - \lambda I$ é um operador de Fredholm, isto é $\dim \ker K$ e $\dim \operatorname{coker} K$ são ambos finitos.

Proposição 11. *Se C é um operador compacto então $\sigma(C)$ é discreto, e 0 é o único possível ponto de aderência de $\sigma(C)$.*

Desde que A é um operador elíptico de segunda ordem, A leva H^2 em $L^2(\Omega)$. Ademais A satisfaz a desigualdade de Gardinig (ver [3]):

$$\langle A\phi, \phi\rangle_{L^2(\Omega)} \geq c_1\|\phi\|_{W^{1,2}(\Omega)} - c_2\|\psi\|_{L^2(\Omega)}, \quad c_1 > 0, \quad c_2 > 0 \tag{1.29}$$

Usamos esta desigualdade para mostrar que A é um operador de Fredholm com posto fechado (ver [3]).

Agora se k é uma constante tal que $k > c_2$, então (1.29) mostra que $A + kI$ é injetiva. Desde que $A+kI$ tem posto denso e fechado, vemos que $A+kI$ é sobrejetivo e assim um isomorfismo. Seja $\tilde{C} = (A + kI)^{-1}$ e seja i a inclusão $i : H^2 \to L^2(\Omega)$. Então i é compacto, e assim $C = i\circ\tilde{C}$ também é compacto. Além disso, $\sigma(A+kI) = \{\lambda : \lambda^{-1} \in \sigma(\tilde{C})\} = \{\lambda : \lambda^{-1} \in \sigma(C)\}$. Assim o espectro de $A + kI$ é discreto e ∞ é o único ponto de acumulação possível; a mesma conclusão é portanto válida para A.

Capítulo 2

Existência de uma Infinidade de Soluções para um Problema de Valor Inicial Não-linear Bidimensional

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio $C^{2,\alpha}$, neste capítulo vamos estudar o seguinte problema elíptico

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \lambda \sinh(v) & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Estamos interessados em obter a existência de soluções clássicas. Nos capítulos seguintes analisamos o comportamento limite das soluções quando $\lambda \to 0^+$ (Blow-up). Tal problema, como referido na introdução, está intimamente relacionado com modelos de corrosão.

2.1 Formulação Variacional e Resultados Preliminares

A fim de encontrar soluções para (2.1) utilizamos um método variacional para obter "soluções fracas" que são pontos críticos do funcional "energia" associado ao problema. Em seguida, a teoria padrão de regularidade eliptica implica que as soluções são, de fato, clássicas.

Definição 7. *(a) Uma solução clássica para* (2.1) *é uma função* $v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *que satisfaz* (2.1) *pontualmente.*

(b) Uma solução fraca para (2.1) *é uma função* $v \in H^1(\Omega)$ *tal que*

$$\int_\Omega \nabla u \nabla v \, dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \sinh(v(\sigma)) \, d\sigma = 0 \quad \forall u \in H^1(\Omega) \tag{2.2}$$

(c) Consideremos o funcional energia associado ao problema (2.1) *dado por*

$$E(v) = \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(v(\sigma)) - 1] \, d\sigma, \quad v \in H^1(\Omega) \tag{2.3}$$

onde $\|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$ *é a norma em* $L^2(\Omega)$.

No que segue o espaço $H^1(\Omega)$ é equipado com o produto interno.

$$(u|v)_1 := \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)dx + \int_{\partial\Omega} u(\sigma)v(\sigma)d\sigma; \tag{2.4}$$

a norma associada é denotada por $\|\cdot\|_1$.

Para mostrarmos que E é bem definido, contínuo e de classe C^1 em $H^1(\Omega)$ e seus pontos críticos de são soluções fracas para (2.1) precisamos mostrar as duas as proposições seguintes:

Proposição 12. *Dado $a\in\mathbb{R}$ existe uma constante $C>0$ e $\beta>0$, tal que*

$$\int_{\partial\Omega}\cosh(\alpha v(\sigma))d\sigma \le C\exp(\beta\|v\|_1^2), \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

Demonstração: Afirmamos que para todo $v\in H^1(\Omega)$ vale a desigualdade de Trundger-Moser:

$$\int_\Omega e^{\alpha v}\,dx \le Ce^{\beta\|v\|_1^2}. \tag{2.5}$$

De fato, existem constantes $c_1>0$ e $c_2>0$ tal que

$$\int_\Omega e^{(v/c_1\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)})^2} \le c_2|\Omega|, \quad v\in H_0^1(\Omega)$$

(ver [11], Teorema 7.15 página 169). Assim, se $v\in H_0^1(\Omega)$

$$\begin{aligned}
\int_\Omega e^{\alpha v}\,dx &= \int_\Omega e^{(\alpha\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}c_1)\left(\frac{v}{c_1\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}}\right)}\,dx\\
&\le \int_\Omega e^{(\alpha\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}c_1)^2+\left(\frac{v}{c_1\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}}\right)^2}\,dx\\
&= \int_\Omega e^{(\alpha\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}c_1)^2}e^{\left(\frac{v}{c_1\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}}\right)^2}\,dx\\
&\le e^{(\alpha\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}c_1)^2}c_2|\Omega|\\
&= c'e^{\beta'\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2},
\end{aligned}$$

onde $c'=c_2|\Omega|>0$ e $\beta'=(\alpha/c_1)^2>0$.

Seja $\tilde\Omega$ limitado e tal que $\Omega\subset\subset\tilde\Omega$, pelo teorema de extensão (ver [10], Teorema 1, página 254) dado $v\in H^1(\Omega)$ existe $\tilde v\in H_0^1(\tilde\Omega)$ tal que

$$\tilde v = v \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad \|\tilde v\|_{H_1^0(\tilde\Omega)} \le C\|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

Mas, $\|\tilde v\|_{H_0^1(\tilde\Omega)} = \|\tilde v\|_{L^2(\tilde\Omega)} + \|\nabla\tilde v\|_{L^2(\tilde\Omega)}$ o que implica que $\|\nabla\tilde v\|_{L^2(\tilde\Omega)} \le \|\tilde v\|_{H_0^1(\tilde\Omega)}$. E daí,

$$\tilde v = v \text{ em } \Omega \quad \text{e} \quad \|\nabla\tilde v\|_{L^2(\tilde\Omega)} \le C\|v\|_{H^1(\Omega)}. \tag{2.6}$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde\Omega} e^{\alpha\tilde v}\,dx &= \int_\Omega e^{\alpha\tilde v}\,dx + \int_{\tilde\Omega\setminus\Omega} e^{\alpha\tilde v}\,dx\\
&= \int_\Omega e^{\alpha v}\,dx + \int_{\tilde\Omega\setminus\Omega} e^{\alpha\tilde v}\,dx
\end{aligned}$$

e $\int_{\tilde{\Omega}\setminus\Omega} e^{\alpha\tilde{v}}\, dx \geq 0$, a equação (2.6) implica que para todo $v \in H^1(\Omega)$ vale:

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{\alpha v}\, dx \leq \int_{\tilde{\Omega}} e^{\alpha\tilde{v}} &\leq \tilde{c}e^{\tilde{\beta}\|\nabla\tilde{v}\|^2_{L^2(\tilde{\Omega})}} \\ &\leq \tilde{c}e^{\tilde{\beta}C\|v\|^2_{H^1(\Omega)}} \\ &= \bar{c}e^{\bar{\beta}\|v\|^2_{H^1(\Omega)}},\end{aligned}$$

onde $\bar{c} = \tilde{c}$ e $\bar{\beta} = \tilde{\beta}C$. Isto prova (2.5).

Agora, pela imersão do traço (Teorema 2) temos:

$$\int_{\partial\Omega} |w|^p\, d\sigma \leq c_p\left(\int_\Omega |\nabla w|^p\, dx + \int_\Omega |w|^p\, dx\right), \tag{2.7}$$

para todo $p > 1$. Fixado $1 < p < 2$, afirmamos que $e^{\alpha v/p} \in W^{1,p}(\Omega)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. De fato,

(i) $e^{\alpha v/p} \in L^p(\Omega)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$: devido a (2.5) temos

$$\int_\Omega |e^{\alpha v/p}|^p dx = \int_\Omega e^{\alpha v} dx \leq ce^{\beta\|v\|_1^2} < +\infty, \quad \forall v \in H^1(\Omega);$$

(ii) $\nabla(e^{\alpha/p}) \in L^p(\Omega)$ para todo $v \in H^1(\Omega)$, pois a regra do produto e a Desigualdade de Hölder implicam

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla(e^{\alpha v/p})|^p dx &= \int_\Omega \left|\frac{\alpha}{p}e^{\alpha v/p}\nabla v\right|^p dx \\ &= \int_\Omega \left|\frac{\alpha}{p}e^{\alpha v/p}\right|^p |\nabla v|^p\, dx \\ &\leq \left|\frac{\alpha}{p}\right|^p \left(\int_\Omega |\nabla v|^2\, dx\right)^{p/2} \left(\int_\Omega (e^{\alpha v})^{2/(2-p)}\right)^{(2-p)/2} \\ &\leq c'\|v\|_1^p e^{\beta'\|v\|_1^2}.\end{aligned}$$

Usando (2.7) e as estimativas obtidas em (i) e (ii) temos

$$\int_{\partial\Omega} e^{\alpha v}\, d\sigma \leq c_p\left(\int_\Omega |\nabla(e^{\alpha v})|^p\, dx + \int_\Omega |e^{\alpha v}|^p\, dx\right) \leq c''(\|v\|_1^p + 1)e^{\beta''\|v\|_1^2}.$$

Mas, $1 + t \leq e^t$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Portanto,

$$\int_{\partial\Omega} e^{\alpha v}\, d\sigma \leq Ce^{\beta\|v\|_1^2}.$$

Desde que $\cosh(v(\sigma)) = \frac{1}{2}\left[e^{v(\sigma)} + e^{-v(\sigma)}\right]$ concluímos a proposição. ∎

Proposição 13. *Se $\{v_n\}_n$ é uma sequência em $H^1(\Omega)$ convergindo fracamente para $v \in H^1(\Omega)$ então*

$$\sinh(\alpha v_n) \to \sinh(\alpha v) \quad e \quad \cosh(\alpha v_n) \to \cosh(\alpha v)$$

fortemente em $L^2(\partial\Omega)$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ fixo.

Demonstração: Vamos mostrar apenas a primeira convergência, pois a segunda é inteiramente análoga.

Pelo Teorema do Valor Médio,

$$\sinh(\alpha v_n(x)) - \sinh(\alpha v(x)) = \alpha(v_n - v)(x)\cosh(\alpha\xi_n(x)), \tag{2.8}$$

com $\min\{v_n(x), v(x)\} \leq \xi_n(x) \leq \max\{v_n(x), v(x)\}$. Note que

$$\begin{aligned}
\xi_n(x) &\leq \max\{v_n(x), v(x)\}\\
&= \frac{(v_n(x) + v(x)) + |v_n(x) - v(x)|}{2}\\
&\leq \frac{|v_n(x)| + |v(x)| + |v_n(x)| + |v(x)|}{2}\\
&= |v_n(x)| + |v(x)|
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\xi_n(x) &\geq \min\{v_n(x), v(x)\}\\
&= \frac{(v_n(x) + v(x)) - |v_n(x) - v(x)|}{2}\\
&\geq \frac{-|v_n(x)| - |v(x)| - |v_n(x)| - |v(x)|}{2}\\
&= -(|v_n(x)| + |v(x)|).
\end{aligned}$$

Donde, $|\xi_n(x)| \leq |v_n(x)| + |v(x)|$.

Afirmação 1. *As funções* $t \mapsto \sinh t$ *e* $t \mapsto \cosh t$ *satisfazem:* $\cosh|t| = |\cosh t|$, $\sinh|t| = |\sinh t|$. *Além disso,* $\sinh t$ *é crescente em* $(-\infty, +\infty)$ *e* $\cosh t$ *é crescente em* $[0, +\infty)$.

De fato,

- $$\begin{aligned}
\cosh|t| &= \frac{e^{|t|} + e^{-|t|}}{2}\\
&= \begin{cases} \dfrac{e^t + e^{-t}}{2} & \text{se} \quad t \geq 0\\ \dfrac{e^{-t} + e^t}{2} & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases}\\
&= \cosh t\\
&= |\cosh t|,
\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}
\sinh|t| &= \frac{e^t - e^{-|t|}}{2}\\
&= \begin{cases} \dfrac{e^t - e^{-t}}{2} & \text{se} \quad t \geq 0\\ \dfrac{e^{-t} - e^t}{2} & \text{se} \quad t \leq 0 \end{cases}\\
&= |\sinh t|
\end{aligned}$$

e $\frac{d}{dt}[\sinh t] = \cosh t \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \sinh t$ é crescente em $(-\infty, +\infty)$, $\frac{d}{dt}[\cosh t] = \sinh t \geq 0, \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow \cosh t$ é crescente em $[0, +\infty)$. Donde concluímos a afirmação.

A afirmação acima, juntamente com a equação (2.8) resulta em:

$$\begin{aligned} |\sinh(\alpha v_n(x)) - \sinh(\alpha v(x))|^2 &= |\alpha|^2 |v_n - v(x)|^2 |\cosh^2(\alpha \xi_n(x))| \\ &= |\alpha|^2 |(v_n - v)(x)|^2 \cosh^2(|\alpha||\xi_n(x)|) \\ &= |\alpha|^2 |(v_n - v)(x)|^2 \cosh^2(|\alpha|(|v_n(x)| + |v(x)|)), \end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned} \|\sinh(\alpha v_n) &- \sinh(\alpha v)\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |\sinh(\alpha v_n(\sigma)) - \sinh(\alpha v(\sigma))|^2 d\sigma \\ &\leq \int_{\partial\Omega} |\alpha|^2 |v_n(\sigma) - v(\sigma)|^2 \cosh^2(|\alpha|(|v_n(\sigma)| + |v(\sigma)|) d\sigma \\ &\leq |\alpha| \left[\int_{\partial\Omega} |(v_n - v)(\sigma)|^4 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{\partial\Omega} \cosh^4(|\alpha|(|v_n(\sigma)| + |v(\sigma)|)) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq |\alpha|^2 \|v_n - v\|^2_{L^4(\partial\Omega)} \left[\int_{\partial\Omega} 2^4 \cosh^4(|\alpha||v_n(\sigma)|) \cosh^4(|\alpha||v(\sigma)|) \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= |2\alpha|^2 \|v_n - v\|^2_{L^4(\partial\Omega)} \|\cosh(|\alpha v_n|) \cosh(\alpha v)\|^2_{L^4(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{aligned} \|\sinh(\alpha v_n) &- \sinh(\alpha v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq |2\alpha| \|v_n - v\|_{L^4(\partial\Omega)} \|\cosh(|\alpha v_n|) \cosh(\alpha v)\|_{L^4(\partial\Omega)} \\ &\leq |2\alpha| \|v_n - v\|_{L^4(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} \cosh^8(|\alpha v_n|) dx \right)^{\frac{1}{8}} \left(\int_{\partial\Omega} \cosh^8(|\alpha v|) dx \right)^{\frac{1}{8}} \\ &\leq |2\alpha| \|v_n - v\|_{L^4(\partial\Omega)} \left(\int_{\partial\Omega} \cosh(|8\alpha v_n|) dx \right)^{\frac{1}{8}} \left(\int_{\partial\Omega} \cosh(|8\alpha v|) dx \right)^{\frac{1}{8}} \\ &\leq |2\alpha| \|v_n - v\|_{L^4(\partial\Omega)} \left(C \exp(\beta \|v_n\|_1^2) \right)^{\frac{1}{8}} \left(C \exp(\beta \|v\|_1^2) \right)^{\frac{1}{8}} \\ &= 2|\alpha| C^{\frac{1}{4}} e^{\frac{\beta}{8}(\|v_n\|_1^2 - \|v\|_1^2)} \|v_n - v\|_{L^4(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Mas, como $v_n \rightharpoonup v$ em $H^1(\Omega)$ então $\{v_n\}_n$ é limitada em $H^1(\Omega)$. Logo,

$$\|\sinh(\alpha v_n) - \sinh(\alpha v)\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq \overline{C} \|v_n - v\|_{L^4(\Omega)}. \tag{2.9}$$

Além disso, da imersão compacta $H^1(\Omega) \subset L^p(\partial\Omega)$, $p < \infty$, temos que $v_n \to v$ em $L^4(\partial\Omega)$. Isto juntamente com (2.9) implica que $\sinh(\alpha v_n) \to \sinh(\alpha v)$ em $L^2(\partial\Omega)$. ■

Proposição 14. *O funcional $E : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado em (2.3) é bem definido e C^∞. Além disso, v é ponto crítico de E se, e somente se, v é uma solução fraca para (2.1).*

Demonstração: Consideremos os funcionais

$$M(v) = \frac{1}{2} \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \text{ e } N(v) = \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(v(\sigma)) - 1] d\sigma.$$

É claro que M é C^∞ e $M'(v) \cdot u = \langle \nabla v, \nabla u \rangle_{L^2(\Omega)}$ com $v, u \in H^1(\Omega)$. Graças às Proposições 12 e 13, N está bem definida em $H^1(\Omega)$ e C^∞ com $N'(v) \cdot u = \int_{\partial\Omega} \sinh(v(\sigma)) u(\sigma) d\sigma$. Notemos que v é um ponto crítico de E se, e somente se,

$$0 = E'(v)u = \int_\Omega \nabla u \nabla v - \int_{\partial\Omega} \cosh(v(\sigma)) u(\sigma)\, d\sigma, \quad \forall u \in H^1(\Omega),$$

isto é, v é solução fraca de (2.1). ■

Proposição 15 (Regularização). *Se $v \in H^1(\Omega)$ é uma solução fraca para* (2.1) *então v é uma solução clássica.*

Demonstração: Segue da teoria padrão de regularização elíptica, pois o domínio Ω é de classe $C^{2,\alpha}$. ■

2.2 Escolhendo um Funcional Adequado

Para construir uma família da pontos críticos em E, e assim uma família de soluções para (2.1), temos duas possibilidades: a primeira é construir pontos críticos do *funcional indefinido* E em $H^1(\Omega)$, onde indefinido refere-se ao fato de E não ser limitado inferiormente (basta tomar $v \in H^1(\Omega)$ constante) nem superiormente (considere a familia $v_n = nv$, com $n \in \mathbb{N}$ e $v \in H^1(\Omega)$ tal que $v = 0$ em $\partial\Omega$); a segunda possibilidade é introduzir um funcional J que é limitado inferiormente ou superiormente, tal que seus pontos críticos de sobre alguma subvariedade Σ produzam pontos críticos de E em $H^1(\Omega)$ (via alguma uma transformação simples), ver [2] ou [6]. No que segue optamos pelo segundo caminho.

2.3 Definição e Regularidade do Funcional J

Agora introduziremos um funcional J limitado inferiormente e tal que os pontos críticos em alguma subvariedade Σ produzem pontos críticos de E em $H^1(\Omega)$.

Dado $u \in H^1(\Omega)$, $u \neq 0$ definamos por

$$J(u) := \sup_{t>0} E(tu).$$

Observação 1. *O funcional J satisfaz as seguintes propriedades:*

(i) $J(u) \geq 0$, para todo $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e $J(u) = 0$ se, e somente se, $E(tu) \leq 0$, para todo $t > 0$.
Claramente, $J(u) = \sup_{t>0} E(tu) \geq 0$. Se $J(u) = 0$ temos $\sup_{t>0} E(tu) = 0$ e assim $E(tu) \leq 0$ para todo $t > 0$.

Reciprocamente, se $E(tu) \leq 0$, para todo $t > 0$ temos $u|_{\partial\Omega} \not\equiv 0$, se não, $E(tu) = \frac{t^2}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$ para todo $t > 0$, que é uma contradição.

Seja $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ tal que $t_n \to 0^+$, em particular existe $M \geq 0$ tal que $|t_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Defina $\varphi(\sigma) = \cosh(t_n u(\sigma)) - 1$ para quase todo $\sigma \in \partial\Omega$. É claro que $\varphi_n \in L^1(\partial\Omega)$ para cada $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ (pelo Lema 12) e $\varphi_n \to \varphi$ q.t.p. em $\partial\Omega$ onde $\varphi \equiv 0 \in L^1(\partial\Omega)$. Observemos que

$$\begin{aligned} |\varphi_n(x)| &= |\cosh(t_n u(\sigma)) - 1| \leq |\cosh(t_n u(\sigma))| + 1 \\ &= \cosh(|t_n||u(\sigma)|) + 1 \leq \cosh(M|u(\sigma)|) + 1, \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$, e

$$\int_{\partial\Omega} [\cosh(M|u(\sigma)|) = 1] \leq Ce^{\beta\|u\|_1^2} + |\partial\Omega|_1 < \infty.$$

Assim a função definida por $\phi(\sigma) = \cosh(M(u(\sigma))) + 1$ pertence a $L^1(\partial\Omega)$ e domina $\varphi_n \to \varphi$ q.t.p. em $\partial\Omega$. Portanto, pelo Teorema da convergência Dominada de Lebesgue, $\varphi_n \to \varphi \equiv 0$ em $L^1(\partial\Omega)$, e como $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (0, +\infty)$ é arbitrário,

$$\lim_{t\to 0^+} \int_{\partial\Omega} [\cosh(tu(\sigma)) - 1] d\sigma = 0.$$

Daí,

$$\lim_{t\to 0^+} E(tu) = \lim_{t\to 0^+} \left[\frac{t^2}{2}\|u\|_{L^2(\Omega))^2} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(tu(\sigma)) - 1] d\sigma\right] = 0.$$

Mas, $E(tu) \leq 0$ para todo $t > 0$, e portanto, $J(u) = \sup_{t>0} E(tu) = 0$.

(ii) $J(u) = +\infty$ *se, e somente se,* $u \in H_0^1(\Omega) := H^1(\Omega) \cap \{u : u|_{\partial\Omega} \equiv 0\}$. *Claramente, se $u \in H_0^1(\Omega)$ então $u|_{\partial\Omega} \equiv 0$ e*

$$J(u) = \sup_{t>0} E(tu) = \sup_{t>0} \frac{t^2}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} = +\infty$$

Reciprocamente, se $u \in H^1(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$ então $u|_{\partial\Omega} \not\equiv 0$. Lembrando que $\cosh(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!}$ para todo $a \in \mathbb{R}$ temos:

$$\begin{aligned}
\cosh(tu(\sigma)) - 1 &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}u(\sigma)^{2n}}{2n!}\right] - 1 \\
&\geq \left[1 + \frac{t^4 u(\sigma)^4}{4!}\right] - 1 = \frac{t^4 u(\sigma)^4}{4!},
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$. Assim

$$\begin{aligned}
E(tu) &= \frac{t^2}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(tu(\sigma)) - 1] d\sigma \\
&\leq \frac{t^2}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} \frac{t^4 u(\sigma)^4}{4!} d\sigma \\
&= \frac{t^2}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \frac{t^4}{4!}\|u\|^4_{L^4(\partial\Omega)} \\
&= at^2 - bt^4,
\end{aligned}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, onde $a = \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \geq 0$ e $\frac{\lambda}{4!}\|u\|^4_{L^4(\partial\Omega)} > 0$. E definindo $g : t \mapsto at^2 - bt^4$, $t > 0$, temos que g é contínua, e

$$\lim_{t\to 0} g(t) = 0 \quad e \quad \lim_{t\to +\infty} g(t) = -\infty,$$

donde g é limitada superiormente. Daí,

$$J(u) = \sup_{t>0} E(tu) \leq \sup_{t>0} \left[\frac{t^2}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \frac{t^4}{4!}\|u\|^4_{L^4(\Omega)}\right] = \sup_{t>0} g(t) < +\infty.$$

Portanto, se $J(u) = +\infty$ então $u \in H_0^1(\Omega)$.

Nas proposições seguintes estudamos as propriedades de regularidade de J. Primeiro mostramos que quando $0 < J(u) < \infty$, então existe (um único) parâmetro real $t(u) > 0$ tal que $J(u) = E(t(u)u)$ e, de fato, $t(u)$ é solução para

$$t\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} \sinh(t(u(\sigma)))u(\sigma)d\sigma = 0.$$

Além disso, $t(u)$ é uma função suave no conjunto aberto $0 < J(u) < \infty$. Mostramos também que $J : H^1_0(\Omega) \setminus \{0\} \to [0, +\infty]$ é contínuo. E finalmente vemos que pontos críticos de J na esfera unitária produzem pontos críticos em E, via a transformação $u \mapsto t(u)u$.

Proposição 16. *Para $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ fixo, definamos*

$$f(t) := E(tu) = \frac{t^2}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(tu(\sigma)) - 1]d\sigma, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então f é uma função par e $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Suponha que u é tal que $\sup_{t>0} f(t)$ é finito e positivo. Então existe um único número real positivo $t(u)$, satisfazendo $f(t(u)) = \sup_{t>0} f(t) = J(u)$. A função $w \mapsto t(w)$ é bem definida numa vizinhança de u em $H^1(\Omega)$, e é de classe C^∞.

Demonstração: Vemos facilmente que f é par:

$$\begin{aligned} f(-t) &= E(-tu) \\ &= \frac{(-t)^2}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh((-t)u(\sigma)) - 1]d\sigma \\ &= \frac{t^2}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(tu(\sigma)) - 1]d\sigma \\ &= E(tu) = f(t). \end{aligned}$$

Para provarmos que $f \in C^\infty$ basta vermos que $\varphi : t \mapsto \int_{\partial\Omega}[\cosh(tu(\sigma)) - 1]d\sigma$ é C^∞, pois $t \mapsto \frac{t^2}{2}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}$ é C^∞. Tomemos o quociente de Newton

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t+h) - \varphi(t)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\int_{\partial\Omega}[\cosh((t+h)u(\sigma)) - 1]d\sigma - \int_{\partial\Omega}[\cosh(tu(\sigma)) - 1]d\sigma\right] \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\cosh((t+h)u(\sigma)) - \cosh(tu(\sigma))}{h} d\sigma, \end{aligned}$$

o Teorema do Valor Médio, implica que

$$\frac{\cosh((t+h)u(\sigma)) - \cosh(tu(\sigma))}{h} = hu(\sigma)\sinh(\xi(t, u(\sigma))),$$

onde

$$\begin{aligned} \min\{\cosh((t+h)u(\sigma)), \cosh(tu(\sigma))\} &\leq \xi(t, u(\sigma)) \\ &\leq \max\{\cosh((t+h)u(\sigma)), \cosh(tu(\sigma))\} \end{aligned}$$

q.t.p. em Ω, e daí,

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\xi(t,u(\sigma))d\sigma,$$

seguindo do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que

$$\varphi'(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\cosh(tu(\sigma))d\sigma. \tag{2.10}$$

De modo análogo, provamos que

$$\varphi''(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi'(t+h)-\varphi'(t)}{h} = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)^2\sinh(tu(\sigma))d\sigma. \tag{2.11}$$

$$\varphi'''(t) = \lim_{h\to 0}\frac{\varphi''(t+h)-\varphi''(t)}{h} = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)^3\cosh(tu(\sigma))d\sigma. \tag{2.12}$$

e assim sucessivamente, logo $f \in C^\infty$.

Suponhamos que $\sup_{t>0} f(t)$ é finito e positivo, a Observação 1 implica que u é não-trivial sobre $\partial\Omega$, e $f(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Assim existe $t(u) > 0$ tal que $f(t(u)) = \max_{t>0} f(t)$. Notemos que

$$\begin{aligned}
f'(t) &= t\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\int_{\partial\Omega}\sinh(tu(\sigma))u(\sigma)d\sigma \\
f''(t) &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\int_{\partial\Omega}\cosh(tu(\sigma))u(\sigma)^2d\sigma \\
f'''(t) &= -\lambda\int_{\partial\Omega}\sinh(tu(\sigma))u(\sigma)^3d\sigma.
\end{aligned}$$

Da expressão de f''' e como $u \in H^1(\Omega)\setminus\{0\}$ e $\lambda > 0$ temos que f' é estritamente côncava em $(0,+\infty)$. Temos também que $f(0) = 0$ e $f'(t) \to -\infty$ quando $t \to \infty$. Agora, como $\sup_{t>0} f(t) > 0 = f(0)$, a derivada f' assume valores positivos em $(0,+\infty)$. Combinando estes fatos, concluímos que existe um único $t_* > 0$ tal que $f'(t_*) = 0$; além disso, tanto $f(t)$ e $f'(t)$ são positivos para $0 < t < t_*$. Observe também que t_* é definido por $\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega)} = t_*^{-1}\lambda\int_{\partial\Omega}\sinh(t_*u(\sigma))u(\sigma)d\sigma$, assim

$$\begin{aligned}
f''(t_*) &= \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\int_{\partial\Omega}\cosh(t_*u(\sigma))u(\sigma)^2d\sigma \\
&= t_*^{-1}\lambda\int_{\partial\Omega}\sinh(t_*u(\sigma))u(\sigma)d\sigma - \lambda\int_{\partial\Omega}\cosh(t_*u(\sigma))u(\sigma)^2d\sigma \\
&= \lambda\int_{\partial\Omega}\left[\frac{\tanh(t_*u)}{t_*u} - 1\right]\cosh(t_*u)u^2d\sigma < 0,
\end{aligned}$$

pois $s^{-1}\tanh(s) < 1$ para todo $s \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Concluímos que existe um único $t(u) := t_* > 0$ tal que $f(t(u)) = \max_{t>0} f(t)$. Mais ainda, a última desigualdade acima e juntamente com o Teorema da Função Implícita (Teorema 4) nos dão que a função $w \mapsto t(w)$ está bem definida e é de classe C^∞ em uma vizinhança de u. ■

Proposição 17. *O funcional $J : H^1(\Omega)\setminus\{0\} \to [0,\infty]$ é par e contínuo. Mas ainda, J é finito em $H^1(\Omega)\setminus H^1_0(\Omega)$.*

Demonstração: Claramente J é par:

$$J(-u) = \sup_{t>0} f(t(-u)) = \sup_{t>0} f(-(tu)) = \sup_{t>0} f(tu) = J(u).$$

Além disso, J é finito em $H^1(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$ pela Observação 1.

Com a finalidade de provar a continuidade consideremos $u_n \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$, com $u_n \to u_0 \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$, quando $n \to \infty$ e procuraremos estabelecer que $J(u_n) \to J(u_0)$. Três casos distintos podem ocorrer: (i) $J(u_0) = \infty$, (ii) $J(u_0) = 0$, e (iii) $0 < J(u_0) < \infty$.

Caso (i): Dado $t > 0$ fixo, temos

$$J(u_n) = \sup_{s>0} E(su_n) \geq E(tu_n), \quad \forall n, \quad \text{e},$$

$$E(tu_n) \to E(tu_0) \text{ quando } n \to \infty.$$

Consequentemente

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq \lim_{n\to\infty} E(tu_n) = E(tu_0), \quad \forall t > 0,$$

e assim,

$$\liminf_{n\to\infty} J(u_n) \geq \sup_{t>0} E(tu_0) = J(u_0) = \infty.$$

Isto imediatamente implica que $J(u_n) \to \infty = J(u_0)$ quando $n \to \infty$.

Caso (ii): Já vimos que $J(u) < \infty$ se, e somente, se $u \in H_0^1(\Omega)$. Assim, o conjunto

$$U := \{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\} : \; J(u) < \infty\} = H^1(\Omega) \setminus H_0^1(\Omega)$$

é aberto, pois $H_0^1(\Omega)$ é um subespaço fechado de $H^1(\Omega)$. Agora, como $J(u_0) = 0 < \infty$ temos que $u_0 \in U$, e como $u_n \to u_0$ então $u_n \in U$ para n suficientemente grande, como consequência temos que $J(u_n) < \infty$ para n suficientemente grande. Excluindo u_n para os quais $J(u_n) = 0$ (já que para termos a convergência para $J(u_0) = 0$ isto não é um problema) resta considerar uma sequência $u_n \to u_0$ com $0 < J(u_n) < \infty$ e $J(u_0) = 0$.

Afirmamos que os parâmetros correspondentes $t(u_n)$ converge pra zero quando $n \to \infty$; caso contrário, existe uma subsequência $t(u_{n_k})$, e uma constante $c > 0$ tal que $0 < c < t(u_{n_k})$ para todo k. Desde que $E(tu_{n_k}) \geq 0$, para todo $0 \leq t \leq t(u_{n_k})$ (veja a prova da Proposição 16) segue imediatamente que

$$E(tu_0) = \lim_{k\to\infty} E(tu_{n_k}) \geq 0 \quad \forall\, 0 \leq t \leq c.$$

Isto, por outro lado, implica que $E(\cdot\, u_0)$ é nulo no intervalo $[0, c]$ (já que $E(tu_0) \leq J(u_0) = 0$ para todo $t \in (0, +\infty)$), e por diferenciação:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^3 E(tu_0) = 0 \quad \text{para todo } 0 \leq t \leq c. \tag{2.13}$$

Devido a fórmula

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^3 E(tu_0) = -\lambda \int_{\partial\Omega} \sinh(tu_0(\sigma))u_0(\sigma)^3 \, d\sigma,$$

a identidade (2.13) representa uma contradição com o fato que $\lambda > 0$ e que u_0 não é idêntico a zero na $\partial\Omega$. Assim $J(u_n) = E(t(u_n)u_n) \to E(0) = 0 = J(u_0)$, quando $n \to \infty$.

Caso (iii): Analogamente ao caso anterior vemos que $U_1 := \{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\} : 0 < J(u) < \infty\}$ é aberto e como uma consequência temos que $0 < J(u_n) < \infty$ para n suficientemente grande. O fato da função $u \mapsto t(u)$ ser suave (de classe C^∞) implica que $t(u_n) \to t(u_0)$, e também $J(u_n) = E(t(u_n)u_n) \to E(t(u_0)u_0) = J(u_0)$ quando $n \to \infty$. ■

2.4 A Relação entre os Pontos Críticos de J e os Pontos Críticos de E

Agora veremos como pontos críticos de J produzem pontos críticos para E.

Denotando o aberto $\{u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\};\ 0 < J(u) < \infty\}$ por $\{0 < J < \infty\}$, vale a seguinte proposição:

Proposição 18. *Seja $u \in H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ tal que $\sup_{t\in\mathbb{R}} E(tu) > 0$. E seja $t(u)$ como definido na Proposição 16. O funcional $J : \{0 < J < \infty\} \to (0, \infty)$ é par e de classe C^∞. E, para $u \in \{0 < J < \infty\}$ vale $J'(u) = t(u)E'(t(u)u)$. Mais ainda, se $u \in H^1(\Omega)$ é um ponto crítico de J na esfera*

$$\Sigma := \left\{u \in H^1(\Omega); \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |u(\sigma)|^2 d\sigma = 1\right\} \tag{2.14}$$

para o qual o valor crítico $c := J(u)$ é positivo (e finito), então $v := t(u)u$ é um ponto crítico de E em $H^1(\Omega)$ correspondente ao mesmo valor crítico c.

Demonstração: É claro que J é C^∞ em $\{0 < J < \infty\}$, já que neste caso $J(u) = \sup_{t>0} f(t) = E(t(u)u)$. Além disso, $J'(u) = t(u)E'(t(u)u)$.

Consideremos $F : H^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(w) = (w|w)_1 = \int_\Omega |\nabla w(x)|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |w(\sigma)|^2, \tag{2.15}$$

é claro que $F \in C^\infty$, $\Sigma = \{u \in H^1(\Omega) : F(u) = 1\}$ e $F'(w) \neq 0$ para todo $w \in \Sigma$. Supunha que u é um ponto crítico J sobre Σ com valor crítico $c = J(u)$.

Afirmação 1. *Os multiplicadores de Lagrange correspondentes ao ponto u são nulos. Consequentemente su é ponto crítico de J em $H^1(\Omega)$ com mesmo valor critico c para todo $s \in \mathbb{R}$.*

De fato, seja $\mu \in \mathbb{R}$ multiplicador de Lagrange do ponto crítico u de J sobre Σ então

$$J'(u) = \mu F'(u) \quad \text{em } (H^1(\Omega))'.$$

Notemos que

$$\langle F'(u), u\rangle = 2(u, u)_1 = 2\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_{\partial\Omega} |u(\sigma)|^2 d\sigma\right) = 2, \quad \forall u \in \Sigma,$$

logo

$$2\mu = \mu\langle F'(u), u\rangle = \langle \mu F'(u), u\rangle = \langle J'(u), u\rangle, \quad \forall u \in \Sigma.$$

Agora, para todo $s \in \mathbb{R}$ temos $J(su) = J(u)$, e assim

$$0 = \frac{d}{ds}J(su) = \langle J'(su), u\rangle.$$

Em particular, para $s = 1$ temos $\langle J'(u), u\rangle = 0$, e assim $2\mu = 0$, ou seja, $\mu = 0$. Portanto todos os valores crítico de J em Σ também são valores críticos em $H^1(\Omega)$, pois $\mu = 0$ implica $J'(u) = 0$. Novamente com $J(u) = J(su)$ para todo $s \in \mathbb{R}$ um ponto crítico para J em Σ produz uma linha de pontos críticos, su com $s \in \mathbb{R}$, de J em $H^1(\Omega)$. Isto conclui a Afirmação 1.

Afirmação 2. *Se u é um ponto critico para J em $H^1(\Omega) \setminus \{0\}$ com um valor crítico correspondente positivo finito, então $u/\|u\|_1$ é um ponto crítico para J em Σ com algum valor crítico.*

Com efeito, mostraremos que $J'(u/\|u\|_1) = 0$. Se $v \in [u] := \{su;\ s \in \mathbb{R}\}$ e $v \neq 0$, então

$$\left\langle \left[J\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right)\right]', v\right\rangle = \lim_{t\to 0}\frac{J\left(\frac{u}{\|u\|_1} + tv\right) - J\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{J(u) - J(u)}{t} = 0.$$

Se $v \in H^1(\Omega) \setminus [u]$ existe $w \in H^1(\Omega)$ tal que $v = \left[\frac{w\|u\|_1^2 - u(u|w)_1}{\|u\|_1^3}\right]$. E como u é ponto critico de J temos

$$\begin{aligned}
0 &= \langle J'(u), w\rangle = \left\langle \left[J\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right)\right]', w\right\rangle = \left\langle J'\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right), \left\langle \left(\frac{u}{\|u\|_1}\right)', w\right\rangle\right\rangle \\
&= \left\langle J'\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right), \left[\frac{w\|u\|_1 - u\langle(\|u\|_1)', w\rangle}{\|u\|^2}\right]\right\rangle = \left\langle J'\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right), \left[\frac{w\|u\|_1 - u\frac{(u,w)_1}{\|u\|_1}}{\|u\|^2}\right]\right\rangle \\
&= \left\langle J'\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right), \left[\frac{w\|u\|_1^2 - u(u|w)_1}{\|u\|_1^3}\right]\right\rangle = \left\langle J'\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right), v\right\rangle.
\end{aligned}$$

Consequentemente, $J'\left(\frac{u}{\|u\|_1}\right) = 0$. E concluímos a Afirmação 2.

Agora, lembrando que

$$J'(u) = t(u)E'(t(u)u),$$

vemos que se $u \in \Sigma$ é tal que $0 < J(u) < \infty$, e se u é um ponto crítico de J em Σ, então $v := t(u)u$ é um ponto crítico de E em $H^1(\Omega)$. ∎

Observação 2. *É importante observar que se $v \in H^1(\Omega)$ é uma solução não-trivial para o problema*

$$\begin{cases} \Delta v &= 0 & \text{em } \Omega \\ \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} &= \lambda \sinh(v) & \text{sobre } \partial\Omega, \lambda > 0, \end{cases} \tag{2.16}$$

então $E(v) > 0$, e $v \notin H_0^1(\Omega)$, assim $0 < J(v) < \infty$.

De fato, o fato que $v \notin H_0^1(\Omega)$ é obvio. Além disso, multiplicando a equação em (2.16) *por v e integrando por parte, obtemos*

$$0 = \int_\Omega \Delta v v dx = -\int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} v d\sigma,$$

isto é,

$$\|v\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla v(x)|^2 dx = \lambda \int_{\partial\Omega} v(\sigma)\sinh(v(\sigma))d\sigma.$$

Assim,

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(v(\sigma)) - 1]d\sigma \\ &= \frac{\lambda}{2}\int_{\partial\Omega} v(\sigma)\sinh(v(\sigma))d\sigma - \lambda\int_{\partial\Omega}[\cosh(v(\sigma)) - 1]d\sigma \\ &= \lambda \int_{\partial\Omega}\left[\frac{1}{2}v(\sigma)\sinh(v(\sigma)) - \cosh(v(\sigma)) + 1\right] > 0, \end{aligned}$$

já que para todo $\theta \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\theta\sinh(\theta) - \cosh(\theta) + 1 &= \sum_{n\geq 1}\frac{1}{(2n-1)!}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right]\theta^{2n} \\ &= \frac{1}{2}\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^{2n-1}}{(2n-1)!} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\theta^{2n}}{2(2n-1)!} - \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right]\theta^{2n} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)!}\left[\frac{n-1}{n}\right]\theta^{2n} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n\geq 2}\frac{n-1}{(2n-1)!n}\theta^{2n} > 0. \end{aligned}$$

Portanto, é bastante natural a busca pontos críticos para E somente no conjunto $\{0 < J < \infty\}$. ■

2.5 Existência de Infinitas Soluções para o Problema Via Teoria de Lyusternik-Schnirelman

Para ver que o problema (2.1) tem infinitas soluções é suficiente provar que J tem uma sequência ilimitada de valores críticos em Σ. Na construção de uma tal sequência contamos com a teoria de Lyusternik-Schnirelman.

Seja $A \subset \Sigma$ par e fechado. Para cada $k \geq 1$ inteiro definimos:

$$\mathfrak{A}_k := \{A \subset \Sigma;\ A \text{ é fechado},\ -A = A,\ \text{e } \gamma(A) \geq k\}, \tag{2.17}$$

e os números

$$c_k := c_k(\lambda) := \inf_{A\in\mathfrak{A}_k}\sup_{u\in A} J(u). \tag{2.18}$$

Afirmação 2. *Dado $k \geq 1$ existe um subconjunto par e compacto, $A \subset \Sigma \setminus H_0^1(\Omega)$, com $\gamma(A) \geq k$. Em consequência $c_k < \infty$ para todo $k \geq 1$*

Demonstração: Basta tomar

$$A_k = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j F_j(x) : \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \nabla F_j(x) \right)^2 dx + \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j F_j(\sigma) \right)^2 d\sigma = 1 \right\},$$

onde as funções $\{F_j\}_{j=1}^k \subset H^1(\Omega)$ são escolhidas de modo que o traço da fronteira $\gamma_0(F_j) = F_j|_{\partial\Omega}$ seja linearmente independentes. Suponhamos, sem perda de generalidade, que a família $\{F_j\}_{j=1}^k$ seja ortonormal em $H^1(\Omega)$ e considere a função $T : S^{k-1} \subset \mathbb{R}^k \to A \subset H^1(\Omega)$ definida por $T(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \sum_{j=1}^k \alpha_j F_j(x)$. É claro que T é linear, ímpar e pela desigualdade de Bessel

$$\|T(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{k} \alpha_j F_j(x) \right\|_1 \leq \left(\sum_{j=1}^{k} |\alpha_j|^2 \right)^{1/2} = \|(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)\|_{\mathbb{R}^k}$$

donde T é contínua. Segue do item (i) Proposição 10 que $k = \gamma(S^{k-1}) \leq \gamma(A)$. E lembrando da continuidade de J (Proposição 17) temos

$$c_k = \inf_{A \in \mathfrak{A}_k} \sup_{u \in A} J(u) \leq \sup_{u \in A_k} J(u) < \infty,$$

para todo $k \geq 1$. ■

Usaremos o Teorema 8 para mostrar que os valores c_k, definidos acima, formam um conjunto não-decrescente de valores críticos para J convergindo para $+\infty$.

2.5.1 A condição de Palais-Smale

Para mostrarmos a condição de Palais-Smale necessitamos dos seguintes lemas:

Lema 4. *Seja $\{\mu_k\}_{k\geq 1}$, $\{\varphi_k\}_{k \geq 1}$ sequência de autovalores de Steklov (normalizadas) e autofunções definidas por*

$$\Delta\varphi_k = 0 \ \text{em } \Omega, \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial \mathbf{n}} = \mu_k \varphi_k \ \text{na } \partial\Omega,$$
$$(\varphi_j|\varphi_k)_1 = \int_\Omega \nabla\varphi_k \nabla\varphi_j \, dx + \int_{\partial\Omega} \varphi_k \varphi_j \, d\sigma = \delta_k^j.$$

Suponha que λ fixo com $\mu_{k_0} \leq \lambda < \mu_{k_0+1}$, $k_0 \geq 1$. Denotando H_{k_0} o subespaço gerado por $\varphi_1, \ldots, \varphi_{k_0}$ e $H_{k_0}^\perp$ o suplementar ortogonal de H_{k_0} em $H^1(\Omega)$ com respeito ao produto escalar $(\cdot|\cdot)_1$. Então existem duas constantes $R > 0$ e $a > 0$ tal que

$$v \in H_{k_0}^\perp, \quad e \quad \|v\|_1 = R \quad \Longrightarrow \quad E(v) \geq a. \tag{2.19}$$

Demonstração: De fato, para $v \in H_{k_0}^\perp$ temos $\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq \mu_{k_0+1} \int_{\partial\Omega} v^2(\sigma) d\sigma$, e

$$\begin{aligned} E(v) &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \frac{\lambda}{2}\int_{\partial\Omega} v^2(\sigma)d\sigma - \lambda \int_{\partial\Omega} \left[\cosh(v(\sigma)) - 1 - \frac{1}{2}v^2(\sigma)d\sigma\right] \\ &\geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_{k_0+1}}\right)\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda \int_{\partial\Omega} \left[\cosh(v(\sigma)) - 1 - \frac{1}{2}v^2(\sigma)d\sigma\right] \quad (2.20) \end{aligned}$$

Agora, usando a Proposição 12 existem constantes $C > 0$ e $\beta > 0$ tais que para todo $v \in H^1(\Omega)$ vale

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega}\left[\cosh(v(\sigma)) - 1 - \frac{1}{2}v^2(\sigma)\right] &\leq C\int_{\partial\Omega} v^4\cosh(v)d\sigma \\ &\leq C\left(\int_{\partial\Omega} v^8\, d\sigma\right)^{1/2}\left(\int_{\partial\Omega}\cosh(2v)\, d\sigma\right)^{1/2} \quad (2.21)\\ &\leq C\|v\|_1^4\exp(\beta\|v\|_1^2).\end{aligned}$$

Por outro lado, $v \in H_{k_0}^{\perp}$ implica que $\int_{\partial\Omega} v\, d\sigma = 0$, desde que $\varphi_1 = 1/\sqrt{|\partial\Omega|}$ (e $\mu_1 = 0$). Assim, a Desigualdade de Poincaré (Proposição 8) e (2.21) implicam que

$$\int_{\partial\Omega}\left[\cosh(v(\sigma)) - 1 - \frac{1}{2}v^2(\sigma)\right]d\sigma \leq C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^4\exp(\beta\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}). \qquad (2.22)$$

De (2.20) e (2.22) concluímos que

$$E(v) \geq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu_{k_0+1}}\right)\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 - \lambda C\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^4 e^{\beta\|v\|_1^2},$$

e assim, se escolhermos $R > 0$ suficientemente pequeno, então para algum $\delta > 0$ e todo $v \in H_{k_0}^{\perp}$ com $\|v\|_1 = R$, temos $E(v) \geq \delta R^2 =: a$. ∎

Agora mostraremos que para k suficientemente grande (dependendo de λ) temos que $c_k > 0$

Lema 5. *Seja $\lambda > 0$ fixo, com $\mu_{k_0} \leq \lambda < \mu_{k_0+1}$, $k_0 \geq 1$. Então $0 < c_{k_0+1}$, e portanto $0 < c_{k_0+1} \leq c_k < \infty$ para $k \geq k_0 + 1$.*

Demonstração: Seja $k \geq k_0 + 1$, e seja $A \in \mathfrak{A}_k$ dado. Desde que o gênero de A é estritamente maior que k_0, podemos inferir que existe $u_* \in A \cap H_{k_0}^{\perp}$. Se tivermos $A \cap H_{k_0}^{\perp} = \emptyset$, então a projeção ortogonal na direção de H produziria uma função de A em $H_{k_0} \setminus \{0\}$ contínua e ímpar; por mudança de coordenadas (em relação a qualquer base de H) obteríamos agora uma função de A em $\mathbb{R}^{k_0} \setminus \{0\}$ contínua e ímpar, e isto implicaria $\gamma(A) \leq k_0$ — uma contradição. Seja $a > 0$ e $R > 0$ como no Lema 4, então $J(u_*) \geq E(Ru_*) \geq a > 0$ e portanto

$$\max_{u\in A} J(u) \geq J(u_*) \geq a,$$

para todo $A \in \mathfrak{A}_k$. Concluímos que $0 < a \leq c_{k_0+1} \leq c_k < \infty$ para todo $k \geq k_0 + 1$. ∎

Antes de estarmos em condições de concluir que $0 < c_k < \infty$ é um valor crítico de J em Σ, necessitamos mostrar que J satisfaz a seguinte condição de Palais-Smale (como antes $F(u) = (u|u)_1 = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\partial\Omega}|u(\sigma)|^2 d\sigma$).

Proposição 19 (A Condição de Palais-Smale)**.** *Seja c um valor finito e positivo dado. Assuma que $\{u_n, \alpha_n\}_{n\geq 1}$ é uma sequência em $\Sigma \times \mathbb{R}$ tal que*

$$J(u_n) \to c, \quad \text{e} \quad \varepsilon := J'(u_n) - \alpha_n F'(u_n) \to 0 \text{ em } (H_1(\Omega))',$$

quando $n \to \infty$. Então $\alpha_n \to 0$, e existe $u \in \Sigma$ e uma subsequência $\{u_{n_j}\}_{j\geq 1}$ tal que $u_{n_j} \to u$ em $H^1(\Omega)$.

Demonstração: Comecemos mostrando que a sequência $v_n := t(u_n)u_n$, é limitada em $H^1(\Omega)$ ou equivalentemente que a sequência $\{t(u_n)\}_n$ é limitada em $\mathbb{R}$. A partir da definição de $t(u)$,

$$t(u)^2\|\nabla u\|^2 = \lambda \int_{\partial\Omega} t(u)u\sinh(t(u)u)d\sigma, \tag{2.23}$$

para todo $u \in \Sigma$ tal que $J(u) > 0$. Notemos também que existe uma constante $b > 0$, tal que $\cosh(\theta) \leq \frac{1}{4}\theta\sinh(\theta) + b$, para todo $\theta \in \mathbb{R}$ (ver a prova da Proposição 20). Portanto, como $J(u) = \frac{1}{2}t(u)^2\|\nabla u\|^2 - \lambda\int_{\partial\Omega}[\cosh(t(u)u(\sigma)) - 1]d\sigma$, temos

$$J(u) \geq \frac{1}{2}t(u)^2\|\nabla u\|^2 - \frac{\lambda}{4}\int_{\partial\Omega} t(u)u\sinh(t(u)u)d\sigma - \lambda b|\partial\Omega| = \frac{1}{4}t(u)^2\|\nabla u\|^2 - \lambda b|\partial\Omega|.$$

Desde que $\{J(u_n)\}_n$ é limitada, segue-se que também é a sequência $\{\|\nabla v_n\|\}_n = \{t(u_n)\|\nabla u_n\|\}_n$. Usando (2.23), também temos que $\{v_n\sinh(v_n)\}_n$ é limitada em $L^1(\partial\Omega)$, e assim temos que a sequência $\{v_n\}_n$ é limitada em $H^1(\Omega)$.

Como $\{u_n\}_n$ é uma sequência na bola unitária de $H^1(\Omega)$, e como $0 < J(u_n) < \infty$ para todo n suficientemente grande

$$-2\alpha_n = \langle J'(u_n), u_n\rangle - \alpha_n\langle F'(u_n), u_n\rangle = \langle\varepsilon_n, u_n\rangle \to 0.$$

Aqui usamos os fatos de que $\langle J'(u_n), u_n\rangle = 0$ e $\langle F'(u_n), u_n\rangle = 2F(u_n) = 2$. Assim a sequência $\{\alpha_n\}_n$ converge para zero quando $n \to +\infty$.

Usando as relação entre $E'(v_n)$ e $J'(u_n)$ introduzida na Proposição 18, observamos que v_n satisfaz a identidade variacional

$$\begin{aligned}\left[\int_\Omega \nabla v_n(x)\cdot\nabla w(x)dx - \lambda\int_{\partial\Omega}\sinh(v_n(\sigma))w(\sigma)d\sigma\right] &= \langle J'(u_n), w\rangle \\ &= \langle\varepsilon_n, w\rangle + 2\alpha_n(u_n|w)_1\end{aligned} \tag{2.24}$$

para todo $w \in H^1(\Omega)$. A sequência $\{v_n\}_n$ sendo limitada, podemos extrair uma subsequência $\{v_{n_j}\}_{j\geq 1}$ tal que $v_{n_j} \rightharpoonup v$ fracamente em $H^1(\Omega)$, $v_{n_j} \to v$ fortemente em $L^2(\Omega)$. Devido à Proposição 13 segue que $\sinh(v_{n_j}) \to \sinh(v)$ fortemente em $L^2(\partial\Omega)$. Pela extração de adicional de uma subsequência, se necessário, podemos obter $t(u_{n_j}) \to t \geq 0$. O limite t deve certamente satisfazer $t > 0$; porque se $t(u_{n_j}) \to 0$ então teremos que $v_{n_j} \to 0$ em $H^1(\Omega)$ e assim $E(v_{n_j}) \to 0$, mas isto contradiz o fato que $E(v_{n_j}) = J(u_{n_j}) \to c > 0$. Consideremos os funcionais lineares $R_{n_j} \in (H^1(\Omega))'$ definidos por

$$R_{n_j} := \int_\Omega v_{n_j}(x)w(x)dx + \lambda\int_{\partial\Omega}\sinh(v_{n_j})wd\sigma + \frac{1}{t(u_{n_j})}[\langle\varepsilon_{n_j}, w\rangle + 2\alpha_{n_j}(u_{n_j}|w)_1] \tag{2.25}$$

para $w \in H^1(\Omega)$. Por rearranjo de (2.24) obtemos

$$\int_\Omega \nabla v_{n_j}(x)w(x)dx + \int_\Omega v_{n_j}(x)w(x)dx = R_{n_j}(w).$$

Da discussão acima conclui-se que os funcionais lineares R_{n_j} convergem para R definido por

$$R(w) = \int_\Omega vwdx + \lambda\int_{\partial\Omega}\sinh(v)wd\sigma,$$

em $(H^1(\Omega))'$. Concluímos, portanto, que $v_{n_j} \to v_*$ em $H^1(\Omega)$, onde v_* resolve

$$\int_\Omega \nabla v_* \cdot \nabla w dx + \int_\Omega v_* w dx = R(w) = \int_\Omega v w dx + \lambda \int_{\partial\Omega} \sinh(v) w d\sigma.$$

Como $v_{n_j} \rightharpoonup v$ em $H^1(\Omega)$, por unidade do limite segue que $v_* = v$, isto é, $v_{n_j} \to v$ em $H^1(\Omega)$, onde v resolve

$$\Delta v = 0 \quad \text{em } \Omega, \qquad \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \lambda \sinh(v) \quad \text{sobre } \partial\Omega.$$

■

2.5.2 Existência de infinitas soluções

Podemos agora formular e provar o principal resultado deste capítulo: a existência de uma infinidade de soluções para o problema (2.1).

Teorema 9 (Existência de Infinitas Soluções para o Problema (2.1))**.** *Seja $\lambda > 0$ fixo com $\mu_{k_0} \leq \lambda < \mu_{k_0+1}$, $k_0 \geq 1$. Então $\{c_k\}_{k \geq k_0+1}$ é uma sequência não-decrescente de valores críticos de J positivos e finitos, e $c_k \to +\infty$ quando $k \to +\infty$. Em particular, para todo $\lambda > 0$ fixo o problema de valor de fronteira* (2.1) *tem infinitas soluções $\{v_k\}_k$ tal que $E(v_k) \to +\infty$, e $\|v_k\| \to +\infty$ quando $k \to \infty$.*

Demonstração: De acordo com o Teorema 8 (da Teoria de Lyusternik-Shnirelman) todo funcional $J \in C^1$ (com um limite inferior) que satisfaz a condição de Palais-Smale, como o dado na Proposição 19, possui uma sequência ilimitada não decrescente de valores críticos, na esfera Σ, construída exatamente como temos definida a sequência $\{c_k\}$ em (2.18). A Proposição 17 e o Lema 5 garantem que podemos desconsiderar o "conjunto de não diferenciabilidade" $\{J(u) = 0\} \cup \{J(u) = \infty\}$ ao aplicar o Teorema 8. Portanto, para cada $\lambda > 0$ fixo o problema (2.1) tem infinitas soluções v_k satisfazendo $E(v_k) = c_k$.

O fato de que $E(v_k) \to \infty$ segue da não limitação dos valores críticos; para ver que $\|v_k\| \to \infty$, simplesmente note que $\frac{1}{2}\|v_k\| \geq E(v_k)$. ■

Capítulo 3

Resultados auxiliares e estimativas a priori para a solução variacional

Vamos mostrar alguns resultados a respeito das limitações superiores e inferiores das soluções construídas anteriormente. Suponhamos que

$$0 = \mu_1 < \lambda < \mu_2.$$

Resumidamente falando estabeleceremos, dois resultados principais. A Proposição 20 e Proposição 21 mostram que o ramo de soluções correspondente a algum valor crítico $c_k(\lambda)$, $k \geq 2$ explode (em energia) quando $\lambda \to 0^+$, a energia sendo de ordem $\log(1/\lambda)$. O Corolário 2 mostra que a corrente normal $\frac{\partial v_k}{\partial \mathbf{n}}$ permanece limitada em $L^1(\partial\Omega)$ quando $\lambda \to 0^+$.

3.1 Limite Inferior para a Energia das Soluções

Primeiramente, vamos estabelecer um limite inferior para a energia de soluções. Considere uma solução de energia finita, $v \neq 0$, para

$$\begin{cases} -\Delta v &= 0 & \text{em} & \Omega \\ \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} &= \lambda \sinh(v) & \text{sobre} & \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.1}$$

Queremos provar que a energia, $E(v)$, bem como a expressão $\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$ podem ser limitados inferiormente por $a \log(1/\lambda)$ (quando $\lambda \to 0^+$).

Considerando $s := \frac{1}{|\partial\Omega|_1} \int_{\partial\Omega} v(\sigma) d\sigma \in \mathbb{R}$ e $v^0 = v - s \in H^1(\Omega)$, temos

$$\Delta v^0 = \Delta(v - s) = \Delta v = 0 \quad \Omega,$$

$$\frac{\partial v^0}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial (v - s)}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} = \lambda \sinh(v) = \lambda \sinh(v^0 + s),$$

$$\int_{\partial\Omega} v^0(\sigma) d\sigma = \int_{\partial\Omega} (v(\sigma) - s) d\sigma = \int_{\partial\Omega} v(\sigma) d\sigma - s|\partial\Omega|_1 = s|\partial\Omega|_1 - s|\partial\Omega|_1 = 0$$

e devido a fórmula de Green,

$$\int_{\partial\Omega} \sinh(v^0 + s) = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v^0}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = \int_{\Omega} \Delta v^0 d\sigma = 0.$$

Ou seja, a solução v pode ser escrita na forma $v = v^0 + s$ com $v^0 \in H^1(\Omega)$, e $s \in \mathbb{R}$, satisfazendo

$$\begin{cases} -\Delta v^0 &= 0 & \text{em} & \Omega \\ \dfrac{\partial v^0}{\partial \mathbf{n}} &= \lambda \sinh(v^0 + s) & \text{sobre} & \partial\Omega \end{cases} \tag{3.2}$$

e

$$\int_{\partial\Omega} v^0(\sigma) d\sigma = 0, \qquad \int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma) + s) d\sigma = 0. \tag{3.3}$$

As vezes, será mais conveniente usar outra expressão para s em termos de v^0. Notemos que se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \sinh(\alpha+\beta) &= \frac{e^{\alpha+\beta} - e^{-(\alpha+\beta)}}{2} \\ &= \frac{e^{\alpha}e^{\beta} - e^{-\alpha}e^{-\beta}}{2} \\ &= \frac{e^{\alpha}e^{\beta} + e^{-\alpha}e^{\beta} - e^{-\alpha}e^{\beta} - e^{-\alpha}e^{-\beta} + e^{\alpha}e^{\beta} + e^{\alpha}e^{-\beta} - e^{\alpha}e^{-\beta} - e^{-\alpha}e^{-\beta}}{4} \\ &= \frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})e\ \beta - e^{-\alpha}(e^{\beta} + e^{-\beta}) + e^{\alpha}(e^{\beta} + e^{-\beta}) - (e^{\alpha} + e^{-\alpha})e^{-\beta}}{4} \\ &= \frac{(e^{\alpha} + e^{-\alpha})(e^{\beta} - e^{-\beta}) + (e^{\alpha} - e^{-\alpha})(e^{\beta} + e^{-\beta})}{4} \\ &= \cosh\alpha \sinh\beta + \sinh\alpha\cosh\beta. \end{aligned}$$

Daí, como $\cosh(s) > 0$ para todo $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma) + s) d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \cosh(v^0(\sigma)) \sinh(s) + \sinh(v^0(\sigma) \cosh(s)) d\sigma \\ &= \sinh(s) \int_{\partial\Omega} \cosh(v^0(\sigma)) d\sigma + \cosh(s) \int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma)) d\sigma \\ &= \cosh(s) \left[\frac{\sinh(s)}{\cosh(s)} \int_{\partial\Omega} \cosh(v^0(\sigma)) d\sigma + \int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma)) d\sigma \right] \\ &= \cosh(s) \left[\tanh(s) \int_{\partial\Omega} \cosh(v^0(\sigma)) d\sigma + \int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma)) d\sigma \right], \end{aligned}$$

e assim,

$$\tanh(s) \int_{\partial\Omega} \cosh(v^0(\sigma)) d\sigma + \int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma)) d\sigma = 0,$$

logo,

$$\tanh(s) = \frac{-\int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma)) d\sigma}{\int_{\partial\Omega} \cos(v^0(\sigma)) d\sigma}.$$

Por outro lado,

$$\tanh(s) = \frac{\sinh(s)}{\cosh(s)} = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \frac{e^{-s}(e^{2s} - 1)}{e^{-s}(e^{2s} + 1)} = \frac{e^{2s} - 1}{e^{2s} + 1},$$

e pondo $a := \int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma))d\sigma$ e $b := \int_{\partial\Omega} \cosh(v^0(\sigma))d\sigma$ temos

$$\begin{aligned} a+b &= \int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma))d\sigma + \int_{\partial\Omega} \cosh(v^0(\sigma))d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{(e^{v^0(\sigma)} - e^{-v^0(\sigma)})}{2} + \frac{(e^{v^0(\sigma)} + e^{-v^0(\sigma)})}{2} \\ &= \int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)d\sigma}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -a+b &= -\int_{\partial\Omega} \sinh(v^0(\sigma))d\sigma + \int_{\partial\Omega} \cosh(v^0(\sigma))d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{-(e^{v^0(\sigma)} - e^{-v^0(\sigma)})}{2} + \frac{(e^{v^0(\sigma)} + e^{-v^0(\sigma)})}{2} \\ &= \int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)d\sigma} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tanh(s) = \frac{-a}{b} &\iff \frac{e^{2s}-1}{e^{2s}+1} = \frac{-a}{b} \iff be^{2s} - b = -ae^{2s} - a \\ &\iff (a+b)e^{2s} = -a+b \iff s = \frac{1}{2}\log\frac{-a+b}{a+b}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$s := s(v^0) := \frac{1}{2}\log\frac{\int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma}{\int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)}d\sigma} \tag{3.4}$$

Iremos precisar do seguinte estimativa para s em termos de $\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)}$.

Lema 6. *Seja $s(v^0)$ definido como em (3.4) para $v^0 \in H^1(\Omega)$, com $\int_{\partial\Omega} v^0(\sigma)d\sigma = 0$. Existem duas constantes positivas C_1, e C_2, dependendo somente de Ω, tais que*

$$|s(v^0)| \leq C_1 + C_2\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)}.$$

Demonstração: Primeiramente, notemos que

$$\begin{aligned} s(-v^0) &= \frac{1}{2}\log\frac{\int_{\partial\Omega} e^{-(-v^0(\sigma))}d\sigma}{\int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma} \\ &= \frac{1}{2}\log\frac{\int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)}d\sigma}{\int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma} \\ &= -\frac{1}{2}\log\frac{\int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma}{\int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)}d\sigma} \\ &= -s(v^0). \end{aligned}$$

Assim podemos assumir, sem perda de generalidade, que $s(v^0) > 0$ (se não, provamos a estimativa do Lema para $-v^0$ no lugar de v^0), em particular

$$\frac{\int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma}{\int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)}d\sigma} > 1,$$

e daí,

$$\int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)}d\sigma < \int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma.$$

Pela desigualdade de Hölder temos

$$\begin{aligned} |\partial\Omega|_1^2 &= \left(\int_{\partial\Omega} 1 d\sigma\right)^2 \\ &= \left(\int_{\partial\Omega} e^{\frac{v^0(\sigma)}{2}} e^{\frac{-v^0(\sigma)}{2}} d\sigma\right)^2 \\ &\leq \left(\int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)}d\sigma\right)\left(\int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma\right), \end{aligned}$$

donde,

$$\frac{1}{\int_{\partial\Omega} e^{v(\sigma)}d\sigma} \leq \frac{1}{|\partial\Omega|_1^2}\int_{\partial\Omega} e^{-v(\sigma)}d\sigma.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma}{\int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)}d\sigma} &\leq \int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma \left(\frac{1}{|\partial\Omega|_1^2}\int_{\partial\Omega} e^{-v(\sigma)}d\sigma\right) \\ &= \left[\frac{1}{|\partial\Omega|_1}\int_{\partial\Omega} e^{-v(\sigma)}d\sigma\right]^2, \end{aligned}$$

e, como $|s(v^0)| = s(v^0)$, a desigualdade acima juntamente com (3.4) implicam

$$\begin{aligned} |s(v^0)| &= \frac{\int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}}{\int_{\partial\Omega} e^{v^0(\sigma)}} \\ &\leq \frac{1}{2}\log\left[\left(\frac{1}{|\partial\Omega|_1}\int_{\partial\Omega} e^{-v(\sigma)}d\sigma\right)\right]^2 \qquad (3.5) \\ &= -\log|\partial\Omega|_1 + \log\left(\int_{\partial\Omega} e^{-v(\sigma)}d\sigma\right). \end{aligned}$$

Pelo Lema 2.1,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} e^{-v^0(\sigma)}d\sigma &\leq \int_{\partial\Omega} e^{v(\sigma)} + e^{-v(\sigma)}d\sigma \\ &= \int_{\partial\Omega} 2\cosh(v^0)d\sigma \\ &\leq C\exp(\beta\|v^0\|_1^2) \\ &\leq C\exp(\beta\|\nabla v^0\|_{L^2(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

Essa desigualdade, juntamente com a desigualdade (3.5) implicam que

$$\begin{aligned} |s(v^0)| &\leq -\log|\partial\Omega|_1 + \log\left[C\exp(\beta\|\nabla v^0\|\ 2_{L^2(\Omega)})\right] \\ &= \log(\frac{C}{|\partial\Omega|_1}) + \beta\|\nabla\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Tomando $C_1 > 0$ tal que $e^{C_1} > C/|\partial\Omega|_1$ temos a estimativa desejada. ■

Agora podemos enunciar nosso resultado a respeito das estimativas inferiores para a energia das soluções.

Proposição 20. *Suponha que* $0 < \lambda < \mu_2$ *e que* $v \in H^1(\Omega)$, $v \neq 0$, *é uma solução para* (3.1). *Existe duas constantes* $a, b > 0$ *independente de* λ *e* v, *tal que*

$$E(v) \geq a \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) - b, \qquad \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq a \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) - b$$

Demonstração: Afirmamos que dado $\varepsilon > 0$ existe uma constante $C(\varepsilon) > 0$ tal que

$$0 \leq \cosh(\theta) - 1 \leq C(\varepsilon) + \varepsilon\theta\sinh(\theta), \tag{3.6}$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$. É fácil, considere $h_\varepsilon(\theta) = e^\theta(1 - \varepsilon\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$, então $h_\varepsilon(0) = 1$, $\lim_{\theta\to+\infty} h_\varepsilon(\theta) = -\infty$ e

$$\lim_{\theta\to-\infty} h_\varepsilon(\theta) = \lim_{\theta\to-\infty} \frac{1-\varepsilon\theta}{e^{-\theta}} = \lim_{\theta\to-\infty} \frac{-\varepsilon}{-e^{-\theta}} = 0.$$

Além disso,

- $h'_\varepsilon(\theta) = e^\theta((1-\varepsilon) - \varepsilon\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_0 := \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, $h'_\varepsilon(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta < \theta_0$ e $h'_\varepsilon(\theta) < 0 \Leftrightarrow \theta > \theta_0$,
- $h''_\varepsilon(\theta) = e^\theta((1-2\varepsilon) - \varepsilon\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \theta_1 := \frac{1-2\varepsilon}{\varepsilon}$, $h''_\varepsilon(\theta) > 0 \Leftrightarrow \theta < \theta_1$ e $h''_\varepsilon(\theta) < 0 \Leftrightarrow \theta > \theta_1$,
- $h''_\varepsilon(\theta_0) = -\varepsilon e^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} < 0$ e $h_\varepsilon(\theta_0) = \varepsilon e^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} > 0$.

Da análise acima, $\theta_0 = (1-\varepsilon)/\varepsilon$ é um ponto de máximo para h_ε. Logo, denotando

$$C(\varepsilon) := h_\varepsilon(\theta) = \varepsilon e^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} = \max_{\theta\in\mathbb{R}} h_\varepsilon(\theta),$$

temos,

$$e^\theta(1-\varepsilon\theta) = h_\varepsilon(\theta) \leq C(\varepsilon), \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}.$$

O que implica que

$$e^\theta \leq C(\varepsilon) + \varepsilon\theta e^\theta, \quad \forall\, \theta \in \mathbb{R}. \tag{3.7}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
0 \leq \cosh(\theta) - 1 &\leq \cosh(\theta) = \frac{e^theta + e^{-\theta}}{2} \\
&\leq \frac{(C(\varepsilon) + \varepsilon\theta e^\theta) + (C(\varepsilon) + \varepsilon(-\theta)e^{-theta})}{2} \\
&= C(\varepsilon) + \varepsilon\theta\frac{(e^\theta - e^{-\theta})}{2} \\
&= C(\varepsilon) + \varepsilon\sinh(\theta),
\end{aligned} \tag{3.8}$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$.

Agora, multiplicando a equação (3.1) por v e integrando por partes, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= \int_\Omega \Delta v \cdot v\, dx = -\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \cdot v\, d\sigma \\
&= \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} + \int_{\partial\Omega} \lambda\sinh(v(\sigma))v(\sigma)d\sigma,
\end{aligned}$$

e assim,

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda \int_{\partial\Omega} v(\sigma)\sinh(v(\sigma))d\sigma. \tag{3.9}$$

Segue-se, devido a (3.6) e a (3.9), que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} \geq E(v) &= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\int_{\partial\Omega}[\cosh(v(\sigma)) - 1] \\
&\geq \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\int_{\partial\Omega}[\varepsilon v(\sigma)\sinh(v(\sigma)) - C(\varepsilon)]d\sigma \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda\varepsilon\int_{\partial\Omega} v(\sigma)\sinh(v(\sigma))d\sigma - \lambda C(\varepsilon)|\partial\Omega|_1 \\
&= \frac{1}{2}\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \varepsilon\|\nabla c\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda C(\varepsilon)|\partial\Omega|_1 \\
&= \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda C(\varepsilon)|\partial\Omega|_1.
\end{aligned}$$

Isso mostra que encontrar um limite inferior para $\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)}$ é equivalente a encontrar um limite inferior para $E(v)$ (quando λ está em um intervalo limitado).

Seja $v = v^0 + s(v^0)$ a cisão obtida anteriormente. Pelo Teorema do Valor Médio

$$\sinh(v^0(\sigma) + s(v^0)) - \sinh(s(v^0)) = v^0(\sigma)\cosh(s(v^0) + \theta v^0(\sigma))$$

para algum $\theta \in [0,1]$, e assim, multiplicando a equação (3.2) por v^0 e integrando por partes, resulta

$$\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)} = \lambda\int_{\partial\Omega}\sinh(v^0(\sigma) + s(v^0)),$$

e como $\int_{\partial\Omega} v^0 d\sigma = 0$ temos $\int_{\partial\Omega} v^0\sinh(s(v^0))d\sigma = 0$, e consequentemente,

$$\begin{aligned}
\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)} &= \lambda\int_{\partial\Omega} v^0(\sigma)[\sinh(v(\sigma) + s(v^0)) - \sinh(s(v^0))]d\sigma \\
&= \lambda\int_{\partial\Omega}|v^0(\sigma)|^2\cosh(s(v^0) + \theta v^0(\sigma))d\sigma \\
&\leq \lambda e^{|s(v^0)|}\int_{\partial\Omega}|v^0(\sigma)|^2 e^{|v^0(\sigma)|}d\sigma \\
&\leq \lambda e^{|s(v^0)|}\|v^0\|^2_{L^4(\partial\Omega)}\|e^{|v^0|}\|_{L^2(\Omega)} \\
&= \lambda e^{|s(v^0)|}\|v^0\|^2_{L^4(\partial\Omega)}\left(\int_{\partial\Omega} e^{2|v_0(\sigma)|}d\sigma\right)^{1/2} \\
&\leq \lambda e^{|s(v^0)|}\|v^0\|^2_{L^4(\partial\Omega)}\left(\int_{\partial\Omega} 2\cosh(2v^0(\sigma))d\sigma\right)^{1/2} \\
&\leq \lambda\sqrt{2}e^{|s(v^0)|}\|v^0\|^2_{L^4(\partial\Omega)}\|\cosh(2v^0)\|^{1/2}_{L^1(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Como pelas Desigualdades de Hölder e Pincaré (Proposição 8) temos $\|v^0\|^2_{L^4(\partial\Omega)} \leq C\|\nabla v^0\|^2$, a estimativa acima e Proposição 12 produzem

$$\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \lambda\sqrt{2}e^{|s(v^0)|}C\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)}e^{\beta\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)}}. \tag{3.10}$$

Desde que v é uma solução não nula, é também não-constante. Isto implica $\nabla v^0 \neq 0$, e (3.10) nos dá que

$$\lambda e^{|s(v^0)|} e^{\beta \|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)}} \geq \frac{1}{C\sqrt{2}} > 0,$$

e usando o Lema 3.1, temos

$$\begin{aligned} 0 < \frac{1}{C\sqrt{2}} &\leq \lambda e^{\left(c_1 + c_2 \|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)}\right)} e^{\beta \|\nabla v^0 0\|^2_{L^2(\Omega)}} \\ &= \lambda e^{c_1 + (c_2+\beta)\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)}}, \end{aligned}$$

e consequentemente,

$$c_1 + (c_2+\beta)\|\nabla v^0\|^2_{L^2(\Omega)} \geq \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \log(c\sqrt{2}).$$

O que implica

$$\begin{aligned} \|v^0\|^2_{L^2(\Omega)} &\geq \frac{1}{c_2+\beta}\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) - (c_2 + \log(c\sqrt{2})R) \\ &= a\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) - b \end{aligned}$$

onde $a := \frac{1}{c_2+\beta} > 0$ e $b := c_2 + \log(c\sqrt{2}) > 0$, são independente de λ e v. ■

Observação 3. *Podemos facilmente verificar que o par* (v^0, s) *é uma solução para* (3.2)-(3.3) *se, e somente se,* $s = s(v^0)$ *(como dado por* (3.4) *e* v^0 *é um ponto crítico do funcional*

$$E_0(w) := \frac{1}{2}\|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(w(\sigma) + s(w)) - 1] d\sigma$$

no espaço

$$\tilde{H}_0 := \left\{ w \in H^1_0;\ \int_{\partial\Omega} w(\sigma) d\sigma = 0 \right\}.$$

Também notemos que $E(v) = E(v^0 + s(v^0)) = E_0(v^0)$. *Além disso o* v^0 *correspondente a qualquer solução não trivial para* (3.2)-(3.3) *pertence a variedade*

$$\tilde{\Sigma} := \left\{ w \in \tilde{H}_0;\ w \neq 0,\ \int_\Omega |\nabla w|^2 dx = \lambda \int_{\partial\Omega} \sinh(w(\sigma) + s(w)) w(\sigma) d\sigma \right\},$$

e usando as mesmas ideias apresentadas aqui, podemos mostrar que, para $0 < \lambda < \mu_2$ *existe* $v^0 \in \tilde{\Sigma}$ *que adicionalmente minimiza a energia* E_0 *sobre* $\tilde{\Sigma}$. *Desta forma, percebe-se que para esta faixa de* λ*'s, a equação* (2.1) *possui uma* ***solução fundamental*** *(ou* ***ground state*** *em inglês), isto é, uma solução não-trivial que tem energia mínima entre todas as soluções. Não iremos introduzir detalhes deste argumento.*

3.2 Estimativas Superiores para os Valores Críticos e para a Corrente Normal

Para sermos capazes de analisar o blow-up, quando $\lambda \to 0^+$ da solução variacional obtida anteriormente, necessitamos estimar os valores críticos $c_k(\lambda)$ para $k \geq 2$ fixo, assumindo $0 = \mu_1 < \lambda < \mu_2$. O caso especial onde Ω é um disco foi considerado em [7], e todo um conjunto de soluções explícitas foi construída usando como base versões apropriadamente modificada da solução fundamental $G(x) := \log(|x|^2/4\pi)$. A ideia principal na seguinte prova de estimativas superiores para $c_k(\lambda)$ (em domínios arbitrários) é introduzir conjuntos $A \in \mathfrak{A}_k$ construída sobre versões apropriadamente modificada de G.

Mais especificadamente, escolhemos k pontos distintos $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ na fronteira de Ω e, para $\varepsilon > 0$ e $R > 0$, introduzimos as funções

$$G_j(x) := -\log(\varepsilon^2 + |x - \sigma_j|^2),$$

e os conjuntos

$$A_{\varepsilon,R} := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j G_j \ ; \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \nabla G_j(x) \right)^2 dx + \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j G_j(\sigma) \right)^2 d\sigma = R^2 \right\}. \tag{3.11}$$

Lema 7. *Seja $k \geq 2$ e pontos $\sigma_j \in \partial\Omega$, $1 \leq j \leq k$ fixo, e conjuntos $A_{\varepsilon,R}$, $0 < \varepsilon$, $0 < R$, definido como acima. Existe $\lambda_* > 0$; dependendo somente de k, dos pontos σ_j, e Ω; tal que dado $0 < \lambda < \lambda_*$ podemos encontrar $\varepsilon > 0$ (de ordem λ) e $R > 0$ (de ordem $\sqrt{(\log \frac{1}{\lambda})}$) para os quais temos:*

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} v(\sigma) \sinh(v(\sigma)) d\sigma \leq 0, \qquad v \in A_{\varepsilon,R}.$$

Demonstração: Um cálculo direto mostra que $\nabla G_j(x) = -2(x - \sigma_j)(\varepsilon^2 + |x - \sigma_j|^2)^{-1}$.

Afirmação 3. *Suponha $\varepsilon < 1/2$. Existe constantes C_j dependo somente dos pontos σ_j, e de Ω tal que*

$$\|\nabla G_j\|^2_{L(\Omega)} = C_j \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1).$$

De fato, se considerarmos a mudança de variáveis $T : \Omega_j := \Omega - \{\sigma_j\} \to \Omega$ definida por $T(x) = x - \sigma_j$, é claro que $|\det T'(x)| = 1$, e assim

$$\|\nabla G_j\|^2_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega \frac{4|x - \sigma_j|^2}{(\varepsilon^2 + |x - \sigma_j|^2)^2} dx = \int_{\Omega_j} \frac{4|x|^2}{(\varepsilon^2 + |x|^2)^2} dx \tag{3.12}$$

Agora, a mudança de variáveis $S : \widetilde{\Omega_j} \to \Omega_j$ tal que $S(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ onde $\widetilde{\Omega_j}$ é uma região do tipo:

$$\widetilde{\Omega_j} = \{(\theta, r) : \theta_1 < \theta < \theta_2, 0 < r < f(\theta)\}$$

para $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$ e $f \in C^2(\mathbb{R})$. É claro que $|\det S'(r,\theta)| = r$. Daí, por (3.12)

$$\begin{aligned} \|\nabla G_j\|^2_{L^2(\Omega)} &= 4\int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{f(\theta)} \frac{r^2}{(\varepsilon^2+r^2)^2} r\, dr d\theta \\ &= \left[\int_{\theta_1}^{\theta_2}\left(\frac{-2f(\theta)^2}{\varepsilon^2+f(\theta)^2} + \log(\varepsilon^2+f(\theta)^2)\right) d\theta\right] + 2(\theta_2-\theta_1)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\ &= C_j \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + O(1). \end{aligned}$$

Afirmação 4. *Suponha $\varepsilon < 1/2$. Existem constantes C e c dependendo somente dos pontos σ_j e de Ω tais que*

$$c\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \le \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla G_j(x)\right)^2 dx + \int_{\partial\Omega}\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j G_j(\sigma)\right)^2 d\sigma \le C\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \tag{3.13}$$

Provaremos apenas a segunda desigualdade, visto que a primeira é análoga. Temos,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla G_j(x)\right)^2 &\le \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^k |G_j(x)|^2\right) dx \\ &= \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2\right)\left(\int_\Omega \sum_{j=1}^k |G_j(x)|^2\right) dx \\ &= \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^k \|G_j\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\ &\le k\left(\sum_{j=1}^k C_j\right)\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= C_1 \sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right). \end{aligned}$$

E pelo Teorema do Traço (Teorema 2)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega}\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j G_j(\sigma)\right)^2 d\sigma &\le \overline{C}\left[\int_\Omega \left|\nabla\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j G_j(x)\right)\right|^2 dx + \int_\Omega \left|\sum_{j=1}^k \alpha_j G_j(x)\right|^2 dx\right] \\ &= \overline{C}\left[\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla G_j(x)\right)^2 dx + \int_\Omega\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j G_j(x)\right)^2 dx\right] \\ &\le \overline{C}\left[C_1\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) + \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^k \int_\Omega G_j(x)^2 dx\right)\right]. \end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega G_j(x)^2 dx &= \int_\Omega log^2(\varepsilon^2 + |x-\sigma_j|)dx \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_0^{f(\theta)} \log^2(\varepsilon^2 + r\ 2)r\ drd\theta \\
&= \int_{\theta_1}^{\theta_2}\Big[\frac{1}{2}\log^2(\varepsilon^2+f(\theta)^2)(\varepsilon^2+f(\theta)^2) - \frac{1}{2}\log^2(\varepsilon^2)\varepsilon^2 - \\
&\qquad - \log(\varepsilon^2+f(\theta)^2)(\varepsilon^2+f(\theta)^2) + \varepsilon^2\log(\varepsilon^2) + f(\theta)\Big]\, d\theta \\
&= O(1).
\end{aligned}$$

Portanto concluímos que

$$\int_\Omega\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j \nabla G_j(x)\right)^2 dx + \int_{\partial\Omega}\left(\sum_{j=1}^k \alpha_j G_j(\sigma)\right)^2 d\sigma \le C\sum_{j=1}^k \alpha_j^2 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Segue a Afirmação.

Usando a notação $v = \sum_{j=1}^k \alpha_j G_j \in A_{\varepsilon,R}$ temos

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} v\sinh(v)d\sigma &= \int_{\partial\Omega}|v|\sinh(|v|)d\sigma \\
&= \int_{\partial\Omega}|v|\left(\frac{e^{|v|}-e^{-|v|}}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|v(\sigma)|\exp(|v(\sigma)|)d\sigma - \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|v(\sigma)|\exp(-|v(\sigma)|)d\sigma.
\end{aligned}$$

Mas, se R é grande

$$0 \le \int_{\partial\Omega}|v|e^{-|v|}d\sigma \le \int_{\partial\Omega}|v^2| = \|v\|^2_{L^2(\partial\Omega)} \le \infty.$$

Daí,

$$\int_{\partial\Omega} v\sinh(v) = \int_{\partial\Omega}|v|\sinh(|v|)d\sigma = \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|v(\sigma)|\exp|v(\sigma)| + O(R). \tag{3.14}$$

Seja j_0 o índice com $|\alpha_{j_0}| = \max(|\alpha_1|,\ldots,|\alpha_k|)$ e escolha $\rho > 0$ suficientemente pequeno de modo que

$$\sum_{j\neq j_0}|\log|\sigma-\sigma_j|^2| < \frac{1}{2}|\log|\sigma-\sigma_{j_0}|^2| \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\cap B_\rho(\sigma_{j_0}).$$

Para ε suficientemente pequeno (dependo somente dos pontos σ_j, com $1\le j\le k$)

temos

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j\neq j_0}\alpha_j G_j(\sigma)\right| &= \left|-\sum_{j\neq j_0}\alpha_j \log(\varepsilon^2+|\sigma-\sigma_j|^2)\right| \\
&\leq \sum_{j\neq j_0}|\alpha_j||\log(\varepsilon^2+|\sigma-\sigma_j|^2)| \\
&\leq |\alpha_{j_0}|\sum_{j\neq j_0}|\log(\varepsilon^2+|\sigma-\sigma_j|^2)| \\
&< \frac{1}{2}|\alpha_{j_0}||\log(\varepsilon^2+|\sigma-\sigma_{j_0}|^2)| \\
&= \frac{1}{2}|\alpha_{j_0}G_{j_0}(\sigma)| \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\cap B_\rho(\sigma_{j_0}),
\end{aligned}$$

e portanto,

$$|v(\sigma)|\exp(|v(\sigma)|) \geq \frac{1}{2}|\alpha_{j_0}G_{j_0}(\sigma)|\exp\left(\frac{1}{2}|\alpha_{j_0}G_{j_0}|\right)$$

sobre $\partial\Omega\cap B_\rho(\sigma_{j_0})$. Assim,

$$|v|\exp|v(\sigma)| \geq \frac{1}{2}|\alpha_{j_0}G_j(\sigma)|\exp(\frac{1}{2}|\alpha_{j_0}G_{j_0}(\sigma)|) \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega\cap B_\rho(\sigma_{j_0}). \tag{3.15}$$

Afirmação 5. *Existem constantes $a_0, b_0 > 0$ e a_1, b_1 dependendo continualmente de $\alpha \geq 1$ tal que*

$$\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}(1+s^2)^{-\alpha}ds = a_0(\alpha)+a_1(\alpha)\varepsilon^{2\alpha-1}+o(\varepsilon^{2\alpha}),$$

$$\int_0^{\frac{1}{\varepsilon}}\log(1+s^2)(1+s^2)^{-\alpha}ds = b_0(\alpha)+b_1(\alpha)\log(\varepsilon)\varepsilon^{2\alpha-1}+o(\log(\varepsilon)\varepsilon^{2\alpha}).$$

De fato, defina $\varphi(\varepsilon) = \int_0^{1/\varepsilon}(1+s^2)^{-\alpha}ds$ se $s \neq 0$ e $\varphi(0) = \int_0^\infty(1+s^2)^{-\alpha}$. A mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
\varphi(\varepsilon) &= \int_0^{1/\varepsilon}(1+s^2)^{-\alpha} = \int_\varepsilon^\infty\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{1}{s^2}\,ds \\
&= \int_\varepsilon^\infty\frac{s^{2\alpha}}{(s^2+1)^\alpha}\frac{1}{s^2} = \frac{s^{2\alpha}s^{-2}}{s^{2\alpha}(1+1/s^2)^\alpha}\,ds \\
&= \int_\varepsilon^\infty\frac{s^{-\alpha}}{(1+1/s^2)^\alpha}\,ds
\end{aligned}$$

o que prova que φ é diferenciável na origem e

$$\varphi'(\varepsilon) = 0-\frac{\varepsilon^{-2}}{(1+1/\varepsilon^2)^\alpha} = \frac{-\varepsilon^{2\alpha-2}}{(1+\varepsilon^2)^\alpha} \Longrightarrow \varphi'(0)=0,$$

$$\varphi''(\varepsilon) = -(2\alpha-1)\varepsilon^{2\alpha-3}+2\alpha\varepsilon^{2\alpha-1} \Longrightarrow \varphi''(0)=0.$$

Prosseguindo assim podemos mostrar que $\varphi^{(n)}(0) = 0$ para todo número natural $n \leq 2\alpha-2$ e $\varphi^{(n_0)}(0) = \alpha_1(\alpha)$, onde $\alpha_1(\alpha)$ é um polinômio na variável α e $2\alpha-1 < n_0 \leq 2\alpha+1$. Segue-se da fórmula de Taylor que

$$\int_0^{1/\varepsilon}(1+s^2)^{-\alpha}ds = \varphi(\varepsilon) = \varphi(0)+\alpha_1(\alpha)\varepsilon^{2\alpha-1}+o(\varepsilon^{2\alpha}).$$

De modo análogo, provamos a segunda igualdade da afirmação.

Agora, pela Afirmação acima temos

$$\begin{aligned}
\int_0^d |\log(\varepsilon^2+t^2)|(\varepsilon^2+t^2) &= \varepsilon^{-2\alpha}\int_0^d |\log(\varepsilon^2)+\log(1+(t/\varepsilon)^2)|(1+(1/\varepsilon)^2)dt \\
&= \varepsilon^{-2\alpha}\int_0^{d/\varepsilon} |\log(\varepsilon^2)+\log(1+s^2)|(1+s^2)^{-\alpha}\varepsilon dt \\
&= 2a_0(\alpha)\varepsilon^{-2\alpha+1}\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)+o(\varepsilon^{-2\alpha+1}), \qquad (3.16)
\end{aligned}$$

onde o resto depende da constante d, mas é "o pequeno" de $\varepsilon^{-2\alpha+1}\log\varepsilon$ independentemente de α e ε. Usando as estimativas (3.16) juntamente com a desigualdade (3.14), obtemos (tomando $|\alpha_{j_0}|\geq 2$)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega} v\sinh(v) &= \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}|v(\sigma)|\exp(|v(\sigma)|)d\sigma+O(R) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega\cap B_\rho(\sigma_{j_0})}|v(\sigma)|\exp(|v(\sigma)|)d\sigma+O(R) \\
&\geq \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega\cap B_\rho(\sigma_{j_0})}\frac{1}{2}|\alpha_{j_0}G_{j_0(\sigma)}|\exp\left(\frac{1}{2}|\alpha_{j_0}G_{j_0}|\right)d\sigma+O(R) \\
&= \frac{|\alpha_{j_0}|}{2}\int_{\partial\Omega\cap B_\rho(\sigma_{j_0})}\left|\log\left[(\varepsilon^2+|\sigma-\sigma_{j_0}|^2)^{\frac{|\alpha_{j_0}|}{2}}\right]\right|(\varepsilon^2+|\sigma-\sigma_{j_0}|^2)^{\frac{|\alpha_{j_0}|}{2}}d\sigma+O(R) \\
&\geq c\tilde{a}_0(|\alpha_{j_0}|)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-|\alpha_{j_0}|}+|\alpha_{j_0}|o(\varepsilon^{1-|\alpha_{j_0}|}\log(\varepsilon))+O(R),
\end{aligned}$$

onde $\tilde{a}_0(|\alpha_{j_0}|)=a_0(|\alpha_{j_0}|/2)|\alpha_{j_0}|$, e $c>0$ é uma constante, independentes de ε, α_{j_0} e R. Usando estas estimativas inferiores temos para $v=\sum_{j=1}^k\alpha_jG_j\in A_{\varepsilon,R}$,

$$\begin{aligned}
\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} &- \lambda\int_{\partial\Omega}v\sinh(v)d\sigma \qquad (3.17)\\
&\leq R^2-\lambda\left[c\tilde{a}_0(|\alpha_{j_0}|)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-|\alpha_0|}+|\alpha_{j_0}|o(\varepsilon^{1-|\alpha_{j_0}|}\log(\varepsilon))+O(R)\right] \\
&= R^2-\lambda c\tilde{a}_0(|\alpha_{j_0}|)\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{1-|\alpha_{j_0}|}+\lambda|\alpha_{j_0}|o(\varepsilon^{1-|\alpha_{j_0}|}\log(\varepsilon))+\lambda O(R)
\end{aligned}$$

tomando $|\alpha_{j_0}|\geq 2$. De acordo com (3.13), para $v=\sum_{j=1}^k\alpha_jG_j\in A_{\varepsilon,R}$ temos que

$$\begin{aligned}
c|\alpha_{j_0}|^2\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) &\leq c\sum_{j=1}^k\alpha_j\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \\
&= \int_\Omega\left(\sum_{j=1}^k\nabla G_j(x)\right)^2dx+\int_{\partial\Omega}\left(\sum_{j=1}^k\alpha_jG_j(\sigma)\right)^2d\sigma=R^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} R^2 &= \int_\Omega \left(\sum_{j=1}^k \nabla G_j(x)\right)^2 dx + \int_{\partial\Omega} \left(\sum_{j=1}^k \alpha_j G_j(\sigma)\right)^2 d\sigma \\ &\leq C \sum_{j=1}^k \alpha_j \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leq C|\alpha_{j_0}| k \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

donde

$$\frac{R}{\sqrt{kC\log(1/\varepsilon)}} \leq |\alpha_{j_0}| \leq \frac{R}{\sqrt{c\log(1/\varepsilon)}}. \tag{3.18}$$

Se agora selecionarmos

$$R = 2\sqrt{kC\log(1/\varepsilon)}, \tag{3.19}$$

com C sendo a mesma constante com em (3.18), então segue que $2 \leq |\alpha_{j_0}| \leq 2\sqrt{kC/c}$, e então $\tilde{a}_0(|\alpha_{j_0}|) > 0$ é uniformemente limitado e limitado próximo do zero. Uma combinação disto e da desigualdade (3.17) nos dá, para constantes C_1 e $c_1 > 0$,

$$\begin{aligned} \|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} &- \lambda \int_{\partial\Omega} v \sinh(v) d\sigma \\ &\leq 4kC\log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \lambda c \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \varepsilon^{1-|\alpha_{j_0}|} + \lambda o(\varepsilon^{1-|\alpha_{j_0}|}\log(\varepsilon)) \qquad (3.20) \\ &\leq C_1 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \lambda c_1 \log\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\varepsilon^{-1}, \end{aligned}$$

para ε suficientemente pequeno (dependendo somente dos pontos σ_j, k e Ω). Escolhendo $\varepsilon = c_1\lambda/C_1$ a estimativa (3.20) produz

$$\|\nabla v\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} v \sinh(v) d\sigma \leq 0,$$

para todo $v \in A_{\varepsilon,R}$ e para todo $\lambda < \lambda_*$ (para garantir que ε é suficientemente pequeno). Com a escolha acima ε, R são dados por

$$R^2 = C\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + D \tag{3.21}$$

para constantes $C > 0$ e D. Isto conclui a prova do lema. ■

Agora nos podemos obter a desejada estimativa superior para $c_k(\lambda)$.

Proposição 21. *Para todo $k \geq 2$ então existem constantes positivas $C_*(k)$ e λ_* tais que*

$$c_k(\lambda) \leq C_*(k)\log\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad 0 < \lambda < \lambda_*.$$

Demonstração: Sejam ε, R e $A_{\varepsilon,R}$ como descritos no Lema 7. Para λ suficientemente pequeno (e assim ε suficientemente pequeno) o conjunto $A_{\varepsilon,1}$ (definido em (3.11) está em $\mathfrak{A}_k$, e $A_{\varepsilon,1} \cap H_0^1(\Omega)$ é vazio. Portanto

$$0 < c_k(\lambda) = \inf_{A \in \mathfrak{A}_k} \sup_{v \in A} J(v) \leq \max_{v \in A_{\varepsilon,1}} J(v) < \infty.$$

Devido ao fato que $A_{\varepsilon,R} = RA_{\varepsilon,1}$, e que $J(Rv) = J(v)$ para $v \in A_{\varepsilon,1}$, concluímos agora que

$$0 < c_k(\lambda) \leq \max_{v \in A_{\varepsilon,R}} J(v) = J(v_*) < \infty,$$

para algum $v_* \in A_{\varepsilon,R}$. Lembremos que na Proposição 16 definimos $f(t) := E(tv_*)$ e que $J(v_*) = f(t(v_*)v_*)$. Usando a estimativa de R dada no Lema 7 (ver (3.21) imediatamente temos

$$\begin{aligned} J(u_*) &= \frac{1}{2} t(v_*)^2 \|\nabla v_*\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} [\cosh(t(v_*)) - 1] d\sigma \\ &\leq \frac{1}{2} t(v_*)^2 \|\nabla v_*\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{2} t(v_*)^2 R^2 \\ &= C_*(k) t(v_*)^2 \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

para alguma constante $C_*(k)$, e para λ suficientemente pequeno, por exemplo, $0 < \lambda < \lambda_*$. Como vimos na prova da Proposição 16, f atinge seu máximo em único ponto $t(v_*) > 0$. Também sabemos que f' é estritamente côncava sobre $(0, \infty)$ enquanto $f'(0) = f'(t(v_*)) = 0$, e portanto $f'(t) > 0$ para $0 < t < t(v_*)$. Pelo Lema 7 temos

$$f'(1) = \|\nabla v_*\|^2_{L^2(\Omega)} - \lambda \int_{\partial\Omega} v_* \sinh(v_*) d\sigma \leq 0,$$

que implica $t(v_*) \leq 1$. Este último produz a estimativa

$$\begin{aligned} 0 < c_k(\lambda) &\leq C_*(k) t(v_*)^2 \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) \\ &\leq C_*(k) \log\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad 0 < \lambda < \lambda_*, \end{aligned}$$

para constantes $C_*(\lambda)$ e λ_*, dependendo somente de k e Ω. ∎

A seguir, vamos estudar um lema básico da a teoria de integração.

Lema 8. *Seja $(X, d\mu)$ um espaço de medida não-negativa, dadas constantes a, b positivas e seja w uma função mensurável em X com a propriedade que para um certo $\lambda \in (0,1)$ temos*

$$\int_X |w| e^{|w|} d\mu \leq \frac{a}{\lambda} \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + b. \tag{3.22}$$

Então existem duas constantes positivas C_1, C_2 dependentes somente de a, b e $\mu(X)$ tal que

$$\int_X e^{|w|} d\mu \leq \frac{C_1}{\lambda} + C_2.$$

Demonstração: Já vimos que dado $\varepsilon \in (0,1)$ existe uma constante $C(\varepsilon)$ tal que

$$e^s \leq \varepsilon s e^s + C(\varepsilon),$$

para todo $s \geq 0$. Ademais, $C(\varepsilon) := \max_{s\geq 0}(1-\varepsilon s)e^s = (1-\varepsilon\theta)e^\theta$ onde θ é dado por $\theta := (1-\varepsilon)/\varepsilon$, e assim $C(\varepsilon) = \varepsilon \exp((1-\varepsilon)/\varepsilon)$. Segue que

$$\begin{aligned}
\int_X e^{|w|} d\mu &\leq \int_X C(\varepsilon) + \varepsilon |w| e^{|w|} d\mu \\
&= C(\varepsilon)\mu(X) + \varepsilon \int_X |w| e^{|w|} d\mu \\
&\leq C(\varepsilon)\mu(X) + \frac{a\varepsilon}{\lambda} \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + \varepsilon b \\
&= \varepsilon \left(\mu(X) \exp\left(\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right) + \frac{a}{\lambda}\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + b \right). \qquad (3.23)
\end{aligned}$$

Escolhendo ε dado por

$$\frac{1}{\varepsilon} = 1 + \log\left(b + 1 + \frac{a}{\lambda}\log\frac{1}{\lambda}\right),$$

garantimos que

$$c(1+\log(1/\lambda))^{-1} \leq \varepsilon \leq C(1+\log(1/\lambda))^{-1},$$

com constantes c e C dependendo somente de a e b. Isto também assegura que

$$\exp((1-\varepsilon)/\varepsilon) = b + 1 + \frac{a}{\lambda}\log\frac{1}{\lambda}.$$

De uma combinação destes dois fatos com a estimativa (3.23) segue o resultado do Lema. ∎

Corolário 2. *Seja λ_* como definido no Lema 21, e suponha que $0 < \lambda < \lambda_*$. Para cada $k \geq 2$, então existe uma constante $D_*(k)$ dependendo somente de k e de Ω, tal que se v_k $(= v_{k,\lambda})$ é uma soluções variacionais obtida no Teorema 9 com $E(v_k) = c_k(\lambda)$, então*

$$\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial v_k(\sigma)}{\partial \mathbf{n}} \right| d\sigma = \lambda \int_{\partial\Omega} |\sinh(v_k(\sigma))| d\sigma \leq D_*(k).$$

Demonstração: Pelo o início da prova da Prova da Proposição 20 segue (tomando $\varepsilon = 1/4$) que

$$\|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} \leq 4E(v_k) + \lambda C.$$

Combinando com o Proposição 21 chegamos a

$$\begin{aligned}
\lambda \int_{\partial\Omega} v_k(\sigma) &= \|\nabla v_k\|^2_{L^2(\Omega)} \\
&\leq 4E(v_k) + \lambda C \\
&\leq \overline{C}\log(\lambda^{-1}) + D,
\end{aligned}$$

para constantes positivas $\overline{C}$ e D, dependente somente de k e Ω. Usando o fato que $|\theta|e^{|\theta|} \leq 2\theta\sinh(\theta) + e^{-1}$ para todo $\theta \in \mathbb{R}$, concluímos que existe duas constantes positivas a e b tais que

$$\int_{\partial\Omega} |v_k(\sigma)|e^{|v_k(\sigma)|}d\sigma \leq \frac{a}{\lambda}\log\left(\frac{1}{\lambda}\right) + b.$$

Agora, o Lema 8 mostra que $\int_{\partial\Omega} e^{|v_k(\sigma)|d\sigma} \leq C_1\lambda^{-1} + C_2$, e portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial v_k(\sigma)}{\partial \mathbf{n}}\right| d\sigma &= \lambda\int_{\partial\Omega} |\sinh(v_k(\sigma))|d\sigma \\
&= \frac{\lambda}{2}\int_{\partial\Omega}(e^{|v(\sigma)|} - e^{-|v(\sigma)|})d\sigma \\
&\leq \frac{\lambda}{2}\int_{\partial\Omega} e^{|v(\sigma)|}d\sigma \\
&\leq \frac{\lambda}{2}(C^1\lambda^{-1} + C^2) \leq D_*(k),
\end{aligned}$$

onde $D_*(k) = C_1 + \lambda_* C_2$ dependente somente de k e de Ω. ∎

Capítulo 4

Blow-up e Limites de Soluções

Seja $0 < \lambda_n < \lambda_*$ uma sequência tendendo para 0, para $k \geq 2$ fixo, seja $v_{\lambda_n} = v_{k,\lambda_n}$ soluções de

$$\begin{cases} \Delta v_{\lambda_n} = 0 & \text{em } \Omega, \\ \frac{\partial v_{\lambda_n}}{\partial \mathbf{n}} = \lambda_n \sinh(v_{\lambda_n}) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

correspondente ao k-ésimo valor crítico (como construído anteriormente). Já estabelecemos nas Proposições 20 e 21 (ver também o Corolário 2) que para constantes positivas a, d, C e D

$$E(v_{\lambda_n}) \geq a \log\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) - b, \tag{4.2}$$

$$\|v_{\lambda_n}\|^2 \leq C \log\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) + D. \tag{4.3}$$

O fato que

$$\lambda_n \int_{\partial\Omega} |\sinh(\lambda_n)| d\sigma \leq C, \tag{4.4}$$

é consequência direta do Lema 8 da e estimativa (4.3) (como já vimos na prova do Corolário 2). Também, usaremos a decomposição $v_{\lambda_n} = v^0_{\lambda_n} + s_{\lambda_n}$ introduzida anteriormente. Neste contexto já estimamos a constante s_{λ_n} em termos de v^0_λ. Entretanto aqui será mais conveniente usar uma estimativa baseada na equação (4.4). Mais especificadamente,

$$\begin{aligned} |s_{\lambda_n}| &= \left| \frac{1}{|\partial\Omega|} \int_{\partial\Omega} v_{\lambda_n} d\sigma \right| \\ &\leq \int_{\partial\Omega} |v_{\lambda_n}| \frac{d\sigma}{|\partial\Omega|} \\ &= \log\left(\exp\left(\int_{\partial\Omega} |v_{\lambda_n}| \frac{d\sigma}{|\partial\Omega|}\right)\right) \log\left(\int_{\partial\Omega} \exp(|v_\lambda|) \frac{d\sigma}{|\partial\Omega|}\right) \\ &\leq \log\left(\int_{\partial\Omega} \frac{2}{|\partial\Omega|} |\sinh(v_{\lambda_n})| d\sigma + 1\right) \leq \log\left(\frac{C}{\lambda_n} + 1\right) \\ &\leq \log \frac{1}{\lambda_n} + D \end{aligned} \tag{4.5}$$

Aqui usamos a desigualdade de Jensen para a função exponencial, e a desigualdade $\exp|t| \leq 2|\sinh t| + 1$. Um aspecto essencial da estimativa acima é que a constante antes de $\log \frac{1}{\lambda}$ é 1. Neste capítulo estabeleceremos o seguinte resultado a respeito do comportamento de v_{λ_n} quando $\lambda \to 0^+$.

O seguinte teorema é o principal resultado deste capítulo e nos dá o comportamento das soluções quando $\lambda \to 0^+$. de forma resumida a deriva normal restrita a fronteira de Ω converge no sentido de medida, isto é na topologia fraca de dual do espaço $C(\Omega, \mathbb{R})$, para uma medida de Borel (a menos de subsequência) desenvolvendo um número finito de singularidades sobre $\partial\Omega$.

Teorema 10. *Seja $v_\lambda \in H^1(\Omega)$, $\lambda_n \to 0^+$, uma sequência de soluções para* (4.1), *que satisfazem adicionalmente* (4.2) *e* (4.3), *e defina*

$$v^0_{\lambda_n} = v_{\lambda_n} - \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega} v_{\lambda_n} d\sigma.$$

Então existe uma subsequência, também referida como v_{λ_n} e uma medida de Borel regular positiva e finita ν (sobre $\partial\Omega$), e um número finito de pontos $\{x^{(i)}\}_{i=1}^N \subset \partial\Omega, N \geq 1$ tal que

$$\left.\left(\left|\frac{\partial v_{\lambda_n}}{\partial \mathbf{n}}\right|\right)\right|_{\partial\Omega} = (\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n}))|_{\partial\Omega} \to \nu,$$

no sentido de medida. Os pontos $\{x^{(i)}\}, i = 1, \ldots, N$ são exatamente os pontos de ν que tem massa, isto é, os qual $\nu(\{x\}) \neq 0$. Os pontos $x^{(i)}$, $i = 1, \ldots, N$ também representa os pontos de blow-up para a sequência $v^0_{\lambda_n}$, no sentido que

$$\{x^{(i)}\}_{i=1}^N = \{x \in \overline{\Omega} : \exists x_n \to x,\ x_n \in \overline{\Omega},\ \textit{com } |v^0_{\lambda_n}(x_n)| \to \infty\}.$$

A prova do Teorema 10 consiste em adaptações das demonstrações de alguns resultados similares para a solução do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} \Delta v &= U(x)e^v & \text{em } \Omega \\ v &= 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

encontrado em um artigo devido à H. Brezis e & F. Merle (ver [6]), resultados semelhantes podem ser encontrados em um artigo do J. Davila (ver [8]). Começamos com dois lemas.

4.1 Lemas Auxiliares

Lema 9. *Seja w uma solução clássica para $\Delta w = 0$ em Ω, $\frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}} = f$ sobre $\partial\Omega$, para alguma função f, satisfazendo $\int_{\partial\Omega} f\, d\sigma = 0$. Seja w normalizado com $\int_{\partial\Omega} w(\sigma)\, d\sigma = 0$. Para todo $\delta \in (0, \pi)$ existe uma constante C_δ tal que*

$$\int_{\partial\Omega} \exp\left[\frac{(\pi - \delta)w(\sigma)}{\|f\|_{L^1(\partial\Omega)}}\right] d\sigma \leq C_\delta.$$

A constante C_δ depende somente de δ e Ω.

Demonstração: Seja $H(x,y)$, $y \in \partial\Omega$, denotando a solução de

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta_x H(x,y) & = & 0 & \text{em } \Omega \\ \dfrac{\partial H(x,y)}{\partial \mathbf{n}_n} & = & \dfrac{1}{\pi}\dfrac{(x-y)\cdot \mathbf{n_x}}{|x-y|^2} - \dfrac{1}{|\partial\Omega|} & \text{sobre } \partial\Omega \end{array}\right. \tag{4.6}$$

normalizada com $\int_{\partial\Omega} H(\sigma,y)\, d\sigma = 0$. Notemos que $H(\cdot,y)$ está em $C^\infty(\Omega)\cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Portanto

$$C_0 := \max_{x\in\partial\Omega, y\in\partial\Omega} |H(x,y)| < \infty.$$

Agora definamos as funções de Green para o problema de fronteira de Neumann

$$N(x,y) = -\frac{1}{\pi}\log|x-y| + H(x,y),$$

$x \in \overline{\Omega}\setminus\{y\}$, $y \in \partial\Omega$. Um cálculo simples mostra que a função $w(y)$, $y \in \partial\Omega$ é dada por

$$w(y) = \int_{\partial\Omega} N(\sigma,y) f(\sigma)\, d\sigma.$$

Da desigualdade de Jensen (e a convexidade da função exponencial) segue que

$$\exp\left[\int_{\partial\Omega} (\pi-\delta)|N(\sigma,y)|\frac{|f(\sigma)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} d\sigma\right] \leq \int_{\partial\Omega} \exp[(\pi-\delta)|N(\sigma,y)|]\frac{|f(\sigma)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} d\sigma,$$

e assim podemos estimar

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\partial\Omega} \exp\left[\frac{(\pi-\delta)|w(y)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}}\right] d\sigma & \leq & \displaystyle\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \exp[(\pi-\delta)|N(\sigma,y)|]\frac{|f(\sigma)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} d\sigma dy \\ & \leq & \displaystyle e^{(\pi-\delta)C_0}\int_{\partial\Omega}\int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\sigma-y|^{1-\delta/\pi}} dy \frac{|f(\sigma)|}{\|f\|_{L^1(\Omega)}} d\sigma \\ & \leq & e^{(\pi-\delta)C_0} D_\delta \end{array}$$

onde

$$C_0 := \max_{x\in\partial\Omega, y\in\partial\Omega} |H(x,y)| \text{ e } D_\delta = \max_{\sigma\in\partial\Omega}\int_{\Omega} \frac{1}{|\sigma-y|^{1-\delta/\pi}} dy.$$

■

Lema 10. *Seja $\{w_n\}_n$ uma sequência de soluções clássica para*

$$\left\{\begin{array}{rcll} \Delta w_n & = & 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial w_n}{\partial \mathbf{n}} & = & f & \text{sobre } \partial\Omega. \end{array}\right.$$

Suponha que $\|w_n\|_{L^2(\Omega)} \leq C$,e suponha que existe um ponto $x_0 \in \partial\Omega$, uma bola $B_{r_0}(x_0)$ de raio $r_0 > 0$ centrada em x_0, e um índice $s < 1/2$ tal que

$$\|f_n\|_{H^{-s}(B_{r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq C,$$

com C independente de n, e H^{-s} denota o dual de H^s. Então

$$\|w_n\|_{L^\infty(B_{r_0/2}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq \|w_n\|_{L^\infty(B_{r_0/2}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq C,$$

para alguma (outra) constante C independente de n.

Demonstração: Por estimativas elípticas interiores segue que

$$\begin{aligned}\|w_n\|_{H^{\frac{3}{2}-s}(B_{r_0/2}((x_0)} \cap \partial\Omega) &\leq C\left(\|f_n\|_{H^{-s}(B_{r_0}\cap\partial\Omega)} + \|w_n\|_{L^2(B_{r_0}\cap\partial\Omega)}\right)\\ &= \leq C,\end{aligned}$$

para todo $0 < s < 1/2$. usando o Teorema de Imersão de Sobolev, mais precisamente o fato que para o domínio bidimensional Ω, e $s < 1/2$, temos $H^{\frac{3}{2}-s}(B_r(x_0) \cap \partial\Omega) \subset C^0(\overline{B_r(x_0) \cap \Omega})$, nos dá

$$\|w_n\|_{L^\infty(B_{r_0/2}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq \|w_n\|_{L^\infty(B_{r_0/2}(x_0)\cap\Omega)} \leq C\|w_n\|_{H^{\frac{3}{2}-s}(B_{r_0/2}(x_0)\cap\Omega)} \leq C$$

■

4.2 Demonstração do Teorema 10

Denotemos por $v^+_{\lambda_n}$ e $v^-_{\lambda_n}$ a parte positiva e a parte negativa de v_{λ_n}, respectivamente. Desde que $\{\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})\}$ é limitada em $L^1(\partial\Omega)$ (ver (4.4) segue imediatamente que $\{\lambda_n \sinh(v^+_{\lambda_n})\} = \{\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})^+\}$ como também $\{\lambda_n \sinh(v^-_{\lambda_n})\} = \{\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})^-\}$ são limitadas em $L^1(\partial\Omega)$. Por conseguinte podemos extrair uma subsequência (também denotada por v_{λ_n}) tal que

$$\lambda_n \sinh(v^+_{\lambda_n}) \to \mu^+, \tag{4.7}$$

e

$$\lambda_n \sinh(v^-_{\lambda_n}) \to \mu^-, \tag{4.8}$$

onde μ^+ e μ^- são medidas de Borel regular não-negativas. Por causa destas subsequências também temos

$$\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n}) = \lambda_n \sinh(v^+_{\lambda_n}) - \lambda_n \sinh(v^-_{\lambda_n}) \to \mu^+ - \mu^-,$$

$$\lambda_n|\sinh(v_{\lambda_n})| = \lambda_n \sinh(v^+_{\lambda_n}) + \lambda_n \sinh(v^-_{\lambda_n}) \to \mu^+ + \mu^-,$$

a medida de Borel finita regular e positiva $\nu = \mu^+ + \mu^-$ é frequentemente chamado de medida de variação total associada a μ.

Agora estamos prontos para continuar com a prova do Teorema 10. Formulamos os ingredientes desta prova na forma de forma de três lemas separados. A prova de cada um dos lemas segue as linhas das provas do Teorema 3 no anteriormente mencionado artigo do Brezis e Merle. Primeiro introduzidos o assim chamados pontos regulares de $\partial\Omega$.

4.2.1 Pontos Regulares e singulares

Definição 8. *Um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ é chamado regular se existe uma função contínua $0 \leq \psi \leq 1$, com $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de x_0 tal que $\int_{\partial\Omega} \psi \, d\nu < \pi/2$.*

Lema 11. *Seja v_{λ_n} a subsequência extraída acima. Dado um ponto regular $x_0 \in \partial\Omega$ existe um número positivo r_0 e uma constante C, independente de n tal que*

$$\|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq \|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\Omega)} \leq C. \tag{4.9}$$

Demonstração: Decompomos $v^0_{\lambda_n}$ em duas partes

$$v^0_{\lambda_n} = v^{(1)}_{\lambda_n} + v^{(2)}_{\lambda_n},$$

onde $v^{(1)}_{\lambda_n}$ resolve

$$\begin{cases} \Delta v^{(1)}_{\lambda_n} &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial v^{(1)}_{\lambda_n}}{\partial \mathbf{n}} &= \psi\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n}) - \dfrac{1}{|\partial\Omega|}\displaystyle\int_{\partial\Omega} \psi\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n}) d\sigma & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

e $v^{(2)}_{\lambda_n}$ resolve

$$\begin{cases} \Delta v^{(2)}_{\lambda_n} &= 0 & \text{em } \Omega, \\ \dfrac{\partial v^{(2)}_{\lambda_n}}{\partial \mathbf{n}} &= \lambda_n \sinh(v_{\lambda_n}) - \dfrac{\partial v^{(1)}_{\lambda_n}}{\partial \mathbf{n}} & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases}$$

Aqui $0 \leq \psi \leq 1$ é uma função $C^{1,\alpha}$ tal que $\psi \equiv 1$ próximo de x_0, e $\int_{\partial\Omega} \psi \; d\nu < \pi/2$. Ambas funções $v^{(i)}$ são normalizados com $\int_{\partial\Omega} v^{(i)} d\sigma = 0$. A teoria de regularidade Elíptica implica que $v_{\lambda_n} \in C^\infty(\Omega) \cap C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, e o mesmo é verdade para $v^{(1)}_{\lambda_n}$ (e $v^{21)}_{\lambda_n}$). Dualidade e estimativas elípticas produzem

$$\|v^0_{\lambda_n}\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leq C_s \|\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})\|_{H^{s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega)},$$

para todo $-2 \leq s \leq -1$, em particular para $s = -\frac{3}{2}$, isto é,

$$\|v^0_{\lambda_n}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C\|\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})\|_{H^{-1}}(\partial\Omega). \tag{4.10}$$

Temos

$$\begin{aligned} \|\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})\|_{H^{-1}(\partial\Omega)} &= \sup_{\|w\|_{H^1(\partial\Omega)} \leq 1} \left| \int_{\partial\Omega} \lambda_n \sinh(v_{\lambda_n(\sigma)}) w(\sigma) d\sigma \right| \\ &\leq \sup_{\|w\|_{H^1(\partial\Omega)} \leq 1} \|\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})\|_{L^1(\partial\Omega)} \|w\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C, \end{aligned}$$

para a última desigualdade usamos (4.4) e o fato que $H^1(\partial\Omega) \subset L^\infty(\partial\Omega)$. Da combinação desta estimativa e (4.10)

$$\|v^0_{\lambda_n}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C. \tag{4.11}$$

Usando o mesmo argumento para $v^{(1)}_{\lambda_n}$, temos

$$\|v^{(1)}_{\lambda_n}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C. \tag{4.12}$$

Desde que $v^0_{\lambda_n} = v^{(1)}_{\lambda_n} + v^{(2)}_{\lambda_n}$, as desigualdades (4.11) e (4.12) implicam imediatamente que

$$\|v^{(2)}_{\lambda_n}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} \leq C. \tag{4.13}$$

Para a componente $v_{\lambda_n}^{(2)}$ temos

$$\frac{\partial v_{\lambda_n}^{(2)}}{\partial \mathbf{n}} = \text{ constante } \quad (= \frac{1}{|\partial\Omega|}\left|\int_{\partial\Omega}\psi\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})d\sigma\right|)$$

proximo de x_0, e assim estimativas elípticas locais mostram que existe $r_0 > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \|v_{\lambda_n}^{(2)}\|_{L^\infty(B_{2r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} &\leq \|v_{\lambda_n}^{(2)}\|_{L^\infty(B_{2r_0}(x_0)\cap\Omega)} \\ &\leq C\left(\|v_{\lambda_n}^{(2)}\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} + \tfrac{1}{|\partial\Omega|}\left|\int_{\partial\Omega}\psi\lambda_n\sinh(v_{\lambda_n})d\sigma\right|\right) \leq C. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Para o última estimativa usamos (4.13) e o fato da sequência $\{\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})\}$ ser limitada em $L^1(\partial\Omega)$. A respeito da componente $v_{\lambda_n}^{(1)}$ temos

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial v^{(1)}}{\partial \mathbf{n}}\right\|_{L^1(\partial\Omega)} &\leq \|\psi\lambda_n\sinh(v_{\lambda_n})\|_{L^1(\partial\Omega)} + \int_{\partial\Omega}|\psi\lambda_n\sinh(v_{\lambda_n})|d\sigma \\ &= 2\|\psi\lambda_n\sinh(v_{\lambda_n})\|_{L^1(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Desde que

$$\int_{\partial\Omega}\psi\lambda_n|\sinh(v_{\lambda_n})|d\sigma \to \int_{\partial\Omega}\psi d\nu,$$

e desde que $\int_{\partial\Omega}\psi d\nu < (\pi - \delta_0)/2$, para algum δ_0, suficientemente pequeno, concluímos que

$$\|\psi\lambda_n\sinh(v_{\lambda_n})\|_{L^1(\partial\Omega)} < (\pi - \delta_0/2),$$

para n suficientemente grande. Como consequência

$$\left\|\frac{\partial v_{\lambda_n}^{(1)}}{\partial \mathbf{n}}\right\| \leq \pi - \delta$$

para n suficientemente grande. Devido ao Lema 9 existe $p > 1$ tal que

$$\int_{\partial\Omega}\left(e^{|v_{\lambda_n}^{(1)}|}\right)^p d\sigma \leq C. \tag{4.15}$$

Podemos, por exemplo, tomar $p = \frac{\pi-\delta_0/2}{\pi-\delta_0}$. Também, temos

$$\begin{aligned} \lambda_n|\sinh(v_{\lambda_n})| &\leq \lambda_n\exp(|v_{\lambda_n}|) \\ &\leq \leq \exp(|v_{\lambda_n}^{(1)}| + |v_{\lambda_n}^{(2)}| + |s_{\lambda_n}|), \end{aligned}$$

com $s_{\lambda_n} = s(v_{\lambda_n}^0) = \frac{1}{|\partial\Omega|}\int_{\partial\Omega}v_{\lambda_n}$. Suficientemente proximo de x_0 a componente $v_{\lambda_n}^{(2)}$ é uniformemente limitada (ver (4.14)). Devido a estimativa (4.5) segue que

$$|\lambda_n\sinh(v_{\lambda_n})|^p \leq C\left(e^{|v_{\lambda_n}^{(1)}|}\right)^p, \tag{4.16}$$

em alguma vizinhança $B_{2r_0}(x_0)\cap\partial\Omega$. Da Combinação das estimativas (4.15) e (4.16)

$$\left\|\frac{\partial v_{\lambda_n}^{(0)}}{\partial \mathbf{n}}\right\|_{L^p(B_{2r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq C,$$

para algum $p > 1$, uniformemente em n. Portanto o Teorema de Imersão de Sobolev nos dá

$$\left\| \frac{\partial v^{(0)}_{\lambda_n}}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{H^{-s}(B_{2r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq C,$$

uniformemente em n, para algum $s < 1/2$. Usando a estimativa elíptica interior do Lema 4.3 chegamos a

$$\|v^{(0)}_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq \|v^{(0)}_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\Omega)} \leq C,$$

uniformemente em n. Esta é a estimativa desejada. ■

Definição 9. *Denotemos por S o conjunto dos pontos singulares de $\partial\Omega$, isto é, os pontos que não são regulares no sentido da Definição 8: $S = \partial\Omega \backslash \{$ pontos regulares $\}$*

Lema 12. *O conjunto S consiste de uma quantidade finita de pontos, e é não vazio.*

Demonstração: Da definição de ponto regular (Definição 8) segue que se $x_0 \in S$ então $\int_{\partial\Omega} \phi d\nu \geq \pi/2$ para toda função contínua $0 \leq \phi \leq 1$, com $\psi \equiv 1$ em uma vizinhança de x_0. Desde que ν é medida regular concluímos que $\nu(\{x_0\}) \geq \pi/2$ para todo $x_0 \in S$. Devido a finitude da Medida ν segue que S consiste de um número finito de pontos (com $\#S \leq \int_{\partial\Omega} d\nu / \inf_{x_0\in S} \nu(x_0) \leq 2\int_{\partial\Omega} d\nu/\pi$).

Se S fosse vazio, então o Lema 11 juntamente com a compacidade de $\partial\Omega$ implicaria que

$$\|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C.$$

Desde que $|s_{\lambda_n}| \leq \log(1/\lambda_n) + D$ (ver (4.5) segue que

$$\|\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq C$$

e portanto

$$\|\nabla v^0_{\lambda_n}\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\lambda_n \sinh(v_{\lambda_n})\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C.$$

Do Lema 6 podemos concluir que

$$|s_{\lambda_n}| \leq C_1 + C_2\|\nabla v^0_{\lambda_n}\|^2_{L^2(\Omega)} \leq C,$$

ou

$$\|v_{\lambda_n}\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(\Omega)} + |s_\lambda| \leq C.$$

Teríamos, portanto, a estimativa

$$\begin{aligned} E(v_{\lambda_n}) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_{\lambda_n}|^2 dx - \lambda_n \int_{\partial\Omega} (\cosh(v_{\lambda_n}) - 1) d\sigma \\ &= \lambda_n \int_{\partial\Omega} \left(\frac{1}{2}\sinh(v_{\lambda_n} v_{\lambda_n}) - \cosh(v_{\lambda_n}) - 1 \right) d\sigma \\ &\leq C\lambda_n \to 0, \end{aligned}$$

quando $n \to \infty$, que claramente contradiz (4.2). Como consequência S é não-vazia. ■

Passemos a demonstrar que

Lema 13. *Seja v_{λ_n} a subsequência extraída em no contexto de* (4.7) *e* (4.8). *O conjunto S pode ser alternativamente caracterizado como*

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \partial\Omega : \ \exists x_n \to x, \ x_n \in \overline{\Omega}, \ \textit{com } |v^0_{\lambda_n}(x_n)| \to \infty\} \\ &= \{x \in \overline{\Omega} : \ \exists x_n \to x, \ x_n \in \overline{\Omega}, \ \textit{com } |v^0_{\lambda_n}(x_n)| \to \infty \end{aligned}$$

e

$$S = \{x \in \partial\Omega : \ \nu(\{x\}) \neq 0\}.$$

Demonstração: O fato que o conjunto

$$\{x \in \Omega; \ \exists x_n \to x, x_n \in \overline{\Omega}, \ \text{com } |v^0_{\lambda_n}(x_n)| \to \infty\}$$

é um subconjunto de S já foi estabelecido. De fato, se esta conclusão não fosse válida, então existiria um ponto regular x_0 e uma sequência $x_n \to x_0$, $x_n \in \overline{\Omega}$, com $|v^0_{\lambda_n}| \to \infty$. Entretanto, isto contradiz o já verificado fato que $\|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq \|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\Omega)} \leq C$ para algum $r_0 > 0$ (Lema 11).

Para estabelecer a outra inclusão, simplesmente tomando $x_0 \in S$, e notemos que para cada x_0 e $r > 0$ necessariamente temos

$$\|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_r(x_0)\cap\partial\Omega)} \to \infty \text{ quando } n \to \infty. \tag{4.17}$$

Porque se este não é o caso, então existe $r > 0$ e uma subsequência $v_k = v_{\lambda_k}$ tal que

$$\|v_k\|_{L^\infty(B_{r_1}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq \|v^0_{\lambda_{n_k}}\|_{L^\infty(B_{r_1}(x_0)\cap\partial\Omega)} + |s_{\lambda_{n_k}}| \leq \log\left(\frac{1}{\lambda_{n_k}}\right) + D,$$

aqui utilizamos (4.5) para a última estimativa. Teríamos, assim,

$$\int_{B_r(x_0)\cap\partial\Omega} \lambda_{n_k} |\sinh(v_k)| d\sigma \leq C|B_r(x_0) \cap \partial\Omega| \leq C_r,$$

para todo $0 < r < r_1$, e todo k. Consequentemente existe uma função contínua $0 \leq \psi \leq 1$ com $\psi \equiv 1$ numa vizinhança de x_0, tal que

$$\int_{\partial\Omega} \psi\lambda_{n_k} |\sinh(v_k)| d\sigma < \pi/4, \text{ para todo } k.$$

Contudo, isto implicaria que

$$\int_{\partial\Omega} \psi d\nu = \lim_{k\to\infty} \int_{\partial\Omega} \psi\lambda_{n_k} |\sinh(v_k)| d\sigma < \pi/2,$$

e assim x_0 é um ponto regular — uma contradição. Assim concluímos que (4.17) é necessariamente válida. Agora escolhemos $N_1 < N_2 < \ldots < N_k < N_{k+1} < \ldots$ tal que $n \geq N_k \Longrightarrow \|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{1/k}(x_0)\cap\partial\Omega)} \geq k$, e selecionando pontos x_n, $N_k \leq n \leq N_{k+1} - 1$, tal que

$$x_n \in B_{1/k}(x_0) \cap \partial\Omega, \text{ e } |v^0_{\lambda_n}(x_n)| \geq k - 1.$$

Com esta seleção de pontos $x_n \in \partial\Omega$ é claro que $x_n \to x$ e $|v^0_{\lambda_n}(x_n)| \to \infty$, quando $n \to \infty$. Isto verifica a primeira caracterização alternativa de S. O fato de que não existem pontos de blow-up no interior de Ω é consequência direta das estimativas elípticas interiores, a limitação (4.11), e a identificação $\Delta v^0_{\lambda_n} = 0$ em Ω. Isto verifica a segunda caracterização alternativa de S.

Quando se trata da terceira caracterização já vimos na prova do último Lema que $\nu(\{x\}) \geq \pi/2$ para todo $x \in S$ (isto foi usado para mostrar que S consiste de um número finito de pontos). Resta vermos que $\nu(\{x_0\}) = 0$ para todo ponto regular x_0. Do Lema 11 sabemos que existe uma bola $B_{r_0}(x_0)$ tal que

$$\|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\Omega)} \leq C.$$

Como acima, isso implica que

$$\|v_\lambda\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} \leq \|v^0_{\lambda_n}\|_{L^\infty(B_{r_0}(x_0)\cap\partial\Omega)} + |s_{\lambda_n}| \leq \log\left(\frac{1}{\lambda_n}\right) + D.$$

e portanto

$$\int_{B_r(x_0)\cap\partial\Omega} \lambda_n|\sinh(v_{\lambda_n})|d\sigma \leq C|B_r(x_0)\cap\partial\Omega| \leq C_r,$$

para todo $0 < r < r_0$, e todo n. Concluímos que $\mu(\{x_0\}) \leq C_r$ para todo $0 < r < r_0$, ou $\mu(\{x_0\}) = 0$. ■

Agora, uma combinação do Lema 12 e do Lema 13 estabelece imediatamente o Teorema 10.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, Robert A.: *Sobolev Spaces.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 65. Academic Press, New York, 1975.

[2] Bahri, Abbas: *Topological results on a certain class of functionals and applications.* J. Funct. Anal. 41 (1981), no. 3, 397-427.

[3] Bers, Lipman; John, Fritz; Schechter, Martin: *Partial Differential Equations.* With supplements by Lars Gårding and A. N. Milgram. With a preface by A. S. Householder. Reprint of the 1964 original. Lectures in Applied Mathematcs, 3a. American Mathematical Society, providence, R.I.,1979.

[4] Biezuner, J: *Notas de aula: Equações Difereniais Parciais I/II.* UFMG, 2010.

[5] Brezis, Haïm: *Analyse Fonctionnelle. Thèorie et applications.* Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. Masson, Paris, 1983.

[6] Brezis, Haïm; Merle, Frank: *Uniform estimates and blow-up behavior for solutions of $-\Delta u = V(x)e^u$ in two dimensions.* Comm Partial Differential Equations, 16 (1991), no. 8-9, 1223-1253.

[7] Bryan, Kurt; Vogelius, Michael: *Singular solutions to a nonlinear elliptic boundary value problem originating from corrosion modeling.* Quart. Appl. Math. 60 (2002), no. 4, 675-694.

[8] Dávila, Juan.: *A linear elliptic equation with a non-linear boundary condition.* (Rutgers University, 2001). (Preprint.)

[9] Deconinck, J.: *Current Distributions and Electrode Shape Changes in Electrochemical Systems*; Lecture Notes in Engineering, Vol. 75, Springer-Verlag, Berlin 1992.

[10] Evans, Lawrence C.: *Partial differential equations.* Second edition. Graduate Studies in Mathmatics, 19. American Mathematical Society, Providence, RI, 2010.

[11] Gilbarg, David; Trudinger, Niel S.: *Elliptic partial differential equations of second order.* Reprint of the 1998 edition. Clasics Mathmatics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[12] Kavian, Otared: *Introduction ‘a la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*; Série Mathématiques & Applications # 13, Springer-Verlag, Paris-Berlin, 1993.

[13] Kavian, Otared; Vogelius, Michael: *On the existence and "blow-up" of solution to a two-dimensional nonlinear boundary-value problem arising in corrosion modelling.* Proc. Roy. Soc. edinburgh Sect. A 133, no. 1, 119-149.

[14] Kesavan, S.: *Nonlinear functional analysis, A first course.* Text and readings in mathematics, 28. Hindustan Book agency, 2004

[15] Peetre, Jaak: *Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff*; Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 16 1966 fasc. 1, 279-317.

[16] Pohožaev, S.I.: *An approach to nonlinear equations* ; Dokl. Akad. Nauk 247 (1949), no. 6, 1327-1331.

[17] Struwe, Michael: *Variational Methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems. Second edition.* Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3), 34. Springer-Verlag, Berlin 1996.

[18] Trudinger, Neil S.: *On imbeddings into Orlicz spaces and some applications*; J. Math. Mech. 17 1967 473-483.

[19] Vogelius, Michael. & XU,Jian-Ming: *A nonlinear elliptic boundary value problem related to corrosion modeling.* Quart. Appl. Math. 56 (1998), no. 3, 479-505.