Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Propriedades Qualitativas de Soluções de Problemas Elípticos Semilineares em Domínios Não Limitados

por

José Carlos de Albuquerque Melo Júnior[†]

Março/2013

João Pessoa - PB

[†]Este trabalho contou com o apoio financeiro do CNPq

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Propriedades Qualitativas de Soluções de Problemas Elípticos Semilineares em Domínios Não Limitados

por

José Carlos de Albuquerque Melo Júnior

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2013
João Pessoa - PB

M528p Melo Júnior, José Carlos de Albuquerque.

Propriedades qualitativas de soluções de problemas elípticos semilineares em domínios não limitados / José Carlos de Albuquerque Melo Júnior. - João Pessoa, 2013. 106f. : il.

Orientador: João Marcos Bezerra do Ó.

Dissertação (Mestrado) - UFPB/CCEN

1. Matemática. 2. Domínios não limitados. 3. Monotonicidade. 4. Simetria.

UFPB/BC CDU: 51(043)

Propriedades Qualitativas de Soluções de Problemas Elípticos Semilineares em Domínios Não Limitados

por

José Carlos de Albuquerque Melo Júnior

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó -UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto -UFCG

Prof. Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu -UFMG

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (suplente)

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Mestrado em Matemática

Março/2013

Agradecimentos

- Ao Professor João Marcos Bezerra do Ó que, orientou o presente trabalho com muita propriedade, multiplicando meus conhecimentos, motivando a estudar e a seguir em frente, transmitindo sua experiência de forma pontual e precisa.

- Aos meus pais José Carlos de Albuquerque Melo e Júlia Maria Gondim de Albuquerque e as minhas irmãs Juliana Gondim de Albuquerque e Jaqueline Gondim de Albuquerque, por me apoiarem em todos os momentos.

- Aos meus amigos Brenda Libardi, Diego Ferraz, Gustavo Araújo, Ivaldo Tributino, Jalman Alves, Kaye Oliveira, Moisés Toledo, Ricardo Pinheiro e Thiago Keneth que ajudaram de forma direta para que esta dissertação fosse concluída.

- Aos professores do Departamento de Matemática - UFPB, por estarem sempre presentes. Especialmente aos professores Everaldo Souto de Medeiros e Napoleon Caro Tuesta que, apesar de todos os seus compromissos, sempre estiveram à disposição.

- A banca examinadora da defesa de dissertação: Prof. Dr. Emerson Alves Mendonça de Abreu, Prof. Dr. Marco Aurélio Soares Souto e o Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros.

- A Vivian Correia Arruda, por estar comigo a mais de 5 anos, me ajudando e fortalecendo, provando a cada dia que estou com a pessoa certa.

- Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, pelo apoio financeiro.

Aos meus pais, Júlia e Carlos

Resumo

Neste trabalho, estudamos propriedades qualitativas de soluções da seguinte classe de equações elípticas semilineares

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

definidas em vários tipos de domínios não limitados do $\mathbb{R}^n$, dentre eles, cilíndros infinitos, semi espaços e domínios Lipschitzianos. Analisamos propriedades de convergência, monotonicidade e simetria de soluções de (1), quando f satisfaz certas condições adequadas. Para tanto, utilizaremos várias versões do princípio do máximo, o método dos planos móveis (moving planes), estimativas elípticas e teoremas de compacidade. Estudamos ainda resultados sobre operadores de Schrödinger e, como consequência, provamos a conjectura de De Giorgi em dimensão $n = 2$.

Palavras-chave: Domínios não limitados; Monotonicidade; Simetria

Abstract

In this work, we study qualitative properties of solutions of the semilinear elliptic equation class

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

defined in different kinds of unbounded domains of $\mathbb{R}^n$, among them, infinite cylinders, half spaces and Lipschitz domains. We analyze properties like convergence, monotonocity and symmetry of solutions of the problem (1), when f satisfy certain conditions suitable. For this purpose, we will use various kinds of maximum principles, the moving planes method, elliptic estimates and compacity theorems. We also studied some results about Schrödinger operators and we prove the De Giorge conjecture in dimension $n = 2$.

Key words: Unbounded domains; Monotonicity; Symmetry

Sumário

Notações

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$	
$x' = (x_1, x_2, ..., x_{n-1})$	
$e_n = (0, ..., 0, 1)$	
$B(x, r)$	bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de centro x e raio r
S^{n-1}	esfera unitária de dimensão n
$\overline{\Omega}$	fecho do conjunto Ω
$\partial\Omega$	fronteira do conjunto Ω
$\mathrm{dist}(x, \Omega)$	distância do ponto x ao conjunto Ω
$\mathrm{dist}(\Omega_1, \Omega_2)$	distância do conjunto Ω_1 ao conjunto Ω_2
$\mathrm{diam}(\Omega)$	diâmetro do conjunto Ω
$\lvert\Omega\rvert$	medida de Lebesgue do conjunto Ω
$\Omega' \subset\subset \Omega$	se $\Omega' \subset \overline{\Omega'} \subset \Omega$ e $\overline{\Omega'}$ é um conjunto compacto

$\lvert \cdot \rvert$	norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$
Id	aplicação identidade
$c^+ = \max\{0, c\}$	parte positiva da função c
$c^- = \max\{0, -c\}$	parte negativa da função c
u_{x_i} ou $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$	derivada parcial de u com respeito à x_i
$Du = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$	gradiente de u
$D_{x'} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_{n-1}}\right)$	gradiente de u na coordenada x'
$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u
$\Delta_{x'} = \sum_{i=1}^{n-1} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u na coordenada x'
$D^2 u$	matriz Hessiana
$a \cdot b$	produto interno de a e b
$f(x) = O(g(x))$ quando $\lvert x \rvert \to \infty$	$\lim_{\lvert x \rvert \to \infty} \dfrac{\lvert f(x) \rvert}{\lvert g(x) \rvert} \leq C$, para algum $C \geq 0$
$\limsup_{\lvert x \rvert \to +\infty} u$	limite superior da função f quando $\lvert x \rvert \to +\infty$
$\blacksquare$	indica final de demonstração.
$\lVert u \rVert_\infty = \lVert u \rVert_{C(\overline{\Omega})} = \sup_\Omega \lvert u \rvert$	
$\lVert u \rVert_{L^\infty(\Omega)} = \sup ess \lvert u(x) \rvert, \ x \in \Omega$	

$$[u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \sup_{x,y\in\Omega,\ x\neq y} \left\{ \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} \right\}$$

$$[u]_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} = \sup_{|\beta|=k} [D^\beta u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$$

$$\|u\|_{C^\alpha(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^\alpha(\overline{\Omega})}$$

$$\|u\|_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha|=k} [D^\alpha u]_{C^\gamma(\overline{\Omega})}$$

$$\|u\|'_{C^{k,\lambda}(\overline{\Omega})} = \sum_{|\alpha|\leq k} \operatorname{diam}^\alpha(\Omega)\|D^\alpha u\|_{C(\overline{\Omega})} + \operatorname{diam}^{k+\lambda}[u]_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}\right)$$

Introdução

Em nosso trabalho, estudamos propriedades qualitativas de soluções da seguinte classe de equações elípticas semilineares

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2}$$

em vários tipos de domínios não limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dentre eles: cilíndros infinitos, semi espaços e domínios Lipschitzianos. No decorrer do estudo, a menos que seja enfatizado, iremos considerar soluções $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$.

Nosso estudo foi baseado em uma série de artigos do H. Berestycki, L. Caffarelli e L. Nirenberg, principalmente nos artigos [3], [4] e [6], onde eles buscavam certas propriedades para as soluções de (2), tais como: monotonicidade, simetria e convergência. Para demonstrar propriedades como monotonicidade e simetria, o procedimento era aplicar estimativas elípticas e o método dos planos móveis[3]. Este método é devido a A. D. Alexandroff[4]. Em 1971, James Serrin aplicou este método em equações diferenciais parciais (cf. [28]). Em 1979, B. Gidas, W. M. Ni e L. Nirenberg, aplicaram este método para estabelecer a simetria radial de soluções positivas de certas equações elípticas não lineares (cf. [18]). Posteriormente, este método foi utilizado por M. J. Esteban e P. L. Lions (cf. [15]), e também por Y. Li e W. M. Ni (cf. [22]).

Para um melhor entendimento, iniciamos o trabalho com um **Capítulo 0**, onde enunciamos algumas ferramentes básicas que serão utilizadas nas demonstrações.

No **Capítulo 1**, iremos considerar conjuntos da forma

$$\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega,$$

onde $\omega \subset \mathbb{R}^j$ é um domínio limitado e suave. Neste capítulo, consideramos soluções *positivas* de (2), mas nada será exigido sobre seu comportamento no infinito. Inicialmente,

[3]Durante o trabalho, "the moving planes method"será chamado de "método dos planos móveis".

[4]Alexandroff o aplicou no estudo de superfícies de curvatura média constante.

provamos que as soluções possuem no máximo um crescimento exponencial, no sentido em que existem constantes positivas C e α tais que

$$u(x,y) \leq Ce^{\alpha|x|}, \quad \text{em} \;\; \Omega,$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n-j}$ e $y \in \omega$. Na segunda seção, iremos provar uma versão do princípio do máximo para este tipo de domínio. Por fim, usaremos estimativas elípticas e o método dos planos móveis para provar que se ω é um conjunto simétrico e convexo então, sob certas condições, soluções positivas de (2) herdam esta simetria e são monótonas. Formalmente:

Teorema: *Seja u uma solução positiva de* (2)*, onde $\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega$, ω é convexo na direção y_1, simétrico sobre o hiperplano $y_1 = 0$ e com fronteira de classe C^2. Então u é simétrica com respeito a y_1 e $\partial u/\partial y_1 < 0$, se $y_1 > 0$, sempre que $j \geq 2$ ou $j = 1$ e $f(0) \geq 0$.*

No **Capítulo 2**, estudamos propriedades de soluções de (2), em três tipos de domínios não limitados. Primeiramente, utilizamos o método dos planos móveis para assegurar a monotonicidade de soluções *positivas*, quando $\Omega = \mathbb{R} \times (0,h) \subset \mathbb{R}^2$ é uma "faixa". Nesta primeira parte, iremos assumir que f é uma função globalmente Lipschitziana. Na segunda parte, o conjunto considerado será o plano $\Omega = \mathbb{R}^2$. Inicialmente estudaremos dois resultados envolvendo operadores de Schrödinger

$$L\psi = \Delta\psi + q\psi,$$

onde q é um potencial suave e limitado. Como consequência de tais resultados, faremos uma exposição da conjectura de De Giorgi em dimensão $n = 2$. Na parte final do capítulo, o conjunto não limitado será o semi espaço

$$\Omega = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\} = \mathbb{R}^n_+, \quad n = 2 \text{ ou } n = 3.$$

Utilizaremos um caso particular de um resultado provado por Berestycki, Caffarelli e Nirenberg no artigo [8], para provar o seguinte teorema:

Teorema: *Seja u uma solução positiva e limitada de* (2)*. Se $n = 2$ então u é simétrica. Se $n = 3$, $f(0) \geq 0$ e $f \in C^1$, então u é simétrica.*

Após a demonstração, faremos uma série de observações e conjecturas em relação as hipóteses do teorema.

No **Capítulo 3**, iremos considerar o conjunto

$$\Omega = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > \varphi(x_1, ..., x_{n-1})\}, \tag{3}$$

onde $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ é uma função globalmente Lipschitziana. O domínio Ω é limitado por um gráfico Lipschitz e, portanto, o chamaremos de domínio Lipschitziano. Neste capítulo, estudaremos propriedades de soluções *positivas* e *limitadas* do problema (2). Iniciamos o capítulo provando um princípio do máximo e, como aplicação, iremos concluir que o supremo de u não é atingido em Ω. Na segunda seção, iremos utilizar uma teoria envolvendo funções positivas, harmônicas e homogêneas, para assegurar a Hölder continuidade das soluções em $\overline{\Omega}$. Na terceira seção, iremos provar que as soluções convergem uniformemente para o supremo, quando os pontos se distanciam da fronteira. Em [28], Serrin provou o seguinte resultado:

Teorema: *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e suave, e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma função que satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & u > 0 \ \textit{em } \Omega, \\ u = 0, & \textit{em } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha, & \textit{constante em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

então Ω é uma esfera.

Na última seção deste capítulo, iremos demonstrar o seguinte teorema:

Teorema: *Seja Ω como em (3) onde $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ é uma função Lipschitziana, de classe C^2, satisfazendo*

$$\lim_{|x| \to \infty} (\varphi(x + \tau) - \varphi(x)) = 0.$$

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução limitada de (4), onde f satisfaz as condições 1, 2 e 3, então φ é constante, em outras palavras, Ω é um semi espaço.

Como forma de detalhar alguns resultados importantes que foram utilizados no corpo do texto, adicionamos um **Apendice** ao final do trabalho.

Capítulo 0

Definições e resultados auxiliares

Neste capítulo exibimos algumas definições e resultados fundamentais para a leitura deste trabalho, tais como: Lema de Hopf, princípios do máximo, estimativas elípticas e resultados de regularidade.

Teorema 0.1 *(Integração por partes) Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, com fronteira ∂U de classe C^1. Se $u, v \in C^1(\overline{U})$ então*

$$\int_U \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = -\int_U u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx + \int_{\partial U} uv\nu^i dS, \quad (i = 1, ..., n).$$

Demonstração: cf. [16, Teorema 2]. ∎

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio (aberto e conexo). Considere o operador diferencial de segunda ordem

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(x)u, \quad a_{ij} = a_{ji},$$

onde os coeficientes a_{ij} são funções contínuas sobre $\overline{\Omega}$ e os coeficientes b_i e c são funções limitadas em Ω.

Definição 0.1 *Diremos que o operador L é um **operador elíptico**, se a matriz coeficiente $(a_{ij}(x))$ é positiva, ou seja, se $\lambda(x)$ e $\Lambda(x)$ denotam, respectivamente, o autovalor mínimo e máximo de $(a_{ij}(x))$, então*

$$0 < \lambda(x)|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2,$$

*para todo $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Diremos que L é um **operador estritamente elíptico**, se $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ para alguma constante λ_0. Diremos que L é um **operador uniformemente elíptico**, se Λ/λ é limitado em Ω.*

Teorema 0.2 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e não vazio. Considere $(u_n)_n$ uma sequência de funções harmônicas em Ω, convergindo uniformemente para uma função u, em cada conjunto compacto $K \subset \Omega$. Então u é uma função harmônica.*

Demonstração: cf. [29, Teorema 1.23]. ■

Definição 0.2 *Seja $(f_m)_m$ uma sequência de funções com valores reais, definidas em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que a sequência é* equicontínua *no ponto $x \in D$ se, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que*

$$|f_m(y) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad \textit{se} \quad |y - x| < \delta,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$.

Teorema 0.3 *(Arzelà-Ascoli) Seja $(f_m)_m$ uma sequência de funções com valores reais, definidas em um subconjunto compacto S de $\mathbb{R}^n$. Suponha que existe uma constante M tal que $|f_m(x)| \leq M$ para todo $m \in \mathbb{N}$ e para todo $x \in S$. Além disso, suponha que a sequência $(f_m)_m$ seja equicontínua em todo ponto de S. Então existe uma subsequência uniformemente convergente em S.*

Demonstração: cf. [26, Teorema 4.17]. ■

Definição 0.3 *Se $Lu \geq 0$, então dizemos que u é uma* ***subsolução*** *do operador L. Quando $Lu \leq 0$, dizemos que u é uma* ***supersolução*** *do operador L.*

Se um ponto $x_0 \in \partial\Omega$ é um ponto de máximo para uma função u, então

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) \geq 0,$$

onde ν denota o vetor normal exterior. Enunciamos agora o lema de Hopf, o qual afirma que se u é uma subsolução de um operador elíptico, então sob certas condições vale a desigualdade estrita.

Lema 0.1 *(Lema de Hopf) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Considere L um operador uniformemente elíptico. Suponha que u é uma subsolução de L, ou seja, $Lu \geq 0$ em Ω. Seja $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\partial\Omega$ satisfaz a condição da esfera interior em x_0, que u é contínua em x_0 e que $u(x_0) > u(x)$, para todo $x \in \Omega$. Suponha que pelo menos uma das hipóteses abaixo seja válida:*

(i) $c = 0$ *ou*

(ii) $c \leq 0$ *e* $u(x_0) \geq 0$ *ou*

(iii) $u(x_0) = 0$.

Então, se existir a derivada normal em x_0*, ela deve satisfazer*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0,$$

onde ν *denota o vetor normal exterior.*

Demonstração: cf. [19, Lema 3.4]. ■

Teorema 0.4 *Considere* L *um operador uniformemente elíptico, com* $c = 0$ $(c \leq 0)$*. Seja* $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega)$ *uma subsolução de* L*, ou seja,* $Lu \geq 0$*. Se* u *atinge um máximo (máximo não negativo) em um ponto interior de* Ω*, então* u *é constante.*

Demonstração: cf. [19, Teorema 9.6]. ■

Teorema 0.5 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio com fronteira suave. Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *uma função não negativa, tal que*

$$\begin{cases} \Delta u + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + c(x) u \leq 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

onde as funções $b_i(x)$ *e* $c(x)$ *são limitadas. Então*

(i) Se existe $x_0 \in \Omega$ *tal que* $u(x_0) = 0$*, então* $u \equiv 0$ *em* Ω*;*

(ii) Se $u \not\equiv 0$ *em* Ω*, então em* $\partial\Omega$*, a derivada normal exterior* $\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$.

Demonstração: cf. [12, Teorema 7.3.3]. ■

Teorema 0.6 *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio tal que* $\operatorname{diam}(\Omega) \leq d$ *e seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$*. Suponha que existe* $\delta > 0$ *tal que*

$$Lu \geq 0, \quad \text{em} \;\; \Omega,$$

quando $|\Omega| < \delta$*, e*

$$\lim_{x \to \partial\Omega} u(x) \leq 0.$$

Então $u \leq 0$ *em* Ω*.*

Demonstração: cf. [7, Proposição 1.1]. ■

Teorema 0.7 *(Princípio do máximo para domínios estreitos) Seja ϕ uma função positiva em $\overline{\Omega}$, tal que*

$$-\Delta\phi + \lambda(x)\phi \geq 0.$$

Suponha que u satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u + c(x)u \geq 0, & \textit{para todo } x \in \Omega, \\ u \geq 0, & \textit{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde c é uma função limitada. Sendo a largura da região Ω suficientemente pequena, se $c(x) > \lambda(x) = -\frac{1}{l^2}$, então $u \geq 0$ em Ω.

Demonstração: cf. [12, Corolário 7.4.1]. ■

Teorema 0.8 *(Desigualdade de Harnack) Seja L um operador estritamente elíptico e seja $u \in C^2(\Omega)$ com $u \geq 0$, uma solução de*

$$Lu = 0, \quad \textit{em} \;\; \Omega.$$

Se $\tilde{\Omega} \subset\subset \Omega$, então existe uma constante C tal que

$$\sup_{\tilde{\Omega}} u \leq C \inf_{\tilde{\Omega}} u,$$

onde a constante C depende de $\tilde{\Omega}$ e dos coeficientes de L.

Demonstração: cf. [16, Teorema 5]. ■

Lema 0.2 *Seja Ω um conjunto aberto e, seja $u \in C^2(\Omega)$ uma solução da equação $Lu = f$ em Ω, onde f e os coeficientes do operador elíptico L são de classe $C^\alpha(\Omega)$. Então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

Demonstração: cf. [19, Lema 6.16]. ■

Teorema 0.9 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto. Então, para cada k e para todos $0 < \alpha < \beta \leq 1$, temos as seguintes imersões:*

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

$$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega}),$$

$$C^{k,\beta} \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}).$$

Se Ω é limitado, então as duas últimas imersões são compactas, e se Ω é convexo e limitado, então todas as três imersões são compactas. Se Ω é convexo, valem duas imersões adicionais,

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,1}(\overline{\Omega}),$$

$$C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

sendo a última compacta se Ω for também limitado.

Teorema 0.10 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado. Suponha que $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ e $f \in C^\alpha(\overline{\Omega})$ satisfaz*

$$Lu = f, \quad em \ \ \Omega,$$

onde L é um operador elíptico com coeficientes em $C^\alpha(\overline{\Omega})$ e $\Omega' \subset\subset \Omega$ com $\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega) \geq g$. Então, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$d||Du||_{C(\Omega')} + d^2||D^2u||_{C(\Omega')} + d^{2+\alpha}||D^2u||_{C^\alpha(\Omega')} \leq C(||u||_{C(\Omega)} + ||f||_{C^\alpha(\Omega)}),$$

onde C depende apenas da constante elíptica e da norma $C^\alpha(\Omega)$ dos coeficientes de L.

Demonstração: cf. [19, Corolário 6.3]. ■

Teorema 0.11 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $u \in C^2(\Omega)$ uma função satisfazendo $\Delta u = f$ em Ω. Então existe uma constante $C = C(n)$ tal que,*

$$\sup_\Omega \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)|Du(x)| \leq C\left(\sup_\Omega |u| + \sup_\Omega \operatorname{dist}^2(x, \partial\Omega)|f(x)|\right).$$

Demonstração: cf. [19, Teorema 3.9]. ■

Teorema 0.12 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e considere $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C^\alpha(\Omega)$, tais que $\Delta u = f$ no conjunto Ω. Então $u \in C^{2,\alpha}$ e para cada duas bolas concentricas $B_1 = B(x_0, R)$,$B_2 = B(x_0, 2R) \subset\subset \Omega$, temos que*

$$\|u\|'_{C^{2,\alpha}(B_1)} \leq C\left(\|u\|_{C(B_2)} + R^2\|f\|'_{C^{0,\alpha}(B_2)}\right),$$

onde $C = C(n, \alpha)$.

Demonstração: cf. [19, Teorema 4.6]. ■

Teorema 0.13 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e L um operador estritamente elíptico. Se $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega) \cap L^p(\Omega)$, é uma solução forte da equação*

$$Lu = f, \quad em \ \ \Omega,$$

onde os coeficientes de L são contínuos, limitados e $f \in L^p(\Omega)$, então para qualquer domínio $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe $C = C(n, p, \Omega', \Omega)$ tal que

$$||u||_{W^{2,p}(\Omega')} \leq C(||u||_{L^p(\Omega)} + ||f||_{L^p(\Omega)}).$$

Demonstração: cf. [19, Teorema 9.11]. ■

Teorema 0.14 *Considere M um operador elíptico geral da forma*

$$M = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e considere $\Sigma \subset \partial\Omega$ um subconjunto aberto e suave. Suponha que $u \in W^{2,p}_{loc}(\Omega \cup \Sigma)$ com $p > n$, $u > 0$ em Ω, $u = 0$ em Σ e

$$|Mu| \leq A(|Du| + u + \tilde{k}), \quad em \ \ \Omega, \tag{1}$$

com A,$\tilde{k} \geq 0$. Se $x_0 \in \Omega$ e G é um subconjunto compacto de $\Omega \cup \Sigma$, então existe uma constante $C = C(x_0, \Omega, \Sigma, G, A, \Lambda, \lambda)$, tal que

$$u(x) \leq C(u(x_0) + \tilde{k}), \quad \forall \ x \in G.$$

Demonstração: cf. [4, Teorema 1.4]. ■

Lema 0.3 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ um domínio com fronteira C^2. Suponha que $v \in C^2(\overline{D})$ satisfaz*

$$\Delta v + f(v) = 0, \quad em \ \ D,$$

onde f é uma função localmente Lipschitziana. Seja $p \in \partial D$ e suponha que v se anula em uma vizinhança $V_p \subset \partial D$, contendo p. Então v é positiva em uma vizinhança $W \subset D$ próxima de p.

Demonstração: cf. [4, Lema 4.1]. ■

Capítulo 1

Propriedades qualitativas em um domínio $\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega$

Neste capítulo, iremos analisar propriedades de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

cujo domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é da forma

$$\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega,$$

onde ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^j$. Note que se $j = n-1$, então Ω é um cilindro infinito com seção transversal limitada de dimensão $n-1$, se $j = 1$ então Ω é um domínio contido entre dois hiperplanos paralelos. No decorrer deste capítulo, iremos considerar $u \in C^{2,\mu}_{loc}(\overline{\Omega})$ com $\mu \in (0,1)$ e f uma função globalmente Lipschitziana, com constante de Lipschitz k, definida em $\mathbb{R}_+$ (ou em $[0, \sup u]$ no caso em que u é limitada). Nenhuma hipótese sobre o comportamento de u no infinito será exigida. Para fixar a notação, para $(x,y) \in \Omega$ iremos considerar $x = (x_1, x_2, ..., x_{n-j})$ as coordenadas de $\mathbb{R}^{n-j}$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_j)$ as coordenadas de ω.

Na primeira seção iremos provar que as soluções de (1.1) possuem no máximo um crescimento exponencial. Antes disso, exibiremos através de um contra exemplo, que a hipótese das soluções serem estritamente positivas não pode ser removida.

Na segunda seção será apresentado um importante princípio do máximo nese tipo de domínio. Este princípio do máximo foi particularizado e aplicado no capítulo 1.

Na terceira seção iremos exigir simetria e convexidade no domínio ω para obter a simetria da solução u. O resultado também dependerá da dimensão do domínio e do sinal de $f(0)$.

1.1 Crescimento exponencial

Nesta seção, iremos analisar o comportamento de soluções do problema (1.1), quando os valores tendem ao infinito. De fato, será demonstrado que as soluções possuem um crescimento no máximo exponencial, no sentido em que existem constantes positivas C e α, tais que

$$u(x,y) \leq Ce^{\alpha|x|}, \quad \text{em} \;\; \Omega.$$

A hipótese de que a solução u é estritamente positiva não pode ser retirada. De fato, considere a dimensão $n = 2$ e o conjunto $\omega = (-\pi/2, \pi/2)$, então a função

$$u(x,y) = \sum_{j=1}^{\infty} \cos((2j-1)y)e^{(2j-1)(x-(2j-1))},$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(i) u é harmônica;

(ii) $u = 0$ em $\partial\Omega$;

(iii) Quando $|x| \to \infty$, u cresce mais rápido que o exponencial no sentido acima, ou seja, para quaisquer constantes positivas C e α, existe $R > 0$ tal que, se $|x| > R$ então

$$u(x,y) > Ce^{\alpha|x|}.$$

Primeiramente mostraremos que a função acima está bem definida, para tanto, faremos uso do Teste M de Weierstrass. Para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, defina a função

$$u_n(x,y) = \cos((2n-1)y)e^{(2n-1)(x-(2n-1))}.$$

Vamos provar que a série $u = \sum u_n$ converge uniformemente em cada compacto $K \subset \Omega$. No compacto K, $x \leq C$, para alguma constante C. Então para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
-(2n-1)x \geq -(2n-1)C \quad &\Leftrightarrow \quad (2n-1)^2 - (2n-1)x \geq (2n-1)^2 - (2n-1)C \\
&\Leftrightarrow \quad e^{(2n-1)^2-(2n-1)x} \geq e^{(2n-1)^2-(2n-1)C} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{e^{(2n-1)^2-(2n-1)x}} \leq \frac{1}{e^{(2n-1)^2-(2n-1)C}} \\
&\Leftrightarrow \quad e^{(2n-1)(x-(2n-1))} \leq e^{(2n-1)(C-(2n-1))}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}|u_n(x,y)| &= \left|\cos((2n-1)y)e^{(2n-1)(x-(2n-1))}\right| \\ &\leq \left|e^{(2n-1)(x-(2n-1))}\right| \\ &\leq e^{(2n-1)(C-(2n-1))} = M_n,\end{aligned}$$

para todo $(x,y) \in K$. Considere a_n o termo geral da série numérica

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_n = \sum_{j=1}^{\infty} e^{(2j-1)(C-(2j-1))}.$$

Então,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{(2(n+1)-1)(C-(2(n+1)-1))}}{e^{(2j-1)(C-(2j-1))}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{2nC-4n^2-4n+C-1}}{e^{2nC-4n^2-4n+2n+2-C}} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{e^{C-1}}{e^{2n+2-C}} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Desta maneira, pelo teste da razão, tal série é convergente. Portanto, pelo Teste M de Weierstrass, a série $u = \sum u_n$ converge uniformemente, em cada compacto $K \subset \Omega$.

Provemos o ítem (i). Defina a soma parcial

$$S_n(x,y) = \sum_{j=1}^{n} \cos((2j-1)y)e^{(2j-1)(x-(2j-1))}.$$

Observe que $(S_n)_n$ é uma sequência de funções harmônicas. De fato, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial S_n}{\partial x} = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)\cos((2j-1)y)e^{(2j-1)(x-(2j-1))},$$

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} = \sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2\cos((2j-1)y)e^{(2j-1)(x-(2j-1))},$$

$$\frac{\partial S_n}{\partial y} = -\sum_{j=1}^{n}(2j-1)\sin((2j-1)y)e^{(2j-1)(x-(2j-1))},$$

$$\frac{\partial^2 S_n}{\partial y^2} = -\sum_{j=1}^{n}(2j-1)^2\cos((2j-1)y)e^{(2j-1)(x-(2j-1))}.$$

Portanto,

$$\Delta S_n = \frac{\partial^2 S_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_n}{\partial y^2} = 0, \quad \text{para todo } \; n \in \mathbb{N}.$$

Finalmente, pelo teorema 0.2, concluímos que u é uma função harmônica.

O ítem (ii) é imediato, pois

$$\partial\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R} \text{ e } y = -\pi/2 \text{ ou } y = \pi/2\},$$

e, uma vez que,

$$\cos((2j-1)\pi/2) = \cos(-(2j-1)\pi/2) = 0,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$, concluímos que $u = 0$ em $\partial\Omega$.

Para provar o ítem (iii), é suficiente mostrar que para quaisquer constantes α, $C > 0$, existe pelo menos um ponto $(x,y) \in \Omega$, tal que

$$u(x,y) > Ce^{\alpha|x|}. \tag{1.2}$$

Observe que

$$\begin{aligned} e^{(2j-1)(x-(2j-1))} > Ce^{\alpha|x|} \quad &\Leftrightarrow \quad (2j-1)(x-(2j-1)) > \ln C + \alpha x \\ &\Leftrightarrow \quad x > \frac{\ln C - (2j-1)^2}{(2j-1) - \alpha}. \end{aligned}$$

Portanto, para $j \in \mathbb{N}$ tal que $(2j-1) - \alpha \neq 0$, $y = 0$ e x como acima, temos que (1.2) acontece.

Teorema 1.1 *Seja $u \in C^{2,\mu}(\overline{\Omega})$ uma solução do problema* (1.1). *Então existem constantes $A, \alpha > 0$, tais que*

$$u(x,y) \leq Ae^{\alpha|x|}. \tag{1.3}$$

Demonstração: Observe primeiramente que usando (1.1) e o fato de que f é uma função Lipschitziana, obtemos

$$\begin{aligned} |\Delta u| &= |f(u)| \\ &\leq |f(u) - f(0)| + |f(0)| \\ &\leq ku + |f(0)| \\ &= k(u + \tilde{k}), \end{aligned}$$

onde $\tilde{k} = |f(0)|/k$. Então a hipótese (1) do teorema 0.14 está satisfeita para o operador $M = \Delta$. Fixe $(0, y_0) \in \Omega$. Então, definindo os conjuntos

$$\Sigma = \{|x| < 2\} \times \partial\omega \quad \text{e} \quad G = \{|x| \leq 1\} \times \overline{\omega},$$

obtemos

$$u(x,y) + \tilde{k} \leq C(u(0,y_0) + \tilde{k}), \quad \text{para} \;\; (x,y) \in \{|x| \leq 1\} \times \overline{\omega}, \tag{1.4}$$

para alguma constante C. Fixado uma direção e_1 em $\mathbb{R}^{n-j}$, aplique a função $v(x,y) = u(x+e_1, y)$ em (1.4) (note que o conjunto Ω é invariante por esta translação). Então

$$u(x,y) + \tilde{k} \leq C(u(e_1, y_0) + \tilde{k}), \quad \text{para} \ \ (x,y) \in \{|x - e_1| \leq 1\} \times \overline{\omega}, \tag{1.5}$$

para a mesma constante C. Usando (1.5) e (1.4),

$$u(x,y) + \tilde{k} \leq C(u(e_1, y_0) + \tilde{k}) \leq C^2(u(0, y_0) + \tilde{k}),$$

para $(x,y) \in \{|x - e_1| \leq 1\} \times \overline{\omega}$. Prosseguindo indutivamente, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$u(x,y) + \tilde{k} \leq C^{m+1}(u(0, y_0) + \tilde{k}), \quad \text{para} \ \ (x,y) \in \{|x - me_1| \leq 1\} \times \overline{\omega}.$$

Desta forma,

$$u(x,y) + \tilde{k} \leq C^{m+1}(u(0, y_0) + \tilde{k}), \quad \text{para} \ \ m - 1 \leq |x| \leq m + 1.$$

Então se $C \geq 1$ temos

$$u(x,y) + \tilde{k} \leq C^{m+1}(u(0, y_0) + \tilde{k}) \leq C^{|x|}C^2(u(0, y_0) + \tilde{k}).$$

Considere $A = C^2(u(0, y_0) + \tilde{k})$ e $\alpha = \log C$, então

$$u(x,y) \leq u(x,y) + \tilde{k} \leq C^{|x|}C^2(u(0, y_0) + \tilde{k}) = Ae^{\alpha|x|}.$$

Se $C < 1$ considere $\alpha = 0$. Portanto u tem no máximo um crescimento exponencial na direção e_1. Como o mesmo argumento pode ser repetido para qualquer direção, segue o resultado. ■

1.2 Princípio do máximo

Esta seção é dedicada a um importante princípio do máximo em domínios do tipo $\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega$.

Teorema 1.2 *Seja $\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega$, com $\partial\omega$ suave. Considere $u \in W^{2,n}_{loc}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função satisfazendo*

$$\begin{cases} \Delta u + c(x,y)u \geq 0, & \text{em } \Omega, \\ u \leq 0, & \text{em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.6}$$

e

$$u \leq Ce^{\mu|x|}, \tag{1.7}$$

onde $|c| \leq \gamma$ *e* γ, C, *e* μ *são constantes positivas. Existe uma constante* $\delta > 0$ *tal que, se*

$$|\omega| < \delta, \tag{1.8}$$

então

$$u \leq 0, \quad em \;\; \Omega.$$

Demonstração: Uma vez que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ e, em $\mathbb{R}^n$, todas as normas são equivalentes, existe $C' > 0$ tal que

$$|u| \leq Ce^{\mu|x|} \leq Ce^{(C'\mu \sum_{i=1}^{n-j}|x_i|)} = u \leq Ce^{(\mu' \sum_{i=1}^{n-j}|x_i|)}, \tag{1.9}$$

onde $\mu' = C'\mu$.

Sabemos que quanto menor a medida do conjunto ω, maior será o autovalor principal de $-\Delta_y$ em ω (cf. [11, Teorema 4.2]) ou numa forma mais geral (cf. [9, Teorema 2.5]). Sendo ω suave, considere um conjunto $\tilde{\omega}$ tal que $\overline{\omega} \subset \tilde{\omega}$ e $|\tilde{\omega}| \approx |\omega| \leq \delta$. Então, considere $\delta = \delta(n, j, \gamma, \alpha) > 0$ suficientemente pequeno de forma que o autovalor principal $\tilde{\lambda}$ de $-\Delta_y$ em $\tilde{\omega}$, satisfaça $\tilde{\lambda} > (\mu')^2(n-j) + \gamma$. Se $\tilde{\varphi}$ é a autofunção principal em $\tilde{\omega}$, então

$$\begin{cases} (\Delta_y + \tilde{\lambda})\tilde{\varphi} = 0, & \text{em } \tilde{\omega}, \\ \tilde{\varphi} > 0, & \text{em } \tilde{\omega}, \\ \tilde{\varphi} = 0, & \text{em } \partial\tilde{\omega}. \end{cases}$$

Fixe $\beta > \mu'$ satisfazendo

$$\beta^2(n-j) - \tilde{\lambda} + \gamma < 0. \tag{1.10}$$

Defina a função $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$

$$g(x, y) = \tilde{\varphi}(y)\cosh(\beta x_1)\cosh(\beta x_2)\ldots\cosh(\beta x_{n-j}).$$

Observe inicialmente que g é uma função positiva, pois como $\tilde{\varphi}$ é uma autofunção principal, segue que $\tilde{\varphi}$ é positiva em $\tilde{\omega}$, além disso, a função cosh é estritamente positiva.

Afirmação 1.1 $(\Delta + c)g < 0$

De fato, observe que para $1 \leq i \leq n-j$, temos que

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \beta\tilde{\varphi}(y)\cosh(\beta x_1)\ldots\cosh(\beta x_{i-1})\sinh(\beta x_i)\cosh(\beta x_{i+1})\ldots\cosh(\beta x_{n-j}),$$

e

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = \beta^2\tilde{\varphi}(y)\cosh(\beta x_1)\ldots\cosh(\beta x_{i-1})\cosh(\beta x_i)\cosh(\beta x_{i+1})\ldots\cosh(\beta x_{n-j}) = \beta^2 g.$$

Uma vez que $\Delta_y\tilde{\varphi} = -\tilde{\lambda}\tilde{\varphi}$, concluímos que

$$(\Delta + c)g = \Delta_x g + \Delta_y g + cg = (\beta^2(n-j) - \tilde{\lambda} + c)g \leq (\beta^2(n-j) - \tilde{\lambda} + \gamma)g < 0,$$

onde usamos a positividade da função g e a desigualdade (1.10). Segue a afirmação.

Defina a função $\sigma : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$,

$$\sigma = \frac{u}{g}.$$

Note que para concluírmos a demonstração deste teorema, é suficiente mostrar que $\sigma \leq 0$. Para tanto, mostraremos que σ satisfaz as hipóteses do princípio do máximo $A.2$.

Afirmação 1.2 *A função σ satisfaz:*

(i) $\Delta\sigma + \frac{2}{g}\sum_{i=1}^{n} g_i\sigma_i + \tilde{c}\sigma \geq 0$ *em* Ω, *com* $\tilde{c} \leq 0$;

(ii) $\sigma \leq 0$ *em* $\partial\Omega$;

(iii) $\limsup_{|x|\to\infty} \sigma(x) \leq 0$.

De fato, uma vez que $u = g\sigma$ e u satisfaz (1.6), então

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Delta u + cu \\
&= \Delta(g\sigma) + c(g\sigma) \\
&= g\Delta\sigma + 2DgD\sigma + \sigma\Delta g + cg\sigma \\
&= g\Delta\sigma + 2DgD\sigma + (\Delta g + cg)\sigma \\
&= \left(\Delta\sigma + \frac{2}{g}D\sigma Dg + \frac{(\Delta + c)g}{g}\sigma\right) g.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta\sigma + \frac{2}{g}\sum g_i\sigma_i + \tilde{c}\sigma \geq 0,$$

onde,

$$\tilde{c} = \frac{(\Delta + c)g}{g}.$$

Note que, pela afirmação 1.1, $\tilde{c} \leq 0$, e o ítem (i) está provado. Como $g \geq 0$ em $\overline{\Omega}$ e, por (1.6), $u \leq 0$ em $\partial\Omega$, concluímos que $\sigma \leq 0$ em $\partial\Omega$, e o ítem (ii) está provado. Para provar o ítem (iii), note que

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Usando (1.9) e o fato que $\beta > \mu'$, obtemos

$$\sigma(x,y) = \frac{u(x,y)}{g(x,y)} \leq \frac{Ce^{\mu'|x_1|}...e^{\mu'|x_{n-j}|}}{\varphi(y)\left(\frac{e^{\beta x_1}+e^{-\beta x_1}}{2}\right)...\left(\frac{e^{\beta x_{n-j}}+e^{-\beta x_{n-j}}}{2}\right)} \longrightarrow 0,$$

quando $|x| \to \infty$. Portanto a afirmação está provada e, consequentemente, o teorema. ■

1.3 Monotonicidade e simetria

Nesta seção iremos provar que, se u é solução do problema (1.1) e o conjunto ω satisfaz certas condições de simetria e convexidade, então a função u herda esta simetria.

Definição 1.1 *Seja $\gamma \in S^{n-1}$. Dizemos que um conjunto Ω é convexo na direção γ, se para cada $x \in \Omega$, o conjunto*

$$\{t \in \mathbb{R}; x + t\gamma \in \Omega\},$$

é um intervalo.

Teorema 1.3 *Seja u uma solução do problema (1.1), onde $\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega$, ω é convexo na direção y_1, simétrico sobre o hiperplano $y_1 = 0$ e com fronteira de classe C^2. Suponha que uma das hipóteses abaixo sejá válida:*

(i) $y_1 > 0$, $j = 1$ e $f(0) \geq 0$;

(ii) $y_1 > 0$ e $j \geq 2$.

Então u é simétrica com respeito a y_1 e

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} < 0.$$

Demonstração: Por conveniência, a demonstração será realizada no caso $j = n - 1$, ou seja, quando $\Omega = \mathbb{R} \times \omega$ e ω é um domínio limitado e suave em $\mathbb{R}^{n-1}$. O caso geral é feito de forma análoga. O primeiro passo da demonstração consistirá em fixar as notações padrões para o uso do método dos planos móveis. Para um leitor que não está familiarizado com o método, aconselha-se uma primeira leitura na seção $A.1$ do Apêndice. Como ω é um domínio limitado, considere $R = \sup_\omega y_1$. Para $\lambda \in (0, R)$, defina os conjuntos

$$\omega_\lambda = \{y \in \omega; y_1 > \lambda\},$$

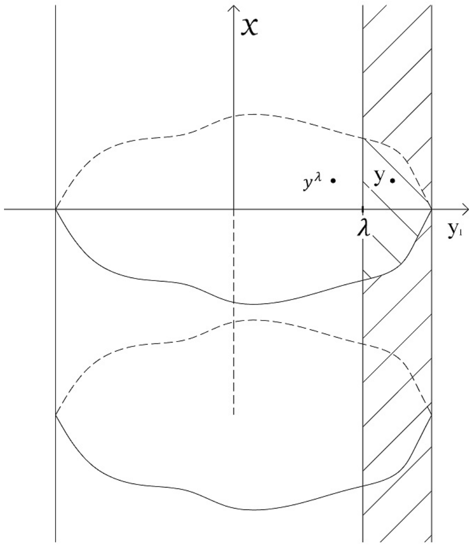
e

$$\Sigma_\lambda = \mathbb{R} \times \omega_\lambda \subset \Omega.$$

Para cada $y \in \omega_\lambda$, considere sua reflexão sobre o eixo $y_1 = \lambda$, dada por

$$y^\lambda = (2\lambda - y_1, y_2, ..., y_{n-1}).$$

Geometricamente, estamos na seguinte situação:



Defina

$$w_\lambda(x,y) = u(x,y) - u(x,y^\lambda), \quad \text{em} \;\; \Sigma_\lambda.$$

Para estabelecer a simetria de u, é suficiente provar que

$$w_\lambda = u(x,y) - u(x, 2\lambda - y_1, y_2, ..., y_{n-1}) < 0, \quad \text{em} \;\; \Sigma_\lambda, \tag{1.11}$$

para todo $\lambda \in (0,R)$. De fato, se a desigualdade ocorre, fazendo $\lambda \to 0$ obtemos

$$u(x, y_1, y_2, ..., y_{n-1}) \leq u(x, -y_1, y_2, ..., y_{n-1}),$$

para todo $y_1 \geq 0$. Como podemos repetir o argumento para $-y_1$, obteríamos a desigualdade oposta e, consequentemente, a simetria de u sobre y_1. Sobre a monotonicidade, usando a simetria de u sobre y_1 em (1.11), obtemos

$$u(x, y_1 - 2\lambda, y_2, ..., y_{n-1}) - u(x,y) = u(x, 2\lambda - y_1, y_2, ..., y_{n-1}) - u(x,y) > 0.$$

Então como $\lambda > 0$,

$$\frac{u(x, y_1 - 2\lambda, y_2, ..., y_{n-1}) - u(x,y)}{-2\lambda} < 0.$$

Considerando $t = -2\lambda$ e tomando o limite, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial y_1}(x,y) = \frac{\partial u}{\partial y_1^-}(x,y) = \lim_{t \to 0^-} \frac{u(x, y_1 + t, y_2, ..., y_{n-1}) - u(x,y)}{t} \leq 0.$$

Portanto

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} \leq 0.$$

Uma vez que u satisfaz (1.1), é de fácil verificação que

$$(\Delta + f'(u))\frac{\partial u}{\partial y_1} = 0.$$

Pelo lema $A.1$, temos que $\partial u/\partial y_1 \equiv 0$ ou $\partial u/\partial y_1 < 0$. Como $u \in C^1(\overline{\Omega})$ é positiva em Ω, a primeira possibilidade é impossível e o teorema estaria provado. Portanto, provar o teorema significa verificar (1.11) para todo $\lambda \in (0, R)$.

O primeiro passo será verificar que (1.11) ocorre quando ω_λ possui medida pequena. Considere $u_\lambda(x,y) = u(x, y^\lambda)$. Para cada λ, é imediato que

$$\Delta u_\lambda + f(u_\lambda) = 0, \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

Desta maneira, para $(x,y) \in \Sigma_\lambda$,

$$\begin{aligned}
\Delta w_\lambda(x,y) &= \Delta(u(x,y) - u_\lambda(x,y)) \\
&= \Delta u(x,y) - \Delta u_\lambda(x,y) \\
&= f(u_\lambda(x,y)) - f(u(x,y)) \\
&= c_\lambda(x,y) w_\lambda(x,y),
\end{aligned}$$

onde

$$c_\lambda(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(u_\lambda(x,y)) - f(u(x,y))}{u_\lambda(x,y) - u(x,y)}, & \text{se } u(x,y) \neq u_\lambda(x,y), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto

$$\Delta w_\lambda + c_\lambda(x,y) w_\lambda = 0, \quad \text{em } \Sigma_\lambda, \tag{1.12}$$

para todo $\lambda \in (0, R)$. Como f é uma função Lipschitziana, temos que

$$|c_\lambda| = \frac{|f(u(x,y)) - f(u_\lambda(x,y))|}{|u(x,y) - u_\lambda(x,y)|} \leq K.$$

Note que

$$\partial\Sigma_\lambda = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \overline{\omega}; y_1 = \lambda \text{ ou } y_1 > \lambda \text{ e } y \in \partial\omega\}.$$

Desta forma, se $y_1 = \lambda$ então $u_\lambda = u$, implicando $w_\lambda = 0$. Se $y_1 > \lambda$ e $y \in \partial\omega$, então $u = 0$ e, como $u_\lambda > 0$, segue que $w_\lambda < 0$. Portanto

$$w_\lambda \leq 0, \quad \text{em } \partial\Sigma_\lambda. \tag{1.13}$$

Finalmente, como u satisfaz as hipóteses do teorema 1.1, existem constantes $C, \alpha > 0$ tais que $u \leq Ce^{\alpha|x|}$. Desta maneira,

$$|w_\lambda| \leq 2Ce^{\alpha|x|}. \tag{1.14}$$

Quando $R - \lambda$ é pequeno, temos que ω_λ tem medida pequena. Deste modo, usando (1.12), (1.13) e (1.14), o princípio do máximo 1.2 assegura que $w_\lambda \leq 0$ em Σ_λ. Como $w_\lambda \not\equiv 0$, segue do lema $A.1$ a desigualdade estrita $w_\lambda < 0$ em Σ_λ. E assim, fica provado (1.11) quando $R - \lambda$ é pequeno.

Defina

$$\mu = \inf\{\lambda \in (0, R); w_\lambda < 0 \text{ em } \Sigma_\lambda\}.$$

Provar o teorema significa mostrar que $\mu = 0$. A prova será por contradição. Suponha que $\mu > 0$. A estratégia será garantir que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, (1.11) ocorre no intervalo $(\mu - \varepsilon, R)$, o que contradiz a minimalidade de μ. Seja $\delta > 0$ a constante do princípio do máximo 1.2. Considere $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$|\omega_{\mu-\varepsilon} \setminus \omega_\mu| < \frac{\delta}{2}.$$

Considere ainda um conjunto $\beta \subset \overline{\beta} \subset \omega_\mu$, com fronteira suave, tal que

$$|\omega_\mu \setminus \overline{\beta}| < \frac{\delta}{2}.$$

Então

$$|\omega_{\mu-\varepsilon} \setminus \overline{\beta}| = |\omega_{\mu-\varepsilon}| - |\overline{\beta}| = |\omega_{\mu-\varepsilon}| - |\omega_\mu| + |\omega_\mu| - |\overline{\beta}| < \delta. \tag{1.15}$$

Defina $\tilde{\Omega} = \mathbb{R} \times \overline{\beta}$. Queremos provar que $\omega_{\mu-\varepsilon} \leq 0$ em $\Sigma_{\mu-\varepsilon}$, para tanto, é suficiente provar que

$$w_{\mu-\varepsilon} \leq 0 \quad \text{em} \;\; \tilde{\Omega}. \tag{1.16}$$

De fato, como $w_{\mu-\varepsilon} \leq 0$ em $\partial(\Sigma_{\mu-\varepsilon} \setminus \tilde{\Omega})$ e por (1.12), (1.14) e (1.15), podemos aplicar o princípio do máximo 1.2, para obter $w_{\mu-\varepsilon} \leq 0$ no conjunto $\Sigma_{\mu-\varepsilon} \setminus \tilde{\Omega}$. Se a desigualdade (1.16) ocorre, temos que $w_{\mu-\varepsilon} \leq 0$ em $\Sigma_{\mu-\varepsilon}$. Usando (1.12) e o lema $A.1$, teríamos a desigualdade estrita, o que contradiz a minimalidade de μ e prova o teorema. Então como dito anteriormente, para concluir o teorema é suficiente provar (1.16).

Pela continuidade de w_μ, temos que $w_\mu \leq 0$ em Σ_μ. Por (1.12) e pelo lema $A.1$,

$$w_\mu < 0 \quad \text{em} \;\; \Sigma_\mu. \tag{1.17}$$

Suponha que existe $0 < \varepsilon_0 < \varepsilon$, tal que no intervalo $(0, \varepsilon_0)$, a desigualdade (1.16) não ocorre. Então, existe uma sequência $(\varepsilon_j)_j \subset (0, \varepsilon_0)$ tal que $\varepsilon_j \searrow 0$ e, para cada $j \in \mathbb{N}$, existe $(x_j, y_j) \in \tilde{\Omega}$, satisfazendo

$$w_{\mu-\varepsilon_j}(x_j, y_j) = u(x_j, y_j) - u(x_j, y_j^{\mu-\varepsilon_j}) > 0. \tag{1.18}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, defina a função deslocada

$$u^j(x, y) = u(x + x_j, y).$$

Como há apenas um deslocamento vertical, a função deslocada claramente satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u^j + f(u^j) = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u^j = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.19}$$

Para cada $(x,y) \in \Sigma_\mu$, por (1.17),

$$u^j(x,y) = u(x+x_j, y) < u(x+x_j, y^\mu) = u^j(x, y^\mu),$$

e por (1.18),

$$w(x_j, y_j) = u^j(0, y_j) - u^j(0, y_j^{\mu-\varepsilon_j}) > 0.$$

Como $(y_j)_j \subset \overline{\beta}$ suponha, a menos de uma subsequência, que $y_j \to \overline{y} \in \overline{\beta}$. Para não carregar a notação, defina

$$g(u) = f(u) - f(0).$$

Agora temos alguns casos para analisar:

Caso 1 *Suponha que,*

$$\alpha^j := u^j(0, y^j) \to \infty.$$

Durante os casos, usaremos as mesmas notações e definições. Considere

$$z^j(x,y) = \frac{1}{\alpha^j} u^j(x,y).$$

Então,

$$z^j(0,y^j) = \frac{1}{u^j(0,y^j)} u^j(0,y^j) = 1.$$

Além disso, como u^j satisfaz (1.19), obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta u^j + f(u^j) \\ &= \Delta(z^j \alpha^j) + f(z^j \alpha^j) \\ &= \alpha^j \Delta z^j + f(0) - f(0) + f(z^j \alpha^j) \\ &= \Delta z^j + \frac{1}{\alpha^j} g(z^j \alpha^j) + \frac{1}{\alpha^j} f(0). \end{aligned}$$

Para cada $j \in \mathbb{N}$, defina a função

$$h^j(s) = \frac{1}{\alpha^j} g(\alpha^j s).$$

Afirmação 1.3 *A sequência de funções* $(h^j)_j$ *é equicontínua e satisfaz* $|h^j(s)| \leq ks$, *para todo* $j \in \mathbb{N}$.

Para provar a equicontinuidade, mostraremos que a sequência $(h^j)_j$ é uma sequência de funções Lipschitzianas com mesma constante de Lipschitz. De fato, pelas definições das funções h^j e g,

$$|h^j(s_1) - h^j(s_2)| = \left| \frac{1}{\alpha^j} \left(g(\alpha^j s_1) - g(\alpha^j s_2) \right) \right| = \frac{1}{\alpha^j} \left| f(\alpha^j s_1) - f(\alpha^j s_2) + f(0) - f(0) \right|.$$

Uma vez que f é uma função Lipschitziana, concluímos que

$$|h^j(s_1) - h^j(s_2)| \leq \frac{k}{\alpha^j} \left| \alpha^j (s_1 - s_2) \right| = k|s_1 - s_2|,$$

o que prova a primeira parte da afirmação. Por fim, novamente utilizando a propriedade de Lipschitz da função f, obtemos

$$|h^j(s)| = \left| \frac{1}{\alpha^j} g(\alpha^j s) \right| = \frac{1}{\alpha^j} \left| f(\alpha^j s) - f(0) \right| \leq ks,$$

o que prova a afirmação.

Note que a sequência de funções $(z^j)_j$ satisfaz uma equação do tipo (1) no teorema 0.14, considerando o operador $M = \Delta$. De fato, por construção

$$|\Delta z^j| = \left| \frac{1}{\alpha^j} g(\alpha^j z^j) + \frac{1}{\alpha^j} f(0) \right| \leq |h^j(z^j)| + \frac{1}{\alpha^j} |f(0)|.$$

Desde que $h^j(0) = 0$ e a sequência $(h^j)_j$ é uniformemente Lipschitziana, obtemos

$$|\Delta z^j| \leq k|z^j| + \frac{1}{\alpha^j} |f(0)|.$$

Portanto,

$$|\Delta z^j| \leq k(z^j + \tilde{k}),$$

onde $\tilde{k} = \max_j |f(0)|/k\alpha^j$. Considere os conjuntos

$$\Sigma = (-2, 2) \times \partial\omega \subset \partial\Omega \quad \text{e} \quad G = (-2, 2) \times \overline{\omega}.$$

Então pelo teorema 0.14, existe uma constante $a > 0$ tal que

$$z^j \leq a, \quad \text{em} \;\; (-2, 2) \times \overline{\omega}.$$

A afirmação 1.3 garante que a sequência de funções $(h^j)_j$ é equicontínua e uniformemente limitada em compactos. Aplicando o teorema de Arzelà-Ascoli no compacto $[0, a]$, existe uma subsequência a qual denotaremos ainda de $(h^j)_j$, convergindo uniformemente para uma função $\overline{g}$[1], no compacto $[0,a]$. Defina o conjunto $A=(-1,1)\times\omega$ e a função

$$g^j = \frac{1}{\alpha^j} g(z^j \alpha^j) + \frac{1}{\alpha^j} f(0).$$

Então $-\Delta z^j = g^j$ em Ω. Para cada $x \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \in (-2,2)\times\overline{\omega}$. Observe que,

$$0 < \operatorname{dist}(B(x,\delta/2), \partial B(x,\delta)) \leq \operatorname{dist}(x, \partial B(x,\delta)).$$

Utilizando a propriedade do escalar no supremo e a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}(B(x,\delta/2),\partial B(x,\delta)) \sup_{B(x,\delta/2)} |Dz^j| &= \sup_{B(x,\delta/2)} \operatorname{dist}(B(x,\delta/2),\partial B(x,\delta))|Dz^j| \\ &\leq \sup_{B(x,\delta/2)} \operatorname{dist}(x,\partial B(x,\delta))|Dz^j|.\end{aligned}$$

Pelo teorema 0.11,

$$\operatorname{dist}(B(x,\delta/2),\partial B(x,\delta)) \sup_{B(x,\delta/2)} |Dz^j| \leq \tilde{C}\left(\sup_{B(x,\delta)} |z^j| + \sup_{B(x,\delta)} \operatorname{dist}^2(x,\partial B(x,\delta))|g^j(x)|\right),$$

então,

$$|Dz^j(x)| \leq \sup_{B(x,\delta/2)} |Dz^j| \leq \widehat{C}, \quad \text{para todo } \ x \in B(x,\delta/2).$$

Uma vez que $(z^j)_j$ e $(g^j)_j$ são sequências de funções uniformemente limitadas no conjunto $(-2,2)\times\overline{\omega}$, concluímos que $(Dz^j)_j$ é uma sequência uniformemente limitada em A e, pelo teorema do valor médio, $(z^j)_j$ é uma sequência de funções Lipschitzianas que possuem a mesma constante de Lipschitz. Portanto, $(z^j)_j$ é uma sequência equicontínua no conjunto $\overline{A}$. Pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, à menos de subsequência, $z^j \to \overline{z}$ uniformemente no compacto $\overline{A}$. Utilizando as convergências uniformes obtidas até então,

$$\begin{aligned}\|h^j(z^j) - \overline{g}(\overline{z})\|_\infty &\leq \|h^j(z^j) - h^j(\overline{z})\|_\infty + \|h^j(\overline{z}) - \overline{g}(\overline{z})\|_\infty \\ &= \sup_A |h^j(z^j(x)) - h^j(\overline{z}(x))| + \|h^j(\overline{z}) - \overline{g}(\overline{z})\|_\infty \\ &\leq k \sup_A |z^j(x) - \overline{z}(x)| + \|h^j(\overline{z}) - \overline{g}(\overline{z})\|_\infty \\ &= k\|z^j - \overline{z}\|_\infty + \|h^j(\overline{z}) - \overline{g}(\overline{z})\|_\infty \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Então $(h^j(z^j))$ converge uniformemente para $\overline{g}(\overline{z})$. Além disso, pelo teorema 0.12 temos a estimativa em bolas

$$\|z^j\|'_{C^{2,\alpha}(B_1)} \leq C\left(\|z^j\|_{C(B_2)} + R^2\|g^j\|'_{C^{0,\alpha}(B_2)}\right).$$

[1] A função $\overline{g}$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz k

Desde que o lado direito da equação acima é uniformemente limitado no conjunto $(-2,2)\times\overline{\omega}$, obtemos a Hölder continuidade de todas as derivadas de segunda ordem das funções z^j no conjunto $\overline{A}$, ou seja, a sequência de funções $(\Delta z^j)_j$ é equicontínua.[2] Como $-\Delta z^j = g^j$ e $(g^j)_j$ é uma sequência uniformemente limitada, concluímos que $(\Delta z^j)_j$ é uma sequência uniformemente limitada. Logo, aplicando o teorema de Arzelà-Ascoli no compacto $\overline{A}$, a menos de subsequência, Δz^j converge uniformemente para uma função ϕ.

Afirmação 1.4 $\Delta\overline{z} = \phi$.

De fato, para qualquer função teste ψ (função C^∞ com suporte compacto no conjunto $\overline{A}$), obtemos as convergências

$$\int_{\overline{A}} z^j\Delta\psi \to \int_{\overline{A}} \overline{z}\Delta\psi \quad \text{e} \quad \int_{\overline{A}} \psi\Delta z^j \to \int_{\overline{A}} \phi\psi.$$

Usando integração por partes,

$$\int_{\overline{A}} z^j\Delta\psi = \int_{\overline{A}} \psi\Delta z^j.$$

Pela unicidade do limite,

$$\int_{\overline{A}} \overline{z}\Delta\psi = \int_{\overline{A}} \phi\psi.$$

Novamente usando a fórmula de integração por partes,

$$\int_{\overline{A}} \psi\Delta\overline{z} = \int_{\overline{A}} \phi\psi,$$

assim,

$$\int_{\overline{A}} (\Delta\overline{z} - \phi)\,\psi = 0,$$

para toda função teste ψ. Portanto $\Delta\overline{z} = \phi$ em quase todo ponto e, por continuidade, $\Delta\overline{z} = \phi$. Finalmente, podemos concluir através da unicidade do limite,

$$-\Delta\overline{z} = \overline{g}(\overline{z}), \quad \text{em} \;\; (-1,1)\times\omega.$$

Logo, obtemos o problema

$$\begin{cases} \Delta\overline{z} + \overline{g}(\overline{z}) = 0, & \text{em} \;\; (-1,1)\times\omega, \\ \overline{z} = 0, & \text{em} \;\; (-1,1)\times\partial\omega, \\ \overline{z}(0,\overline{y}) = 1. \end{cases} \tag{1.20}$$

[2]Uma sequência de funções uniformemente limitada em um espaço de Hölder é equicontínua.

Desde que $\overline{g}(0) = 0$, temos que

$$0 = \Delta\overline{z} + \left(\frac{\overline{g}(\overline{z}) - \overline{g}(0)}{\overline{z}}\right) + \overline{g}(0) = \Delta\overline{z} + \overline{c}(x, y)\overline{z}.$$

Como $\overline{g}$ é uma função Lipschitziana,

$$|\overline{c}| = \left|\frac{\overline{g}(\overline{z}) - \overline{g}(0)}{\overline{z}}\right| \leq k\frac{|\overline{z}|}{|\overline{z}|} = k.$$

Defina

$$w_\mu^j(x, y) = z^j(x, y) - z^j(x, y^\mu), \quad \text{em} \;\; (-1, 1) \times \omega_\mu.$$

Note que

$$\begin{aligned} w_\mu^j(x, y) &= z^j(x, y) - z^j(x, y^\mu) \\ &= \frac{1}{\alpha^j}\left(u^j(x, y) - u^j(x, y^\mu)\right) \\ &= \frac{1}{\alpha^j}\left(u(x + x^j, y) - u(x + x^j, y^\mu)\right) < 0, \end{aligned}$$

então usando a continuidade na expressão (1.17), obtemos

$$\overline{w}_\mu(x, y) = \overline{z}(x, y) - \overline{z}(x, y^\mu) \leq 0, \quad \text{em} \;\; (-1, 1) \times \omega_\mu.$$

Uma vez que $\overline{y} \in \omega_\mu$, obtemos

$$\overline{w}_\mu(0, \overline{y}) \leq 0. \tag{1.21}$$

Por outro lado, usando a continuidade na expressão (1.18), obtemos

$$\overline{w}_\mu(0, \overline{y}) \geq 0. \tag{1.22}$$

Por (1.21) e (1.22),

$$\overline{w}(0, \overline{y}) = 0.$$

Se $\overline{w}_\mu \not\equiv 0$ então, pelo lema $A.1$, concluímos que $\overline{w}_\mu < 0$ em A, o que não é possível já que $(0, \overline{y}) \in A$ e $\overline{w}_\mu(0, \overline{y}) = 0$. Logo,

$$\overline{w}_\mu \equiv 0, \quad \text{em} \;\; A. \tag{1.23}$$

Considere $y \in \partial\omega$ com $y_1 > \mu$ tal que $(0, y^\mu) \in \Omega$. Por (1.20) e (1.23), concluímos que $\overline{z}(0, y^\mu) = 0$. Portanto pelo lema $A.1$ concluímos que $\overline{z} \equiv 0$ em A, o que contradiz (1.20).

Caso 2 *Suponha que para alguma subsequência,*

$$\alpha^j = u^j(0, y^j) \to \alpha < \infty. \tag{1.24}$$

Repetindo os passos do caso anterior e aplicando o teorema 0.14, obtemos uma constante $a > 0$ tal que

$$u^j(x,y) \leq a, \quad \text{em} \ \ (-2,2) \times \overline{\omega}.$$

Usando estimativas elípticas de forma análoga ao caso anterior obtemos que, a menos de subsequência,

$$u^j \to \overline{u}, \quad \text{em} \ \ \overline{A}.$$

Além disso,

$$\begin{cases} \Delta\overline{u} + f(\overline{u}) = 0 & \text{em} \quad A, \\ \overline{u} \geq 0, & \text{em} \quad A, \\ \overline{u} = 0, & \text{em} \quad (-1,1) \times \partial\omega. \end{cases} \tag{1.25}$$

Sabemos que $\overline{w}_\mu \leq 0$ em $(-1,1) \times \omega_\mu$ e $\overline{w}_\mu(0,\overline{y}) = 0$ para algum $\overline{y} \in \overline{\beta}$. Pelo lema $A.1$, concluímos que $\overline{w}_\mu \equiv 0$. Consequentemente, podemos encontrar $(0, y^\mu) \in \Omega$ tal que $\overline{u}(0,y^\mu) = 0$. Observe que obtemos um ponto de mínimo para $\overline{u}$. Logo, $\Delta\overline{u}(0,y^\mu) \geq 0$. Vamos analisar então os seguintes subcasos:

Caso 2.1 $f(0) > 0$.

Neste caso, observe que

$$\Delta\overline{u}(0,y^\mu) = -f(\overline{u}(0,y^\mu)) = -f(0) < 0,$$

o que é uma contradição.

Caso 2.2 $f(0) = 0$.

Como feito nos casos anteriores,

$$\Delta\overline{u} + \overline{c}(x,y)\overline{u} = 0, \quad \text{em} \ \ A.$$

Desde que $\overline{u}(0,y^\mu) = 0$, concluímos pelo lema $A.1$ que $\overline{u} \equiv 0$ em A. Então $\alpha = 0$ em (1.24). Considere a sequência

$$z^j(x,y) = \frac{1}{\alpha^j} u^j(x,y), \quad \text{em} \ \ (-2,2) \times \overline{\omega}.$$

De forma análoga ao caso 1, obtemos

$$\Delta z^j + h^j(z^j) = 0, \quad \text{em} \ \ (-2,2) \times \overline{\omega},$$

onde

$$h^j(s) = \frac{1}{\alpha^j} f(\alpha^j s).$$

Como no caso anterior, prova-se que a sequência de funções $(h^j)_j$ é formada por funções Lipschitzianas com mesma constante de Lipschitz e, além disso, a sequência de funções é uniformemente limitada em compactos. Da mesma forma, analisamos a sequência $(u^j)_j$ e concluímos que

$$\begin{cases} \Delta\overline{z} + \overline{g}(\overline{z}) = 0 & \text{em} \quad A, \\ \overline{z} = 0, & \text{em} \quad (-1,1)\times\partial\omega, \\ \overline{z}(0,\overline{y}) = 1. \end{cases}$$

Então chegamos a mesma contradição do caso 1.

Observe que os casos 1, 2 e 2.1 já provam o teorema para $j \geq 1$ e $f(0) \geq 0$. Resta então um último caso:

Caso 2.3 $f(0) < 0$ e $j \geq 2$.

A função $\overline{u}$ obtida no início do caso 2, satisfaz (1.25) e

$$\overline{u}(x,y) \equiv \overline{u}(x,y^\mu), \quad \text{em} \ \ (-1,1)\times\omega_\mu.$$

Além disso, $\overline{u} \geq 0$ e, desde que $f(0) < 0$, concluímos que $\overline{u} \not\equiv 0$. Defina os conjuntos:

$$\Gamma = \{y \in \partial\omega; y_1 \geq \mu\},$$

$$\Gamma^\mu = \{y \in \overline{\omega}; y^\mu \in \Gamma\},$$

$$\Gamma^\mu_+ = \Gamma^\mu \cap \omega.$$

Note que Γ^μ denota a reflexão de Γ sobre o plano

$$\{y_1 = \mu\} = \{(x,y) \in (-1,1)\times\omega; y_1 = \mu\}.$$

Para $j \geq 2$, desde que ω é um conjunto limitado, temos que

$$\partial\omega \cap \{y_1 = \mu\} \neq \emptyset.$$

Se $j = 1$ o conjunto acima pode ser vazio[3], de fato, considere por exemplo $\omega = (-2,2)$ e $\mu = 1$. Portanto,

$$\overline{\Gamma^\mu \cap \omega} \cap \partial\omega \neq 0.$$

Seja $\hat{y} \in \overline{\Gamma^\mu \cap \omega} \cap \partial\omega$, então existe uma sequência de pontos $(\hat{y}_j)_j \subset \Gamma^\mu_+$, tal que $\hat{y}_j \to \hat{y}$. Como $\hat{y}_j^\mu \in \partial\omega$, temos que

$$\overline{u}(0,\hat{y}_j) = \overline{u}(0,\hat{y}_j^\mu) = 0,$$

[3] Este é o passo em que a dimensão é determinante.

para todo $j \in \mathbb{N}$. Isso contradiz o lema 0.3, que afirma que a função $\overline{u}$ deveria ser positiva numa vizinhança do ponto $(0, \hat{y})$. Portanto o teorema está provado. ∎

Observe que a regularidade C^2 exigida na fronteira $\partial\omega$, só foi usada no último caso, para pode obter a contradição com o lema 0.3. Então, se $f(0) \geq 0$, o teorema ocorre em domínios limitados gerais, sendo apenas convexo e simétrico com respeito a y_1.

Neste teorema, a função f em (1.1) é globalmente Lipschitziana, o que nos leva ao seguinte questionamento: O teorema permanece válido no caso em que f é localmente Lipschitziana? Este ainda é um problema em aberto. Um resultado de simetria para o caso $n = 2$, $j = 1$ e $f(0) < 0$, pode ser encontrado no artigo [5]. A simetria para o caso $n > 2$, $j = 1$ e $f(0) < 0$ também permanece em aberto.

Segue o enunciado de um teorema, cuja demonstração é uma aplicação imediata do teorema anterior.

Teorema 1.4 *Seja u solução de* (1.1), *onde*

$$\omega = \{y \in \mathbb{R}^j; |y| < R\},$$

para algum $R > 0$. Suponha que $j \geq 2$ ou $j = 1$ e $f(0) \geq 0$. Então u é uma função radiamente simétrica em y e, para $\rho = |y|$,

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} < 0, \quad \textit{para} \;\; 0 < \rho < R.$$

Capítulo 2

Propriedades qualitativas em domínios não limitados

Neste capítulo, iremos analisar a monotonicidade e simetria de soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

Na primeira seção, iremos considerar o conjunto $\Omega = \mathbb{R} \times (0, h)$ e, ao invés da hipótese $u = 0$ em $\partial\Omega$, iremos exigir apenas que $u(x, 0) = 0$. Este tipo de domínio é um caso particular do domínio

$$\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega,$$

onde $\omega \subset \mathbb{R}^j$, o qual foi estudado no capítulo 1. Observe que nada foi exigido sobre a limitação da solução u.

Na segunda seção, faremos uma exposição da conjectura de De Giorgi em dimensão $n = 2$. Para tanto, precisaremos de dois resultados envolvendo operadores de Schrödinger.

Na terceira seção, estudaremos a simetria de soluções *limitadas* do problema (2.1), quando Ω for um semi espaço. O leitor notará que algumas hipóteses serão exigidas sobre a função f e a dimensão do espaço. Após a demonstração do resultado, realizamos uma série de observações e conjecturas sobre a generalização de tais hipóteses.

2.1 Monotonicidade em uma faixa no caso $n = 2$

Teorema 2.1 *Considere o conjunto* $\Omega = \mathbb{R} \times (0, h) \subset \mathbb{R}^2$. *Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *uma solução positiva do problema*

$$\Delta u + f(u) = 0, \quad \textit{em} \ \ \Omega, \tag{2.2}$$

satisfazendo,

$$u(x, 0) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Suponha ainda que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *é uma função globalmente Lipschitziana, com constante de Lipschitz* K. *Então,*

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in (0, h/2). \tag{2.4}$$

Além disso, para todo $\lambda \in (0, h/2)$,

$$u(x, y) < u(x, 2\lambda - y), \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall y \in (0, \lambda). \tag{2.5}$$

Demonstração: Para demonstrar este teorema, iremos utilizar uma variação do método dos planos móveis. Para um leitor que não está familiarizado com o método, aconselha-se uma primeira leitura na seção $A.1$ do Apêndice.

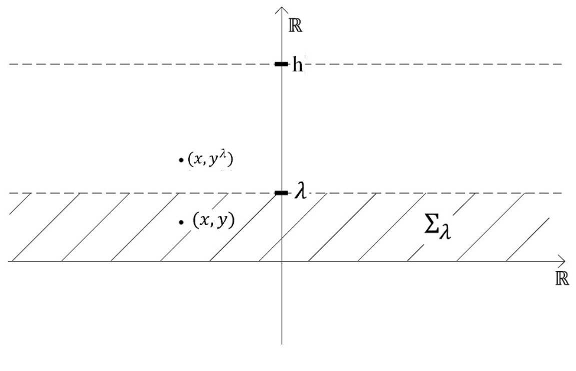
Primeiramente, fixemos as notações padrões do método dos planos móveis. Para $\lambda \in (0, h/2)$, considere o conjunto

$$\Sigma_\lambda = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{R} \ e \ 0 < y < \lambda\}.$$

Para $(x, y) \in \Sigma_\lambda$, considere (x, y^λ) a reflexão do ponto (x, y) através do eixo $y = \lambda$, ou seja,

$$(x, y^\lambda) = (x, 2\lambda - y).$$

Geometricamente, estamos na seguinte situação:



Além disso, para $(x, y) \in \Sigma_\lambda$, considere $u_\lambda(x, y) = u(x, 2\lambda - y)$ e defina

$$w_\lambda(x, y) = u_\lambda(x, y) - u(x, y).$$

É fácil ver que para $\lambda \in (0, h/2)$,

$$\Delta u_\lambda + f(u_\lambda) = 0, \quad \text{em} \ \ \Sigma_\lambda.$$

Deste modo, usando a linearidade do laplaciano,

$$\begin{aligned} \Delta w_\lambda(x, y) &= \Delta(u_\lambda(x, y) - u(x, y)) \\ &= \Delta u_\lambda(x, y) - \Delta u(x, y) \\ &= f(u(x, y)) - f(u_\lambda(x, y)) \\ &= c_\lambda(x, y) w_\lambda(x, y), \end{aligned}$$

onde

$$c_\lambda(x, y) = \begin{cases} \dfrac{f(u(x, y)) - f(u_\lambda(x, y))}{u(x, y) - u_\lambda(x, y)}, & \text{se} \ \ u(x, y) \neq u_\lambda(x, y), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Portanto, para todo $\lambda \in (0, h/2)$,

$$\Delta w_\lambda + c_\lambda(x, y) w_\lambda = 0, \quad \text{em} \ \ \Sigma_\lambda. \tag{2.6}$$

Observe ainda que a função c_λ é limitada, pois como f é globalmente Lipschitziana, para todo $\lambda \in (0, h/2)$,

$$|c_\lambda| = \frac{|f(u(x, y)) - f(u_\lambda(x, y))|}{|u(x, y) - u_\lambda(x, y)|} \leq K, \tag{2.7}$$

onde K é a constante de Lipschitz de f. Além disso, se $y = \lambda$ então

$$w_\lambda(x, \lambda) = u(x, 2\lambda - \lambda) - u(x, \lambda) = 0.$$

A conclusão do teorema segue da seguinte proposição:

Proposição 2.1 *Para todo $\lambda \in (0, h/2)$, temos que $w_\lambda > 0$ em Σ_λ.*

De fato, observe que a proposição é exatamente (2.5). Além disso, se a proposição é verdadeira, temos que $w_\lambda > 0$ em Σ_λ. Por construção, temos ainda que

$$\frac{\partial w_\lambda}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 2\lambda - y) - \frac{\partial y}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x, 2\lambda - y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x, y).$$

Como w_λ satisfaz (2.6) e $w_\lambda(x, \lambda) = 0$, segue do lema de Hopf 0.5, com $\lambda \in (0, h/2)$,

$$0 > \frac{\partial w_\lambda}{\partial y}(x, \lambda) = -2\frac{\partial u}{\partial y}(x, \lambda), \tag{2.8}$$

o que prova (2.4). Portanto, a dificuldade é provar a proposição 2.1. A demonstração será realizada através de quatro afirmações. O primeiro passo é analisar a veracidade da proposição quando λ é pequeno.

Afirmação 2.1 *Para $\lambda \in (0, h/2)$ suficientemente pequeno, temos que $w_\lambda > 0$ em Σ_λ.*

No capítulo anterior, provamos um resultado geral, afirmando que se u é positiva e satisfaz as condições (2.2) e (2.3) em domínios do tipo $\Omega = \mathbb{R}^{n-j} \times \omega$, então u possui uma limitação exponencial (cf. [Teorema 1.1]). Particularizando para o domínio em questão, fixado $h_0 \in (0, h)$, existem constantes positivas C e μ, tais que

$$0 < u(x, y) \leq Ce^{\mu|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \ \forall y \in [0, h_0]. \tag{2.9}$$

Considere $\sigma > 0$ suficientemente pequeno, de forma que possamos aplicar o princípio do máximo 1.2. Como u e u_λ satisfazem (2.9), temos que

$$|w_\lambda(x, y)| = |u(x, 2\lambda - y) - u(x, y)| \leq |u(x, 2\lambda - y)| + |u(x, y)| \leq \tilde{C}e^{\tilde{\mu}|x|},$$

para todo $\lambda \in (0, \sigma)$. Uma vez que w_λ satisfaz (2.6) e $w_\lambda \geq 0$ em $\partial\Sigma_\lambda$, segue do princípio do máximo 1.2 que,

$$w_\lambda \geq 0, \quad \text{em} \quad \Sigma_\lambda, \quad \forall \lambda \in (0, \sigma).$$

Observe que

$$w_\lambda(x, 0) = u_\lambda(x, 0) - u(x, 0) = u(x, 2\lambda) > 0,$$

então w_λ não é a função identicamente nula. Logo, pelo lema $A.1$,

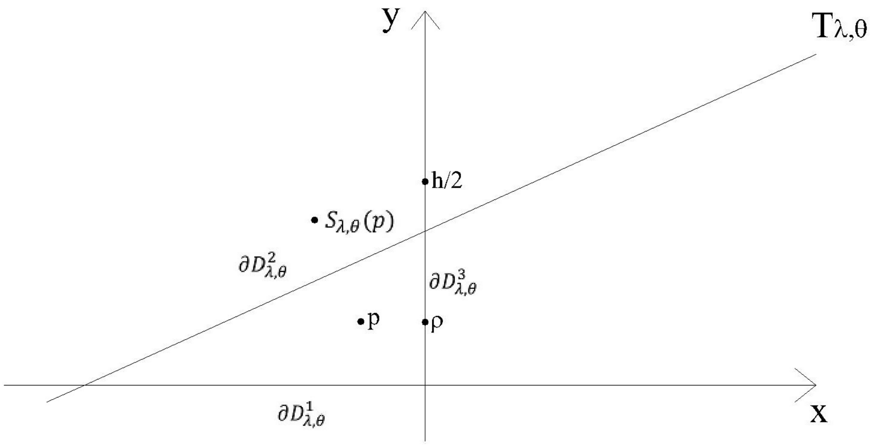
$$w_\lambda > 0, \quad \text{em} \quad \Sigma_\lambda, \quad \lambda \in (0, \sigma).$$

O próximo passo será garantir a positividade de w_λ no conjunto Σ_λ, para $\sigma \leq \lambda < h/2$. Para tanto, observe que é suficiente provar a seguinte afirmação:

Afirmação 2.2 *Suponha que para algum μ, com $0 < \mu < h/2$, temos $w_\lambda > 0$ em Σ_λ, para todo $\lambda \in (0, \mu)$. Então existe $\varepsilon > 0$, com $\mu + \varepsilon < h/2$, tal que $w_\lambda > 0$ em Σ_λ, para todo $\lambda \in (0, \mu + \varepsilon)$.*

Por continuidade, temos que $w_\mu \geq 0$ em Σ_μ. Sabemos que $w_\mu \not\equiv 0$ e, desde que $\mu < h/2$, temos que w_μ satisfaz (2.6). Portanto, pelo lema $A.1$, concluímos que $w_\mu > 0$ em Σ_μ. Note ainda que $w_\lambda(x, 0) > 0$, para todo $\lambda \in (0, \mu]$.

O próximo passo nos concederá a positividade de w_λ quando $x = 0$, para isso, utilizaremos uma nova ideia, que exige um certo apelo geométrico. Para $\lambda \in (0, h/2)$ e $\theta \in (-\pi/2, \pi/2)$, denote por $T_{\lambda,\theta}$ a "reta declive"através do ponto $(0, \lambda)$, ou seja, a reta que passa pelo ponto $(0, \lambda)$, com coeficiente angular θ. Considere ainda $S_{\lambda,\theta}(p)$ como sendo a reflexão do ponto p através da reta $T_{\lambda,\theta}$. Observe que para $\theta > 0$, a reta $T_{\lambda,\theta}$ intersecta o eixo x, formando um triângulo limitado pelo eixo x, pela parte positiva do eixo y e pela reta $T_{\lambda,\theta}$, o qual denotaremos por $D_{\lambda,\theta}$. Os argumentos podem ser analisados na figura abaixo:



Antes de concluir a afirmação 2.2, precisaremos do seguinte resultado:

Afirmação 2.3 *Seja* $\mu > 0$ *como na afirmação* 2.2*. Para cada* $\rho \in (0, \mu)$*, existe* $\varepsilon > 0$ *tal que para todo* $\theta \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ *e todo* $\lambda \in [\rho, \mu + \varepsilon]$*, temos*

$$u(0, y) < u(S_{\lambda,\theta}(0, y)), \quad \forall y \in [0, \lambda).$$

A prova será por contradição. Suponha que existe $\rho \in (0, \mu)$ tal que, para todo $\varepsilon > 0$ existem $\theta \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ e $\lambda \in [\rho, \mu + \varepsilon]$, tais que $u(0, y) \geq u(S_{\lambda,\theta}(0, y))$, para algum $y \in [0, \lambda)$. Então para $\varepsilon = 1/n$, existem sequências $\theta_n \to 0$ e $\lambda_n \to \lambda$, tais que $\lambda \in [\rho, \mu]$, $(0, y_n) \to (0, \overline{y})$ com $\overline{y} \in [0, \mu]$ e

$$u(0, y_n) \geq u(S_{\lambda_n,\theta_n}(0, y_n)), \tag{2.10}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Uma vez que,

$$S_{\lambda_n,\theta_n}(0, y_n) \longrightarrow S_{\lambda,0}(0, \overline{y}) = (0, 2\lambda - \overline{y}), \tag{2.11}$$

obtemos, por continuidade,

$$u(0, \overline{y}) \geq u(0, 2\lambda - \overline{y}).$$

Como $u(0, y) < u(0, 2\lambda - y)$, para todo $y \in [0, \lambda)$ e $\overline{y} \in [0, \lambda]$, concluímos que $\overline{y} = \lambda$. Defina $p_n = S_{\lambda_n,\theta_n}(0, y_n)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos aplicar o teorema do valor médio no segmento $[(0, y_n), p_n]$. Então existe $q_n = (1 - t)(0, y_n) + tp_n$ com $0 \leq t \leq 1$, tal que

$$\xi_n \cdot Du(q_n) = u(p_n) - u(0, y_n),$$

onde $\xi_n = p_n - (0, y_n)$. Utilizando a desigualdade (2.10) e o fato de que $\xi_n \neq 0$, obtemos

$$\hat{\xi}_n \cdot Du(q_n) \leq 0, \tag{2.12}$$

onde $\hat{\xi}_n = \xi_n/|\xi_n|$. Com a direção normalizada, temos por coordenadas polares,

$$\hat{\xi}_n = \frac{\xi_n}{|\xi_n|} = \left(1.\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta_n\right), 1.\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta_n\right)\right) \longrightarrow (0, 1),$$

quando $n \to \infty$. Observe ainda que, por (2.11) e pelo fato de que $\overline{y} = \lambda$, temos que

$$q_n = (0, y_n) - t(0, y_n) + tp_n \longrightarrow (0, \overline{y}) - t(0, \overline{y}) + t(0, 2\lambda - \overline{y}) = (0, \lambda),$$

quando $n \to \infty$. Portanto, tomando o limite em 2.12, obtemos

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0, \lambda) \leq 0,$$

contradizendo (2.8), já que $w_\lambda > 0$ em Σ_λ. Portanto a afirmação está provada.

Voltemos a afirmação 2.2. Considere $\rho > 0$ suficientemente pequeno, tal que possamos aplicar o princípio do máximo para domínios estreitos[1] em um subconjunto

$$D \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < y < \rho\}.$$

Para este ρ, seja $\varepsilon > 0$ como na afirmação 2.3. No triângulo $D_{\lambda,\theta}$, definamos as funções

$$u_{\lambda,\theta}(x, y) = u(S_{\lambda,\theta}(x, y)),$$

e

$$w_{\lambda,\theta} = u_{\lambda,\theta} - u.$$

O objetivo agora é aplicar uma variação do método dos planos móveis, que irá garantir a desigualdade $w_{\lambda,\theta} > 0$ no triângulo $D_{\lambda,\theta}$, para todo $\lambda \in [\rho, \mu + \varepsilon]$ e para todo $\theta \neq 0$ em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Quando $\theta \to 0$, retornaremos ao método dos planos móveis padrão e obteremos o resultado desejado.

Fixe $\theta \neq 0$ em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Do mesmo modo que foi mostrado anteriormente com w_λ, é mostrado que

$$\Delta w_{\lambda,\theta} + q_{\lambda,\theta} w_{\lambda,\theta} = 0,$$

com $q_{\lambda,\theta} \in L^\infty(D_{\lambda,\theta})$. Além disso, $w_{\lambda,\theta} \geq 0$ em $\partial D_{\lambda,\theta}$. De fato, $\partial D_{\lambda,\theta} = \partial D^1_{\lambda,\theta} \cup \partial D^2_{\lambda,\theta} \cup \partial D^3_{\lambda,\theta}$, então:

[1]Informações sobre este princípio do máximo podem ser obtidas em [12], página 226.

(1) Em $\partial D^1_{\lambda,\theta}$ temos que $w_{\lambda,\theta} = u_{\lambda,\theta} > 0$;

(2) Em $\partial D^2_{\lambda,\theta}$ temos que $u_{\lambda,\theta} = u$ então $w_{\lambda,\theta} = 0$;

(3) Em $\partial D^3_{\lambda,\theta}$, segue da afirmação 2.3 que $w_{\lambda,\theta} > 0$.

Logo, para $\lambda = \rho$, pelo princípio do máximo para domínios estreitos, concluímos que $w_{\lambda,\theta} \geq 0$ em $D_{\lambda,\theta}$. Portanto, pelo lema $A.1$, concluímos que $w_{\lambda,\theta} > 0$ em $D_{\lambda,\theta}$. O próximo passo é garantir a desigualdade para $\lambda \in (\rho, \mu + \varepsilon]$. Defina

$$\tau = \max\{\lambda \in (0, \mu + \varepsilon] : w_{\lambda,\theta} > 0 \text{ em } D_{\lambda,\theta}\}.$$

O argumento será por contradição. Suponha que $\tau < \mu+\varepsilon$, então por continuidade $w_{\tau,\theta} \geq 0$ em $D_{\tau,\theta}$. Como visto anteriormente, $w_{\tau,\theta} \geq 0$ em $\partial D_{\tau,\theta}$ e, além disso, $w_{\tau,\theta} \not\equiv 0$. Portanto, pelo lema $A.1$,

$$w_{\tau,\theta} > 0 \quad \text{em} \quad D_{\tau,\theta}.$$

O resultado segue da seguinte afirmação:

Afirmação 2.4 *Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que $w_{\tau+\epsilon,\theta} > 0$ em $D_{\tau+\epsilon,\theta}$.*

O princípio do máximo em domínios com medida pequena (cf. [7]), afirma que se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto limitado, existe $\delta > 0$ tal que o princípio do máximo ocorre no operador L, sempre que $|\Omega| < \delta$. Fixe $\delta > 0$. Seja $K \subset D_{\tau,\theta}$, tal que

$$|D_{\tau,\theta} \setminus K| \leq \frac{\delta}{2}.$$

Como $w_\tau > 0$ em $D_{\tau,\theta}$, segue que $w_\tau > 0$ em K. Pela continuidade de w, existe $\epsilon > 0$ tal que

$$w_{\tau+\epsilon,\theta} > 0, \quad \text{em} \quad K.$$

Portanto resta analisar que a desigualdade estrita ocorre em $\tilde{D}_{\tau+\epsilon,\theta} = D_{\tau+\epsilon,\theta} \backslash K$. Considere ϵ suficientemente pequeno, tal que

$$|\tilde{D}_{\tau+\epsilon,\theta}| \leq \delta. \tag{2.13}$$

Num processo análogo ao que foi feito com w_λ em (2.6), pode-se verificar que

$$\Delta w_{\tau+\epsilon,\theta} + c w_{\tau+\epsilon,\theta} = 0, \quad \text{em} \quad \tilde{D}_{\tau+\epsilon,\theta}. \tag{2.14}$$

Também análogo ao raciocínio feito anteriormente, verifica-se que

$$w \geq 0, \; w \not\equiv 0, \quad \text{em} \quad \partial\tilde{D}_{\tau+\epsilon,\theta}. \tag{2.15}$$

Logo, para δ conveniente, por (2.13), (2.14) e (2.15), o princípio do máximo para domínios com medida pequena garante que

$$w_{\tau+\epsilon,\theta} \geq 0, \quad \text{em} \quad \tilde{D}_{\tau+\epsilon,\theta}.$$

Portanto, pelo lema $A.1$,

$$w_{\tau+\epsilon,\theta} > 0, \quad \text{em} \quad \tilde{D}_{\tau+\epsilon,\theta},$$

e chegamos a uma contradição com a definição de τ.

De posse da afirmação 2.4, para todo $\theta \neq 0$ em $(-\varepsilon, \varepsilon)$ e para todo $\lambda \in [\rho, \mu+\varepsilon]$, temos que

$$u(x, y) \leq u(S_{\lambda,\theta}(x, y)), \quad \text{em} \quad D_{\lambda,\theta}. \tag{2.16}$$

Finalmente, fazendo $\theta > 0$ tender a zero (o mesmo feito no caso $\theta < 0$) em (2.16), obtemos por continuidade que

$$u(x, y) \leq u(x, 2\lambda - y), \quad \text{em} \quad \Sigma_\lambda.$$

Desta forma, pelo lema $A.1$,

$$u(x, y) < u(x, 2\lambda - y), \quad \text{em} \quad \Sigma_\lambda,$$

para todo $\lambda \in (0, \mu + \varepsilon]$. Portanto a afirmação 2.2 está provada e, consequentemente, o teorema 2.1 está provado. ■

2.2 A conjectura de De Giorgi em dimensão 2

O matemático italiano Ennio De Giorgi, buscava estabelecer que, sob certas condições, uma solução monótona do operador $L = \Delta - F'$ em todo espaço $\mathbb{R}^n$, dependia apenas de uma variável ou, equivalentemente, que seus conjuntos de nível seriam hiperplanos. Em 1978 (ver [13]), De Giorgi estabeleceu a seguinte conjectura:

Conjectura 1 *Suponha que $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ é solução da equação*

$$\Delta u + u - u^3 = 0,$$

satisfazendo

$$|u(x)| \leq 1 \quad e \quad \frac{\partial u}{\partial x_n} > 0 \quad \text{em todo } \mathbb{R}^n.$$

Então os conjuntos de nível de u são hiperplanos.

Nesta seção, apresentamos uma demonstração desta conjectura em dimensão $n = 2$, através de um teorema um pouco modificado. Para provarmos o principal resultado desta seção, precisaremos de dois teoremas envolvendo operadores de Schrödinger. A prova da conjectura de De Giorgi em dimensão $n = 3$ foi realizada por L. Ambrosio e X. Cabré (cf. [11]). O. Savin demonstrou que, sob uma hipótese adicional, a conjectura permaneceria verdadeira em dimensões $4 \leq n \leq 8$ (cf. [27]). Além disso, pode-se construir uma família de soluções mostrando que a conjectura não é válida em dimensões $n \geq 9$ (cf.[14]).

Teorema 2.2 *Seja q um potencial suave tal que $q \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^m)$. Suponha que existe $\psi \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, com $p > m$, tal que ψ muda de sinal em $\mathbb{R}^m$, ψ satisfaz*

$$\psi(x) = O\left(|x|^{1-\frac{m}{2}}\right), \quad \textit{quando} \ \ |x| \to \infty, \tag{2.17}$$

e, além disso,

$$\Delta\psi + q(x)\psi = 0, \quad \textit{em} \ \ \mathbb{R}^m.$$

Então o operador $L = -\Delta - q$ possui espectro negativo, ou seja, existe uma função $\phi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^m)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^m} |D\phi|^2 - q\phi^2 < 0. \tag{2.18}$$

Observe que para $m = 1$ ou $m = 2$ é suficiente exigir que ψ é limitada. Então, surgiu o questionamento se o teorema permaneceria válido em dimensão $m > 2$, caso $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$, assumindo $q \in L^\infty$ suave. Em 1998, N. Ghoussoub e C. Gui mostraram através do contra exemplo

$$u(x) = (1 + |x|^2)^{-s_1} x_1, \quad s_1 \geq 1/2,$$

que o questionamento não é válido em dimensão $m \geq 7$ (cf. [20]). Para provar o teorema 2.2, precisamos do seguinte resultado:

Teorema 2.3 *Considere uma função positiva $\varphi \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{R}^m)$, com $p > m$, satisfazendo*

$$(\Delta + q(x))\varphi \leq 0, \tag{2.19}$$

onde $q \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^m)$ suave. Suponha que $\psi \in W^{2,p}_{loc}$, $\psi \not\equiv 0$ satisfaz (2.17) *e*

$$\psi(\Delta + q(x))\psi \geq 0. \tag{2.20}$$

Então $\psi = C\varphi$, para alguma constante C e a igualdade acontece em (2.19).

Demonstração: Observe que se provarmos que $\psi = C\varphi$, então basta substituir a igualdade em (2.20) para obter a igualdade em (2.19).

Defina

$$\sigma = \frac{\psi}{\varphi}. \tag{2.21}$$

O objetivo da demonstração é provar que σ é constante. Aplicando (2.21) em (2.20), obtemos

$$\sigma\varphi(\Delta(\sigma\varphi) + q(\sigma\varphi)) \geq 0.$$

Calculando o laplaciano do produto, temos que

$$\sigma\varphi[\Delta\sigma + 2D\varphi \cdot D\sigma + \sigma(\Delta\varphi + q\varphi)] \geq 0.$$

Então,

$$\sigma D \cdot (\varphi^2 D\sigma) + \sigma^2\varphi(\Delta\varphi + q\varphi) \geq 0.$$

Como φ e positiva e satisfaz (2.19), concluímos que

$$\sigma D \cdot (\varphi^2 D\sigma) \geq 0. \tag{2.22}$$

Considere a função $\xi \in C(\mathbb{R}^+)$, tal que

$$\xi(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad 0 \leq t \leq 1, \\ 0, & \text{se} \quad t \geq 2, \end{cases} \tag{2.23}$$

e $|\xi'(t)| \leq 2$. Para $R > 0$, defina

$$\xi_R(x) = \xi\left(\frac{|x|}{R}\right) \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^m. \tag{2.24}$$

Note que,

$$|D(\xi_R)|^2 = \sum_{i=1}^{n}[(\xi_R)_{x_i}]^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\xi\left(\frac{|x|}{R}\right)_{x_i}\right]^2 = \sum_{i=1}^{n}\xi'\left(\frac{|x|}{R}\right)^2 \frac{x_i^2}{R^2|x|^2} \leq \frac{4}{R^2}. \tag{2.25}$$

Multiplicando (2.22) por ξ_R^2, integrando sobre o $\mathbb{R}^m$ e utilizando integração por partes, obtemos:

$$\begin{aligned}
0 &\leq \sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^m}(\xi_R^2\sigma)(\varphi^2\sigma_{x_i})_{x_i}dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^m}(\xi_R^2\sigma)_{x_i}(\varphi^2\sigma_{x_i})dx \\
&= -\sum_{i=1}^{n}\int_{\mathbb{R}^m}\left(2\xi_R(\xi_R)_{x_i}\sigma\varphi^2\sigma_{x_i} + (\xi_R)^2\varphi^2\sigma_{x_i}^2\right)dx \\
&= -2\int_{\mathbb{R}^m}\xi_R\sigma\varphi^2 D\xi_R \cdot D\sigma dx - \int_{\mathbb{R}^m}(\xi_R)^2\varphi^2|D\sigma|^2 dx.
\end{aligned}$$

Note que a função ξ_R não é constante apenas no anel $R < |x| < 2R$. Então pela desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m} (\xi_R)^2\varphi^2|D\sigma|^2dx &\leq 2\int_{\mathbb{R}^m} |\varphi\xi_R D\sigma||\varphi\sigma D\xi_R|dx \\ &\leq 2\left[\int_{\mathbb{R}^m} \varphi^2\xi_R^2|D\sigma|^2\right]^{1/2} dx \left[\int_{R<|x|<2R} \varphi^2\sigma^2|D\xi_R|^2\right]^{1/2} dx.\end{aligned}$$

Afirmação 2.5 $\int_{R<|x|<2R} \varphi^2\sigma^2|D\xi_R|^2dx \leq K$, *onde* K *é uma constante que independe de* R.

De fato, para R suficientemente grande podemos aplicar a hipótese (2.17),

$$\int_{R<|x|<2R} \varphi^2\sigma^2|D\xi_R|^2dx = \int_{R<|x|<2R} \psi^2|D\xi_R|^2dx \leq \int_{R<|x|<2R} C\left(|x|^{1-m/2}\right)^2|D\xi_R|^2dx.$$

Por (2.25),

$$\begin{aligned}\int_{R<|x|<2R} \varphi^2\sigma^2|D\xi_R|^2dx &\leq \frac{4}{R^2}C^2\int_{R<|x|<2R} |R|^{2-m}dx \\ &\leq 4C^2R^{-m}\int_{B_{2R}(0)} dx \\ &= 4C^2R^{-m}(2R)^m\alpha(m) \\ &= 4C^2 2^m\alpha(m),\end{aligned}$$

onde $\alpha(m)$ denota o volume da bola unitária em dimensão m, o que prova a afirmação. Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^m} (\xi_R)^2\varphi^2|D\sigma|^2dx \leq K\left[\int_{\mathbb{R}^m} \varphi^2\xi_R^2|D\sigma|^2\right]^{1/2} dx. \tag{2.26}$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \xi_R^2\varphi^2|D\sigma|^2dx \leq \tilde{K}.$$

Desta forma,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^m} \xi_R^2\varphi^2|D\sigma|^2dx = \int_{\mathbb{R}^m} \varphi^2|D\sigma|^2dx \leq \tilde{K}.$$

Assim $\varphi^2|D\sigma|^2 \in L^1(\mathbb{R}^m)$, portanto

$$\lim_{R\to\infty}\int_{R<|x|<2R} \varphi^2\xi_R^2|D\sigma|^2dx = 0.$$

Então

$$\int_{\mathbb{R}^m} \varphi^2|D\sigma|^2dx = 0,$$

ou seja, σ é constante e temos o resultado. ■

Provemos agora o teorema 2.2.

Demonstração: Considere λ_R o autovalor principal do operador $L = -\Delta - q(x)$, na bola $B_R = \{x \in \mathbb{R}^m; ||x|| < R\}$, com autofunção correspondente $\varphi_R > 0$, ou seja,

$$\begin{cases} (-\Delta - q - \lambda_R)\varphi_R = 0, & \text{em} \quad B_R, \\ \varphi_R = 0, & \text{em} \quad \partial B_R. \end{cases}$$

Sabemos que, à medida que o raio é aumentado, o autovalor principal decresce (cf. [11, Teorema 4.2]) ou (cf. [9, Teorema 2.5]). Então, para provar o teorema, é suficiente mostrar que $\lambda_R < 0$ para algum $R > 0$. O argumento será por contradição. Suponha que

$$\overline{\lambda} = \lim_{R \to \infty} \lambda_R \geq 0.$$

Podemos normalizar a função φ_R, de forma que

$$\varphi_R(0) = 1.$$

A estratégia da demonstração é extrair uma subsequência de raios $(R_m)_m$ que tende ao infinito, de tal forma que a sequência de funções $(\varphi_{R_m})_m$ converge em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ para alguma $\varphi > 0$ de classe C^2, e que satisfaz

$$(-\Delta - q - \overline{\lambda})\varphi = 0.$$

A demonstração consiste em usar estimativas elípticas e teoremas de regularidade para possibilitar o uso do teorema de Arzelà-Ascoli. Depois de obtida a convergência, aplicaremos o teorema 2.3 e obteremos uma contradição.

Fixemos um raio $R_1 \geq 1$ e, de modo a facilitar a notação, para cada $m \in \mathbb{N}$ denotemos $R_m = m$. Considere índices $m > 3R_1$ com $m \in \mathbb{N}$. Desde que $q + \lambda_{R_m} \in C^1(\overline{B_{3R_1}})$ e B_{3R_1} é convexo, pelo teorema 0.9,

$$C^1(\overline{B_{3R_1}}) \hookrightarrow C^\alpha(\overline{B_{3R_1}}), \quad \text{para} \;\; 0 < \alpha < 1.$$

Portanto pelo lema 0.2, $\varphi_m \in C^{2,\alpha}(B_{3R_1})$ para $m > 3R_1$. O próximo passo é garantir a limitação uniforme das autofunções.

Afirmação 2.6 *Para $m > 3R_1$,*

$$\|\varphi_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_1}})} \leq C.$$

Como a sequência de autovalores é decrescente quando $m \to \infty$, considere uma constante C tal que

$$\|q(x) + \lambda_m\|_{C^\alpha(\overline{B_{3R_1}})} \leq C, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1. \tag{2.27}$$

Aplicando o teorema 0.10 considerando $\Omega = B_{3R_1}$ e $\Omega' = B_{2R_1}$, obtemos uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$d\|D\varphi_m\|_{C(B_{2R_1})} + d^2\|D^2\varphi_m\|_{C(B_{2R_1})} + d^{2+\alpha}\|D^2\varphi_m\|_{C^\alpha(B_{2R_1})} \leq C_1\|\varphi_m\|_{C(B_{3R_1})}, \tag{2.28}$$

para $m > 3R_1$ e $d \leq \text{dist}(B_{2R_1}, \partial B_{3R_1})$. Como a constante da desigualdade de Harnack 0.8 depende apenas do conjunto em questão e dos coeficientes do operador, utilizando (2.27), existe uma constante $C_2 > 0$, tal que

$$\sup_{B_{3R_1}} \varphi_m \leq C_2 \inf_{B_{3R_1}} \varphi_m, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1.$$

Como $\varphi_m(0) = 1$ para todo $m \in \mathbb{N}$, temos que

$$\inf_{B_{3R_1}} \varphi_m \leq 1 \Longrightarrow \sup_{B_{3R_1}} \varphi_m \leq \frac{\sup_{B_{3R_1}} \varphi_m}{\inf_{B_{3R_1}} \varphi_m} \leq C_2, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1.$$

Logo,

$$\|\varphi_m\|_{C(B_{3R_1})} \leq C_2, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1. \tag{2.29}$$

Desta forma, para $1 \leq p < \infty$, existe uma constante positiva C_3 tal que

$$\|\varphi_m\|_{L^p(B_{2R_1})} \leq C_3, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1.$$

Como $B_{R_1} \subset\subset B_{2R_1}$, segue do teorema 0.13 que existe uma constante C_4 tal que

$$\|\varphi_m\|_{W^{2,p}(B_{R_1})} \leq C_4\|\varphi_m\|_{L^p(B_{2R_1})}, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1.$$

Para $k = 2$ e $p > n$, temos a imersão

$$W^{2,p} \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{B_{R_1}}),$$

com $\alpha = 1 - n/p$. Então,

$$\|\varphi_m\|_{C^{1,\alpha}(\overline{B_{R_1}})} \leq C_5, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1. \tag{2.30}$$

Por (2.28) e (2.29), existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|D^2\varphi_m\|_{C^\alpha(B_{2R_1})} \leq C_6, \quad \text{para} \;\; m > 3R_1. \tag{2.31}$$

Por (2.30) e (2.31),

$$\|\varphi_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_1}})} \leq C, \quad \text{para } \ m > 3R_1,$$

para alguma constante C. Desta maneira, a família de funções $\{D^\beta \varphi_m\}$, $\beta = 0, 1, 2$ é equicontínua e uniformemente limitada em B_{R_1} e, pelo teorema de Arzelá-Ascoli, a sequência $(\varphi_m)_m$ admite uma subsequência que denotaremos ainda por $(\varphi_m)_m$, tal que

$$\varphi_m \to \varphi, \quad \text{em } \ C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_1}}).$$

Afirmação 2.7 *Existe uma subsequência $(\varphi_m)_m$, tal que*

$$\varphi_m \to \varphi, \quad em \ \ C^2_{loc}(\mathbb{R}^m),$$

onde φ satisfaz

$$\Delta\varphi + q(x)\varphi = 0, \quad em \ \ \mathbb{R}^m.$$

Fazendo $R_1 = 1, 2, 3, ...$, encontramos constantes $C_1, C_2, C_3, ...$ tais que

$$\|\varphi_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_1})} \leq C_1, \quad m > 3,$$

$$\|\varphi_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_2})} \leq C_2, \quad m > 6,$$

$$\vdots$$

$$\|\varphi_m\|_{C^{2,\alpha}(\overline{B_{R_1}})} \leq C_{R_1}, \quad m > 3R_1.$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, defina

$$\varphi^i_m \equiv \varphi_{m|\overline{B_i}}, \quad m > 3i.$$

Temos que $B_i \subset B_{i+1}$ e que $(\varphi^{i+1}_m)_{m>3(i+1)}$ é uma subsequência de $(\varphi^i_m)_{m>3i}$, para cada $i \in \mathbb{N}$. Como cada sequência $(\varphi^i_m)_{m>3}$ é limitada, usando a imersão compacta

$$C^{2,\alpha}(\overline{B_i}) \hookrightarrow C^2(\overline{B_i}), \quad i \in \mathbb{N},$$

existem funções $\varphi^i \in C^2(\overline{B_i})$, tais que a menos de subsequências

$$\varphi^1_4, \varphi^1_5, \varphi^1_6, ... \to \varphi^1, \quad \text{em } \ C^2(\overline{B_1}),$$

$$\varphi^2_7, \varphi^2_8, \varphi^2_9, ... \to \varphi^2, \quad \text{em } \ C^2(\overline{B_2}),$$

$$\varphi^3_{10}, \varphi^3_{11}, \varphi^3_{12}, ... \to \varphi^3, \quad \text{em } \ C^2(\overline{B_3}),$$

$$\vdots$$

$$\varphi^i_{3i+1}, \varphi^i_{3i+2}, \varphi^i_{3i+3}, \ldots \to \varphi^i, \quad \text{em} \;\; C^2(\overline{B_i}).$$

Defina

$$\varphi(x) = \varphi^i(x), \quad \text{para} \;\; x \in \overline{B_i}.$$

Então $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^m)$ e a sequência diagonal $U_i = \varphi^i_{4i}$, verifica

$$U_i \to \varphi, \quad \text{em} \;\; C^2(\overline{B_{R_1}}),$$

para cada $R_1 \in \mathbb{N}$. Desta forma, tomando o limite obtemos

$$(\Delta + q(x))\varphi = -\overline{\lambda}\varphi \leq 0, \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^m,$$

pois $\varphi > 0$ e $\overline{\lambda} \geq 0$. Logo, pelo teorema 2.3, existe uma constante C tal que $\psi = C\varphi$, o que é uma contradição, já que ψ é uma função que muda de sinal. Portanto existe um raio $R > 0$ de forma que $\lambda_R < 0$. $\blacksquare$

Uma observação que pode ser feita sobre este teorema, é que o resultado não é válido se ao invés do operador Δ, considerarmos o operador

$$\Delta + b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

De fato, se considerarmos a dimensão $m = 2$, as funções $\varphi = e^{x_2}$ e $\psi = \sin x_1$, satisfazem a equação

$$\left(\Delta - 2\frac{\partial}{\partial x_2} + 1\right) z = 0, \quad \text{em} \;\; \mathbb{R}^2,$$

porém, não existe uma constante C tal que $\psi = C\varphi$.

De posse destas observações, estamos em condições de provar a seguinte generalização da conjectura de De Giorgi:

Teorema 2.4 *Seja $u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ uma função satisfazendo*

$$\Delta u + f(u) = 0, \quad \textit{em} \;\; \mathbb{R}^2, \tag{2.32}$$

onde f é uma função de classe C^1. Suponha ainda que u é monótona em alguma direção, digamos

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} \geq 0, \quad \textit{em} \;\; \mathbb{R}^2. \tag{2.33}$$

Então, u é uma função de apenas uma variável, em outras palavras,

$$u(x_1, x_2) = g(ax_1 + bx_2),$$

para $g \in C^2(\mathbb{R})$, com a,b constantes apropriadas.

Demonstração: Desde que u satisfaz (2.32), temos que

$$\frac{\Delta u(x_1+t,x_2)-\Delta u(x_1,x_2)}{t}+\frac{f(u(x_1+t,x_2))-f(u(x_1,x_2))}{u(x_1+t,x_2)-u(x_1,x_2)}\frac{u(x_1+t,x_2)-u(x_1,x_2)}{t}=0,$$

então, quando $t \to 0$,

$$\Delta\frac{\partial u}{\partial x_1}+f'(u(x_1,x_2))\frac{\partial u}{\partial x_1}=0, \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \tag{2.34}$$

Se $\partial u/\partial x_1$ se anula em algum ponto, então pelo princípio do máximo forte a função teria que ser identicamente nula, o que significa que u é uma função que depende apenas da variável x_2 e o teorema estaria provado. Consideremos então o caso em que a derivada parcial é estritamente positiva. Observe que para cada direção $\xi \in S^1$, com um argumento análogo ao feito anteriormente, obtemos

$$\Delta\frac{\partial u}{\partial \xi}+f'(u(x_1,x_2))\frac{\partial u}{\partial \xi}=0, \quad \text{em } \mathbb{R}^2. \tag{2.35}$$

Então usando (2.34), (2.35) e o fato de que $f'(u(x_1,x_2))$ é localmente limitada, pelo teorema 2.3 existe uma constante C_ξ tal que

$$\frac{\partial u}{\partial \xi}=C_\xi\frac{\partial u}{\partial x_1}. \tag{2.36}$$

Ao mover a direção ξ, de $-e_1$ para e_1, temos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial(-e_1)} &= \lim_{t\to 0}\frac{u(x_1+(-1)t,x_2)-u(x_1,x_2)}{t}\\
&= (-1)\lim_{t\to 0}\frac{u(x_1+(-1)t,x_2)-u(x_1,x_2)}{(-1)t}\\
&= (-1)\lim_{t\to 0}\frac{u(x_1+t,x_2)-u(x_1,x_2)}{t}\\
&= -\frac{\partial u}{\partial e_1}.
\end{aligned}$$

Como $\partial u/\partial x_1 > 0$ e C_ξ depende continuamente de ξ, então pelo teorema do valor intermediário existe uma direção $\hat{\xi}$ tal que $C_{\hat{\xi}} = 0$. Considere $(a,b) \in S^1$ o vetor ortogonal à $\hat{\xi}$. Como $\partial u/\partial\hat{\xi} = 0$, concluímos que

$$u(x_1,x_2)=g(ax_1+bx_2),$$

e o teorema está provado. ■

2.3 Simetria em semi espaços

Considere o semi espaço

$$\Omega=\{x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n; x_n>0\}=\mathbb{R}^n_+, \quad n=2 \text{ ou } n=3.$$

Iremos analisar soluções do problema

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u > 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.37}$$

onde $f \in C^1(\mathbb{R}^+)$. O objetivo desta seção é mostrar que, se u é uma solução limitada de (2.37) quando $n = 2$ ou $n = 3$ (neste último caso, exigindo $f(0) \geq 0$), então u é simétrica no sentido que depende apenas da variável x_n, ou seja, $u = u(x_n)$. Observe que no caso $n = 2$, pelo resultado provado na seção 2.1, temos que

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} > 0, \quad \text{em} \ \ \Omega.$$

No decorrer da seção será usado o seguinte resultado:

Teorema 2.5 *Seja u uma função limitada que satisfaz* (2.37) *e denote*

$$M = \sup_{\Omega} u.$$

Se $f(M) \leq 0$, então

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0, \quad \text{em} \ \ \Omega,$$

e u é simétrica, no sentido que $u = u(x_n)$. Além disso, $f(M) = 0$.

Observe que a exigência da limitação de u é imprescindível. De fato, considere o semiplano

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y > 0\}.$$

A função $u(x, y) = ye^x$ é estritamente positiva em Ω e $M = +\infty$. Além disso, sendo $f(u) = u$,

$$\Delta u + f(u) = ye^x - ye^x = 0.$$

No entanto, $f(\infty) = -\infty$. Este teorema é provado de uma forma mais geral no artigo [8], considerando $u > 0$ satisfazendo

$$\Delta u + g(x_n, u) = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega = \mathbb{R}^n_+,$$

onde g é uma função Lipschitziana, com $t \to g(t, u)$ é não decrescente e o limite $f(u) = \lim_{t \nearrow \infty} g(t, u)$ existe.

Enunciemos o principal resultado desta seção:

Teorema 2.6 *Seja u uma solução limitada de (2.37), com $\partial u/\partial x_n \geq 0$. Se $n = 2$ então u é simétrica. Se $n = 3$, $f(0) \geq 0$ e $f \in C^1$, então u é simétrica.*

A demonstração deste teorema é basicamente verificar que u satisfaz as condições do teorema 2.5. Para tanto, precisaremos de alguns resultados preliminares e iniciamos com o seguinte lema:

Lema 2.1 *Seja $z : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ uma solução limitada da equação*

$$\Delta z + f(z) = 0, \tag{2.38}$$

em todo $\mathbb{R}^p$, para $p \geq 1$, com $f \in C^1$. Suponha que para cada direção $\xi \in \mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, a derivada direcional $\partial z/\partial \xi$ não muda de sinal. Então $f(M) = 0$, onde

$$M = \sup_{\mathbb{R}^p} z.$$

Demonstração: A demonstração será por indução em p. Considere $p = 1$. Por hipótese, a função z ou é monótona crescente ou monótona decrescente. Suponhamos monótona crescente, então

$$\lim_{t\to\infty} z(t) = M.$$

Se existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $z(t) = M$ para todo $t \geq t_0$, então

$$z'(t) = z''(t) = 0, \quad \text{para todo} \ \ t \geq t_0.$$

Por (2.38),

$$0 = -z''(t) = f(z(t)) = f(M),$$

e o resultado segue. Caso não exista tal $t_0 \in \mathbb{R}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ considere $t_n \in \mathbb{R}$ tal que $t_n \to \infty$ quando $n \to \infty$. Pelo teorema do valor médio, existe $\eta_{t_n} \in (t_n, t_n + 1)$, tal que

$$z(t_n + 1) - z(t_n) = z'(\eta_{t_n}).$$

Logo, se $n \to \infty$ então $\eta_{t_n} \to \infty$ e, consequentemente,

$$\lim_{n\to\infty} z'(\eta_{t_n}) = 0.$$

Novamente pelo teorema do valor médio, existe $\hat{\eta}_{t_n} \in (\eta_{t_n}, \eta_{t_n} + 1)$ tal que

$$z'(\eta_{t_n} + 1) - z'(\eta_{t_n}) = z''(\hat{\eta}_{t_n}).$$

Desta maneira,

$$\lim_{n\to\infty} z''(\hat{\eta}_{t_n}) = 0.$$

Portanto, por (2.38),

$$0 = -\lim_{n\to\infty} z''(\hat{\eta}_{t_n}) = \lim_{n\to\infty} f(z(\hat{\eta}_{t_n})) = f(M),$$

e o resultado segue. Suponhamos que o resultado é válido para $p-1 \geq 1$. Por hipótese, considerando a direção $\xi = e_p = (0, 0, ..., 1)$, temos que

$$\frac{\partial z}{\partial x_p} \geq 0 \quad \text{ou} \quad \frac{\partial z}{\partial x_p} \leq 0.$$

Consideremos a primeira desigualdade. Definamos

$$w(x_1, ..., x_{p-1}) = \lim_{x_p \nearrow \infty} z(x_1, ..., x_p).$$

Note que a função está bem definida, pois z é uma função monótona e limitada com respeito a variável x_p. Defina a sequência de funções $(z_n)_n$,

$$z_n(x) = z(x', x_p + n),$$

onde $x' \in \mathbb{R}^{p-1}$ e $x_p \in \mathbb{R}$. Desde que z é uma função limitada em $\mathbb{R}^p$, para cada subconjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^p$, a sequência de funções $(z_n)_n$ é uniformemente limitada e, desde que $f \in C^1$, concluímos que a sequência $(f(z_n))_n$ é uniformemente limitada em K. Observe ainda que a sequência $(z_n)_n$ satisfaz,

$$\Delta z_n + f(z_n) = 0. \tag{2.39}$$

Então, por estimativas elípticas para a equação de Poisson (cf. [19, Capítulo 4]), a sequência $(z_n)_n$ é uniformemente limitada na norma C^1. Pelo teorema de Arzelà-Ascoli, a menos de subsequência, a sequência $(z_n)_n$ converge uniformemente em K na norma C^α[2]. Desde que $(z_n)_n$ converge pontualmente para w, concluímos que toda a sequência converge para w na norma C^α. Note que, pela linearidade do Laplaciano,

$$-\Delta(z_m - z_n) = f(z_m) - f(z_n).$$

Além disso, usando o fato da função f ser Lipschitziana no compacto K,

$$|f(z_m) - f(z_n)| \leq \|f\|_{Lip}|z_m - z_n| \leq \|f\|_{Lip}\|z_m - z_m\|_{C^\alpha(K)} \longrightarrow 0,$$

[2]Estamos usando a imersão compacta dos espaços de Hölder.

onde $\|f\|_{Lip}$ denota a constante de Lipschitz da função f. Aplicando estimativas elípticas da equação de Poisson novamente,

$$\|z_m - z_n\|_{C^1(K)} \leq \|f(z_m) - f(z_n)\|_\infty \longrightarrow 0.$$

Então concluímos que a sequência de funções $(z_n)_n$ é de Cauchy na norma C^1 e, portanto, a sequência converge para w na norma C^1. Desde que $(z_n)_n$ satisfaz (2.39), a sequência é uma solução fraca para o problema, ou seja,

$$\int_K \nabla z_n \nabla \phi = \int_K f(z_n)\phi,$$

para toda função teste $\phi \in C^\infty$ com supp$\phi \subset K$. Em conjuntos compactos,

$$\nabla z_n \to \nabla w \quad \text{e} \quad f(z_n) \to f(w).$$

Então w satisfaz a equação (2.39) no sentido fraco. Como f e w são funções de classe C^1, temos que $f(w) \in C^\alpha$ em subconjuntos compactos. Então, por teoria de Schauder,

$$\Delta v = -f(w),$$

possui única solução v. Como w satisfaz a mesma equação no sentido fraco, obtemos que as duas soluções coincidem. Portanto,

$$\Delta w + f(w) = 0.$$

Considere uma direção arbitrária $\theta \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{0\}$. Então, usando a convergência C^1 de z_n para w e o fato da derivada direcional de z não mudar de sinal, obtemos

$$0 \leq \theta \cdot \nabla z_n \longrightarrow \theta \cdot \nabla w.$$

Logo, para cada direção $\theta \in \mathbb{R}^{p-1} \setminus \{0\}$, a derivada direcional de w não muda de sinal. Desde que z é crescente na direção x_p, concluímos ainda que

$$M = \sup_{\mathbb{R}^p} z = \sup_{x' \in \mathbb{R}^{p-1}} \lim_{x_p \to \infty} z(x', x_p) = \sup_{\mathbb{R}^p} w.$$

Então, pela hipótese de indução em $p-1$,

$$f(M) = 0,$$

e o lema segue. ■

Observe que para provar o teorema 2.6, é suficiente provar o seguinte teorema:

Teorema 2.7 *Seja u uma solução limitada de* (2.37)*, em dimensão $n = 2$ ou $n = 3$, onde $\mu = \sup_\Omega u$, $f \in C^1$ e*

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} \geq 0.$$

Então

$$f(\mu) = 0.$$

Demonstração: Defina

$$z(x_1, ..., x_{n-1}) = \lim_{x_n \nearrow +\infty} u(x_1, ..., x_n).$$

Por argumentos análogos aos proferidos no lema anterior, pode-se concluir que u converge uniformemente em compactos de $\mathbb{R}^{n-1}$ para z, e a convergência é C^1. Além disso,

$$z > 0, \quad \sup z = \mu \quad \text{e} \quad \Delta z + f(z) = 0. \tag{2.40}$$

Observe ainda que z satisfaz todas as hipóteses do lema 2.1, exceto que para cada direção $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$ a derivada direcional não muda de sinal. Iremos demonstrar que z também satisfaz esta hipótese usando um argumento de contradição. Suponha que para alguma direção $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, a derivada direcional

$$\psi := \frac{\partial z}{\partial \xi},$$

muda de sinal. Note que

$$\frac{\Delta z(x + t\xi) - \Delta z(x)}{t} + \frac{f(z(x + t\xi)) - f(z(x))}{z(x + t\xi) - z(x)} \frac{z(x + t\xi) - z(x)}{t} = 0,$$

portanto,

$$\Delta \psi + f'(z)\psi = 0 \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^{n-1}. \tag{2.41}$$

Agora usaremos o teorema 2.2 para operadores de Shcrödinger em dimensão $n - 1 = 1$ ou 2[3]. Note que o potencial $q_1(x') = f'(z(x'))$ é limitado. Desde que ψ é uma solução de (2.41) e muda de sinal, o teorema 2.2 afirma que o operador $-\Delta - q_1$ possui spectro negativo, ou seja, existe uma função $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ tal que

$$-\delta := \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \{|D\phi(x')|^2 - q_1(x')\phi(x')^2\} dx' < 0. \tag{2.42}$$

Considere $R > 0$ grande o suficiente para que

$$\text{supp}(\phi) \subset B'_R = \{x' \in \mathbb{R}^{n-1}; |x'| < R\}.$$

[3]Este é o passo da demonstração que exige a limitação da dimensão.

Defina a região cilíndrica

$$D = D_{a,h} = \{x = (x', x_n) \in \Omega; |x'| < R \text{ e } a < x_n < a + h\} = B'_R \times (a, a+h).$$

Em D considere o operador

$$L = -\Delta - f'(u(x', x_n)),$$

e defina $q(x', x_n) = f'(u(x', x_n))$. Denote $\lambda_{a,h}$ o autovalor principal do operador L com as condições de fronteira em D, ou seja, existe uma função positiva φ, tal que

$$\begin{cases} L\varphi = \lambda_{a,h}\varphi, & \text{em} \quad D, \\ \varphi = 0, & \text{em} \quad \partial D. \end{cases}$$

Então temos o seguinte lema:

Lema 2.2 *Suponha que para alguma $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ com supp$(\phi) \subset B'_R$, ocorra a desigualdade* (2.42)*. Então para a e h suficientemente grandes, o autovalor principal do operador L em D, satisfaz*

$$\lambda_{a,h} < 0.$$

Demonstração: Pela caracterização variacional do autovalor principal, para provar o lema é suficiente exibir uma função $\rho(x', x_n) \in H_0^1(D)$, tal que

$$I := \int_D \{|D\rho|^2 - q(x', x_n)\rho^2\} dx < 0.$$

Defina

$$\rho(x', x_n) := \phi(x') \sin\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right].$$

Note que

$$\begin{aligned} I &= \int_D \left\{ \left| D\left(\phi(x') \sin\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right]\right)\right|^2 - q(x', x_n)\left(\phi(x') \sin\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right]\right)^2 \right\} dx' dx_n \\ &= \int_D \left\{ \left(|D_{x'}\phi|^2 - q(x', x_n)\phi^2(x')\right) \sin^2\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right] \right\} dx' dx_n + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{h^2} \int_D \phi^2(x') \cos^2\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right] dx' dx_n \\ &= \int_D \left(|D_{x'}\phi|^2 - q_1(x')\phi^2\right) \sin^2\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right] dx' dx_n + \\ &\quad + \frac{\pi^2}{h^2} \int_D \cos^2\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right] \phi(x')^2 dx' dx_n - \\ &\quad - \int_D \left(q(x', x_n) - q_1(x')\right) \phi(x')^2 \sin^2\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right] dx' dx_n. \end{aligned} \tag{2.43}$$

Agora é o único ponto da demonstração que será usada a hipótese que $f \in C^1$. Desde que $u(x', x_n)$ converge uniformemente em B'_R para $z(x')$, quando $x_n \nearrow \infty$, e $f \in C^1$, então dado $\varepsilon > 0$, existe a suficientemente grande, tal que

$$|q(x', x_n) - q_1(x')| < \varepsilon, \quad \forall x' \in B'_R, \quad \forall x_n > a. \tag{2.44}$$

Suponha que

$$\int_{B'_R} \phi(x')^2 dx' = 1. \tag{2.45}$$

Em (2.43) escrevemos I em três integrais. Denote (1) para a primeira integral, (2) para a segunda e (3) para a terceira. Vamos integrar separadamente com respeito a x' e x_n. Observe primeiramente que por mudança de variáveis

$$\begin{aligned}
\int_a^{a+h} \sin^2\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right] dx_n &= \frac{h}{\pi}\int_0^{\pi} \sin^2(y_n) dy_n \\
&= \frac{h}{2\pi}\int_0^{\pi} dy_n - \frac{h}{2\pi}\int_0^{\pi} \cos(2y_n) dy_n \\
&= \frac{h}{2}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_a^{a+h} \sin^2\left[\pi\left(\frac{x_n - a}{h}\right)\right] dx_n = \frac{h}{2}. \tag{2.46}$$

Desta forma, por (2.42) e (2.46), a primeira integral

$$(1) = -\delta\frac{h}{2}. \tag{2.47}$$

Utilizando (2.45) e mudança de variáveis, temos que a segunda integral

$$(2) = \frac{\pi^2}{2h}. \tag{2.48}$$

Por fim, utilizando (2.44) e (2.46),

$$(3) \leq \frac{\varepsilon h}{2}. \tag{2.49}$$

Por (2.47), (2.48) e (2.49), concluímos que

$$I \leq (-\delta + \varepsilon)\frac{h}{2} + \frac{\pi^2}{2h}.$$

Portanto, para $\varepsilon = \delta/2$ e h suficientemente grande, concluímos que $I < 0$ e o resultado segue. ■

Voltemos à prova do teorema 2.7. Como u satisfaz (2.37), temos que

$$\frac{\Delta u(x + te_n) - \Delta u(x)}{t} + \frac{f(u(x + te_n)) - f(u(x))}{u(x + te_n) - u(x)} \frac{u(x + te_n) - u(x)}{t} = 0.$$

Logo

$$-(\Delta + q(x', x_n))\frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad \text{em } \Omega.$$

Sabemos ainda que

$$\frac{\partial u}{\partial x_n} > 0, \quad \text{em } \Omega.$$

Portanto, para cada subconjunto limitado $\Omega' \subset \Omega$, o autovalor principal é positivo (cf. [9]]) ou (cf. [24]). Em particular no conjunto D,

$$\lambda_{a,h} > 0,$$

o que é uma contradição pelo que provamos anteriormente. Portanto, para cada direção $\xi \in \mathbb{R}^{n-1} \setminus \{0\}$, a derivada direcional $\xi \cdot Dz$ não pode mudar de sinal e, pelo lema 2.1, $f(M) = 0$. Consequentemente a simetria é garantida pelo teorema 2.5 e o teorema 2.6 está provado. ■

Ainda não foi provado se o resultado do teorema 2.6 permanece válido em dimensões maiores ou quando a hipótese sobre $f(0)$ é removida. Temos então a seguinte conjectura:

Conjectura 2 *Se u é uma função que satisfaz* (2.37) *e $M = \sup u < \infty$ então, necessariamente, $f(M) = 0$.*

Se esta conjectura é verdadeira, então pelo teorema 2.5, u seria simétrica. Esta conjectura tem sido estudada analisando o seguinte problema:

Considere $\Omega = \mathbb{R}^n_+$ e uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que

$$0 < u < \sup u = M < \infty, \tag{2.50}$$

e

$$\begin{cases} \Delta u + u - 1 = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.51}$$

onde $f(u) = u - 1$.

Afirmação 2.8 *Se existe u satisfazendo* (2.50) *e* (2.51)*, então $M > 1$ e a conjectura* 2 *não seria válida em geral, pois neste caso, $f(M) > 0$.*

Demonstração: De fato, suponha por contradição que $M \leq 1$ e considere a dimensão $n = 1$. Desta maneira, por (2.50) e (2.51), temos que

$$u'' = 1 - u > 0, \quad \text{em } \mathbb{R}_+. \tag{2.52}$$

Definindo $v = u - 1$, temos que $v < 0$ em $\mathbb{R}_+$. Pela equação (2.52), temos que $v'' = u'' > 0$. Note que $v'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}_+$. De fato, suponha que existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que $v'(x_0) \leq 0$. Uma vez que $v'' > 0$, segue que v' é uma função estritamente crescente e, consequentemente, $v'(x) \leq 0$ para todo $x \in (0, x_0)$. Pelo teorema do valor médio, existe $c \in (0, x_0)$ tal que

$$v'(c) = \frac{v(x_0) - v(0)}{x_0 - 0} = \frac{u(x_0) - 1 - u(0) + 1}{x_0} = \frac{u(x_0)}{x_0},$$

o que é uma contradição, já que $v'(c) \leq 0$ e $u(x_0)/x_0 > 0$. Portanto $v'(x) > 0$ em $\mathbb{R}_+$. Deste modo,

$$\int_0^{\tilde{x}} v' \geq \int_0^{\tilde{x}} = 0$$

e, portanto, $v(\tilde{x}) \geq 0$ o que é uma contradição, uma vez que $v < 0$ em $\mathbb{R}_+$. No caso geral, observe que a função u satisfaz todas as hipóteses do teorema 2.5, então a função é simétrica no sentido que $u = u(x_n)$. Portanto, basta repetir o argumento do caso $n = 1$ para concluir que $M > 1$. ■

É plausível então pensar numa nova conjectura:

Conjectura 3 *Não existe uma função u satisfazendo* (2.50) *e* (2.51).

Observe que exigimos a solução *estritamente positiva*. Existe solução *não negativa*, por exemplo, considere a função $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ definida por

$$u = 1 - \cos(x_n).$$

Claramente $u = 0$ em $\partial\Omega$, $\sup u = 1$ e

$$\Delta(1 - \cos(x_n)) + 1 - \cos(x_n) - 1 = 0.$$

A demonstração da conjectura 3 em dimensões $n = 2$ ou $n = 3$ segue da seguinte proposição:

Proposição 2.2 *Considere o conjunto $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_n < 2\pi\}$, onde $n = 2$ ou $n = 3$. Suponha que $u \in C^2(\overline{\Sigma})$, $0 \leq u \leq M$ e*

$$\begin{cases} \Delta u + u - 1 = 0, & \text{em} \quad \overline{\Sigma}, \\ \qquad\quad u = 0, & \text{quando} \quad \{x_n = 0\}. \end{cases} \tag{2.53}$$

Então $u(x', 2\pi) \equiv 0$, para todo $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Demonstração: Defina a função

$$\varphi(x') = \int_0^{2\pi} u(x', x_n) \sin(x_n) dx_n.$$

Seja $\Delta_{x'}$ o laplaciano com relação à x', então usando integração por partes duas vezes e (2.53), obtemos:

$$\begin{aligned}
\Delta_{x'}\varphi(x') &= \int_0^{2\pi} \Delta_{x'} u(x', x_n) \sin(x_n) dx_n \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\Delta u(x', x_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x', x_n) \right) \sin(x_n) dx_n \\
&= \int_0^{2\pi} \left(1 - u(x', x_n) - \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}(x', x_n) \right) \sin(x_n) dx_n \\
&= \int_0^{2\pi} \left(-u(x', x_n) \sin(x_n) + \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', x_n) \cos(x_n) \right) dx_n \\
&= -\int_0^{2\pi} u(x', x_n) \sin(x_n) dx_n + \int_0^{2\pi} u(x', x_n) \sin(x_n) dx_n + u(x', x_n) \cos(x_n)|_0^{2\pi}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\Delta_{x'}\varphi(x') = u(x', 2\pi).$$

Desta maneira, para $n = 2$ ou $n = 3$, φ é uma função subharmônica em $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^2$. Então φ é constante e o resultado segue. ■

O argumento não é válido em geral pois para $n > 3$, existem funções subharmônicas e L^∞ em $\mathbb{R}^j$, para $j > 2$. (cf. [19, Página: 30]).

Capítulo 3

Propriedades qualitativas em domínios Lipschitzianos

Neste capítulo, iremos analisar propriedades de uma função $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, que satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega = \Gamma, \end{cases} \tag{3.1}$$

$$0 < u \leq \sup u = M < \infty, \quad \text{em} \ \ \Omega, \tag{3.2}$$

cujo domínio Ω é um conjunto aberto não limitado da forma

$$\Omega = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > \varphi(x_1, ..., x_{n-1})\},$$

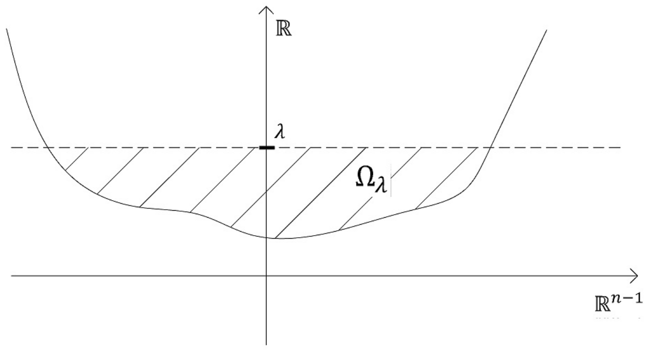
onde $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ é uma função globalmente Lipschitziana, com constante de Lipschitz k. Os primeiros resultados neste tipo de domínio foram abordados por M. Esteban e P. L. Lions (cf. [15]), considerando o caso do gráfico φ ser Lipschitz coercivo, ou seja,

$$\lim_{|x'| \to \infty} \varphi(x') = \infty.$$

Eles observaram que para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, a região

$$\Omega_\lambda = \{x \in \Omega; x_n < \lambda\}$$

é limitada e divide o conjunto Ω através do plano $\{x \in \Omega; x = \lambda\}$, como mostra a figura abaixo:



Então o método dos planos móveis[1] poderia ser usado para obter a monotonicidade. No caso mais geral, quando φ é apenas uma função Lipschitziana, as regiões Ω_λ nem sempre são limitadas. Como no caso em que Ω é o semi espaço $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$, tornando a situação mais delicada. De fato, no caso em que Ω é um semi espaço, já obtemos resultados particulares no capítulo 2.

No decorrer deste capítulo, exigiremos as seguintes condições sobre a função f:

Condição 1 *A função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ é Lipschitziana com constante de Lipschitz K e, para algum $\mu > 0$, temos que $f(s) > 0$, se $s \in (0, \mu)$ e $f(s) \leq 0$, se $s \geq \mu$.*

Condição 2 *Para algum $0 < s_0 < \mu$ e $\delta_0 > 0$, temos que $f(s) \geq \delta_0 s$, se $s \in [0, s_0]$.*

Condição 3 *Para algum $0 < s_0 < s_1 < \mu$, temos que $f(s)$ é não crescente, se $s \in (s_1, \mu)$.*

Sem perda de generalidade, iremos assumir que $\mu = 1$. Iniciamos o capítulo provando um princípio do máximo para domínios não limitados, o qual usaremos para provar que $u < \mu = 1$ em Ω. Na segunda seção, provaremos a Hölder continuidade das soluções em todo o conjunto $\overline{\Omega}$. Prosseguindo, provaremos alguns lemas que serão usados como ferramentas para demonstrar que u converge uniformemente ao supremo quando se distancia da fronteira de Ω. Finalmente, usaremos os métodos que foram desenvolvidos no decorrer do capítulo, para generalizar um resultado provado por J. Serrin em domínio limitado.

[1]Método usado por H. Berestycki e L. Nirenberg (cf. [7])

3.1 Princípio do máximo

Teorema 3.1 *Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um domínio possivelmente não limitado. Suponha que $\overline{D}$ é disjunto do fecho de um cone aberto, conexo e infinito Σ. Suponha ainda que existe uma função $z \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{D})$, que é limitada superiormente e satisfaz*

$$\begin{cases} \Delta z + c(x)z \geq 0, & em \quad D, \\ z \leq 0, & em \quad \partial D, \end{cases} \tag{3.3}$$

para alguma função contínua $c(x)$ tal que $c(x) \leq 0$. Então $z \leq 0$ em D.

Demonstração: Podemos supor, sem perda de generalidade, que o vértice do cone Σ é a origem. Considere Σ^c o conjunto complementar do cone $\overline{\Sigma}$. Seja $\psi > 0$ a autofunção principal do operador de Laplace-Beltrami na esfera unitária, no conjunto G, ou seja, $\psi > 0$ em $G = S^{n-1} \cap \Sigma^c$ e

$$\Delta_S \psi + \mu \psi = 0, \quad \text{em} \quad G,$$

onde $\mu > 0$ denota o autovalor principal.[2] Considere $\alpha > 0$ tal que $\alpha(n + \alpha - 2) = \mu$. Defina a função $g : \Sigma^c \to \mathbb{R}$,

$$g(x) = |x|^\alpha \psi\left(\frac{x}{|x|}\right).$$

Observe que para cada $x \in \Sigma^c$, podemos escrever por coordenadas polares $x = r\xi$, onde $r > 0$ e $\xi \in G$. Então $g(x) = r^\alpha \psi(\xi)$. Tal função é harmônica, pois usando a decomposição do laplaciano em termos radiais e tangenciais $(A.10)$, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta g(x) &= \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1} \frac{\partial}{\partial r}(r^\alpha \psi(\xi))\right) + \frac{1}{r^2} \Delta_S(r^\alpha \psi(\xi)) \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}(r^{n-1} \alpha r^{\alpha-1} \psi(\xi)) + r^{\alpha-2} \Delta_S \psi(\xi) \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \frac{\partial}{\partial r}(\alpha r^{\alpha+n-2} \psi(\xi)) + r^{\alpha-2} \Delta_S \psi(\xi) \\ &= \frac{1}{r^{n-1}} \alpha(\alpha + n - 2) r^{\alpha+n-3} \psi(\xi) + r^{\alpha-2} \Delta_S \psi(\xi) \\ &= r^{\alpha-2}(\alpha(n + \alpha - 2)\psi(\xi) + \Delta_S \psi(\xi)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $c(x) \leq 0$, segue que

$$(\Delta + c)g \leq \Delta g = 0.$$

[2] Este é o processo de construção de uma função positiva, harmônica e homogênea de grau α, a partir de uma autofunção do operador de Laplace-Beltrami na esfera unitária. No lema 3.1 fazemos este processo em detalhes, partindo de uma função harmônica.

Definamos a função $\sigma : \overline{D} \to \mathbb{R}$,

$$\sigma = \frac{z}{g}.$$

Observe que é suficiente mostrar que σ é não positiva em D, pois assim z será não positiva em D e teremos o resultado. Para este fim, mostraremos que σ satisfaz as hipóteses do princípio do máximo $A.2$.

Afirmação 3.1 *A função σ satisfaz:*

(i) $\Delta\sigma + \frac{1}{g}\sum_{i=1}^{n} g_i\sigma_i + \tilde{c}\sigma \geq 0$ *em D, com $\tilde{c} \leq 0$;*

(ii) $\sigma \leq 0$, *em ∂D;*

(iii) $\limsup_{|x|\to\infty} \sigma(x) \leq 0$.

De fato, uma vez que z satisfaz (3.3), temos que

$$\begin{aligned}
0 &\leq \Delta z + c(x)z \\
&= \Delta(g\sigma) + c(x)(g\sigma) \\
&= g\Delta\sigma + 2DgD\sigma + \sigma\Delta g + c(x)g\sigma \\
&= g\Delta\sigma + 2DgD\sigma + (\Delta g + c(x)g)\sigma \\
&= \Delta\sigma + \frac{2}{g}D\sigma Dg + \frac{(\Delta g + c(x)g)}{g}\sigma.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Delta\sigma + \frac{2}{g}\sum g_i\sigma_i + \tilde{c}(x)\sigma \geq 0,$$

onde,

$$\tilde{c}(x) = \frac{(\Delta + c(x))g}{g} \leq 0,$$

e o ítem (i) está provado. Como g é positiva em Σ^c e z é, por hipótese, não positiva em ∂D, concluímos que $\sigma \leq 0$ em ∂D, e o ítem (ii) está provado. Por fim, desde que z é limitada superiormente, ou seja, $z \leq C$ para alguma constante C, para cada ξ fixado, temos que

$$\sigma = \frac{z}{g} \leq \frac{C}{g} = \frac{C}{r^\alpha\psi(\xi)} \longrightarrow 0,$$

quando $r \to +\infty$, ou seja,

$$\limsup_{|x|\to\infty} \sigma(x) \leq 0,$$

e a afirmação está provada. Portanto $z \leq 0$ em D. ■

De posse deste teorema, provaremos o resultado mais importante desta seção.

Teorema 3.2 *Se* $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *satisfaz* (3.1), (3.2) *e a função* f *satisfaz a condição* 1, *então*

$$u(x) < 1 \quad \textit{para todo} \;\; x \in \Omega.$$

Demonstração: A prova será divida em duas partes. Na primeira parte, será provado que $u \leq 1$ em Ω e, na segunda parte, será provado que a desigualdade é estrita. A prova será por contradição. Suponha que $u > 1$ em Ω e seja D uma componente conexa tal que $u(x) > 1$, para todo $x \in D$. Defina a função $z(x) = u(x) - 1$, para $x \in \overline{D}$. Observe de imediato que $z \in C(\overline{D})$. O objetivo da prova é mostrar que a função z e o conjunto D satisfazem as hipóteses do teorema anterior, e assim chegar em uma contradição. Considere um cone Σ infinito e aberto tal que $\overline{\Sigma} \cap \overline{D} = \emptyset$. Observe que

(i) z é subharmônica em D, ou seja, $\Delta z \geq 0$;

(ii) $z = 0$ em ∂D;

(iii) z é limitada.

De fato, note que

$$\Delta z = \Delta u = -f(u) \geq 0,$$

pois para $x \in D$ tem-se $u(x) > 1$ e, $f(s) \leq 0$ para $s \geq 1$. Logo, a afirmação (i) está verificada. A afirmação (ii) segue da construção do conjunto D e da continuidade de u. A afirmação (iii) é imediata, uma vez que u é uma função limitada. Assim, temos todas as hipóteses do teorema anterior satisfeitas. Portando $z \leq 0$ em D, ou seja, $u \leq 1$.

Na primeira parte da demonstração, foi provado que $u(x) \leq 1$, se $x \in D$. Suponha que existe $x_0 \in \Omega$ tal que $u(x_0) = 1$. Defina a função $w(x) = u(x) - 1$. A estratégia da demonstração é verificar que w satisfaz as hipóteses do princípio do máximo e chegar numa contradição. Defina a função

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{f(u(x))}{u(x) - 1}, & \text{se} \quad u(x) < 1 \\ \qquad\quad 0, & \text{se} \quad u(x) = 1. \end{cases}$$

Observe que como f é uma função Lipschitziana e $f(1) = 0$, temos que

$$|c(x)| = \left| \frac{f(u(x))}{u(x) - 1} \right| \leq \frac{|f(u(x)) - f(u(x_0))|}{|u(x) - u(x_0)|} \leq K.$$

Além disso, a função w satisfaz as seguintes propriedades:

(i) $w(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$;

(ii) $w(x_0) = 0$;

(iii) $\Delta w + c(x)w = 0$ em Ω.

As propriedades (i) e (ii) são imediatas. Nos pontos de Ω em que $u < 1$, segue

$$\begin{aligned} \Delta w + c(x)w &= \Delta u + \frac{f(u)}{u-1}(u-1) \\ &= \Delta u + f(u) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Nos pontos de Ω em que $u = 1$, temos que

$$\Delta w + c(x)w = \Delta u = -f(u(x)) = -f(1) = 0,$$

o que prova a propriedade (iii). Podemos escrever $c(x) = c^+(x) - c^-(x)$. Desta maneira, pelos ítens (i) e (iii),

$$\Delta w - c^-(x)w = -c^+(x)w \geq 0.$$

Portanto, pelo princípio do máximo $(A.1)$, $w \equiv 0$ em Ω. Chegamos então numa contradição, pois w é uma função contínua em $\overline{\Omega}$ e $w = -1$ em $\partial\Omega$. $\blacksquare$

3.2 Hölder continuidade

Nesta seção iremos provar a Hölder continuidade da solução u, no conjunto $\overline{\Omega}$. Para demonstrar a Hölder continuidade nos pontos da fronteira, precisaremos de argumentos e propriedades de funções positivas, harmônicas e homogêneas de grau α, por isso provamos inicialmente um lema que auxiliará na demonstração. Por fim, iremos obter uma estimativa de regularidade elíptica interior que, como aplicação, implicará na Hölder continuidade de u no conjunto Ω.

Durante as demonstrações desta seção iremos considerar, sem perda de generalidade, que Γ intersecta a origem, ou seja, $\varphi(0) = 0$. Além disso, considere um cone Σ com vértice na origem, mas no complementar do conjunto Ω,

$$\Sigma = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n < -k'|x'|\},$$

onde $k' > k$. Note que, por construção, $\overline{\Sigma} \cap \overline{\Omega} = \{0\}$. Denote Σ^c o conjunto complementar do cone $\overline{\Sigma}$.

Lema 3.1 *Seja $v \in C^2(\Sigma^c) \cap C(\overline{\Sigma^c})$ uma função positiva, harmônica e homogênea de grau $\alpha > 0$ (α depende da abertura do cone), ou seja,*

$$v(tx) = t^{\alpha} v(x), \quad \textit{para todo} \;\; x \in \Sigma^c, \quad t \geq 0.$$

Se $k' = 0$ então $\alpha = 1$, se $k' > k$ então $\alpha < 1$, se $k' < k$ então $\alpha > 1$. Além disso, existe uma constante C_0 tal que

$$|x|^{\alpha} \leq v(x) \leq C_0 |x|^{\alpha}, \quad \textit{em} \;\; \Omega. \tag{3.4}$$

Demonstração: Como pode ser visto no apêndice $A.3$, o laplaciano de v pode ser decomposto em termos radiais e tangenciais da forma

$$\Delta v = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}} v,$$

onde $\Delta_{S^{n-1}}$ denota o operador de Laplace-Beltrami na esfera unitária S^{n-1}. Observe que para cada $x \in \Sigma^c$, podemos escrever por coordenadas polares $x = r\xi$, onde $r > 0$ e $\xi(x) \in S^{n-1}$. Usando o fato da função v ser uma função homogênea, obtemos:

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r\xi) = \alpha r^{\alpha-1} v(\xi) = \frac{\alpha}{r} v(r\xi),$$

e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r\xi) &= -\frac{\alpha}{r^2}v(r\xi) + \frac{\alpha}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r\xi) \\
&= -\frac{\alpha}{r^2}v(r\xi) + \frac{\alpha^2}{r^2}v(r\xi) \\
&= \frac{\alpha(\alpha-1)}{r^2}v(r\xi).
\end{aligned}$$

Então sob a esfera unitária ($r = 1$),

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{n-1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{S^{n-1}}v \\
&= \alpha(\alpha-1)v + (n-1)\alpha v + \Delta_{S^{n-1}}v \\
&= \alpha(n+\alpha-2)v + \Delta_{S^{n-1}}v.
\end{aligned}$$

Como v é harmônica, a restrição de v à $S^{n-1} \cap \Sigma^c$ deve ser uma autofunção do operador $\Delta_{S^{n-1}}$ com autovalor $\mu = \alpha(n+\alpha-2)$,

$$\Delta_{S^{n-1}}v + \mu(x)v = 0.$$

Sabemos que os autovalores principais μ decrescem à medida que o domínio é aumentado. Logo, como μ depende diretamente de α, temos que α decresce quando o domínio aumenta. Temos três situações para o conjunto Σ^c:

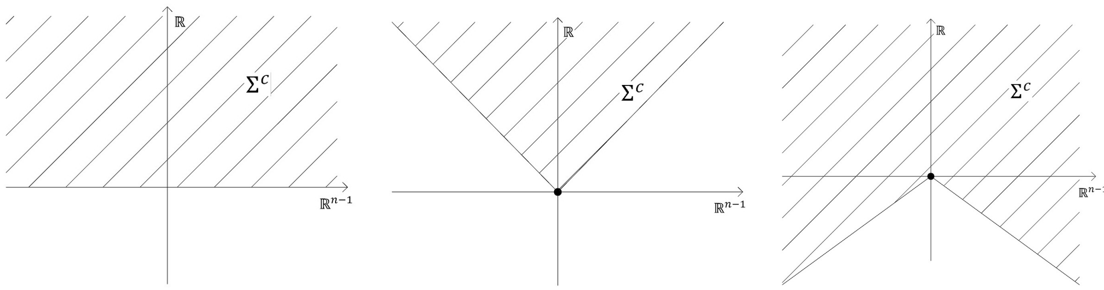


Figura 3.1: $k' = 0$, $k' < 0$ e $k' > 0$ respectivamente

Considere o caso em que Σ^c é o semi espaço, ou seja, quando $k' = 0$. Portanto, pela teoria desenvolvida até o momento, v é uma autofunção do operador de Laplace-Beltrami com autovalor $\mu = n-1$. Se Σ^c é menor que o semi espaço ($k' < 0$), então o autovalor deve ser maior e teremos $\alpha > 1$. Consequentemente se Σ^c for maior que o semi espaço ($k' > 0$), então $\alpha < 1$. Portanto para $k' > k$ teremos $\alpha < 1$.

Podemos normalizar v de forma que

$$1 \leq v \leq C_0, \quad \text{em} \;\; S^{n-1} \cap \Sigma^c,$$

para alguma constante $C_0 > 0$. Uma propriedade de funções homogêneas é que se conhecermos o valor da função num ponto $\tilde{x}$, teremos então os valores da função em toda a semi reta partindo da origem e atravessando o ponto $\tilde{x}$. Se $x \in \Omega$ então $x = tz$ para algum $t \geq 0$ e $z \in S^{n-1}$. Note que $z \in S^{n-1} \cap \Sigma^c$ e sabemos os valores de v neste conjunto. Logo,

$$|x|^\alpha = |t|^\alpha \leq |t|^\alpha v(z) = v(tz) = v(x) \leq C_0|t|^\alpha = C_0|x|^\alpha.$$

Portanto

$$|x|^\alpha \leq v(x) \leq C_0|x|^\alpha,$$

como queríamos demonstrar. ■

Ainda sobre funções homogêneas, podemos fazer a seguinte observação:

Observação 3.1 *Como v é uma função homogênea, temos que $x \cdot Dv(x) = \alpha v(x)$. De fato, $v(tx) = t^\alpha v(x)$ então derivando com relação a t obtemos*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial(tx_i)} x_i = \alpha t^{\alpha-1} v(x).$$

Tomando $t = 1$,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial(x_i)} x_i = \alpha v(x). \tag{3.5}$$

Lema 3.2 *Seja $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma função satisfazendo (3.1) e (3.2). Então existem constantes positivas R, C e α, com $\alpha < 1$, tais que*

$$u(x) \leq C|x - x_0|^\alpha, \quad \text{se} \quad x_0 \in \Gamma \text{ e } |x - x_0| \leq R. \tag{3.6}$$

Demonstração: Seja v como no lema anterior e defina a função

$$z = 2R^{-\alpha} v - v^2,$$

no conjunto $G := \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < R\}$.

Afirmação 3.2 *Para $R > 0$ suficientemente pequeno, obtemos*

$$\Delta z + f(z) \leq 0, \quad \text{em} \quad G, \tag{3.7}$$

e

$$z \geq 1, \quad \text{em} \quad \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = R\}. \tag{3.8}$$

De fato, para analisar (3.7), observe primeiramente que

$$\begin{aligned}\Delta z &= \Delta(2R^{-\alpha}v - v^2)\\ &= \Delta(2R^{-\alpha}v) - \Delta v^2\\ &= 2R^{-\alpha}\Delta v - (2v\Delta v + 2DvDv)\\ &= -2|Dv|^2,\end{aligned}$$

em G. Note ainda que por (3.4),

$$z = 2R^{-\alpha}v - v^2 \leq 2R^{-\alpha}v \leq 2R^{-\alpha}C_0|x|^\alpha.$$

A observação 3.1 implica $|Dv(x)| \geq \alpha|x|^{-1}v(x)$. Desta forma,

$$\begin{aligned}\Delta z + f(z) &= -2|Dv|^2 + f(z)\\ &\leq -2\alpha^2|x|^{-2}v^2 + f(z)\\ &\leq -2\alpha^2|x|^{2\alpha-2} + f(0) + f(z) - f(0)\\ &\leq -2\alpha^2|x|^{2\alpha-2} + f(0) + Kz\\ &\leq |x|^{2\alpha-2}(-2\alpha^2 + f(0)R^{2-2\alpha} + K2C_0R^{2-2\alpha})\\ &\leq 0,\end{aligned}$$

quando R é pequeno o suficiente tal que

$$(f(0) + K2C_0)R^{2-2\alpha} \leq -2\alpha^2. \tag{3.9}$$

Para analisar (3.8), usando (3.4) em $\Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = R\}$,

$$z = 2|x|^{-\alpha}v - v^2 \geq 2 - v^2 \geq 2 - C_0^2R^{2\alpha} \geq 1,$$

quando R é pequeno o suficiente tal que

$$C_0^2R^{2\alpha} \leq 1. \tag{3.10}$$

Então fixe $\tilde{R}$ satisfazendo (3.9) e (3.10).

Para concluirmos a demonstração, defina a função $w = u - z$. Vamos mostrar que w satisfaz as hipóteses do princípio do máximo 0.6. Observe que por (3.7),

$$\begin{aligned}-\Delta z \geq f(z) &\Rightarrow \Delta u - \Delta z \geq -f(u) + f(z)\\ &\Rightarrow \Delta w + f(u) - f(z) \geq 0\\ &\Rightarrow \Delta w + \frac{f(u) - f(z)}{u - z}w \geq 0\\ &\Rightarrow \Delta w + c(x)w \geq 0,\end{aligned}$$

em G, onde

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{f(u) - f(z)}{u - z}, & \text{se} \quad u - z \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note ainda que, uma vez que f é uma função Lipschitziana, temos que c é uma função limitada. De fato,

$$|c(x)| = \frac{|f(u) - f(z)|}{|u - z|} \leq \frac{K|u - z|}{|u - z|} = K.$$

Além disso, como $u \leq 1$ em Ω, concluímos que

$$w \leq 0, \qquad \text{em} \quad \partial G.$$

Finalmente, para $R \leq \tilde{R}$ suficientemente pequeno, o conjunto G possui medida pequena e, pelo princípio do máximo 0.6, concluímos que $w \leq 0$ em G, ou seja,

$$u \leq z \leq 2R^{-\alpha} v \leq 2C_0 R^{-\alpha} |x|^{\alpha},$$

em G, que é equivalente a (3.6) no caso $x_0 = 0$. No caso geral, considere o vértice do cone no ponto $(x', \varphi(x'))$ e repita o processo. ■

Lema 3.3 *Seja $y \in \Omega$ tal que $B = B(y, \rho) \subset \Omega$, para algum $\rho > 0$. Para $x \in \Omega$ tal que $|x - y| \leq \rho/2$, temos*

$$|u(x) - u(y)| \leq \widehat{C} \sup_B u. \left(\frac{|x - y|}{\rho} \right)^{\gamma} + \widehat{C} \rho^{2-\gamma} |x - y|^{\gamma}, \tag{3.11}$$

para $0 < \gamma \leq 1$, onde $\widehat{C}$ é uma constante dependendo apenas da dimensão n.

Demonstração: Por hipótese, temos que

$$\frac{|x - y|}{\rho} \leq \frac{1}{2}.$$

Além disso, a equação (3.11) pode ser escrita da forma

$$\widehat{C} \sup_B u. \left(\frac{|x - y|}{\rho} \right)^{\gamma} + \widehat{C} \rho^2 \left(\frac{|x - y|}{\rho} \right)^{\gamma}. \tag{3.12}$$

Desde que a aplicação $\gamma \to a^{\gamma}$ é decrescente quando $0 < a < 1$, a equação (3.12) é decrescente com relação à γ. Portanto, basta provar o caso em que $\gamma = 1$. Utilizando o teorema 0.11 no conjunto $\Omega = B$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{dist}(B(y,\rho/2),\partial B) \sup_{B(y,\rho/2)} |Du| &= \sup_{B(y,\rho/2)} \mathrm{dist}(B(y,\rho/2),\partial B)|Du| \\
&\le \sup_{B(y,\rho/2)} \mathrm{dist}(x,\partial B)|Du| \\
&\le \sup_B \mathrm{dist}(x,\partial B)|Du| \\
&\le \tilde{C}\left(\sup_B |u| + \sup_B \mathrm{dist}^2(x,\partial B)|f(x)|\right) \\
&\le \tilde{C}\left(\sup_B |u| + \sup_B \mathrm{dist}^2(x,\partial B) \sup_B |f(x)|\right) \\
&= \tilde{C}\left(\sup_B |u| + 4\rho^2 \sup_B |f(x)|\right).
\end{aligned}$$

Desde que f é limitada em B, obtemos pelo teorema do valor médio,

$$|u(x) - u(y)| \le \widehat{C} \sup_B u \left(\frac{|x-y|}{\rho}\right) + \widehat{C}\rho^2|x-y|,$$

para todo $x \in B(y,\rho/2)$, como queríamos demonstrar. ■

Teorema 3.3 *A função u é uniformemente Hölder contínua em Ω, ou seja, existem constantes positivas α e M, tais que*

$$|u(x) - u(y)| \le M|x-y|^\alpha,$$

para quaisquer $x, y \in \Omega$.

Demonstração: Durante esta demonstração, as constantes R, C e α são as constantes obtidas no lema anterior.

Afirmação 3.3 *Para provar a Hölder continuidade de u em Ω, basta analisar o caso em que $x, y \in \Omega$ satisfaz $|x-y| \le R/4$.*

De fato, suponha que $|x-y| \ge R/4$. Desta forma,

$$|x-y|^\alpha \ge \left(\frac{R}{4}\right)^\alpha \Rightarrow \frac{1}{|x-y|^\alpha} \le \left(\frac{4}{R}\right)^\alpha.$$

Portanto, usando a estimativa acima e o fato que $0 < u < 1$, obtemos

$$|u(x) - u(y)| = \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^\alpha}|x-y|^\alpha \le \frac{2R^\alpha}{4^\alpha}|x-y|^\alpha,$$

como afirmado.

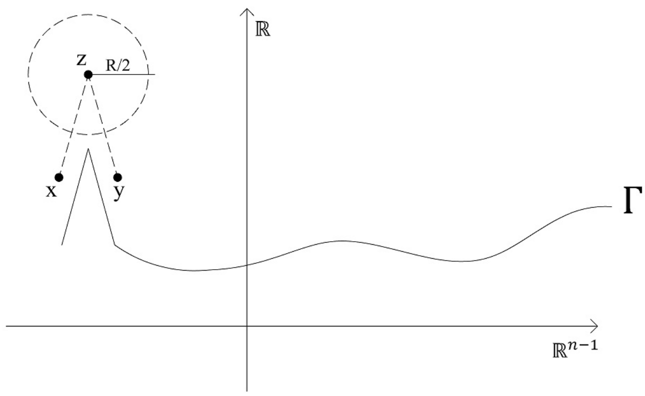
A demonstração será dividida em quatro casos, pois será preciso um certo cuidado ao utilizar o lema 3.3.

Caso 1 $\operatorname{dist}(x,\Gamma)$, $\operatorname{dist}(y,\Gamma) \leq \frac{R}{2}$.

Observe que neste primeiro caso, nem sempre podemos aplicar a estimativa (3.11) de forma imediata. Pode acontecer que $B = B(y,\rho) \not\subset \Omega$. Nesta situação podemos usar a propriedade de Lipschitz da função φ, para obter um caminho T ligando x a y, através de dois segmentos de reta ligando x a z e z a y, para algum ponto $z \in \Omega$, de forma que

$$d(T,\Gamma) \geq \frac{R}{2} \quad \text{e} \quad L(T_{xy}) \leq C'(k)|x-y|, \tag{3.13}$$

onde $L(T_{xy})$ denota o comprimento do caminho T_{xy} que liga x a y, e $C'(k)$ é uma constante positiva que depende da constante de Lipschitz de φ. Observe geometricamente:



Então considerando $\rho = R/2$ e $\gamma = 1$ na estimativa (3.11), obtemos

$$|\nabla u| \leq \frac{2\widehat{C}\sup_B u}{R} + \frac{\widehat{C}R}{2} = \tilde{C}, \tag{3.14}$$

sobre T_{xy}. Note ainda que

$$|x-y| = |x-y|^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha} \leq \left(\frac{R}{4}\right)^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha}. \tag{3.15}$$

Portanto, utilizando (3.13), (3.14) e (3.15) obtemos,

$$\begin{aligned}
|u(x)-u(y)| &\leq |u(x)-u(z)| + |u(z)-u(y)| \\
&\leq \tilde{C}|x-z| + \tilde{C}|z-y| \\
&\leq \tilde{C}L(T_{xy}) \\
&\leq \tilde{C}C'(k)|x-y| \\
&\leq \tilde{C}C'(k)\left(\frac{R}{4}\right)^{1-\alpha}|x-y|^{\alpha},
\end{aligned}$$

provando a Hölder continuidade no caso 1.

Caso 2 $\text{dist}(x, \Gamma) \leq \frac{R}{2} \leq \text{dist}(y, \Gamma)$.

Neste caso podemos aplicar a estimativa (3.11) de forma imediata, tomando $\rho = R/2$ e $\gamma = \alpha$. Assim obtemos,

$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\frac{2\widehat{C} \sup_B u}{R} + \widehat{C} \left(\frac{R}{2}\right)^{2-\alpha} \right) |x - y|^\alpha.$$

Caso 3 $\text{dist}(x, \Gamma) \leq \text{dist}(y, \Gamma) \leq \frac{R}{2}$ *e* $|x - y| \geq \frac{1}{4}\text{dist}(y, \Gamma)$.

Utilizando a estimativa (3.6), obtemos

$$|u(x) - u(y)| \leq \max\{u(x), u(y)\} \leq C\text{dist}^\alpha(y, \Gamma) \leq C4^\alpha |x - y|^\alpha.$$

Caso 4 $\text{dist}(x, \Gamma) \leq \text{dist}(y, \Gamma) \leq \frac{R}{2}$ *e* $|x - y| \leq \frac{1}{4}\text{dist}(y, \Gamma)$.

Note que neste caso, $x \in B = B(y, \text{dist}(y, \Gamma))$. Então considerando $\rho = \text{dist}(y, \Gamma)$ e $\gamma = \alpha$ temos que $B = B(y, \rho) \subset \Omega$ e $|x - y| \leq \rho/2$. Portanto, pela estimativa (3.11),

$$|u(x) - u(y)| \leq \left(\frac{\widehat{C} \sup_B u}{\text{dist}^\alpha(y, \Gamma)} + \widehat{C}\text{dist}^{2-\alpha}(y, \Gamma) \right) |x - y|^\alpha,$$

e o teorema está provado. ■

3.3 Convergência quando $\text{dist}(x, \partial\Omega) \to \infty$

Lema 3.4 *Seja u uma função positiva num domínio* $D \subset \mathbb{R}^n$*, satisfazendo,*

$$\Delta u + f(u) \leq 0, \quad \textit{em} \;\; D, \tag{3.16}$$

onde f é uma função localmente Lipschitziana. Seja B uma bola tal que $\overline{B} \subset D$ *e, suponha* $z \in C(\overline{B})$*, satisfazendo*

$$\begin{cases} z \leq u, & \textit{em } B, \\ \Delta z + f(z) \geq 0, & \textit{sempre que } z > 0 \textit{ em } B, \\ z \leq 0, & \textit{em } \partial B. \end{cases} \tag{3.17}$$

Então, em cada movimento rígido $A(t)$ *para* $0 \leq t \leq T$ *com* $A(0) = Id$ *e,* $A(t).\overline{B} \subset D$ *para todo t, temos*

$$z_t(x) := z(A(t)^{-1}x) < u(x), \quad \textit{em} \;\; B_t := A(t).B, \quad \textit{para} \;\; t \in [0, T].$$

Demonstração: Seja $x \in B_t$. Como a aplicação $A(t) : B \to B_t$ é bijetiva, então existe $y \in B$ tal que $A(t)y = x$. Observe que para todo $t \in [0, T]$, se $z_t > 0$ então

$$\begin{aligned}\Delta z_t(x) + f(z_t(x)) &= \Delta z(A(t)^{-1}x) + f((A(t)^{-1}x)) \\ &= \Delta z(A(t)^{-1}A(t)y) + f(z(A(t)^{-1}A(t)y)) \\ &= \Delta z(y) + f(z(y)) \geq 0,\end{aligned}$$

onde foi usada a hipótese (3.17). Além disso, se $x \in \partial B_t$ então existe $\hat{y} \in \partial B$ tal que $A(t)\hat{y} = x$. Logo,

$$z_t(x) = z(A(t)^{-1}x) = z(A(t)^{-1}A(t)\hat{y}) = z(\hat{y}) \leq 0,$$

onde foi usada novamente a hipótese (3.17). Portanto, para todo $t \in [0, T]$, z_t satisfaz

$$\begin{cases} \Delta z_t + f(z_t) \geq 0, & \text{sempre que } z_t > 0 \text{ em } B_t, \\ z_t \leq 0, & \text{em } \partial B_t. \end{cases} \tag{3.18}$$

Considere $w_t = z_t - u$ e a função

$$c_t(x) = \begin{cases} \dfrac{f(z_t(x)) - f(u(x))}{z_t(x) - u(x)}, & \text{se } z_t(x) - u(x) \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Definamos os seguintes conjuntos:

$$A_t^+ = \{x \in B_t; w_t > 0\},$$

$$A_t^- = \{x \in B_t; w_t < 0\},$$

$$A_t^0 = \{x \in B_t; w_t = 0\}.$$

Note que o conjunto A_t^0 é fechado. Suponhamos que $z_t > 0$ em B_t. Se $A_t^0 = \emptyset$ então

$$\begin{aligned}\Delta w_t + c_t(x)w_t &= \Delta z_t - \Delta u + c_t(x)(z_t - u) \\ &= \Delta z_t - \Delta u + \frac{f(z_t) - f(u)}{z_t - u}(z_t - u) \\ &= \Delta z_t + f(z_t) - (\Delta u + f(u)) \geq 0,\end{aligned}$$

onde foi usado (3.16) e (3.17). Se $A_t^0 \neq \emptyset$ é aberto, então como $A_t^0 \subset D$ e D é conexo, concluímos que $A_t^0 = D$, o que é uma contradição, já que $z_t \leq 0$ e $u > 0$ em ∂B_t. Finalmente, se $A_t^0 \neq \emptyset$ é apenas fechado, então A_t^+ ou A_t^- é não vazio. Suponhamos $A_t^+ \neq \emptyset$. Assim, dado $x \in A_t^0$, existe uma sequência $(x_n)_n \subset A_t^+$ tal que $x_n \to x$. Observe que para todo $n \in \mathbb{N}$, temos

$$\Delta w_t(x_n) + c_t(x_n)w_t(x_n) \geq 0,$$

e portanto, no limite

$$\Delta w_t(x) + c_t(x) w_t(x) \geq 0.$$

Finalmente, como u é positiva e, $z_t \leq 0$ em ∂B_t, concluímos que $w_t < 0$ em ∂B_t. Portanto,

$$\begin{cases} \Delta w_t + c_t(x) w_t \geq 0, & \text{sempre que } z_t > 0 \text{ em } B_t, \\ w_t < 0, & \text{em } \partial B_t. \end{cases} \tag{3.19}$$

Provemos o resultado para o caso $t = 0$. Para todo $x \in B_0$, segue que

$$w_0(x) = z_0(x) - u(x) = z(x) - u(x) \leq u(x) - u(x) = 0,$$

onde usamos que $A(0) = Id$ e a hipótese (3.17). Pelo Princípio do Máximo $A.1$, concluímos que

$$w_0 = z - u < 0 \quad \text{em} \quad B,$$

e segue o resultado.

A prova geral é feita por contradição. Considere o conjunto

$$\Phi = \{t \in [0, T]; w_t < 0 \text{ em } B_t\}.$$

Observe que $\Phi \neq \emptyset$, já que $0 \in \Phi$.

Afirmação 3.4 Φ *é um conjunto aberto.*

Como já analisamos anteriormente,

$$\begin{cases} w_0(x) < 0, & em \quad B_0 = B, \\ w_0(x) < 0, & em \quad \partial B_0 = \partial B, \end{cases}$$

implicando $w_0 < 0$ em $\overline{B}$. Logo, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $w_0(x) \leq -\varepsilon_0$, em $\overline{B}$. Como a transformação $A(t) : B \to B_t$ é um movimento rígido, a aplicação é invertível e o determinante da matriz que a representa não tende a zero. Além disso, como os coeficientes da matriz são contínuos, a inversa do movimento rígido será contínua. Como a composição de funções contínuas é uma função contínua, para $\varepsilon_0 > 0$ dado anteriormente, existe $\delta > 0$ tal que

$$|z(A(t)^{-1}x) - z(A(0)^{-1}x)| < \varepsilon_0/2,$$

para todo $x \in \overline{B}$, sempre que $0 < t < \delta$. Desta maneira, para $x \in B_t$ temos que

$$\begin{aligned} w_t(x) &= z_t(x) - u(x) \\ &= z(A(t)^{-1}x) - u(x) \\ &= z(x) - u(x) + z(A(t)^{-1}x) - z(x) \\ &= w_0(x) + z(A(t)^{-1}x) - z(A_0(x)) \\ &< -\varepsilon_0 + \varepsilon_0/2 \\ &< 0. \end{aligned}$$

Portanto o conjunto Φ é aberto.

Considere o conjunto

$$T_1 = \sup\{t \in [0, T]; w_t < 0 \text{ em } B_t\}.$$

Note que $T_1 \leq T$. Se $T_1 = T$, temos o resultado. Suponha então que $T_1 < T$. Observe primeiramente que $T_1 \notin \Phi$, pois caso contrário, como Φ é um conjunto aberto teríamos que $T_1 + \varepsilon \in \Phi$, para ε suficientemente pequeno, contrariando o fato de que T_1 é o supremo. Além disso, $w_{T_1}(x) \leq 0$ em $\overline{B}_t$. Como $T_1 \notin \Phi$, existe $x_0 \in B_t$ tal que $w_{T_1}(x_0) = 0$. Portanto, pelo Princípio do máximo $A.1$ $w_{T_1} \equiv 0$ em G, onde G é uma componente conexa contendo x_0, do conjunto dos pontos em B_{T_1} tal que $z_{T_1} > 0$.

Afirmação 3.5 *A componente conexa G é fechada.*

De fato, para cada $\hat{x} \in \partial G$ existe uma sequência $(x_n)_n \subset G$ tal que $x_n \to \hat{x}$. Como w_{T_1} é contínua em $\overline{B}_{T_1}$ e $w_{T_1}(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, concluímos que $w_{T_1}(\hat{x}) = 0$. Por (3.19) temos que $\hat{x} \in B_{T_1}$ e, consequentemente, $z_{T_1}(\hat{x}) > 0$. Observe que o conjunto

$$U_{T_1} = \{x \in B_{T_1} | z_{T_1}(x) > 0\} \subset B_{T_1},$$

é aberto. Logo, para $x \in B_{T_1}$ suficientemente próximo de $\hat{x} \in B_{T_1}$, tem-se $z_{T_1}(x) > 0$. Portanto $\hat{x} \in G$, implicando que o conjunto G é fechado.

Como o conjunto G é não vazio, aberto e fechado no conexo D, temos que $G = D$, o que é uma contradição, pois $w_{T_1} < 0$ em ∂B_{T_1}. A contradição ocorreu por supormos que $T_1 < T$. Segue o resultado. ■

Uma forma mais geral deste lema pode ser encontrado em 8, onde é provado que o lema permanece verdadeiro ao substituir a hipótese $A(t)\overline{B} \subset D$ por $A(t)B \subset D$, ou seja, é permitido que após o movimento $A(t)B$ tangecie a fronteira ∂D.

Lema 3.5 *Seja* $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* (3.1), (3.2) *com a função* f *satisfazendo as condições* 1 *e* 2. *Então existem constantes* $\varepsilon_1, R_0 > 0$, *com* $R_0 = R_0(n, \delta_0)$, *tais que*

$$u(x) > \varepsilon_1, \quad \textit{se} \quad d(x, \Gamma = \partial\Omega) > R_0.$$

Demonstração: Seja B_{R_0} a bola com raio R_0 suficientemente grande, tal que o autovalor principal $\lambda_1 = \lambda_1(B_{R_0})$ de $-\Delta$ em B_{R_0}, sobre as condições de fronteira homogênea, satisfaça

$$\lambda_1 = \lambda_1(B_{R_0}) < \delta_0.$$

Seja φ_1 a autofunção associada, ou seja,

$$\begin{cases} \varphi_1 > 0, \quad (\Delta + \lambda_1)\varphi_1 = 0, & \text{em } B_{R_0}, \\ \varphi_1 = 0, & \text{em } \partial B_{R_0}. \end{cases} \tag{3.20}$$

Como estamos em um conjunto limitado, podemos normalizar a autofunção, de forma que $\max \varphi_1 = 1$. Considere a função $z = \varepsilon\varphi_1$.

Afirmação 3.6 $\Delta z + f(z) \leq 0$, *em* B_{R_0}.

De fato,

$$\begin{aligned} \Delta z + f(z) &= \Delta(\varepsilon\varphi_1) + f(\varepsilon\varphi_1) \\ &= \varepsilon\Delta\varphi_1 + f(\varepsilon\varphi_1) \\ &= -\varepsilon\lambda_1\varphi_1 + f(\varepsilon\varphi_1), \end{aligned}$$

onde na última igualdade, foi usado (3.20). A condição (2) nos diz que $f(\varepsilon\varphi_1) \geq \delta_0\varepsilon\varphi_1$. Portanto

$$\begin{aligned} \Delta z + f(z) &= -\varepsilon\lambda_1\varphi_1 + f(\varepsilon\varphi_1) \\ &\geq -\varepsilon\lambda_1\varphi_1 + \delta_0\varepsilon\varphi_1 \\ &\geq -\varepsilon\delta_0\varphi_1 + \delta_0\varepsilon\varphi_1 = 0, \end{aligned}$$

onde usamos que $\lambda_1 = \lambda_1(B_{R_0}) < \delta_0$. Segue a Afirmação 1.

Note que $z = 0$ em ∂B_{R_0}, já que $\varphi_1 = 0$ em ∂B_{R_0}. Provamos então que

$$\begin{cases} \Delta z + f(z) \geq 0, & \text{em } B_{R_0}, \\ z = 0, & \text{em } \partial B_{R_0}. \end{cases}$$

Seja $a = (0, a_n)$ com a_n suficientemente grande tal que $\overline{B_{R_0}(a)} \subset \Omega$. Para $B = \overline{B_{R_0}(a)}$, considere

$$\varepsilon_0 = \min_{\overline{B}} u,$$

que é claramente positivo, já que u é positiva em Ω, e

$$\varepsilon_1 = \min(\varepsilon_0, s_0).$$

Como $\max \varphi_1 = 1$ em B, note que

$$\varepsilon_1 \varphi_1(x - a) \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_0 = \min_{\overline{B}} u \leq u(x).$$

Pelo Lema anterior, para todo $y \in \Omega$ tal que $d(y, \Gamma) > R_0$ (implicando que $B_{R_0}(y) \subset \Omega$), temos em $B_{R_0}(y)$ que

$$\varepsilon_1 \varphi_1(x - y) < u(x).$$

Em particular, $u(y) > \varepsilon_1$. ■

Definição 3.1 *Considere* $v \in C^2(B(0,1)) \cap C(\overline{B(0,1)})$ *uma solução do problema*

$$\begin{cases} \Delta v = -1, & em \quad B(0,1) \\ \quad v = 0, & em \quad \partial B(0,1). \end{cases}$$

Definamos a constante C_1 *como sendo*

$$C_1 = \max_{B(0,1)} v = v(0).$$

Lema 3.6 *Considere as hipóteses do lema anterior e seja* $y \in \Omega$ *tal que* $d(y, \Gamma) > R_0$. *Defina*

$$\delta = \delta(y) = \min\{f(s); s \in [\varepsilon_1, u(y)]\}.$$

Então, para a constante C_1 *definida anteriormente, obtemos*

$$C_1 \delta \leq [d(y, \Gamma) - R_0]^{-2}. \tag{3.21}$$

Demonstração: A prova será feita por contradição. Suponhamos que a tese não ocorra, ou seja,

$$C_1 \delta > [d(y, \Gamma) - R_0]^{-2}.$$

Por hipótese, temos que $d(y, \Gamma) - R_0 > 0$. Como para $t > 0$ a função $1/t^2$ é contínua, se

$$R \longrightarrow d(y, \Gamma) - R_0,$$

então

$$R^{-2} \longrightarrow [d(y, \Gamma) - R_0]^{-2} < C_1 \delta.$$

Logo podemos considerar $R > 0$ tal que $R < d(y, \Gamma) - R_0$ e $R^{-2} < C_1 \delta$.

Sendo $\Delta u(y) < 0$, $u(y)$ não pode ser um mínimo local. Deste modo, para todo $\varepsilon > 0$, existe pelo menos um $y_1 \in B(y, \varepsilon)$, tal que $u(y_1) < u(y)$. Podemos então considerar $\varepsilon > 0$ pequeno o suficiente tal que, para tal $y_1 \in B(y, \varepsilon)$ com $u(y_1) < u(y)$, tenhamos

$$d(y_1, \Gamma) > R_0 + R.$$

Pelo lema anterior, $u(x) > \varepsilon_1$ em $B(y_1, R)$. Seja z uma solução do problema

$$\begin{cases} \Delta z = -\delta, & \text{em} \quad B(y_1, R), \\ z = 0, & \text{em} \quad \partial B(y_1, R). \end{cases}$$

Como $\dfrac{x - y_1}{R} \in B(0, 1)$, considere o scaling

$$z(x) = R^2 \delta v \left(\frac{x - y_1}{R} \right).$$

Observe que

$$\Delta z(x) = R^2 \delta \Delta v \left(\frac{x - y_1}{R} \right) \frac{1}{R^2} = -\delta,$$

em $B(y_1, R)$. Logo,

$$\max z(x) = z(y_1) = R^2 \delta v(0) = R^2 \delta C_1.$$

Considere $\tau > 0$ pequeno o suficiente tal que $\tau z(x) < u(x)$, para $x \in \overline{B(y_1, R)}$. Aumentando τ gradativamente, encontramos um primeiro valor τ_0, tal que o gráfico de $\tau_0 z$ encontra u, ou seja, existe um ponto $x_0 \in \overline{B(y_1, R)}$ tal que $\tau_0 z(x_0) = u(x_0)$. Desde que $\tau_0 > 0$ e $u(x_0) > 0$, concluímos que $z(x_0) > 0$ e, portanto, $x_0 \in B(y_1, R)$, já que $z(x) = 0$ para todo $x \in \partial B(y_1, R)$. Logo

$$u(x_0) = \tau_0 z(x_0) \leq \tau_0 z(y_1) = \tau_0 R^2 \delta C_1 \leq u(y_1) < u(y) < 1. \tag{3.22}$$

Desta maneira

$$\tau_0 < \frac{R^{-2}}{C_1 \delta} < 1.$$

Definamos $w(x) = \tau_0 z(x) - u(x)$. Logo para $x \in B(y_1, R)$, temos

$$w(x) = \tau_0 z(x) - u(x) \leq 0,$$

além disso,

$$w(x_0) = \tau_0 z(x_0) - u(x_0) = 0.$$

Por (3.22), $u(x_0) < u(y)$. Pela continuidade de u, existe $\epsilon > 0$, tal que se $x \in B(x_0, \epsilon)$ então $u(x) < u(y)$. Pela definição de δ,

$$\Delta u(x) \leq -\delta, \quad \text{para} \quad x \in B(x_0, \epsilon).$$

Além disso, desde que $\tau_0<1$, para $x\in B(x_0,\epsilon)$

$$\begin{aligned}\Delta w(x) &= \tau_0\Delta z(x)-\Delta u(x)\\ &= -\tau_0\delta-\Delta u(x)\\ &\geq -\tau_0\delta+\delta\\ &= \delta(1-\tau_0)>0.\end{aligned}$$

Isto contradiz o fato de que $w(x_0)$ é um máximo local. ∎

Finalmente, após todos estes resultados, o principal resultado desta seção segue de imediato.

Teorema 3.4 *Seja* $u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ *satisfazendo* (3.1), (3.2) *com a função* f *satisfazendo as condições* 1 *e* 2. *Se* $\mathrm{dist}(x,\Gamma)\to\infty$ *então*

$$u(x)\to 1, \qquad em\ \ \Omega.$$

Demonstração: Como $d(x,\Gamma)\to\infty$, segue de (3.21) que

$$\min_{s\in[\varepsilon_1,u(x)]} f(s)\to 0,$$

implicando que $u(x)\to 1$ em Ω. ∎

Lema 3.7 *Para cada* $A>0$, *existe* $\varepsilon>0$, *tal que se*

$$x\in\Omega_A:=\{(x',x_n)\in\Omega;\varphi(x')<x_n<\varphi(x')+A\},$$

então $u(x)<1-\varepsilon$.

Demonstração: A demonstração será por contradição. Suponha que a afirmação seja falsa, ou seja, existe $A>0$ e uma sequência $(x^j)_j\subset\Omega_A$, tal que $u(x^j)\to 1$. Note que a sequência $(x^j)_j$ não pode ser limitada. De fato, se $(x^j)_j$ é uma sequência limitada então a mesma admite uma subsequência convergente, a qual denotaremos ainda por $(x^j)_j$. Se $x^j\to\hat{x}$ com $\hat{x}\in\partial\Omega$, então pela continuidade de u, temos que $u(x^j)\to u(\hat{x})=0$ contradizendo a hipótese inicial. Se $x^j\to\hat{x}$ com $\hat{x}\in\Omega$, novamente pela continuidade de u teríamos $u(x^j)\to u(\hat{x})=1$ contradizendo o teorema 3.2.

Para cada $j\in\mathbb{N}$, defina a translação que move o ponto x^j à origem, $T^j:\Omega\to\Omega^j$ dada por $T^j(x)=x-x^j$. Para cada j fixado e $x\in\Omega$, considere

$$z=x-x^j=(x'-x'^j,x_n-x_n^j)=(z',z_n).$$

Desta maneira,

$$x_n > \varphi(x') \Rightarrow z_n + x_n^j > \varphi(z' + x'^j).$$

Logo, para cada $j \in \mathbb{N}$, a translação move o conjunto Ω para o conjunto

$$\Omega^j = \{z = (z', z_n) \in \mathbb{R}^n; z_n > \varphi^j(z') = \varphi(z' + x'^j) - x_n^j\}.$$

Note que, para cada $j \in \mathbb{N}$, a função φ^j é Lipschitziana com mesma constante de Lipschitz de φ. De fato, para cada $z, w \in \Omega^j$ temos

$$\begin{aligned}
|\varphi^j(z') - \varphi^j(w')| &= |\varphi(z' + x'^j) - x_n^j - \varphi(w' + x'^j) + x_n^j| \\
&= |\varphi(z' + x'^j) - \varphi(w' + x'^j)| \\
&\leq k|z' + x'^j - w' - x'^j| \\
&= k|z' - w'|.
\end{aligned}$$

Além disso, a sequência $(\varphi^j)_j$ é uniformemente limitada em compactos. Então, pelo teorema de Arzelà-Ascoli, para alguma subsequência a qual denotaremos ainda por $(\varphi^j)_j$, temos a convergência uniforme em compactos $\varphi^j \to \hat{\varphi}$, onde $\hat{\varphi}$ é uma função Lipschitziana com mesma constante de Lipschitz k. Observe que em cada conjunto Ω^j, podemos definir a solução deslocada

$$u^j(z', z_n) = u(z' + x'^j, z_n + x_n^j),$$

que claramente satisfaz

$$\begin{cases} \Delta u^j + f(u^j) = 0, & \text{em} \quad \Omega^j, \\ u^j = 0, & \text{em} \quad \partial\Omega^j, \\ 0 < u^j < 1, & \text{em} \quad \Omega^j. \end{cases}$$

Considere o conjunto

$$\widehat{\Omega} = \{z = (z', z_n) \in \mathbb{R}^n; z_n > \widehat{\varphi}(z')\}.$$

Afirmação 3.7 *Para cada $C > 1$, a solução u é Lipschitziana no conjunto*

$$\Omega_C = \{x \in \Omega; C^{-1} \leq \mathrm{dist}(x, \Gamma) \leq C\}.$$

De fato, fixe $C > 1$ e defina $g = f \circ u$. Note que u e g são funções limitadas em Ω_C. De fato, u é limitada por 1 e,

$$|g(x)| = |f(u(x))| \leq |f(u(x)) - f(u(x_0))| + |f(u(x_0))|,$$

para $x_0 \in \Omega$ fixado. Usando o fato de que f é uma função Lipschitziana, obtemos

$$|g(x)| \leq K|u(x) - u(x_0)| + |g(x_0)| \leq 2K + |g(x_0)|, \quad \text{para todo } \ x \in \Omega_C,$$

provando a limitação uniforme. Dado $x \in \Omega_C$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x,\delta) \subset \Omega$ (basta considerar uma constante $\delta < C^{-1}$). Observe que, pontualmente em $B(x, \delta/2)$,

$$\operatorname{dist}(B(x,\delta/2), \partial B(x,\delta)) \leq \operatorname{dist}(x, \partial B(x,\delta)).$$

Utilizando a propriedade do escalar no supremo e a desigualdade acima, obtemos

$$\begin{aligned} \operatorname{dist}(B(x,\delta/2), \partial B(x,\delta)) \sup_{B(x,\delta/2)} |Du| &= \sup_{B(x,\delta/2)} \operatorname{dist}(B(x,\delta/2), \partial B(x,\delta))|Du| \\ &\leq \sup_{B(x,\delta/2)} \operatorname{dist}(x, \partial B(x,\delta))|Du|. \end{aligned}$$

Pelo teorema 0.11,

$$\operatorname{dist}(B(x,\delta/2), \partial B(x,\delta)) \sup_{B(x,\delta/2)} |Du| \leq \tilde{C} \left(\sup_{B(x,\delta)} |u| + \sup_{B(x,\delta)} \operatorname{dist}^2(x, \partial B(x,\delta))|g(x)| \right),$$

então,

$$|Du(x)| \leq \sup_{B(x,\delta/2)} |Du| \leq \widehat{C}, \quad \text{para todo } \ x \in B(x,\delta/2).$$

Desde que u e g são funções limitadas em Ω_C, concluímos que a derivada Du é limitada em Ω_C e, pelo teorema do valor médio, u é uma função Lipschitziana em Ω_C.

Para cada compacto $K \subset \widehat{\Omega}$, as restrições de u^j ao compacto K são na verdade a restrição de u a um subconjunto Ω_C. Logo a sequência $(u^j)_j$ é formada por funções Lipschitzianas, que possuem a mesma constante de Lipschitz e, portanto, a sequência $(u^j)_j$ é equicontínua em conjuntos compactos. Então pelo Teorema de Arzelà-Ascoli, à menos de subsequência, $u^j \to \hat{u}$ uniformemente em conjuntos compactos $\widehat{\Omega}$. Além disso, pelo teorema 0.12 temos a estimativa

$$\|u^j\|'_{C^{2,\alpha}(B_1)} \leq C \left(\|u^j\|_{C(B_2)} + R^2 \|g^j\|'_{C^{0,\alpha}(B_2)} \right),$$

onde $g^j = f \circ u^j$. Desde que o lado direito da equação acima é uniformemente limitado, obtemos a Hölder continuidade de todas as derivadas de segunda ordem das funções u^j, ou seja, a sequência de funções $(\Delta u^j)_j$ é equicontínua.[3] Como $-\Delta u^j = g^j$ e $(g^j)_j$ é uma sequência uniformemente limitada, concluímos que $(\Delta u^j)_j$ é uma sequência uniformemente limitada. Logo, pelo teorema de Arzelà-Ascoli, a menos de subsequência, Δu^j converge uniformemente para uma função g.

Afirmação 3.8 $\Delta \hat{u} = g$.

[3] Uma sequência de funções uniformemente limitada em um espaço de Hölder é equicontínua.

De fato, para qualquer função teste ψ (função C^∞ com suporte compacto no conjunto K), obtemos as convergências

$$\int_K u^j \Delta\psi \to \int_K \hat{u}\Delta\psi \quad \text{e} \quad \int_K \psi\Delta u^j \to \int_K g\psi.$$

Usando integração por partes,

$$\int_K u^j \Delta\psi = \int_K \psi\Delta u^j.$$

Pela unicidade do limite,

$$\int_K \hat{u}\Delta\psi = \int_K g\psi.$$

Novamente usando a fórmula de integração por partes,

$$\int_K \psi\Delta\hat{u} = \int_K g\psi,$$

assim,

$$\int_K (\Delta\hat{u} - g)\,\psi = 0,$$

para toda função teste ψ. Portanto $\Delta\hat{u} = g$ em quase todo ponto e, por continuidade, $\Delta\hat{u} = g$. Finalmente, podemos concluir através da unicidade do limite,

$$-\Delta\hat{u} = f(\hat{u}).$$

Note que

$$\hat{u}(0) = \lim_{j\to\infty} u^j(0) = \lim_{j\to\infty} u(x'^j, x_n^j) = 1.$$

Além disso, $0 \leq \hat{u} \leq 1$ em $\hat{\Omega}$. Portanto,

$$\begin{cases} \Delta\hat{u} + f(\hat{u}) = 0, & \text{em } \hat{\Omega} \\ 0 \leq \hat{u} \leq 1, & \text{em } \hat{\Omega} \\ \hat{u}(0) = 1 \end{cases}$$

Como feito na demonstração do teorema 3.2, defina a função $w = \hat{u} - 1$. De forma análoga verifica-se que $w \leq 0$ em $\hat{\Omega}$, $w(0) = 0$ e $\Delta w + c(x)w = 0$ em $\hat{\Omega}$. Se $w \not\equiv 0$, teríamos pelo princípio do máximo $(A.1)$, que $w < 0$ em $\hat{\Omega}$, mas isso não é possível já que $w(0) = 0$. Portanto, $w \equiv 0$ em $\hat{\Omega}$. Chegamos então numa contradição, pois w é uma função contínua e $w = -1$ em $\partial\hat{\Omega}$. Segue o resultado. ■

3.4 Generalização do resultado de J. Serrin

Nesta seção, usaremos os métodos que desenvolvemos até o momento, para provar uma generalização de um resultado provado por J. Serrin (cf. [28]), onde o mesmo afirma que se Ω é um domínio limitado, suave e $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma função que satisfaz

$$\begin{cases} -\Delta u = 1, & \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha, & \text{constante em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.23}$$

então Ω é uma esfera.

No teorema que será apresentado, o conjunto Ω continuará sendo um domínio limitado por um gráfico Lipschitz $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$, da forma

$$\Omega = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; x_n > \varphi(x')\}.$$

Além disso, será exigido uma hipótese adicional sobre a função φ, de forma que para cada $\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$, seja satisfeito

$$\lim_{|x|\to\infty} (\varphi(x+\tau) - \varphi(x)) = 0, \tag{3.24}$$

uniformemente. Observe que a funções constantes satisfazem tal condição. Outros exemplos são funções com limite finito, de fato, suponha que

$$\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = C,$$

desde que para $\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$ fixado

$$|x| \to \infty \Longleftrightarrow |x+\tau| \to \infty,$$

temos que

$$\begin{aligned} \lim_{|x|\to\infty} (\varphi(x+\tau) - \varphi(x)) &= \lim_{|x|\to\infty} \varphi(x+\tau) - \lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) \\ &= \lim_{|x+\tau|\to\infty} \varphi(x+\tau) - \lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) \\ &= C - C \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como exemplo de função que não satisfaz a condição (3.23), considere $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x,y) = x^2 + y^2$. Para $\tau = (\tau_1, \tau_2) \in \mathbb{R}^2$ fixado, temos que

$$\begin{aligned} \varphi(x+\tau_1, y+\tau_2) - \varphi(x,y) &= (x+\tau_1)^2 + (x+\tau_2)^2 - (x^2+y^2) \\ &= 2x\tau_1 + 2y\tau_2 + \tau_1^2 + \tau_2^2 \longrightarrow \infty, \end{aligned}$$

quando $|(x,y)| \to \infty$.

Antes de enunciar e demonstrar o principal resultado desta seção, precisaremos de um lema auxiliar. Defina o conjunto

$$\Omega^A = \Omega \setminus \overline{\Omega}_A = \{x = (x', x_n) \in \Omega; x_n - \varphi(x') > A\}.$$

O lema irá garantir que se u e w são duas soluções limitadas de (3.1) satisfazendo $u \geq w$ em Ω_A, então a desigualdade permanece válida em Ω. Desde que a função f satisfaz a condição 3, temos que $f(s)$ é não crescente, para $s_1 \leq s \leq 1$. Além disso, já foi provado no teorema 3.4, que se $x_n - \varphi(x') \to \infty$, então $u(x), w(x) \to 1$. Desta maneira, existe $A > 0$ tal que

$$u(x), w(x) \geq s_1, \qquad \text{se } \ x_n - \varphi(x') \geq A. \tag{3.25}$$

Lema 3.8 *Suponha que para alguma constante $\tau \geq 0$, a desigualdade*

$$u_\tau(x) := u(x + \tau e_n) \geq w(x), \tag{3.26}$$

seja válida em $\overline{\Omega}_A$. Então a desigualdade (3.26) *ocorre em Ω.*

Demonstração: Para provar este resultado, usaremos o princípio do máximo 3.1. Para fixar a notação, considere $D = \Omega^A$ e o cone

$$\Sigma = \{x = (x', x_n) \in \Omega; x_n < \varphi(0) - A - k|x'|\}.$$

Observe que $\overline{D}$ e $\overline{\Sigma}$ são disjuntos. De fato, se $(x', x_n) \in \overline{D}$ então

$$\begin{aligned} x_n &\geq \varphi(x') + A \\ &= \varphi(x') - \varphi(0) + \varphi(0) + A \\ &\geq -k|x'| + \varphi(0) + A \\ &> -k|x'| + \varphi(0) - A. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $(x, x_n) \in \overline{\Sigma}$ então

$$\begin{aligned} x_n &\leq \varphi(0) - A - k|x'| \\ &\leq \varphi(0) - A + \varphi(x') - \varphi(0) \\ &< \varphi(x') + A. \end{aligned}$$

Defina a função $z := w - u_\tau$, no conjunto D. Observe que z é limitada superiormente, já que w e u_τ o são e, por (3.26), $z(x) \leq 0$ para $x \in \partial D$. Além disso, z satisfaz

$$\Delta z + c(x) z = 0,$$

onde

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{f(w(x)) - f(u_\tau(x))}{w(x) - u_\tau(x)}, & \text{se } \; w(x) - u_\tau(x) \neq 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

De fato, se $w(x) - u_\tau(x) \neq 0$, então

$$\begin{aligned} \Delta z(x) + c(x)z(x) &= \Delta w(x) - \Delta u_\tau(x) + \frac{f(w(x)) - f(u_\tau(x))}{w(x) - u_\tau(x)}(w(x) - u_\tau(x)) \\ &= \Delta w(x) + f(w(x)) - (\Delta u_\tau(x) + f(u_\tau(x))) \\ &= \Delta w(x) + f(w(x)) - (\Delta u(x + \tau e_n) + f(u(x + \tau e_n))) \\ &= 0. \end{aligned}$$

O caso $w(x) - u_\tau(x) = 0$ é imediato. Note também que, por (3.25) e pela condição 3 da função f, temos que

$$f(w) - f(u_\tau) \geq 0.$$

Então, pela hipótese (3.26),

$$c(x) = \frac{f(w(x)) - f(u_\tau(x))}{w(x) - u_\tau(x)} \leq 0, \quad \text{em } \; D.$$

Finalmente, todas as hipóteses do princípio do máximo estão satisfeitas. Portanto, $z(x) \leq 0$, para $x \in D = \Omega^A$, o que conclui a demonstração. ■

De posse destas observações, podemos enunciar e demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 3.5 *Seja $\varphi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ uma função Lipschitziana, de classe C^2*[4]*, satisfazendo a condição (3.24). Se $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é uma solução limitada do problema*

$$\begin{cases} \Delta u + f(u) = 0, & u > 0 \; \text{em } \Omega, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \alpha, & \text{constante em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde f satisfaz as condições 1, 2 e 3, então φ é constante, em outras palavras, Ω é um semi espaço[5].

Demonstração: Como dito anteriormente, na demonstração deste resultado usaremos vários resultados e argumentos que foram vistos no decorrer deste capítulo. A estratégia da demonstração é provar que para cada $\tau \in \mathbb{R}^n$, tem-se $\Omega + \tau = \Omega$, o que implica que a

[4]Esta hipótese faz com que o bordo satisfaça a condição da esfera interior, possibilitando o uso do lema de Hopf.

[5]Sendo Ω um semi espaço, com argumentos utilizados no artigo [8] obtemos a simetria e a monotonicidade de u.

função φ é periódica. Sendo τ fixado porém arbitrário, φ é periódica para todo τ, ou seja, φ uma função constante e, consequentemente, Ω é um semi espaço. Para cada $\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$ fixado e $h \geq 0$, defina o seguinte conjunto

$$\Sigma_{\tau,h} = \Omega - \tau - he_n = \{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}; (x' + \tau, x_n + h) \in \Omega\}.$$

Observe que neste novo conjunto, estamos apenas movimentando a fronteira de Ω, como pode-se observar geometricamente:

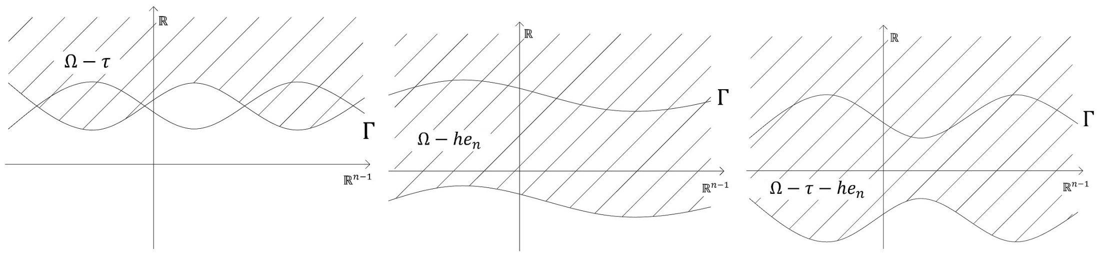


Figura 3.2: $\Sigma_{\tau,0}$, $\Sigma_{0,h}$ e $\Sigma_{\tau,h}$ respectivamente

Afirmação 3.9 *Para $h \geq 0$ suficientemente grande, tem-se $\Omega \subset \Sigma_{\tau,h}$.*

De fato, como a função φ é Lipschitziana, dado $x = (x', x_n) \in \Omega$,

$$|\varphi(x' + \tau) - \varphi(x')| \leq k|x' + \tau - x'| = k|\tau|,$$

então

$$\varphi(x' + \tau) \leq k|\tau| + \varphi(x') \leq k|\tau| + x_n,$$

pois se $x \in \Omega$ então $x_n > \varphi(x')$. Considerando $h_0 = k|\tau|$, temos que

$$x_n + h > \varphi(x' + \tau),$$

para todo $h \geq h_0$, ou seja, $x \in \Sigma_{\tau,h}$ e assim a afirmação está provada.

Observe que se for provada a inclusão $\Omega \subset \Sigma_{\tau,0} = \Omega - \tau$ para todo $\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$, teremos de imediato a inclusão inversa $\Omega - \tau \subset \Omega$. De fato, fixado $\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$ e dado $(x', x_n) \in \Omega - \tau$, por definição

$$(x' + \tau, x_n) \in \Omega,$$

então aplicando a hipótese para $-\tau \in \mathbb{R}^{n-1}$, tem-se

$$(x' + \tau, x_n) \in \Omega - (-\tau),$$

portanto, usando novamente a definição do conjunto, obtemos

$$(x' + \tau - \tau, x_n) = (x', x_n) \in \Omega,$$

como queríamos.

Para $\tau > 0$ fixado, defina

$$u_{\tau,h}(x) = u(x + \tau + he_n), \quad \text{para} \quad x \in \Omega,$$

para $\Omega \subset \Sigma_{\tau,h}$. Pelo teorema 3.1 e pelo lema 3.7, para h suficientemente grande, temos que

$$u_{\tau,h} \geq u \quad \text{em} \quad \Omega_A.$$

Logo, pelo lema 3.8,

$$u_{\tau,h} \geq u \quad \text{em} \quad \Omega.$$

Defina

$$h^* = \inf\{h \geq 0; \Omega \subset \Sigma_{\tau,h}\}.$$

Afirmação 3.10 $h^* = 0$.

Provaremos por contradição. Suponha que $h^* > 0$, então pela hipótese (3.24), existe $a \in \partial\Omega \cap \partial\Sigma_{\tau,h}$. Desta forma

$$u_{\tau,h}(a) = u(a),$$

e

$$\frac{\partial u_{\tau,h}}{\partial \nu}(a) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(a),$$

onde ν denota o vetor normal exterior no ponto a. Defina a função $w = u_{\tau,h} - u$. Então $w(a) = 0$, $w \geq 0$ em Ω, e definindo

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{f(u_{\tau,h}(x)) - f(u(x))}{u_{\tau,h}(x) - u(x)}, & \text{se} \quad w \neq 0 \\ 0, & \text{se} \quad w = 0, \end{cases}$$

obtemos que

$$\Delta w + c(x)w = 0.$$

Portanto, pelo lema de Hopf 0.1, concluímos que

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(a) < 0,$$

o que é uma contradição, já que $\partial w/\partial \nu(a) = 0$. Logo, $h^* = 0$ e, como o resultado é válido para todo τ, concluímos que Ω é um semi espaço. ■

Apêndice A

- Apêndice

Este apêndice destina-se a apresentar de forma detalhada, alguns importantes resultados que são utilizados no corpo do trabalho.

A.1 O método dos planos móveis

Esta seção do apêndice destina-se à uma primeira leitura sobre o método dos planos móveis. O método dos planos móveis é uma técnica que tem sido utilizada para estabelecer algumas propriedades qualitativas de soluções positivas de equações elípticas não-lineares, como simetria e monotonicidade. Basicamente, este método compara os valores da solução da equação em dois pontos distintos, onde um ponto é a reflexão do outro com relação a um hiperplano. O plano é movido até uma posição crítica, então mostra-se que a solução é simétrica com relaçao a este plano limite. Apresentamos agora um procedimento padrão para o método dos planos móveis.

Considere o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$ e seja u uma solução positiva de uma equação diferencial parcial. O objetivo do método é provar a monotonicidade e simetria de u em uma dada direção, suponhamos que a direção seja o eixo x_1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, defina o conjunto

$$T_\lambda = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 = \lambda\}.$$

O conjunto T_λ é um plano perpendicular ao eixo x_1. Considere ainda o conjunto

$$\Sigma_\lambda = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1 < \lambda\},$$

ou seja, a região do lado esquerdo do plano T_λ. Para cada ponto $x \in \Sigma_\lambda$, considere a reflexão deste ponto sobre o plano T_λ, dada por

$$x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, ..., x_n).$$

Geometricamente, estamos na seguinte situação:

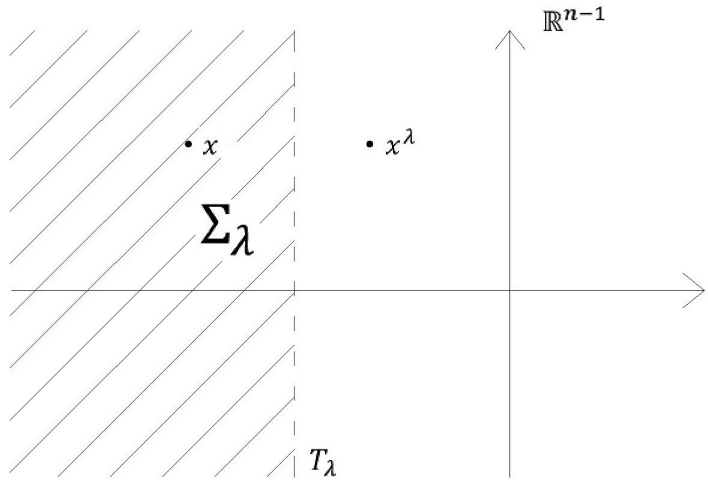


Figura A.1: Método dos Planos Móveis

Para cada $x \in \Sigma_\lambda$, definamos

$$w_\lambda(x) = u(x^\lambda) - u(x).$$

O objetivo é mostrar que para algum λ_0, temos $w_{\lambda_0} \equiv 0$ em Σ_{λ_0}. O processo geralmente é dividido em três passos:

Passo 1: O primeiro passo é mostrar que para $\lambda < 0$ com módulo suficientemente grande, verifica-se

$$w_\lambda \geq 0, \quad \text{em } \Sigma_\lambda.$$

Assim, começamos a mover o plano T_λ de uma vizinhança de $x_1 = -\infty$ ao longo da direção x_1 para a direita, de modo que ainda seja válida a desigualdade acima. Algumas vezes, o processo é iniciado provando que w_λ é supersolução ou subsolução de um operador elíptico, geralmente da forma

$$\Delta w_\lambda + c(x, \lambda) w_\lambda \leq (\geq) 0,$$

onde $c(x, \lambda)$ é uma função limitada.

Passo 2: Continuamos movendo o plano a uma posição limite. Definamos

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}; w_\lambda(x) \geq 0, \quad \text{para todo } x \in \Sigma_\lambda\}.$$

Finalmente, geralmente através de um argumento de contradição, é provado que $w_{\lambda_0} \equiv 0$ em Σ_{λ_0}, ou seja, u é simétrica com respeito ao plano T_{λ_0}.

Passo 3 A monotonicidade é obtida através do lema de Hopf. É provado que w_λ e o conjunto Σ_λ satisfazem as hipóteses do lema de hopf e, desta maneira,

$$0 > \frac{\partial w_\lambda}{\partial x_1}(x,\lambda) = -2\frac{\partial u}{\partial x_1}(x,\lambda).$$

A ferramenta fundamental no desenvolvimento destes três passos é o princípio do máximo. Mais informações e aplicações do o método dos planos móveis podem ser encontradas em [12], página 231.

A.2 Princípios do máximo

Teorema A.1 *(Princípio do máximo forte) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Seja L um operador uniformemente elíptico tal que $c = 0$. Suponha que u satisfaz $Lu \geq 0$ ($Lu \leq 0$) em Ω. Se u atinge seu máximo (mínimo) no interior de Ω, então u é constante. Se $c \leq 0$ e c/λ é limitado, então se u atinge um máximo não negativo (mínimo não positivo) no interior de Ω, então u é constante. Independente do sinal de c, se u atinge um máximo igual a zero (mínimo igual a zero) no interior de Ω, então u é constante.*

Demonstração: Denotemos $M = \sup_\Omega u$ e seja $\hat{y} \in \Omega$ tal que $u(\hat{y}) = M$. Definamos os conjuntos

$$F = \{x \in \Omega | u(x) = M\}$$

e

$$G = \{x \in \Omega | u(x) < M\}.$$

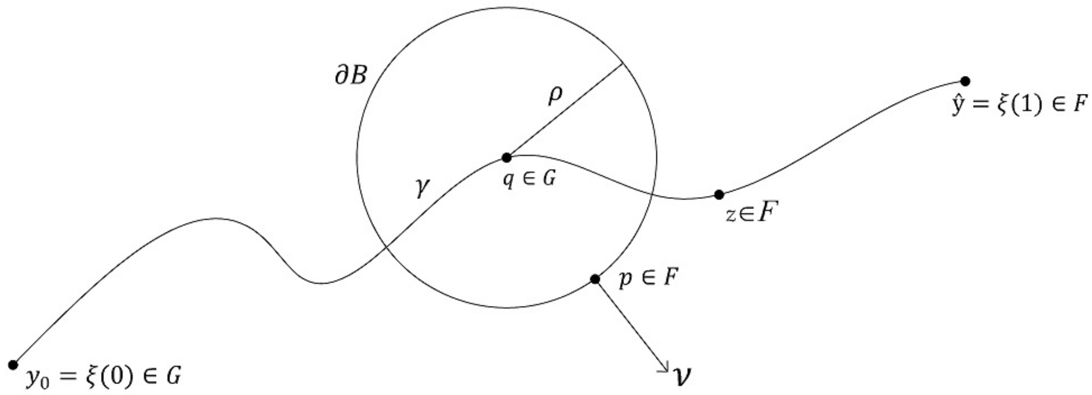
Temos que F é um conjunto não vazio, já que $\hat{y} \in F$. Além disso, como u é contínua e $F = u^{-1}(M)$, segue que F é um conjunto fechado em Ω. Logo, G é um conjunto aberto em Ω. Se G é vazio, o resultado segue. Suponha que existe $y_0 \in G$. Note que, como Ω é aberto e conexo em $\mathbb{R}^n$, temos que Ω é conexo por caminhos (cf. [21, Teorema 36]). Logo, existe um caminho contínuo

$$\gamma = \{\xi(t) | 0 \leq t \leq 1\} \subset \Omega \quad \text{com} \quad \xi(0) = y_0, \quad \xi(1) = \hat{y}.$$

Como $\xi \in C([0,1], \mathbb{R}^n)$, temos que γ é compacto. Sendo $\partial\Omega$ fechado em $\mathbb{R}^n$ e disjunto de γ, temos que $\operatorname{dist}(\gamma, \partial\Omega) > 0$. Seja z o menor elemento de γ tal que $u(z) = M$, sendo possível $z = \hat{y}$. Considere $q \in \gamma$ estritamente entre y_0 e z, tal que $|q - z| < \operatorname{dist}(\gamma, \partial\Omega)$. Agora, considere a bola $B = B(q, \rho)$, onde $\rho = \operatorname{dist}(q, F)$. Observe que

$$\rho \leq |q - z| < \operatorname{dist}(\gamma, \partial\Omega).$$

Logo, $B \subset \Omega$ e, além disso, $B \subset G$ por construção. Desta forma, como F é fechado, existe $p \in F \cap \partial B$. Observe geometricamente:



Todas as hipóteses do Lema de Hopf 0.1 são satisfeitas. Portanto, a derivada normal em p deve satisfazer

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(p) > 0,$$

contradizendo o fato de que $p \in F$ é um ponto de máximo interior. ■

Observação A.1 *Observe que a hipótese $c \leq 0$ não pode ser retirada. De fato, considere o conjunto*

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi\}.$$

Defina $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ tal que $u(x, y) = \sin x \sin y$. Assim $u \equiv 0$ em $\partial\Omega$. Note que para $c(x) = 2$ temos

$$\Delta u + c(x)u = -2 \sin x \sin y + 2 \sin x \sin y = 0, \quad \text{em} \ \ \Omega.$$

Por outro lado, $u(\pi/2, \pi/2) = 1 = \max u$ e claramente u não é constante.

Teorema A.2 *(Variação do Princípio do Máximo) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $u \in W^{2,n}_{loc} \cap C(\overline{\Omega})$ uma subsolução do operador L, ou seja, $Lu \geq 0$, considerando o coeficiente $c \leq 0$. Além disso, suponha*

$$u \leq M \quad \text{em} \ \ \partial\Omega \tag{A.1}$$

e

$$\limsup_{|x| \to +\infty} u \leq M. \tag{A.2}$$

Então $u \leq M$ em Ω.

Demonstração: Defina

$$M' = \sup\{u(x); x \in \Omega\}.$$

Seja $(y_n)_n \subset \Omega$ uma sequência tal que

$$u(y_n) \to M'.$$

Temos então duas possibilidades a considerar:

Caso (1) Suponha que a sequência $(y_n)_n$ possui uma subsquência convergindo para algum ponto $y \in \Omega$. Então, pela continuidade de u, segue que $u(y) = M'$. Deste modo, pelo princípio do máximo, Teorema 0.4, u é constante em Ω. Então existe uma sequência $(x_n)_n \subset \Omega$ satisfazendo $u(x_n) = M'$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que

$$x_n \to \partial\Omega \quad \text{ou} \quad |x_n| \to +\infty.$$

No primeiro caso a hipótese $A.1$ nos garante que $M' \leq M$ e no segundo caso a hipótese $A.2$ nos garante o resultado.

Caso (2) Se nenhuma subsequência de $(y_n)_n$ é convergente em Ω, então existe uma sequência $(x_n)_n \subset \Omega$ tal que

$$x_n \to \partial\Omega \quad \text{ou} \quad |x_n| \to +\infty.$$

No primeiro caso, a hipótese $A.1$ nos garante que $M' \leq M$ e no segundo caso, a hipótese $A.2$ nos garante o resultado. ■

O lema abaixo é usado várias vezes durante a dissertação, por exemplo no desenvolvimento do método dos planos móveis, pois nos garante a positividade da solução em um determinado conjunto.

Lema A.1 *(Lema de Hopf refinado) Sejam $\Omega \in \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ uma função não identicamente nula e $c \in L^\infty(\Omega)$. Suponhamos que*

$$\begin{cases} \Delta u + cu \leq 0, & \text{em } \Omega, \\ u \geq 0, & \text{em } \Omega. \end{cases} \tag{A.3}$$

Então:

(i) Se para algum $x_0 \in \partial\Omega$, temos que $u(x_0) = 0$ e Ω satisfaz a condição da bola interior em x_0, então

$$\nu(x_0) \cdot Du(x_0) = \frac{\partial u}{\partial \nu} < 0,$$

onde ν denota o vetor normal unitário exterior.

(ii) Além disso,

$$u > 0, \quad em \;\; \Omega.$$

Demonstração: Seja $x = (x_1, ..., x_n) \in \overline{\Omega}$. Defina a função $w(x) = e^{-\lambda x_1}u(x)$, onde $\lambda > 0$ será determinada posteriormente. Então por $(A.3)$,

$$\begin{aligned} -cu \geq \Delta u &= \Delta(e^{\lambda x_1}w) \\ &= w\Delta(e^{\lambda x_1}) + e^{\lambda x_1}\Delta w + 2D(e^{\lambda x_1})Dw \\ &= \lambda^2 u + 2\lambda e^{\lambda x_1}\frac{\partial w}{\partial x_1} + e^{\lambda x_1}\Delta w. \end{aligned}$$

Portanto, se $\lambda = ||c||_{L^\infty}^{1/2}$ então

$$-\Delta w - 2\lambda\frac{\partial w}{\partial x_1} \geq (\lambda^2 + c)w \geq 0.$$

Logo, pelo princípio do máximo forte $A.1$, concluímos que $w > 0$ em Ω. De fato, suponha que para algum $y_0 \in \Omega$ obtemos $w(y_0) = 0$. Como $e^{-\lambda x_1} > 0$, devemos ter $u(y_0) = 0$. Sabemos que $u \geq 0$ em $\overline{\Omega}$, então y_0 é um ponto de mínimo para w. Portanto, pelo princípio do máximo $A.1$, $w \equiv 0$ em Ω. Pela continuidade de w em $\overline{\Omega}$, devemos ter $w \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$, o que implica $u \equiv 0$ em $\overline{\Omega}$, o que é uma contradição, pois por hipótese u é uma função não identicamente nula. Logo, $w > 0$ em Ω.

Por hipótese, existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $w(x_0) = 0$ e $\partial\Omega$ satisfaz a condição da bola interior em x_0. Como $w > 0$ em Ω, temos que $w(x_0) < w(x)$ para todo $x \in \Omega$. Desta forma, pelo lema 0.1

$$\frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) < 0.$$

Como $u(x_0) = 0$, então

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial \nu}(x_0) &= Dw(x_0)\cdot\nu(x_0) \\ &= (-\lambda e^{-\lambda x_1}u(x_0) + e^{-\lambda x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1}(x_0), ..., e^{-\lambda x_1}\frac{\partial u}{\partial x_n}(x_0))\cdot\nu(x_0) \\ &= e^{-\lambda x_1}\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0), \end{aligned}$$

o que demonstra (i). A tese (ii) segue do fato de $w > 0$ em Ω. ∎

A.3 Coordenadas Polares e o Laplaciano

Consideremos o espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$, onde $n \geq 2$ é inteiro. Seja $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Para cada $1 \leq k \leq n$ defina $r_k^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ e, para cada $2 \leq k \leq n$, definamos

$$r_{k-1} = r_k \sin\theta_k \quad \text{e} \quad x_k = r_k\cos\theta_k. \tag{A.4}$$

As coordenadas polares do ponto $(x_1, x_2, ..., x_n)$ serão $(r_n, \theta_2, ..., \theta_n)$.

Como exemplo, calculemos as coordenadas polares em dimensão $n = 2$. A partir das fórmulas em (A.4), considere $x_1 = y$, $x_2 = x$, $r_2 = r$ e $\theta_2 = \theta$. As coordenadas polares (r, θ) são definidas por $r^2 = x^2 + y^2$,

$$y = x_1 = r_1 = r\sin\theta \quad \text{e} \quad x = x_2 = r\cos\theta.$$

Analogamente pode ser feito para $n = 3$, onde as coordenadas polares (r, θ, ϕ) são chamadas coordenadas esféricas, obtendo

$$\begin{cases} x &= r\sin\phi\sin\theta, \\ y &= r\sin\phi\cos\theta, \\ z &= r\cos\phi. \end{cases}$$

Obtém-se uma fórmula para o Laplaciano, analisando a expressão

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{n-1}^2} + \frac{\partial^2}{x_n^2}.$$

Observe que para $n = 2$ temos, de fato, o Laplaciano. Para $n > 2$, a fórmula é usada de forma recursiva, até obter o Laplaciano na dimensão desejada. Por conveniência, obteremos o Laplaciano em dimensões $2, 3$ e, por fim, exibiremos por indução uma expressão geral para o Laplaciano.

Usando (A.4), podemos calcular o Jacobiano

$$\frac{\partial(r_{n-1}, x_n)}{\partial(r_n, \phi_n)} = \begin{bmatrix} \partial r_{n-1}/\partial r_n & \partial x_n/\partial r_n \\ \partial r_{n-1}/\partial \phi_n & \partial x_n/\partial \phi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi_n & \cos\phi_n \\ r_n\cos\phi_n & -r_n\sin\phi_n \end{bmatrix}$$

O Teorema da Função Inversa, nos garante que as funções em (A.4), com $k = n$, possuem inversa numa vizinha do ponto para o qual $r_n \neq 0$, ou seja, teremos $r_n = r_n(r_{n-1}, x_n)$ e $\phi_n = \phi_n(r_{n-1}, x_n)$ em tal vizinhança. Além disso, o jacobiano

$$\frac{\partial(r_n, \phi_n)}{\partial(r_{n-1}, x_n)} = \begin{bmatrix} \partial r_n/\partial r_{n-1} & \partial \phi_n/\partial r_{n-1} \\ \partial r_n/\partial x_n & \partial \phi_n/\partial x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\phi_n & r_n^{-1}\cos\phi_n \\ \cos\phi_n & -r_n^{-1}\sin\phi_n, \end{bmatrix} \tag{A.5}$$

é a inversa de $\partial(r_{n-1}, x_n)/\partial(r_n, \phi_n)$. Utilizando os valores de (A.5), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial r_{n-1}} = \frac{\partial r_n}{\partial r_{n-1}}\frac{\partial}{\partial r_n} + \frac{\partial \phi_n}{\partial r_{n-1}}\frac{\partial}{\partial \phi_n} = \sin\phi_n\frac{\partial}{\partial r_n} + \frac{\cos\phi_n}{r_n}\frac{\partial}{\partial \phi_n} \tag{A.6}$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_n} = \frac{\partial r_n}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial r_n} + \frac{\partial \phi_n}{\partial x_n}\frac{\partial}{\partial \phi_n} = \cos\phi_n\frac{\partial}{\partial r_n} - \frac{\sin\phi_n}{r_n}\frac{\partial}{\partial \phi_n}. \tag{A.7}$$

Deste modo

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial r_{n-1}^2} &= \sin^2\phi_n \frac{\partial^2}{\partial r_n^2} + \frac{2\sin\phi_n\cos\phi_n}{r_n}\frac{\partial}{r_n}\frac{\partial}{\phi_n} + \frac{\cos^2\phi_n}{r_n^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi_n^2} \\ &- \frac{\cos\phi_n}{r_n^2}\frac{\partial}{\partial\phi_n} + \frac{\cos^2\phi_n}{r_n}\frac{\partial}{r_n} - \frac{\cos\phi_n\sin\phi_n}{r_n^2}\frac{\partial}{\phi_n},\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} &= \cos^2\phi_n \frac{\partial^2}{\partial r_n^2} - \frac{2\cos\phi_n\sin\phi_n}{r_n}\frac{\partial}{r_n}\frac{\partial}{\phi_n} + \frac{\sin^2\phi_n}{r_n^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi_n^2} \\ &+ \frac{\cos\phi_n}{r_n^2}\frac{\partial}{\partial\phi_n} + \frac{\sin^2\phi_n}{r_n}\frac{\partial}{r_n} + \frac{\sin\phi_n\cos\phi_n}{r_n^2}\frac{\partial}{\phi_n}.\end{aligned}$$

Finalmente, somando as duas equações obtidas, temos

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{n-1}^2} + \frac{\partial^2}{x_n^2} = \frac{\partial^2}{r_n^2} + \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi_n^2} + \frac{1}{r_n}\frac{\partial}{r_n}. \tag{A.8}$$

Para $n = 2$, considerando $r_{n-1} = y$, $x_n = x$, $r_n = r = \sqrt{x^2+y^2}$ e $\phi_n = \theta$, obtemos o operador de Laplace em duas dimensões

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}. \tag{A.9}$$

Para $n = 3$, considere $y = x_1$, $x = x_2$, $z = x_3$, $\theta = \phi_2$, $\phi = \phi_3$, $r = r_3$ e $\rho = \sqrt{x^2+y^2} = r_2 = r\sin\phi$. Utilizando (A.9), obtemos

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \left(\frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \\ &= \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right),\end{aligned}$$

onde usamos (A.8) para obter a última expressão. Finalmente, usando $n = 3$ em (A.6), obtemos uma expressão para $\dfrac{\partial}{\partial\rho}$ e concluímos que

$$\begin{aligned}\Delta &= \frac{1}{r\sin\phi}\left(\sin\phi\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2\sin\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\sin\phi\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{1}{r^2\sin^2\phi}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}.\end{aligned}$$

Quanto maior a dimensão, mais complicado se torna calcular uma expressão para o Laplaciano. Para $n \geq 2$, considere a fórmula

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial r_n^2} + \frac{n-1}{r_n}\frac{\partial}{\partial r_n} + \frac{1}{r_n^2}\Delta_{S^n} = \frac{1}{r_n^{n-1}}\frac{\partial}{\partial r_n}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r_n}\right) + \frac{1}{r_n^2}\Delta_{S^n}, \qquad \text{(A.10)}$$

onde Δ_{S^n} é um operador diferencial envolvendo apenas variáveis angulares $\phi_2, \phi_3, ..., \phi_n$. Tal operador é chamado de Operador de Laplace-Beltrami. A expressão (A.10) é validada indutivamente. Suponha que a expressão é válida para $n-1$, então usando (A.4), (A.6), (A.7) e (A.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta &= \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \\
&= \frac{1}{r_{n-1}^2}\Delta_{S^{n-1}} + \frac{n-2}{r_{n-1}}\frac{\partial}{\partial r_{n-1}} + \frac{\partial^2}{\partial r_{n-1}^2} + \frac{\partial^2}{x_n^2} \\
&= \frac{1}{r_n^2 \sin^2\phi_n}\Delta_{S^{n-1}} + \frac{n-2}{r_n \sin\phi_n}\left(\sin\phi_n \frac{\partial}{\partial r_n} + \frac{\cos\phi_n}{r_n}\frac{\partial}{\partial \phi_n}\right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial r_n^2} + \frac{1}{r_n^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi_n^2} + \frac{1}{r_n}\frac{\partial}{\partial r_n}\right) \\
&= \frac{\partial^2}{\partial r_n^2} + \frac{n-1}{r_n}\frac{\partial}{\partial r_n} + \frac{1}{r_n^2}\left(\frac{1}{\sin^2\phi_n}\Delta_{S^{n-1}} + (n-2)\tan\phi_n \frac{\partial}{\partial \phi_n} + \frac{\partial^2}{\partial \phi_n^2}\right).
\end{aligned}$$

Considerando

$$\Delta_{S^n} = \frac{1}{\sin^2\phi_n}\Delta_{S^{n-1}} + (n-2)\tan\phi_n \frac{\partial}{\partial \phi_n} + \frac{\partial^2}{\partial \phi_n^2},$$

temos o desejado.

Referências Bibliográficas

[1] Abrosio, L.; Cabré, C., *Entire solutions of semilinear elliptic equations in* 3 *and a conjecture of De Giorgi*, J. Amer. Math. Soc., 13 (2000).

[2] Bérard, P., *Analysis on riemannian manifolds and geometric applications: an introduction*, Instituto de Matemática Pura e Aplicada.

[3] Berestycki, H.; Caffarelli L.; Nirenberg L., *Further qualitative properties for elliptic equations in unbounded domains*, Ann. Scuela Norm. Sup. Pisa Cl. (1997), $69 - 94$.

[4] Berestycki, H.; Caffarelli L.; Nirenberg L., *Inequalities for second order elliptic equations with applications to unbounded domains I*, Duke Math. J. 81 (1996), $467 - 494$.

[5] Berestycki, H.; Caffarelli L.; Nirenberg L., *Inequalities for second order elliptic equations with applications to unbounded domains II: Symmetry in infinite strips.*

[6] Berestycki, H.; Caffarelli L.; Nirenberg L., *Monotonicity for elliptic equations an unbounded Lipschitz domain*, Comm. Pure Appl. Math. 50 (1997), $1089 - 1112$.

[7] Berestycki, H.; Nirenberg L., *On the method of moving planes and the sliding method*, Boletim Soc. Brasil. de Mat. Nova Ser. 22 (1991), $1 - 37$.

[8] Berestycki, H.; Caffarelli L.; Nirenberg L., *Symmetry for elliptic equations in a half-space*, in "Boundary value problems for partial differential equations and applications", volume dedicated to E. Magenes, J. L. Lions et al. ed., Masson, Paris (1993), $27 - 42$.

[9] Berestycki, H.; Nirenberg L.; Varadhan S., *The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains*, Comm. Pure Appl. Math. 47 (1994), $47 - 92$.

[10] Berestycki, H.; Rossi L., *On the principal eigenvalue of elliptic operators in* $\mathbb{R}^N$ *and applications*, J. Europ. Math. Soc. 2006.

[11] Cabré, X., *Topics in regularity and qualitative properties of solutions of nonlinear elliptic equations.*

[12] Chen, Wenxiong e LI, Congming, *Methods on Nonlinear Elliptic Equation*, American Institute od Mathematical Sciences. New York, 2010. (Series on Differential Equations and Dynamical Systems, vol.4).

[13] De Giorgi, E., *Convergence problemas for functionals and operators*, Proc. Int. Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis (Rome, 1983), $131-188$.

[14] Del Pino, M.; Kowalczyk M.; Wie J.; *A counterexample to a conjecture by De Giorgi in large dimensions*, Comptes Rendus Mathematique, vol. 346 $(23-24)$, $1261-1266$, 2008.

[15] Esteban, M. J.; Lions, P. L., *Existence and nonexistence for semilinear elliptic problems in unbounded domains*, Proc. Royal Soc. Edinburgh Sect. A 93, $1-14$, 1982/83.

[16] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate studies in mathematics, American mathematical society, ed.19, (1998).

[17] Fraenkel, L. E., *Introduction to maximum principles and symmetry in elliptic problems*, Cambrige University Press, New York, 2000.

[18] Gidas, B.; Ni, W. M.; Nirenberg, L., *Symmetry and relates properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. 68, (1979), $209-243$.

[19] Gilbarg, D.; Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer Verlag, (2001).

[20] Ghoussoub, N.; Gui, C., *On a conjecture of De Giorgi and some related problems*, Ann. Math. 311 (1998), $481-491$.

[21] Lima, E. L., *Curso de análise volume* 2, Projeto Euclides Rio de Janeiro: IMPA, ed.11 2009.

[22] Li, Y.; Ni, W.M., *Radial symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. in Partial Diff. Equations 18 (5 e 6), $1043-1054$, 1993.

[23] Murray, H.; Hans, F. *Maximum principles in differential equations*, Prentice-Hall, 1967.

[24] Protter, M. H.; Weinberger, H. F., *Maximum principle in differential equations*, Pretince-Hall, Englewood Ciffs, New Jersey, (1967).

[25] Qing, H.; Fanghua, L., *Elliptic partial differential equations*, Courant institute of mathematical sciences, New York university, 1997.

[26] Renardy, M.; Rogers, R., *An introduction to partial differential equations*, Springer-Verlag, New york, ed. 2, 2004.

[27] Savin, O.; *Regularity of flat level sets in phase transitions*, To appear in Ann. of Math.

[28] Serrin, J., *A symmetry theorem in potential theory*, Arch. Rational Mech. Anal. 43, 1971, $304 - 318$.

[29] Sheldon, A.; Bourdon, P.; Ramey W., *Harmonic function theory*, Springer-Verlag, New York, Inc. ed.2 2001.

[30] Struwe, M., *Variational Methods*, Springer-Verlag, Berlin - New York, 1990.