Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação de Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Problemas Envolvendo o N-laplaciano em Subdomínios do $\mathbb{R}^N$ e Crescimento Crítico

por

Manassés Xavier de Souza

sob a orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

29 de Junho de 2006

Problemas Envolvendo o N-laplaciano em Subdomínios do $\mathbb{R}^N$ e Crescimento Crítico

por

Manassés Xavier de Souza

Dissertação apresentada ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação de Matemática da Universidade Federal da Paraíba como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise

Banca Examinadora:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó-UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Augusto César Ponce-Université de Tours-França

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros-UFPB

Universidade Federal da Paraíba
CCEN-Departamento de Matemática
Curso de Pós-Graduação de Matemática

29 de Junho de 2006

Agradecimentos

A meus familiares, a minha eterna gratidão, por sua presença e força em todos os momentos.

Ao meu orientador, Professor João Marcos Bezerra do Ó, pela dedicação, atenção e principalmente pelas suas experiências que muito contribuíram a concluir uma grande e importante etapa da minha vida.

À Professora Flávia Jerônimo Barbosa, pelo estímulo e orientações que me deu, mesmo antes de minha entrada na Pós-Graduação.

Ao Professor Everaldo Souto de Medeiros, pela fundamental colaboração e incansável disponibilidade durante todo o curso.

A Uberlândio Batista Severo, pela ajuda e discurssões sempre proveitosas.

Ao Professor Augusto Ponce, por participar da banca e pelas suas excelentes sugestões e comentários.

Aos professores de graduação e pós-graduação, que contribuíram em muito para minha formação acadêmica.

Aos meus colegas e amigos que compartilharam comigo esses anos de estudos, sabendo cultivar a amizade e a compreensão, os meus agradecimentos.

A todos, que fazem o departamento de Matemática da UFPB.

Finalmente, ao CNPq pelo apoio financeiro.

A minha família

Resumo

Nesta dissertação, provaremos a existência e a multiplicidade de soluções fracas para uma classe de problemas, envolvendo o operador N-laplaciano em subdomínios do $\mathbb{R}^N$ e não-linearidades com crescimento crítico do tipo Trudinger-Moser. Para isto, usaremos minimização, o Teorema do Passo da Montanha e o Princípio Variacional de Ekeland.

Abstract

In this thesis, we will prove the existence and the multiplicity of weak solutions for a class of problems, involving N-laplacian the operator in subdomains of the $\mathbb{R}^N$ and nonlinearities with critical growth of Trudinger-Moser type. For this purpose, we will use minimization, the Mountain Pass Theorem and The Ekeland Variational Principle.

Sumário

Notações **1**

Preliminares **6**

0.1 Resultados básicos 6

1 Um problema homogêneo com crescimento crítico envolvendo o operador N-laplaciano **10**

1.1 Introdução 10

1.2 Formulação variacional 14

1.3 Propriedades da seqüência de Palais-Smale 26

1.4 Resultado de existência 35

2 Um problema não-homogêneo com crescimento crítico envolvendo o operador N-laplaciano **37**

2.1 Introdução 37

2.2 Formulação variacional 39

2.3 Propriedades da seqüência de Palais-Smale 44

2.4 Soluções generalizadas 49

2.5 Sinais das soluções 54

3 Um problema com crescimento crítico envolvendo o operador N-laplaciano em $\mathbb{R}^N$ **56**

3.1 Introdução 56

3.2 Formulação variacional 62

3.3 Resultado de existência 74

A Resultados fundamentais **77**

A.1 Desigualdades 77

A.2 Funcionais diferenciáveis 80

A.3 Resultado de compacidade 91

A.4 Resultado de densidade 93

A.5 Desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser 95

Notações

$B(x,\delta)$ ou $B_\delta(x)$	bola aberta de centro x e raio δ
$\rightharpoonup, \to$	convergências fraca e forte respectivamente
$\lvert A\rvert$	medida de Lebesgue de um conjunto A
q.t.p	quase toda parte
supp$f$	suporte da função f
$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ou u_{x_i}	derivada parcial de u em relação a x_i
$\mathrm{div} f = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$	divergente de f, onde $f:\Omega\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u, onde $u:\Omega\subset\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u
$\Delta_N u = div(\lvert\nabla u\rvert^{N-2}\nabla u)$	N-laplaciano de u

$$L^p(\Omega) = \left\{ u:\Omega\to\mathbb{R} \ \text{ mensurável };\int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\},\ 1\le p<\infty$$

$\|u\|_p = \left(\displaystyle\int_\Omega \lvert u\rvert^p\right)^{1/p}$, $1\le p<\infty$	norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$
$C(\Omega)$	funções contínuas definidas de Ω em $\mathbb{R}$
$C_c(\Omega)$	funções contínuas com suporte compacto em Ω
$C^k(\Omega)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k\in\mathbb{N}$

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega)$; $C_c^k(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$; $C_c^\infty(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\ g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \;\; \text{tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i = 1, \ldots, N \end{array} \right\},$$

$1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i = u_{x_i}$

$\|u\|_{1,p} = \|u\|_p + \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_p$ norma do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ é o completamento de $C_c^1(\Omega)$, na norma $\|\cdot\|_{1,p}$, $1 \leq p < \infty$

$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^N \right)^{1/N}$ norma do espaço de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)$

$\|u\|_*$ norma do espaço de Sobolev $W^{-1,N'}(\Omega)$

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$ se $\lim_{x\to x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$.

Introdução

Nesta dissertação, estudaremos a existência e a multiplicidade de soluções fracas para algumas classes de problemas de equações diferenciais parciais, envolvendo o operador N-laplaciano. As classes de equações que trataremos são bem particulares, no sentido de que tais problemas têm uma característica em comum: a falta de compacidade. Esta perda de compacidade é causada pelo crescimento crítico da não-linearidade ou pela não-limitação do domínio de definição do problema. Esse crescimento crítico na parte não-linear é motivado pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser (veja [23]).

Teorema 0.1 (Desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser) *Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $N \geq 2$ tal que*

$$\int_\Omega |\nabla u|^N dx \leq 1.$$

Então existe uma constante $C(N)$, que depende somente de N, tal que

$$\int_\Omega e^{(\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}})} dx \leq C(N)|\Omega|,$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ e ω_{N-1} é o volume da esfera unitária $(N-1)$-dimensional. A integral do lado esquerdo é finita para qualquer $\alpha > 0$. Porém, se $\alpha > \alpha_N$, ela pode assumir valores arbitrariamente grandes pela escolha apropriada de u.

Os problemas que abordaremos são:

Problema 1. Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ um domínio limitado com fronteira suave. Buscaremos soluções fracas não-negativas do seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta_N u = f(x,u) & em \quad \Omega, \\ u \in W_0^{1,N}(\Omega), \quad u \geq 0, \end{cases} \tag{1}$$

onde a não-linearidade $f(x,u)$ é contínua com crescimento crítico, isto é, existe uma constante $\alpha_0 > 0$ tal que

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{|f(x,u)|}{e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})}} = 0, \quad \text{uniformemente em} \quad x \in \Omega, \forall \alpha > \alpha_0$$

e

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{|f(x,u)|}{e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})}} = \infty, \quad \text{uniformemente em} \quad x \in \Omega, \forall \alpha < \alpha_0.$$

Problema 2. Consideremos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ $(N \geq 2)$ um domínio limitado com fronteira suave. Buscaremos soluções fracas do seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta_N u = f(x,u) + h(x) \quad em \quad \Omega, \\ u \in W_0^{1,N}(\Omega), \end{cases} \tag{2}$$

onde a não-linearidade $f(x,u)$ é contínua com crescimento crítico e $h(x) \in W^{-1,N'}(\Omega)$ é uma pertubação do problema 1.

Problema 3. Buscaremos soluções fracas não-negativas do seguinte problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta_N u + a(x)|u|^{N-2}u = f(x,u) \quad em \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N), \ u \geq 0, \end{cases} \tag{3}$$

onde $a(x)$ é uma função contínua e coerciva. Além disso, existe uma constante $a_0 > 0$ tal que $a(x) \geq a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e a não-linearidade $f(x,u)$ é também contínua com crescimento crítico.

Para obtermos a existência de soluções fracas para estas classes de problemas, utilizaremos um método do tipo *minimax*, mais precisamente, o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale e o Princípio Variacional de Ekeland (veja [2], [13]). Isto será feito associando-se funcionais de energia definidos em espaços de funções adequados, cujos pontos críticos são exatamente as soluções fracas dos problemas.

Baseando-se no artigo [15], estudaremos o problema 1. Este problema foi abordado no artigo [14] no caso em que Ω é um subdomínio do plano e com não-linearidades menos gerais do que as consideradas em [15].

Motivado pelo problema 1, baseando-se no artigo [28], estudaremos o problema 2 que é a versão não-homogênea do problema 1. Além de existência de soluções fracas, estabeleceremos resultados de multiplicidade de soluções.

Finalmente, baseando-se no artigo [16], trataremos o problema 3. Observamos que o problema 3 será formulado num domínio ilimitado. Problemas deste tipo, foram estudados por Cao no artigo [8] e por Cao e Zhengjie no artigo [9] para o caso $N = 2$ e com não-linearidades com crescimento crítico em $\mathbb{R}^2$. No entanto, a função $a(x)$ era constante. Nestes artigos, os autores usaram o Princípio de Concentração-Compacidade de P. L. Lions.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira:

Preliminares: enuciaremos alguns resultados bem conhecidos, que serão utilizados ao longo do texto.

Capítulo 1: trataremos do estudo do problema 1.

Capítulo 2: trataremos do estudo do problema 2.

Capítulo 3: trataremos do estudo do problema 3.

Apêndice A: demonstraremos algumas desigualdades importantes que serão utilizadas ao longo deste trabalho. Faremos também, um estudo da diferenciabilidade dos funcionais de energia associados aos problemas propostos. Trataremos dois resultados fundamentais para podermos obter uma solução fraca do problema 3. O primeiro é um resultado de compacidade e o segundo é de densidade. E para concluimos o nosso trabalho, demonstraremos a desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser.

Ao longo deste trabalho, estaremos sempre fazendo referências dos resultados utilizados.

Preliminares

Aqui, enunciaremos alguns resultados importantes que serão necessários para uma melhor compreensão do trabalho a ser desenvolvido.

0.1 Resultados básicos

Em determinados pontos de nosso trabalho, faremos referências aos seguintes resultados:

Teorema 0.2 ([7], Proposição 3.5) *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma seqüência em X. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $\|x_n\|$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|.$$

Teorema 0.3 ([7], Teorema 3.27) *Se X é um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma seqüência limitada em X, então existe uma subseqüência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca de X.*

Teorema 0.4 ([7], Proposição 3.30) *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja (x_n) uma seqüência em X tal que e $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup_{n\to\infty} \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \to x$ em X. Em outras palavras, se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$ então $x_n \to x$ em X.

Teorema 0.5 ([13], Teorema 1.4) *Seja $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, onde X é um espaço de Banach. Então ϕ é semicontínua inferiormente se, e somente se, é fracamente simicontínua inferiormente.*

No que segue, vamos assumir que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um aberto. O próximo teorema afirma que, sob certas condições, a integral é absolutamente contínua.

Teorema 0.6 ([18], Corolário 4.1.2) *Se f é uma função não-negativa, mensurável e $\int_\Omega f d\mu < \infty$ então f é absolutamente contínua em relação a μ, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\mu(\Omega) < \delta$ implica $\int_\Omega f d\mu < \varepsilon$.*

O próximo resultado é o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema 0.7 ([4], Teorema 5.6) *Seja (f_n) uma seqüência de funções de $L^1(\Omega)$ tal que:*

i) $f_n(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω*;*

ii) *existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \geq 1$, temos*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p \ em \ \ \Omega.$$

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Teorema 0.8 ([7], Teorema 4.9) *Sejam (f_n) uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Então podemos extrair uma subseqüência (f_{n_k}) tal que

i) $f_{n_k}(x) \to f(x)$ *q.t.p em* Ω*, e*

ii) $|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$*, q.t.p em* Ω*,* $\forall k \in \mathbb{N}$*, com* $h \in L^p(\Omega)$*.*

Teorema 0.9 ([20], Lema 4.6 (Brezis-Lieb)) *Sejam $1 \leq p < \infty$ e (f_n) uma sequência limitada de funções de $L^p(\Omega)$ que converge q.t.p para f. Então $f \in L^p(\Omega)$ e*

$$\|f\|_p^p = \lim_{n\to\infty} (\|f_n\|_p^p - \|f - f_n\|_p^p).$$

Teorema 0.10 ([7], desigualdade de Hölder generalizada) *Suponha que as funções $f_1, f_2, \ldots, f_k$ são tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \ \ i = 1, 2, \ldots, k \quad com \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se verifica a desigualdade de interpolação

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^\alpha \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad \text{onde} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Teorema 0.11 ([7], Teorema IX.9 (Gagliardo-Nirenberg-Sobolev)) *Seja $1 \leq p < N$. Existe uma constante C, dependendo apenas de p e N, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C\|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, onde $p^* = Np/(N-p)$.

Corolário 0.1 ([7], Corolário IX.11) *Se $p = N$ verifica-se*

$$W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \subset L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{para todo} \quad q \in [N, \infty),$$

com injeções contínuas.

Teorema 0.12 ([7], Corolário IX.14) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1, com fronteira limitada, e $1 \leq p \leq \infty$. Então,*

$$\begin{cases} se \;\; 1 \leq p < N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega), \\ se \;\; p = N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [p, \infty), \\ se \;\; p > N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega), \end{cases}$$

com injeções contínuas.

Teorema 0.13 ([7], Teorema IX.16 (Rellich-Kondrachov)) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1. Temos:*

$$\begin{cases} se \;\; 1 \leq p < N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, p^*), \\ se \;\; p = N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega), \quad \forall\, q \in [1, \infty), \\ se \;\; p > N, \;\; então \;\; W^{1,p}(\Omega) \subset C(\overline{\Omega}), \end{cases}$$

com injeções compactas.

Teorema 0.14 ([5], Lema Radial IV.A) *Se $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $1 \leq p < \infty$, é uma função não-crescente (isto é, $0 \leq u(x) \leq u(y)$ se $|x| \geq |y|$), então temos*

$$|u(x)| \leq |x|^{-N/p} \left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{1/p} \|u\|_p, \quad x \neq 0.$$

Enunciaremos agora, dois resultados que utilizaremos para encontrarmos pontos críticos de funcionais associados aos problemas deste trabalho.

Teorema 0.15 ([13], Teorema IV.2 (Princípio Variacional de Ekeland)) *Seja (X, d) um espaço métrico completo e $\varphi : X \to (-\infty, +\infty]$ um funcional semicontínuo inferiormente, limitado inferiormente o qual pode assumir $+\infty$ mas não identicamente igual a $+\infty$. Dado $\epsilon > 0$, seja $u \in X$ tal que*

$$\varphi(u) \leq \inf_X \varphi + \epsilon.$$

Então, dado $\lambda > 0$, existe $v_\epsilon \in X$ tal que

(i) $\varphi(v_\epsilon) \leq \varphi(u)$,
(ii) $d(u, v_\epsilon) \leq 1/\lambda$,
(iii) $\varphi(\omega) > \varphi(v_\epsilon) - \epsilon\lambda d(v_\epsilon, \omega)$, *para cada* $\omega \in X \setminus \{v_\epsilon\}$.

Como conseqüência do Princípio Variacional de Ekeland, pode-se mostrar o seguinte teorema:

Teorema 0.16 ([2], [13], Teorema do Passo da Montanha) *Seja* E *um espaço de Banach real e* $I \in C^1(E, \mathbb{R})$. *Suponha que existe uma vizinhança* U *de* 0 *em* E *e* $\alpha, \delta > 0$ *que satisfazem as seguinte condições:*

(i) $I(0) = 0$,
(ii) $I(u) \geq \delta$ *na fronteira de* U,
(iii) Existe $e \notin U$ *tal que* $I(e) < \alpha$.

Então, para o número c *definido por:*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{u \in \gamma([0,1])} I(u) \geq \delta$$

onde $\Gamma = \{g \in C([0,1], E) : g(0) = 0, g(1) = e\}$.

Existe uma seqüência (u_n) *em* E *tal que*

$$I(u_n) \to c \quad e \quad I'(u_n) \to 0,$$

Capítulo 1

Um problema homogêneo com crescimento crítico envolvendo o operador N-laplaciano

1.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é apresentar um estudo sobre a existência de soluções fracas não-negativas para uma classe de problemas elípticos, envolvendo o operador N-laplaciano em subdomínios limitados do $\mathbb{R}^N$ e com não-linearidades com crescimento crítico. Mais precisamente, estudaremos a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta_N u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega \\ u \in W_0^{1,N}(\Omega), & \quad u \geq 0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $-\Delta_N u \equiv -div(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é o operador N-laplaciano, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave e a não-linearidade $f(x,u)$ tem o crescimento máximo possível que permite tratar o problema (1.1) variacionalmente em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Aqui, este crescimento máximo é motivado pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser (veja [23]). Esta desigualdade é enunciada, rigorosamente, no seguinte teorema:

Teorema 1.1 *Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $N \geq 2$ e*

$$\int_\Omega |\nabla u|^N dx \leq 1. \tag{1.2}$$

Então existe uma constante $C(N)$, que depende somente de N, tal que

$$\int_\Omega e^{(\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}})} dx \leq C(N)|\Omega|,$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ *e* ω_{N-1} *é o volume da esfera unitária* $(N-1)$*-dimensional. A integral do lado esquerdo é finita para qualquer* $\alpha > 0$*; porém, se* $\alpha > \alpha_N$ *ela pode assumir valores arbitrariamente grandes pela escolha apropriada de* u*.*

Como conseqüência da desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser, associamos, naturalmente, noções de criticalidade e subcriticalidade.

Definição 1.1 *Dizemos que uma função* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem* ***crescimento subcrítico****, se para todo* $\alpha > 0$*,*

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{|f(x,u)|}{e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})}} = 0, \quad \textit{uniformemente em} \quad x \in \Omega. \tag{1.3}$$

Exemplo 1.1 *A função* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,t) = h(x)e^t$*, onde* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *e* $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *é contínua, tem crescimento subcrítico. De fato,*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{f(x,t)}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t\to\pm\infty} h(x)e^{(t-\alpha t^2)} = 0, \forall \alpha > 0.$$

Definição 1.2 *Dizemos que a função* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *tem* ***crescimento crítico****, se existe* $\alpha_0 > 0$ *tal que*

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{|f(x,u)|}{e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})}} = 0, \quad \textit{uniformemente em} \quad x \in \Omega, \forall \alpha > \alpha_0 \tag{1.4}$$

e

$$\lim_{|u|\to\infty} \frac{|f(x,u)|}{e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})}} = +\infty, \quad \textit{uniformemente em} \quad x \in \Omega, \forall \alpha < \alpha_0. \tag{1.5}$$

Exemplo 1.2 *A função* $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x,t) = h(x)te^{t^2}$*, onde* $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ *e* $h : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *é contínua, tem crescimento crítico, com* $\alpha_0 = 1$*. De fato,*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{f(x,t)}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{h(x)te^{t^2}}{e^{\alpha t^2}} \tag{1.6}$$

Seja $\alpha = 1 + \epsilon$*, para todo* $\epsilon > 0$*, temos*

$$\lim_{t\to\pm\infty} \frac{h(x)te^{t^2}}{e^{\alpha t^2}} = \lim_{t\to\pm\infty} \frac{h(x)t}{e^{\epsilon t^2}} = 0.$$

Se $\alpha \leq 1$*, temos que o limite em (1.6) é* $\pm\infty$*.*

Para mostrarmos a existência de soluções para o problema (1.1), utilizaremos uma técnica do tipo *minimax*. Mais precisamente, o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. Para isto, consideraremos o caso em que a função $f(x,u)$ tem crescimento crítico e satisfaz as seguintes condições:

(f_1) $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua.

(f_2) Existem R, $M > 0$ tais que para todo $u \geq R$ e para todo $x \in \Omega$, tem-se

$$0 < F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt \leq Mf(x,u).$$

(f_3) $f(x,u) \geq 0$ para todo $(x,u) \in \Omega \times [0,+\infty)$ e $f(x,0) = 0$ para todo $x \in \Omega$.

Antes de enuciarmos o principal resultado deste capítulo, consideraremos o seguinte problema de auto-valor:

$$-\Delta_N u = \lambda |u|^{N-2}u, \quad u \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Sabemos que este problema possui um menor auto-valor $\lambda_1 > 0$ para o qual podemos tomar uma auto-função ψ_1 positiva (veja [3]). Além disso, λ_1 pode ser caracterizado variacionalmente como:

$$\lambda_1 = \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u|^N dx : u \in W_0^{1,N}(\Omega), \int_\Omega |u|^N dx = 1 \right\}. \tag{1.7}$$

Vejamos agora o principal resultado deste capítulo, que trata da existência de soluções não-negativas para o problema (1.1).

Teorema 1.2 *Suponhamos que $f(x,u)$ tem crescimento crítico em Ω e satisfaz (f_1), (f_2) e (f_3). Além disso, suponha que*

(f_4) $\limsup_{u \to 0^+} \frac{NF(x,u)}{|u|^N} < \lambda_1$, *uniformemente para $x \in \Omega$,*

(f_5) $\liminf_{u \to \infty} uf(x,u)e^{(-\alpha_0 |u|^{\frac{N}{N-1}})} \geq \beta_0 > \frac{1}{r^N}(\frac{N}{\alpha_0})^{N-1}$, *uniformemente para $x \in \Omega$,*

onde r é o raio interno do conjunto Ω, isto é, r é igual ao raio da maior bola aberta contida em Ω. Então, o problema (1.1) tem uma solução não-trivial.

Vejamos um exemplo de uma não-linearidade que satisfaz as hipóteses do Teorema 1.2.

Exemplo 1.3 *Considere a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,u) = 2\beta u e^{u^2},$$

onde $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e $0 < \beta < \lambda_1/2$.

Já sabemos do exemplo 1.2 que $f(x,u)$ tem crescimento crítico com expoente $\alpha_0 = 1$. Agora, mostraremos que $f(x,u)$ satisfaz as hipóteses (f_1) a (f_5). De fato; as condições (f_1) e (f_3) são imediatas da definição de $f(x,u)$. Então basta mostrarmos que (f_2), (f_4) e (f_5) são válidas.
Por definição, temos que

$$F(x,u) = \int_0^u f(x,t)dt.$$

Logo, para $f(x,u) = 2\beta u e^{u^2}$*, temos*

$$F(x,u) = \int_0^u 2\beta t e^{t^2} dt,$$

ou seja,

$$F(x,u) = \beta(e^{u^2} - 1).$$

Conseqüentemente,

$$\lim_{u\to\infty} \frac{F(x,u)}{f(x,u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{(e^{u^2}-1)}{2ue^{u^2}} = 0.$$

O que prova a condição (f_2).

Agora, para mostrarmos (f_4)*, notemos que*

$$\lim_{u\to o^+} \frac{2F(x,u)}{u^2} = \lim_{u\to o^+} 2\beta \frac{(e^{u^2}-1)}{u^2}$$

Aplicando a regra de L'Hospital, obtemos

$$\lim_{u\to o^+} \frac{2F(x,u)}{u^2} = \lim_{u\to o^+} 2\beta e^{u^2} = 2\beta,$$

que prova a condição (f_4).

Além disso, temos

$$\lim_{u\to\infty} uf(x,u)e^{-\alpha_0 u^2} = \lim_{u\to\infty} 2\beta u^2 e^{u^2} e^{-u^2} = \lim_{u\to\infty} 2\beta u^2 = \infty,$$

que prova a condição (f_5).

Observação: A hipótese (f_4) é essencial para o nosso resultado. De fato, se considerarmos a função $f : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,u) = \lambda_1 u + u^2 e^{u^2}, \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2,$$

novamente teremos que $f(x,u)$ tem crescimento crítico com expoente $\alpha_0 = 1$, pois tomando $\alpha = 1 + \epsilon$, com $\epsilon > 0$, obtemos

$$\lim_{u\to\pm\infty} \frac{f(x,u)}{e^{\alpha u^2}} = \lim_{u\to\infty} \frac{\lambda_1 u + u^2 e^{u^2}}{e^{\alpha u^2}} = \left(\lim_{u\to\infty} \frac{\lambda_1 u}{e^{u^2}} + \lim_{u\to\infty} \frac{u^2}{e^{\epsilon u^2}} \right) = 0.$$

E se $\alpha \leq 1$, este limite é $+\infty$.

Notemos que a parcela $\lambda_1 u$ não permite que esta função satisfaça a hipótese (f_4).

Agora consideremos o seguinte problema

$$-\Delta u = \lambda_1 u + u^2 e^{u^2}.$$

Multiplicando esta equação por ψ_1 e integrando, obtemos

$$-\int_\Omega \Delta u \psi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u\psi_1 dx + \int_\Omega u^2 e^{u^2} \psi_1 dx, \qquad (1.8)$$

e usando integração por partes, temos que

$$-\int_\Omega \Delta u \psi_1 dx = \int_\Omega \nabla u \nabla \psi_1 dx = -\int_\Omega u \Delta \psi_1 dx.$$

Logo, a equação (1.8), pode ser escrita da seguinte forma

$$-\int_\Omega u\Delta \psi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u\psi_1 dx + \int_\Omega u^2 e^{u^2} \psi_1 dx.$$

No entanto, temos que

$$-\Delta \psi_1 = \lambda_1 \psi_1,$$

donde

$$\lambda_1 \int_\Omega u\psi_1 dx = \lambda_1 \int_\Omega u\psi_1 dx + \int_\Omega u^2 e^{u^2} \psi_1 dx,$$

e isto implica que

$$\int_\Omega u^2 e^{u^2} \psi_1 dx = 0,$$

que é uma contradição. Portanto, a hipótese (f_4) é fundamental para obtermos o resultado de existência de soluções positivas.

1.2 Formulação variacional

Sob as hipóteses de que $f(x,u)$ é contínua e tem crescimento crítico, como definido em (1.4) e (1.5), temos que, para todo $\beta > \alpha_0$, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$|f(x,u)| \le C e^{(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}})}, \quad \text{para todo} \quad (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}. \qquad (1.9)$$

De fato, dados $\beta > \alpha_0$ e $\epsilon > 0$, existe $R_\epsilon > 0$ tal que

$$\frac{|f(x,u)|}{e^{(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}})}} < \epsilon, \quad \text{sempre que} \quad u \ge R_\epsilon,$$

o que implica

$$|f(x,u)| \le \epsilon e^{(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}})}, \quad \text{para todo} \quad u \ge R_\epsilon. \qquad (1.10)$$

Agora, consideremos a restrição de $f(x,u)$ ao compacto $\overline{\Omega}\times[0,R_\epsilon]$. Sendo $f(x,u)$ uma função contínua, existe uma constante $M>0$ tal que $|f(x,u)|\leq M$, para todo $(x,u)\in\overline{\Omega}\times[0,R_\epsilon]$. Desde que $e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})}$ é uma função crescente, podemos escolher uma constante $C>0$ de modo que

$$|f(x,u)|\leq Ce^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})}, \quad \text{para todo} \quad u\in[0,R_\epsilon]. \tag{1.11}$$

Conseqüentemente, de (1.10) e (1.11), obtemos que

$$|f(x,u)|\leq Ce^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})}, \quad \text{para todo} \quad (x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}.$$

Desta desigualdade, juntamente com a desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser (veja Apêndice A), mostramos que o funcional de energia $I: W_0^{1,N}(\Omega)\rightarrow\mathbb{R}$ associado ao problema (1.1), dado por:

$$I(u)=\frac{1}{N}\int_\Omega|\nabla u|^N dx-\int_\Omega F(x,u)dx, \tag{1.12}$$

está bem definido em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e $I\in C^1(W_0^{1,N}(\Omega),\mathbb{R})$. Além disso,

$$I'(u)v=\int_\Omega|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla v dx-\int_\Omega f(x,u)v dx, \quad \forall u,v\in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{1.13}$$

Por uma solução fraca de (1.1), entendemos uma função $u\in W_0^{1,N}(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla\varphi dx-\int_\Omega f(x,u)\varphi dx=0, \quad \forall\varphi\in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Portanto, pontos críticos não-triviais de I são precisamente as soluções fracas não-triviais de (1.1). Como estamos procurando soluções não-negativas é conveniente definirmos

$$f(x,u)=0, \quad \text{em} \quad \Omega\times(-\infty,0].$$

Conseqüentemente, as condições (f_1), (f_2) e (f_3) implicam os seguintes fatos:

(a) $F(x,u)\geq 0$, para todo $(x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}$.

(b) Existe uma constante $C>0$ tal que para todo $(x,u)\in\Omega\times[R,+\infty)$

$$F(x,u)\geq Ce^{(\frac{1}{M}u)}. \tag{1.14}$$

(c) Existem $R_0>0$, $\theta>N$ tal que para todo $(x,u)\in\Omega\times[R_0,+\infty)$

$$\theta F(x,u)\leq uf(x,u). \tag{1.15}$$

Prova de (a)**:** é imediata da definição de $F(x,u)$.

Prova de (b)**:** Por (f_2) existem $R > 0$ e $M > 0$ tais que

$$0 < F(x,s) \leq Mf(x,s), \quad \text{para todo} \quad s \geq R,$$

logo

$$\frac{1}{M} \leq \frac{f(x,s)}{F(x,s)}.$$

Integrando no intervalo $R \leq s \leq u$, obtemos

$$\frac{u-R}{M} \leq \ln\left(\frac{F(x,u)}{F(x,R)}\right),$$

donde segue-se

$$e^{\left(\frac{u-R}{M}\right)} \leq \frac{F(x,u)}{F(x,R)}.$$

Portanto,

$$F(x,u) \geq Ce^{\left(\frac{u}{M}\right)},$$

onde $C = \exp(\frac{-R}{M})F(x,R) > 0$.

Prova de (c)**:** Novamente por (f_2) temos que

$$F(x,u) \leq Mf(x,u), \quad \text{para todo} \quad u \geq R.$$

Tomando $\theta > N$, obtemos

$$\theta F(x,u) \leq \theta Mf(x,u), \quad \text{para todo} \quad u \geq R.$$

Logo

$$uf(x,u) \geq \theta Mf(x,u) \geq \theta F(x,u), \quad \text{para todo} \quad u \geq R_0,$$

onde $R_0 = \max\{R, \theta M\}$.

Agora, mostraremos que o funcional de energia associado ao problema (1.1) satisfaz a *"geometria"* do passo da montanha.

Lema 1.1 *Sob as hipóteses* (f_1)*,* (f_2)*,* (f_3) *e (1.9), temos* $I(tu) \to -\infty$ *quando* $n \to \infty$*, para todo* $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$ *com* $u \geq 0$*.*

Prova: Afirmamos que para $p > N$, existem constantes C, $d > 0$ tais que

$$F(x,u) \geq Cu^p - d, \quad \text{para todo} \quad u \geq 0. \tag{1.16}$$

De fato, para $u \geq R$, temos que

$$e^{(\frac{u}{M})} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{u^p}{p!M^p} \geq Cu^p, \forall u \geq 0 \quad \text{e} \quad p > N.$$

Desta estimativa e da condição (1.14), temos $F(x,u) \geq Cu^p$, para todo $u \geq R$.

Já no intervalo $0 \leq u \leq R$, sendo $F(x,u)$ uma função contínua, existe uma constante m tal que $m \leq F(x,u)$, para todo $(x,u) \in \overline{\Omega} \times [0,R]$, pois o conjunto $\overline{\Omega} \times [0,R]$ é compacto. Conseqüentemente, podemos escolher uma constante $d > 0$ tal que

$$F(x,u) \geq Cu^p - d, \forall u \geq 0.$$

O que prova a afirmação. Escolhendo $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$ com $u \geq 0$, pela estimativa (1.16), obtemos que

$$\begin{aligned}
I(tu) &= \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla(tu)|^N dx - \int_\Omega F(x,tu)dx \\
&\leq \tfrac{t^N}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N dx - \int_\Omega [C|tu|^p - d]dx \\
&= \tfrac{t^N}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N dx - Ct^p\int_\Omega |u|^p dx + d\int_\Omega dx \\
&= \tfrac{t^N}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N dx - Ct^p\int_\Omega |u|^p dx + d|\Omega|.
\end{aligned}$$

Desde que $p > N$, temos que $I(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$.

■

Lema 1.2 *Sob as hipóteses (f_1), (f_4) e (1.9), temos que existem δ, $\rho > 0$ tais que*

$$I(u) \geq \delta \quad se \quad \|u\| = \rho.$$

Prova: Por (f_1), (f_4) e (1.9), podemos escolher $\lambda < \lambda_1$ tal que

$$F(x,u) \leq \frac{1}{N}\lambda|u|^N + Ce^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})}|u|^q, \quad \forall (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}, \quad q > N.$$

De fato, por (f_4), existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{NF(x,u)}{|u|^N} \leq \lambda,$$

para $u \in [0,\delta]$, uniformemente em $x \in \Omega$, para $\lambda < \lambda_1$.

O que implica

$$F(x,u) \leq \frac{1}{N}\lambda|u|^N, \quad \forall (x,u) \in \Omega \times [0,\delta]. \tag{1.17}$$

Para $u \geq \delta$, afirmamos que

$$0 < F(x,u) \leq C' e^{(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}})} \leq C u^q e^{(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}})}.$$

Para alguma constante $C > 0$.

Com efeito, u^q é uma função crescente com valor mínimo $u = \delta$. Então para obtermos $C' \leq Cu^q$, basta tomarmos $C = C'\delta^{-q}$. Donde segue a afirmação.

Agora usando a desigualdade de Hölder, para $1/s + 1/r = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega e^{(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}})} |u|^q dx &\leq \left(\int_\Omega e^{(\beta r |u|^{\frac{N}{N-1}})} dx\right)^{1/r} \left(\int_\Omega |u|^{sq} dx\right)^{1/s} \\ &= \left(\int_\Omega e^{[\beta r \|u\|^{\frac{N}{N-1}} (\frac{|u|}{\|u\|})^{\frac{N}{N-1}}]} dx\right)^{1/r} \left(\int_\Omega |u|^{sq} dx\right)^{1/s}.\end{aligned}$$

Se $\|u\| \leq \sigma$ e escolhendo $\beta r \sigma^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$. Segue-se pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser que

$$\int_\Omega e^{(\beta |u|^{\frac{N}{N-1}})} |u|^q dx \leq M \left(\int_\Omega |u|^{sq} dx\right)^{1/s}. \tag{1.18}$$

De (1.17) e (1.18), obtemos

$$\int_\Omega F(x,u) dx \leq \frac{\lambda}{N} \|u\|_N^N + M\|u\|_{sq}^q.$$

Portanto,

$$I(u) \geq \frac{1}{N}\|u\|^N - \frac{\lambda}{N}\|u\|_N^N - M\|u\|_{sq}^q.$$

Pela caracterização (1.7), temos

$$\lambda_1 \leq \frac{\|u\|^N}{\|u\|_N^N}, \quad \forall u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}.$$

Usando a imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^{sq}(\Omega)$, obtemos

$$\|u\|_{sq}^q \leq C\|u\|^q, \quad \text{para} \quad sq > N.$$

Conseqüentemente,

$$I(u) \geq \frac{1}{N}\|u\|^N - \frac{\lambda}{N\lambda_1}\|u\|^N - C\|u\|^q,$$

ou seja,

$$I(u) \geq \frac{1}{N}\|u\|^N(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}) - C\|u\|^q = \|u\|^N(C_1 - C_2\|u\|^{q-N}).$$

Desde que $\lambda < \lambda_1$ e $N < q$ podemos escolher $\rho > 0$ tal que $I(u) \geq \delta$ se $\|u\| = \rho$. Com efeito, basta escolhermos $\rho > 0$ como sendo e ponto onde a função $g(t) = t^N(C_1 - C_2 t^{q-N})$ atinge seu máximo.

$\blacksquare$

Agora consideremos a seguinte seqüência de funções não-negativas:

$$\widetilde{M_n}(x) = \omega_{N-1}^{-\frac{1}{N}} \begin{cases} (\log n)^{\frac{N-1}{N}} & se \quad |x| \leq 1/n \\ \log(\dfrac{1}{|x|})/(\log n)^{\frac{1}{N}} & se \quad 1/n \leq |x| \leq 1 \\ 0 & se \quad |x| \geq 1. \end{cases}$$

Lema 1.3 *Seja $x_0 \in \Omega$ e $r > 0$ tais que a bola $B(x_0, r)$ de centro x_0 e raio r esteja contida em Ω. Para seqüência definida por $M_n(x, x_0, r) = \widetilde{M_n}(\frac{x-x_0}{r})$ temos que $M_n \in W_0^{1,N}(\Omega)$ e $\|M_n\| = 1$.*

Prova: De fato, seja $x - x_0 \in B(x_0, r)$. Daí, temos

$$M_n(x, x_0, r) = \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}} \begin{cases} (\log n)^{\frac{N-1}{N}} & se \quad |x - x_0| \leq r/n \\ \log(\dfrac{r}{|x - x_0|})/(\log n)^{\frac{1}{N}} & se \quad r/n \leq |x - x_0| \leq r \\ 0 & se \quad |x - x_0| \geq r. \end{cases}$$

Conseqüentemente, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos que

$$\frac{\partial M_n(x, x_0, r)}{\partial x_i} = -\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}} (\log n)^{\frac{-1}{N}} \begin{cases} 0 & se \quad |x - x_0| \leq \frac{r}{n} \\ \frac{(x_i - x_{i_0})}{|x - x_0|^2} & se \quad \frac{r}{n} \leq |x - x_0| \leq r \\ 0 & se \quad |x - x_0| \geq r. \end{cases} \tag{1.19}$$

Notemos que se $\frac{r}{n} \leq |x - x_0| \leq r$, temos

$$|\nabla M_n(x, x_0, r)| = \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}} (\log n)^{\frac{-1}{N}} \left(\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{(x_i - x_{i_0})}{|x - x_0|^2} \right)^2 \right)^{1/2} = \frac{\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}} (\log n)^{\frac{-1}{N}}}{|x - x_0|}.$$

Logo,

$$\|M_n(., x_0, r)\| = \left(\int_\Omega |\nabla M_n(x, x_0, r)|^N dx \right)^{1/N} \tag{1.20}$$

$$= \left(\omega_{N-1}^{-1} (\log n)^{-1} \int_{\frac{r}{n} \leq |x - x_0| \leq r} \frac{dx}{|x - x_0|^N} \right)^{1/N}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas $y = x - x_0$, temos que o determinante do Jacobiano desta mudança vale 1. Logo,

$$\int_{\frac{r}{n} \leq |x - x_0| \leq r} \frac{dx}{|x - x_0|^N} dx = \int_{\frac{r}{n} \leq |y| \leq r} \frac{dy}{|y|^N}.$$

Usando coordenadas esféricas, temos que

$$\int_{\frac{r}{n}\leq|y|\leq r}\frac{dy}{|y|^N}=\omega_{N-1}\int_{\frac{r}{n}\leq\rho\leq r}\frac{\rho^{N-1}}{\rho^N}d\rho=\omega_{N-1}\int_{\frac{r}{n}\leq\rho\leq r}\frac{d\rho}{\rho},$$

donde

$$\int_{\frac{r}{n}\leq|y|\leq r}\frac{dy}{|y|^N}=\omega_{N-1}\left[\log(r)-\log(rn^{-1})\right]=\omega_{N-1}\left[\log r-(\log r-\log n)\right],$$

ou seja,

$$\int_{\frac{r}{n}\leq|y|\leq r}\frac{dy}{|y|^N}=\omega_{N-1}\log n.$$

Substituindo esta última estimativa em (1.20), obtemos que $\|M_n(.,x_0,r)\|=1$.

■

O próximo lema fornecerá uma limitação superior para o nível do Passo da Montanha. Este resultado será de fundamental importância para obtermos o resultado de existência de uma solução não-trivial do problema.

Lema 1.4 *Assuma as hipóteses (f_1), (f_2), (f_3) e suponha que existe $r>0$ tal que*

$$\liminf_{u\to\infty} uf(x,u)e^{(-\alpha_0|u|^{\frac{N}{N-1}})}\geq\beta_0>\frac{1}{r^N}(\frac{N}{\alpha_0})^{N-1}, \tag{1.21}$$

uniformemente para quase todo $x\in\Omega$ e $B(x_0,r)\subset\Omega$. Então existe $n\in\mathbb{N}$ tal que

$$\max\{I(tM_n):t\geq 0\}<\frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$

onde $M_n(x)=M_n(x,x_0,r)$.

Prova: Suponha, por contradição, que para todo $n\in\mathbb{N}$ temos

$$\max\{I(tM_n):t\geq 0\}\geq\frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$

Pelo Lema 1.1, dado $A>0$, temos que $I(tM_n)<-A$, para todo $t>A$ e pelo Lema 1.2, existe $\delta>0$ tal que $I(tM_n)\geq\delta$ para algum t. Agora, consideremos a função $g:[0,\xi_n]\to\mathbb{R}$ definida por $g(t)=I(tM_n)$, para cada $n\in\mathbb{N}$ fixado, onde $[0,\xi_n]$ é escolhido de maneira que $I(tM_n)\geq 0$, para todo $t\in[0,\xi_n]$. Como g é uma função contínua definida num conjunto compacto, existe $t_n\in[0,\xi_n]$ tal que

$$g(t_n)=\max_{t\in[0,\xi_n]}g(t).$$

Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $t_n > 0$ tal que

$$I(t_n M_n) = \max\{I(tM_n) : t \geq 0\}.$$

Mostremos que $t_n^N \to (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$.

Note que não podemos ter $t_n = 0$. Caso contrário, teríamos $I(t_n M_n) = 0$, contradizendo

$$\max\{I(tM_n) : t \geq 0\} \geq \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1} > 0.$$

Usando o fato de que $\|M_n\| = 1$, temos

$$\begin{aligned} I(t_n M_n) &= \frac{t_n^N}{N} - \int_\Omega F(x, t_n M_n) dx \\ &\geq \tfrac{1}{N}(\tfrac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}. \end{aligned}$$

Sendo $F(x,u) \geq 0$, segue que

$$t_n^N \geq (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$

Desde que $\frac{d}{dt}(I(tM_n)) = 0$ para $t = t_n$, concluímos que

$$t_n^N = \int_\Omega t_n M_n f(x, t_n M_n) dx. \tag{1.22}$$

Por outro lado, pela hipótese (1.21), dado $\epsilon > 0$ existe $R_\epsilon > 0$ tal que

$$uf(x,u) \geq (\beta_0 - \epsilon) e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})}, \quad \text{para todo} \quad u \geq R_\epsilon. \tag{1.23}$$

Note que

$$t_n^N \geq \int_{B(x_0, \frac{r}{n})} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx,$$

e usando que $t_n M_n \geq R_\epsilon$ em $B(x_0, \frac{r}{n})$, para n suficientemente grande, obtemos por (1.23) a seguinte estimativa

$$\begin{aligned} t_n^N &\geq (\beta_0 - \epsilon) \int_{B(x_0, \frac{r}{n})} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx \\ &= (\beta_0 - \epsilon) \int_{B(x_0, \frac{r}{n})} e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} (\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}})^{\frac{N}{N-1}} \log n)} dx. \end{aligned}$$

Como o integrando não depende da variável x, obtemos que

$$\begin{aligned} t_n^N &\geq (\beta_0 - \epsilon) e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n)} \int_{B(x_0, \frac{r}{n})} dx, \\ &= (\beta_0 - \epsilon) e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n)} \frac{\omega_{N-1}}{N} (\frac{r}{n})^N. \end{aligned}$$

Usando propriedades da função exponencial, segue-se que

$$\begin{aligned}
t_n^N &\geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N n^{-N} e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n)} \\
&= (\beta_0 - \epsilon)\tfrac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{(\log n^{-N})} e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n)} \\
&= (\beta_0 - \epsilon)\tfrac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n + \log n^{-N})},
\end{aligned}$$

e pelas propriedades da função logarítmica, obtemos

$$\begin{aligned}
t_n^N &\geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n - N \log n)} \\
&= (\beta_0 - \epsilon)\tfrac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{[(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}}}{N} - 1) N \log n]} \\
&= (\beta_0 - \epsilon)\tfrac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{[(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1) N \log n]}.
\end{aligned}$$

Afirmamos que (t_n) é limitada. De fato,

$$t_n^N \geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{[(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1) N \log n]},$$

o que implica

$$\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} N \log n - N \log n - \log t_n^N \leq K.$$

Se (t_n) não fosse limitada, a menos de subseqüência, teríamos

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} N \log n - N \log n - \log t_n^N \right) \to \infty.$$

Com efeito, este limite pode ser reescrito da seguite forma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} N \log n \left(1 - \frac{\alpha_N}{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}} - \frac{\alpha_N \log t_n^N}{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}} \right) \to \infty,$$

e isto é uma contradição. Logo (t_n) é limitada. Conseqüentemente possui uma subseqüência convergente, a qual também denotaremos por (t_n).

Afirmamos que

$$t_n^N \to (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1} \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.24}$$

Com efeito, já temos que

$$t_n^N \geq (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$

Suponha, por contradição, que $t_n \to t_0 > (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{\frac{N-1}{N}}$, ou seja,

$$\frac{\alpha_0 t_0^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1 > 0.$$

Desde que

$$t_n^N \geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{[(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1)N\log n]}$$

e tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$t_0^N \geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{[(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1)N\log n]} \to \infty.$$

O que é uma contradição. Para continuarmos a prova do lema 1.4, consideremos os seguintes conjuntos $A_n = \{x \in B(x_0, r) : t_n M_n \geq R_\epsilon\}$ e $B_n = B(x_0, r) \setminus A_n$.

Temos que

$$\begin{aligned}
t_n^N &= \int_\Omega t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&\geq \int_{B(x_0,r)} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&= \int_{A_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx + \int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&\geq (\beta_0 - \epsilon) \int_{A_n} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx + \int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&= (\beta_0 - \epsilon) \int_{B(x_0,r)} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx + \int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&\quad -(\beta_0 - \epsilon) \int_{B_n} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx.
\end{aligned}$$

Veja que $M_n(x) \to 0$, quase sempre em $B(x_0, r)$, e as funções características $\mathcal{X}_{B_n}(x) \to 1$, quase sempre em $B(x_0, r)$, quando $n \to \infty$. Como em B_n temos $t_n M_n \leq R_\epsilon$, vale que

$$\mathcal{X}_{B_n} t_n M_n f(., t_n M_n) \leq R_\epsilon e^{(\beta |R_\epsilon|^{\frac{N}{N-1}})} \in L^1(\Omega),$$
$$\mathcal{X}_{B_n}(x) t_n M_n(x) f(x, t_n M_n(x)) \to 0 \text{ quase sempre em } B_n.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \to 0.$$

Analogamente, obtemos

$$\begin{aligned}
&\mathcal{X}_{B_n} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} \leq e^{(\alpha_0 |R_\epsilon|^{\frac{N}{N-1}})} \in L^1(\Omega), \\
&\mathcal{X}_{B_n}(x) e^{(\alpha_0 |t_n M_n(x)|^{\frac{N}{N-1}})} \to 1, \text{ quase sempre em } B_n,
\end{aligned}$$

e, novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, segue que

$$\int_{B_n} e^{(\alpha_0 |t_n M_n(x)|^{\frac{N}{N-1}})} \to \frac{\omega_{N-1}}{N} r^N.$$

Desde que $\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} \geq \alpha_N$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x_0)} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx &\geq \int_{B_r(x_0)} e^{(\alpha_N |M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx \\
&= r^N \int_{B_1(x_0)} e^{(\alpha_N |\widetilde{M_n}|^{\frac{N}{N-1}})} dx.
\end{aligned}$$

Denotando esta última integral por I_n, temos

$$I_n = \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} e^{[\alpha_N (\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}})(\log n)]} dx + \int_{\frac{1}{n} \leq |x| \leq 1} e^{[\alpha_N (\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}})(\log |x|^{-1})^{\frac{N}{N-1}} (\log n)^{\frac{-1}{N-1}}]} dx.$$

Agora, vamos reescrever cada integral acima.

$$I_{n,1} := \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} e^{[\alpha_N (\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}})(\log n)]} dx = \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} e^{(\log n^{\alpha_N \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}}})} dx.$$

Como $\alpha_N = N \omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, temos

$$I_{n,1} = \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} e^{(\log n^N)} dx = e^{(N \log n)} \int_{|x| \leq \frac{1}{n}} dx = e^{(N \log n)} \frac{\omega_{N-1}}{N} \left(\frac{1}{n} \right)^N,$$

donde

$$I_{n,1} = e^{(\log n^N)} \frac{\omega_{N-1}}{N} \frac{1}{n^N} = n^N \frac{\omega_{N-1}}{N} \frac{1}{n^N} = \frac{\omega_{N-1}}{N}.$$

Para a segunda integral

$$I_{n,2} := \int_{\frac{1}{n} \leq |x| \leq 1} e^{[\alpha_N (\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}})(\log |x|^{-1})^{\frac{N}{N-1}} (\log n)^{\frac{-1}{N-1}}]} dx.$$

Usaremos coordenadas esféricas. Assim temos

$$\begin{aligned}
I_{n,2} &= \omega_{N-1}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \rho^{N-1} e^{[\alpha_N(\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}})(\log\rho^{-1})^{\frac{N}{N-1}}(\log n)^{\frac{-1}{N-1}}]}d\rho \\
&= \omega_{N-1}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \rho^{N-1} e^{[\alpha_N(\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}})(\log\rho^{-1})^{\frac{N}{N-1}}(\log n)^{\frac{-1}{N-1}}\frac{\log n}{\log n}]}d\rho \\
&= \omega_{N-1}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \rho^{N-1} e^{[\alpha_N(\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}})(\log\rho^{-1})^{\frac{N}{N-1}}(\log n)^{\frac{-N}{N-1}}\log n]}d\rho.
\end{aligned}$$

Como $\alpha_N\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} = N$, obtemos

$$I_{n,2} = \omega_{N-1}\int_{\frac{1}{n}}^{1} \rho^{N-1} e^{[N(\log\rho^{-1})^{\frac{N}{N-1}}(\log n)^{\frac{-N}{N-1}}\log n]}d\rho.$$

Fazendo a mudança de variável $\tau = -\frac{\log\rho}{\log n}$, obtemos

$$\rho = \exp(-\tau\log n),$$

donde

$$d\rho = -\log n\exp(-\tau\log n)d\tau.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
I_{n,2} &= \omega_{N-1}\int_{1}^{0}[e^{(-\tau\log n)}]^{N-1}e^{[N\tau^{\frac{N}{N-1}}\log n]}[-\log n e^{(-\tau\log n)}]d\tau \\
&= \tfrac{\omega_{N-1}}{N}\int_0^1 N\log n[e^{(-\tau\log n)}]^N e^{[N\tau^{\frac{N}{N-1}}\log n]}d\tau \\
&= \tfrac{\omega_{N-1}}{N}\int_0^1 N\log n[e^{(-N\tau\log n)}]e^{[N\tau^{\frac{N}{N-1}}\log n]}d\tau \\
&= \tfrac{\omega_{N-1}}{N}\int_0^1 N\log n e^{[N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\tau)]}d\tau.
\end{aligned}$$

Das expressões de $I_{n,1}$ e $I_{n,2}$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_n &= \frac{\omega_{N-1}}{N} + \frac{\omega_{N-1}}{N}\int_0^1 N\log n e^{[N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\tau)]}d\tau \\
&= \tfrac{\omega_{N-1}}{N}\left\{1 + \int_0^1 N\log n e^{[N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\tau)]}d\tau\right\}.
\end{aligned}$$

Desde que

$$\begin{aligned}
t_n^N &\geq (\beta_0-\epsilon)\int_{B(x_0,r)} e^{(\alpha_0|t_nM_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx + \int_{B_n} t_nM_nf(x,t_nM_n)dx \\
&\quad -(\beta_0-\epsilon)\int_{B_n} e^{(\alpha_0|t_nM_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx,
\end{aligned}$$

tomando o limite quando $n\to\infty$, resulta que

$$(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1} \geq (\beta_0-\epsilon)\left(0+\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N[1+\lim_{n\to+\infty} N\log n\int_0^1 e^{[N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\tau)]}d\tau]-\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N\right).$$

O que implica

$$(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1} \geq (\beta_0-\epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N \lim_{n\to+\infty} N\log n\int_0^1 e^{[N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\tau)]}d\tau.$$

Por outro lado, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} N\log n\int_0^1 e^{[N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\tau)]}d\tau = N \quad \text{(veja Apêndice A)},$$

donde

$$(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1} \geq (\beta_0-\epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N N = (\beta_0-\epsilon)\omega_{N-1}r^N \quad , \quad \forall\epsilon>0.$$

Sendo ϵ arbitrário, obtemos

$$\beta_0 \leq \frac{1}{r^N}(\frac{N}{\alpha_0})^{N-1},$$

quando $\epsilon\to 0$. Contradizendo (1.21).

■

1.3 Propriedades da seqüência de Palais-Smale

De posse dos Lemas 1.1 e 1.2, temos que o funcional de energia satisfaz a geometria do Passo da Montanha. Então usamos o Princípio Variacional de Ekeland para obter uma seqüência de Palais-Smale (u_n) em $W_0^{1,N}(\Omega)$ num nível c, isto é,

$$I(u_n)\to c \quad \text{e} \quad I'(u_n)\to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$$

Agora, provaremos duas propriedades de convergência da seqüência (u_n) que serão essenciais para obtermos uma solução do problema (1.1).

Lema 1.5 *Seja $(u_n)\subseteq W_0^{1,N}(\Omega)$ uma seqüência de Palais-Smale, isto é,*

$$I(u_n)\to c \quad e \quad I'(u_n)\to 0 \quad \textit{quando} \quad n\to\infty.$$

Então existem uma subseqüência de (u_n), a qual também denotaremos por (u_n), e $u\in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que

(i) $f(x,u_n)\to f(x,u)$ em $L^1(\Omega)$;
(ii) $|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2}\nabla u$ fracamente em $(L^{\frac{N}{(N-1)}}(\Omega))^N$.

Prova: (i) Seja $(u_n) \subseteq W_0^{1,N}(\Omega)$ uma seqüência de Palais-Smale no nível c, isto é,

$$\frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx \to c, \tag{1.25}$$

e

$$\left|\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u_n)v dx\right| \leq \epsilon_n \|v\|, \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega), \tag{1.26}$$

onde $\epsilon_n \to 0$ quando $n \to +\infty$.

Pela convergência em (1.25), existe $K > 0$ tal que

$$\frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx - \int_\Omega F(x,u_n)dx \leq K. \tag{1.27}$$

Multiplicando (1.27) por θ e usando a estimativa (1.26), obtemos

$$\left(\frac{\theta}{N} - 1\right)\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx - \int_\Omega (\theta F(x,u_n) - f(x,u_n)u_n)dx \leq C + \epsilon_n \|u_n\|.$$

Afirmamos que (u_n) é uma seqüência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$.

De fato, por (1.15), existem constantes $R_0 > 0$, $\theta > N$ tais que para todo $u \geq R_0$ e para todo $x \in \Omega$, vale

$$\theta F(x,u) - uf(x,u) \leq 0.$$

Logo,

$$\left(\frac{\theta}{N} - 1\right)\|u_n\|^N \leq C + \epsilon_n \|u_n\|.$$

Desta estimativa, segue que (u_n) é limitada. Conseqüentemente,

$$\int_\Omega ||\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n|^{\frac{N}{N-1}} dx = \int_\Omega (|\nabla u_n|^{N-1})^{\frac{N}{N-1}} dx = \int_\Omega (|\nabla u_n|^N dx \leq C,$$

ou seja, $(|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n)$ é limitada em $(L^{\frac{N}{(N-1)}}(\Omega))^N$. Como (u_n) é limitada, segue das estimativas (1.27) e (1.26), que

$$\int_\Omega F(x,u_n)dx \leq C \quad \text{e} \quad \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx \leq C.$$

Além disso, como $W_0^{1,N}(\Omega)$ é um espaço reflexivo e está imerso compactamente em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1,\infty)$, existe uma subseqüência, que também denotaremos por (u_n) tal que

$$
\begin{array}{lll}
u_n \rightharpoonup u & \text{em} & W_0^{1,N}(\Omega) \\
u_n \to u & \text{em} & L^q(\Omega) \quad \text{para todo} \quad q \in [1, \infty), \\
u_n(x) \to u(x) & \text{quase sempre em} & \Omega.
\end{array}
$$

Agora, como uma conseqüência do próximo resultado de convergência (veja [14]), podemos concluir que $f(x, u_n) \to f(x, u)$ em $L^1(\Omega)$.

Lema 1.6 *Seja* (u_n) *em* $L^1(\Omega)$ *tal que* $u_n \to u$ *em* $L^1(\Omega)$ *e seja* f *uma função contínua. Então* $f(x, u_n) \to f(x, u)$ *em* $L^1(\Omega)$*, desde que* $f(x, u_n) \in L^1(\Omega)$ *e* $\int_\Omega |f(x, u_n(x))u_n(x)|dx \leq C_1$.

Prova: Pelo Lema de Brezis-Lieb (veja [7]), é suficiente provarmos que

$$
\int_\Omega |f(x, u_n)|dx \to \int_\Omega |f(x, u)|dx.
$$

Daí, seguiremos a prova feita no artigo de D.G. de Figueiredo, O. H. Miyagaki e B. Ruf (veja [14]). Desde que $f(x, u(x)) \in L^1(\Omega)$, dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$
\int_A |f(x, u)|dx \leq \epsilon,
$$

se $|A| \leq \delta$ e $A \subseteq \Omega$ é mensurável. Por outro lado, usando o fato que $u \in L^1(\Omega)$, existe $M_1 > 0$ tal que

$$
|\{x \in \Omega : |u(x)| \geq M_1\}| \leq \delta.
$$

Seja $M = \max\{M_1, C_1/\epsilon\}$. Denotemos por

$$
I_1 = \int_{|u_n| \geq M} |f(x, u_n)|dx, \quad I_2 = \int_{|u_n| < M} |f(x, u_n)|dx - \int_{|u| < M} |f(x, u)|dx \quad e
$$

$$
I_3 = \int_{|u| < M} |f(x, u)|dx.
$$

Notemos que

$$
\left| \int_\Omega |f(x, u_n)|dx - \int_\Omega |f(x, u)|dx \right| \leq I_1 + I_2 + I_3.
$$

Agora, vamos estimar estas integrais do lado direito da desigualdade acima. Com efeito,

$$
I_1 = \int_{|u_n| \geq M} |f(x, u_n)|dx = \int_{|u_n| \geq M} \frac{f(x, u_n)u_n}{|u_n|} dx \leq \frac{C_1}{M} \leq \epsilon,
$$

e pela escolha tomada acima, resulta que

$$
I_3 = \int_{|u| < M} |f(x, u)|dx \leq \epsilon.
$$

Além disso, afirmamos que

$$I_2 = \int_{|u_n|<M} |f(x,u_n)|dx - \int_{|u|<M} |f(x,u)|dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

De fato, a seqüência

$$g_n(x) = |f(x,u_n(x)|\mathcal{X}_{|u_n|<M} - |f(x,u(x))|\mathcal{X}_{|u|<M} \to 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Pois, $|g_n(x)| \leq |f(x,u(x))|$ se $|u_n| \geq M$ e $|g_n(x)| \leq C + |f(x,u(x))|$ se $|u_n(x)| < M$, onde $C = sup\{|f(x,t)| : x \in \overline{\Omega}, |t| < M\}$.

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue está provada a afirmação. Logo, das estimativas obtidas acima, segue o Lema.

$\blacksquare$

Agora, mostraremos o item (ii) do Lema 1.5. Desde que $(|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n)$ é limitada, então $|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n$ converge fracamente para uma função ν em $(L^{\frac{N}{(N-1)}}(\Omega))^N$. Sem perda de generalidade, podemos supor

$$|\nabla u_n|^N \rightharpoonup^* \mu \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{e}$$
$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup \nu \quad \text{fracamente em} \quad (L^{\frac{N}{(N-1)}}(\Omega))^N,$$

onde μ é uma medida não-negativa regular.

Sejam $\sigma > 0$ e $\mathcal{A}_\sigma = \{x \in \overline{\Omega} : \ \forall r > 0, \ \mu(B(x,r) \cap \overline{\Omega}) \geq \sigma\}$. Afirmamos que $\mathcal{A}_\sigma$ é um conjunto finito. De fato, suponha, por contradição, que existe uma seqüência de pontos distintos (x_k) em $\mathcal{A}_\sigma$. Desde que para todo $r > 0$ $\mu(B(x_k,r) \cap \overline{\Omega}) \geq \sigma$, então temos

$$k \leq \frac{\mu(A_\sigma)}{\sigma} \leq \frac{\mu(\Omega)}{\sigma},$$

o que implica que k é finito. Portanto $\mathcal{A}_\sigma = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$.

Consideremos $u \in W_0^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$. Pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser, existem constantes C_1, $C_2 > 0$ que dependem somente de N, tais que

$$\int_\Omega e^{(C_1(\frac{|u|}{\|\nabla u\|_N})^{\frac{N}{N-1}})} \leq C_2|supp(u)|. \tag{1.28}$$

Afirmação 1: Para todo subconjunto K relativamente compacto de $\overline{\Omega}\backslash\mathcal{A}_\sigma$, pela estimativa (1.9) e escolhendo $\sigma > 0$ tal que $\beta\sigma^{\frac{1}{N-1}} < C_1$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f(x,u_n(x))u_n(x)dx = \int_K f(x,u(x))u(x)dx.$$

De fato, sejam $x_0 \in K$ e $r_0 > 0$ tais que $\mu(B(x_0, 2r_0) \cap \Omega) < \sigma$. Considere uma função $\varphi \in C^\infty$ tal que $0 \leq \varphi(x) \leq 1$, $\varphi \equiv 1$ em $B(x_0, r_0) \cap \overline{\Omega}$ e $\varphi \equiv 0$ em $\overline{\Omega} \setminus B(x_0, 2r_0)$. Logo

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^N \varphi dx = \int_\Omega \varphi d\mu \leq \mu(B(x_0, 2r_0) \cap \overline{\Omega}) < \sigma.$$

Portanto, para n suficientemente grande e ϵ pequeno, temos

$$\int_{B(x_0,r_0)\cap\overline{\Omega}} |\nabla u_n|^N dx \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^N \varphi d\mu \leq (1-\epsilon)\sigma.$$

Outro fato importante é que

$$\int_{B(x_0,r_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x, u_n(x))|^q dx \leq C. \tag{1.29}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0,r_0)\cap\overline{\Omega}} |f(x, u_n(x)|^q dx &\leq C \int_\Omega e^{(\beta q |u_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx \\ &= C \int_\Omega e^{(\beta q \|\nabla u_n\|_N^{\frac{N}{N-1}} (\frac{|u_n|}{\|\nabla u_n\|_N})^{\frac{N}{N-1}})} dx \leq C. \end{aligned}$$

Escolhendo $q > 1$ suficientemente próximo de 1 e $\beta q \|\nabla u_n\|_N^{\frac{N}{N-1}} \leq \beta q \sigma^{\frac{1}{N-1}} \leq C_1$, pela estimativa (1.28), obtemos o resultado.

Agora, notemos que

$$\begin{aligned} &\int_{B(x_0,r_0/2)\cap\overline{\Omega}} |f(x, u_n)u_n - f(x,u)u| dx \\ &\leq \int_{B(x_0,r_0/2)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_n) - f(x,u)||u| + \int_{B(x_0,r_0/2)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_n)||u_n - u| dx. \end{aligned}$$

Nosso objetivo é mostrar que o lado direito da desigualdade anterior converge a zero.

Afirmação 2:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B(x_0,r_0/2)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_n) - f(x,u)||u| dx \to 0.$$

De fato, dado $\epsilon > 0$, sabemos que existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que

$$\|u - \varphi\| < \epsilon/2,$$

e pela imersão de Sobolev, temos

$$\|u - \varphi\|_s < \epsilon/2, \forall s \geq 1.$$

Por outro lado,

$$\int_\Omega |f(x,u_n)u - f(x,u)u|dx =$$
$$= \int_\Omega |f(x,u_n)u - f(x,u_n)\varphi + f(x,u_n)\varphi - f(x,u)\varphi + f(x,u)\varphi - f(x,u)u|dx$$
$$\leq \int_\Omega |f(x,u_n)||u-\varphi|dx + \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||\varphi|dx + \int_\Omega |f(x,u)||\varphi - u|dx.$$

Pela desigualdade Hölder e pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser, concluímos que

$$\int_\Omega |f(x,u_n)||u-\varphi|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x,u_n)|^q dx\right)^{1/q} \|u-\varphi\|_s < M\epsilon.$$

Usando o fato que $f(x,u_n) \to f(x,u)$ em $L^1(\Omega)$, segue que

$$\int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)||\varphi|dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_\Omega |f(x,u_n) - f(x,u)|dx \to 0.$$

Finalmente, é imediato ver que

$$\int_\Omega |f(x,u)||\varphi - u|dx \to 0.$$

E a afirmação está provada.

Continuando, pela desigualdade de Hölder e a estimativa (1.29), temos

$$\int_\Omega f(x,u_n)|u_n - u|dx \leq C\left(\int_\Omega |u_n - u|^{q'}dx\right)^{1/q'} \to 0 \text{ quando } n \to \infty.$$

Conseqüentemente,

$$\int_{B(x_0,r_0/2)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

e a afirmação 1 segue pela compacidade de K. Com efeito, consideremos $B(x,r_x)$ uma cobertura aberta de K tal que $\mu(B(x,r_x)\cap\overline{\Omega})) \geq \sigma$. Sendo K compacto, temos que $K \subseteq \cup_{i=1}^n B(x_i,r_i)$. Como

$$\int_{B(x_i,r_i/2)\cap\overline{\Omega}} |f(x,u_n)u_n - f(x,u)u|dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty, \quad \forall i = 1,2,...,n.$$

A afirmação 1 está provada.

Para concluírmos a prova de (ii), precisaremos mostrar mais uma afirmação.

Seja $\epsilon_0 > 0$ fixado, suficientemente pequeno, tal que $B(x_i, \epsilon_0) \cap B(x_j, \epsilon_0) = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\Omega_{\epsilon_0} = \{x \in \overline{\Omega} : \|x - x_j\| \geq \epsilon_0, j = 1, 2, \ldots, m\}$.

Afirmação 3:

$$\int_{\Omega_{\epsilon_0}} (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

De fato, sejam $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tais que $\varphi \equiv 1$ em $B(0, \frac{1}{2})$ e $\varphi \equiv 0$ em $\overline{\Omega} \setminus B(0,1)$. Definamos

$$\psi_\epsilon(x) = 1 - \sum_{j=1}^{m} \varphi(\frac{x - x_j}{\epsilon}).$$

Notemos que $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$, $\psi_\epsilon \equiv 1$ em $\overline{\Omega}_\epsilon = \overline{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^m B(x_j, \epsilon)$, $\psi_\epsilon \equiv 0$ em $\cup_{j=1}^m B(x_j, \frac{\epsilon}{2})$ e $\psi_\epsilon u_n$ é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$ para cada $\epsilon > 0$.

Usando (1.26) com $v = \psi_\epsilon u_n$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla(\psi_\epsilon u_n)dx - \int_\Omega f(x, u_n)\psi_\epsilon u_n dx \leq \epsilon_n \|\psi_\epsilon u_n\|,$$

donde

$$\int_\Omega [|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n[u_n \nabla\psi_\epsilon + \psi_\epsilon \nabla u_n] - f(x, u_n)\psi_\epsilon u_n]dx \leq \epsilon_n \|\psi_\epsilon u_n\|,$$

daí

$$\int_\Omega [|\nabla u_n|^N \psi_\epsilon + u_n|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla\psi_\epsilon - \psi_\epsilon f(x, u_n)u_n]dx \leq \epsilon_n \|\psi_\epsilon u_n\|. \qquad (1.30)$$

De maneira análoga, usando (1.26) com $v = -\psi_\epsilon u$, obtemos

$$\int_\Omega [-|\nabla u_n|^{N-2}\psi_\epsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u_n|^{N-2} u \nabla u_n \nabla\psi_\epsilon + \psi_\epsilon f(x, u_n)u]dx \leq \epsilon_n \|\psi_\epsilon u\|. \qquad (1.31)$$

Agora, usando o fato que a função $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida por $g(v) = |v|^N$, é convexa, temos que

$$0 \leq (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u).$$

Conseqüentemente,

$$0 \leq \int_{\overline{\Omega}_{\epsilon_0}} (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n) - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx$$
$$\leq \int_\Omega (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n) - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\psi_\epsilon dx,$$

a qual pode ser escrita como

$$0 \leq \int_\Omega [|\nabla u_n|^N \psi_\epsilon - |\nabla u_n|^{N-2}\psi_\epsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u|^{N-2}\psi_\epsilon \nabla u \nabla u_n + |\nabla u|^N \psi_\epsilon]dx \quad (1.32)$$

Portanto, de (1.30), (1.31) e (1.32), obtemos

$$0 \leq \int_\Omega [-|\nabla u_n|^{N-2}\psi_\epsilon + u_n|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla \psi_\epsilon - \psi_\epsilon f(x,u_n)u_n]dx + \epsilon_n \|\psi_\epsilon u_n\|$$
$$+ \int_\Omega [|\nabla u_n|^N \psi_\epsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u_n|^{N-2} u \nabla u_n \nabla \psi_\epsilon + \psi_\epsilon f(x,u_n)u]dx + \epsilon_n \|\psi_\epsilon u\|$$
$$+ \int_\Omega [|\nabla u_n|^N \psi_\epsilon - |\nabla u_n|^{N-2}\psi_\epsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u|^{N-2}\psi_\epsilon \nabla u \nabla u_n + |\nabla u|^N \psi_\epsilon]dx.$$

Daí, temos

$$0 \leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla \psi_\epsilon (u - u_n)dx + \int_\Omega \psi_\epsilon |\nabla u|^{N-2}\nabla u(\nabla u - \nabla u_n)dx \quad (1.33)$$
$$+ \int_\Omega \psi_\epsilon f(x,u_n)(u_n - u)dx + \epsilon_n \|\psi_\epsilon u\| + \epsilon_n \|\psi_\epsilon u_n\|.$$

Agora, vamos estimar cada integral em (1.33) separadamente. Sabemos que para $\delta > 0$ arbitrário, vale a desigualdade $ab \leq \delta a^{\frac{N}{N-1}} + C_\delta b^N$, onde $C_\delta = \delta^{1-N}$. Daí, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla \psi_\epsilon (u - u_n)dx \leq \int_\Omega ||\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla \psi_\epsilon (u - u_n)|dx$$
$$\leq \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2} \mid \nabla u_n \mid\mid \nabla \psi_\epsilon (u - u_n)|dx = \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-1} \mid \nabla \psi_\epsilon (u - u_n)|dx$$
$$\leq \delta \int_\Omega |\nabla u_n|^N dx + C_\delta \int_\Omega \mid \nabla \psi_\epsilon|^N |u - u_n|^N dx.$$

Pela desigualdade de Hölder, para $1/r + 1/s = 1$, e usando o fato que (u_n) é limitada, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla \psi_\epsilon (u - u_n)dx \leq \delta C + C_\delta (\int_\Omega |\nabla \psi_\epsilon|^{rN} dx)^{1/r} (\int_\Omega |u - u_n|^{sN} dx)^{1/s},$$

e desde que $u_n \to u$ em $L^{sN}(\Omega)$ e δ é arbitrário, segue que

$$\limsup_{n \to +\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla \psi_\epsilon (u - u_n)dx \leq 0. \quad (1.34)$$

Agora, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, temos

$$\int_\Omega \psi_\epsilon |\nabla u|^{N-2}\nabla u(\nabla u - \nabla u_n)dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.35}$$

De fato, o funcional linear $G : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$G(v) = \int_\Omega \psi_\epsilon |\nabla u|^N \nabla u \nabla v dx$$

é claramente contínuo, donde segue a afirmação. Afirmamos também, que

$$\int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u_n)(u_n - u)dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{1.36}$$

Com efeito, desde que

$$\begin{aligned}\int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u_n)(u_n - u)dx = &\int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u_n)u_n dx - \int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u)udx \\ &+ \int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u)udx - \int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u_n)udx,\end{aligned}$$

e aplicando a Afirmação 1 para função $g(x, u) = \psi_\epsilon(x)f(x, u)$ e considerando o conjunto $K = \overline{\Omega}_{\epsilon/2}$, obtemos

$$\int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u_n)u_n dx = \int_{\overline{\Omega}_{\epsilon/2}} \psi_\epsilon f(x, u_n)u_n dx \to \int_{\overline{\Omega}_{\epsilon/2}} \psi_\epsilon f(x, u)udx \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Conseqüentemente,

$$\int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u_n)u_n dx \to \int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u)udx \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Usando também que $f(x, u_n) \to f(x, u)$ em L^1, obtemos

$$\int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u_n)udx \to \int_\Omega \psi_\epsilon f(x, u)udx \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto, de (1.33), juntamente com as estimativas (1.34), (1.35) e (1.36), concluimos a Afirmação 2. Finalmente, para concluímos a demonstração do Lema 4, sendo ϵ_0 arbitrário, obtemos que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Deste resultado e do fato que a seqüência $(|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n)$ é limitada em $L^{N/(N-1)}(\Omega)$, a menos de subseqüência, temos que

$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2}\nabla u \quad \text{em} \quad L^{N/(N-1)}(\Omega).$$

E o Lema 1.5 está provado.

■

1.4 Resultado de existência

Já provamos no Lema 1.4 que (u_n) é uma seqüência limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e que

$$\int_\Omega F(x,u_n)dx \leq C \quad \text{e} \quad \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx \leq C.$$

Também, a menos de subsequência, temos que

$$\begin{array}{lll} u_n \rightharpoonup u_0 & \text{em} & W_0^{1,N}(\Omega) \\ u_n \to u_0 & \text{em} & L^q(\Omega) \quad \text{para todo} \quad q \in [1,\infty), \\ u_n(x) \to u_)(x) & \text{quase sempre em} & \Omega. \end{array}$$

Pela hipótese (f_2), $F(x,u_n) \leq Mf(x,u_n)$, para todo $u \geq R$, $x \in \Omega$ e no Lema 1.5 provamos que

$$f(x,u_n) \to f(x,u_0) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Observemos que, de modo análogo ao que foi demonstrado no Lema 1.5, temos que

$$F(x,u_n) \to F(x,u_0) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega). \tag{1.37}$$

Assim de (1.25) e (1.37), obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^N dx = N\left(c + \int_\Omega F(x,u_0)dx\right). \tag{1.38}$$

Agora, por (1.26) e pelo Lema 1.5, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{N-2}\nabla u_0 \nabla\varphi dx - \int_\Omega f(x,u_0)\varphi dx = 0 \quad , \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Por densidade, concluímos que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{N-2}\nabla u_0 \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u_0)v dx = 0 \quad , \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Portanto, u_0 é solução fraca do Problema (1.1).

Finalmente, vamos provar que u_0 é solução não-trivial. Para isto, suponhamos, por contradição, que $u_0 \equiv 0$. Por (1.38), temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega |\nabla u_n|^N dx = Nc.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, temos $\|u_n\|^N \leq Nc + \epsilon$, para n suficientemente grande. No entanto, pelo Lema 1.4 $c < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$. Escolhendo $q > 1$ suficientemente próximo de 1, podemos tomar $q\alpha_0\|u_n\|^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N$. Logo, pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser e pela estimativa (1.9) com $\beta = q\alpha_0$, obtemos

$$\int_\Omega |f(x,u_n(x))|^q dx \leq C\int_\Omega e^{(q\alpha_0|u_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx$$
$$= \int_\Omega e^{(q\alpha_0\|u_n\|^{\frac{N}{N-1}}(\frac{|u_n|}{\|u_n\|})^{\frac{N}{N-1}})}dx \leq C.$$
Usando esta estimativa e (1.26) com $v = u_n$, obtemos $u_n \to 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Com efeito,

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx \leq \epsilon_n\|u_n\| + \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx.$$
Como (u_n) é limitada, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx \leq \epsilon_n C_1 + \left(\int_\Omega |f(x,u_n(x))|^q dx\right)^{1/q}\left(\int_\Omega |u_n|^{q'}dx\right)^{1/q'},$$

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx \leq \epsilon_n C_1 + C_2\left(\int_\Omega |u_n|^{q'}dx\right)^{1/q'} \to 0,$$
pois $u_n \to 0$ em $L^{q'}(\Omega)$, e como ϵ_n é arbitrário, segue a afirmação. Mas isto é impossível, visto que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx = Nc,$$
e $c > 0$. Conseqüentemente, $u_0 \not\equiv 0$.

Afirmação: u_0 é não-negativa.

De fato, escrevendo $u_0 = u_0^+ - u_0^-$,

notemos que $f(x,u_0)u_0^- = 0$ quase sempre em Ω. Desde que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{N-2}\nabla u_0\nabla v dx = \int_\Omega f(x,u_0)v dx, \quad \text{para toda} \quad v \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

tomando $v = u_0^- \in W_0^{1,N}(\Omega)$, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^{N-2}\nabla u_0\nabla u_0^- dx = 0,$$
que implica $\|u_0^-\| = 0$, donde $u = u^+ \geq 0$.

Capítulo 2

Um problema não-homogêneo com crescimento crítico envolvendo o operador N-laplaciano

2.1 Introdução

Neste capítulo, discutiremos a existência e a multiplicidade de soluções fracas para a classe de problemas elípticos do capítulo anterior. Consideremos agora, o caso não-homogêneo, mais precisamente, estudaremos a seguinte classe de problemas

$$\begin{cases} -\Delta_N u = f(x,u) + h(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u \in W_0^{1,N}(\Omega), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $-\Delta_N u \equiv -div(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é o operador N-laplaciano, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave, a não-linearidade $f(x,u)$ tem crescimento crítico e $h(x) \in W^{-1,N'}(\Omega)$.

No capítulo anterior, estudamos a geometria do funcional associado ao problema (2.1) com $h \equiv 0$. Neste capítulo, veremos que muito daquela estrutura geométrica permanece válida. Novamente utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale em conjunto com algumas propriedades de convergência para obtermos soluções. Motivado também pelo interesse no estudo do sinal da solução, modificaremos um pouco, as hipóteses sobre a não-linearidade. Dentre estas hipóteses, destacamos principalmente as condições de simetria.

Para estudarmos o problema (2.1), consideraremos sobre a não-leneariade $f(x,u)$ as seguintes hipóteses:

(g_1) $f(x,u)$ tem crescimento crítico com expoente α_0, isto é

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{|f(x,u)|}{e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})}}=0,\quad \text{uniformemente para}\quad x\in\Omega,\quad \text{para todo}\quad \alpha>\alpha_0,$$

$$\lim_{|u|\to\infty}\frac{|f(x,u)|}{e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})}}=\infty,\quad \text{uniformemente para}\quad x\in\Omega,\quad \text{para todo}\quad \alpha<\alpha_0;$$

(g_2) $f(x,u)\in C(\overline{\Omega}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ e $f(x,0)\equiv 0$ para todo $x\in\Omega$;

(g_3) $f(x,u)\geq 0$ em $\Omega\times[0,+\infty)$ e $f(x,u)\leq 0$ em $\Omega\times(-\infty,0]$;

(g_4) Existem R, $M>0$ tais que para todo $|u|\geq R$ e $x\in\Omega$

$$0<F(x,u)\leq M|f(x,u)|.$$

(g_5) Além destas hipóteses, suponhamos que

$$\limsup_{u\to 0^+}\frac{NF(x,u)}{|u|^N}<\lambda_1,\quad \text{uniformemente para}\quad x\in\Omega,$$

onde λ_1 é o primeiro auto-valor do problema não-linear

$$-\Delta_N u=\lambda|u|^{N-2}u,\quad u\in W_0^{1,N}(\Omega).$$

É bem conhecido que λ_1 pode ser caracterizado variacionalmente como

$$\lambda_1=\inf\left\{\int_\Omega|\nabla u|^N dx : u\in W_0^{1,N}(\Omega),\int_\Omega|u|^N dx=1\right\}.$$

(g_6) Denotando por r o raio interno de Ω, vamos supor que

$$\liminf_{u\to+\infty} uf(x,u)e^{(-\alpha_0|u|^{\frac{N}{N-1}})}\geq\beta_0>\frac{1}{r^N}(\frac{N}{\alpha_0})^{N-1},\quad \text{uniformemente para}\quad x\in\Omega;$$

Em algumas situações, no lugar de (g_6), vamos considerar a seguinte hipótese:

(g_7) $\liminf_{u\to\pm\infty} uf(x,u)e^{(-\alpha_0|u|^{\frac{N}{N-1}})}\geq\beta_0>\frac{1}{r^N}(\frac{N}{\alpha_0})^{N-1}$, uniformemente para $x\in\Omega$.

Como foi demonstrado no Capítulo 1, seguem, destas hipóteses, os seguintes fatos:

Para qualquer $\beta>\alpha_0$, existe uma constante $C>0$ tal que

$$|f(x,u)| \leq Ce^{\beta|u|^{\frac{N}{N-1}}}, \quad \text{para todo} \quad x \in \Omega.$$

(g_8) Existe uma constante $C > 0$ tal que para todo $|u| \geq R$ e $x \in \Omega$

$$F(x,u) \geq Ce^{(\frac{1}{M}u)}.$$

(g_9) Existem $R_0 > 0$ e $\theta > N$ tais que para todo $|u| \geq R_0$ e $x \in \Omega$

$$\theta F(x,u) \leq uf(x,u).$$

(g_{10}) Destas estimativas, deduzimos também no Capítulo 1 para $q > N$ e fixados $\lambda < \lambda_1$ e $\beta > \alpha_0$, que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$F(x,u) \leq \frac{1}{N}\lambda|u|^N + C|u|^q e^{\beta|u|^{\frac{N}{N-1}}}.$$

Vejamos, agora, os principais resultados que trataremos neste capítulo.

Teorema 2.1 *Suponha que $f(x,u)$ é uma função com crescimento crítico satisfazendo as hipóteses (g_1) - (g_5). Então:*

(i) Existe uma constante $h^* > 0$ tal que para cada $h(x)$ com $0 < \|h\|_* < h^*$, o problema (2.1) possui uma solução de energia negativa.

(ii) Se $f(x,u)$ satisfaz também a hipótese (g_6) então existe uma constante $h^{**} > 0$, possivelmente menor do que h^* obtido em (i), tal que para cada $h(x)$ com $0 < \|h\|_* < h^{**}$, existe outra solução para o problema (2.1).

Teorema 2.2 *Assumindo as hipóteses do Teorema 2.1 e $h(x) \geq 0$ quase sempre em Ω, então as soluções em (i) e (ii) são não-negativas.*

Observação 2.1 *Se considerarmos $h(x) \leq 0$ as soluções são não-positivas.*

2.2 Formulação variacional

Consideremos o funcional energia $J : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N dx - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega hudx. \tag{2.2}$$

Usando a desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser (veja Apêndice A), temos que J está bem definido e $J \in C^1(W_0^{1,N}(\Omega), \mathbb{R})$ com derivada de Fréchet dada por

$$J'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)vdx - \int_\Omega hvdx, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Por uma solução fraca do problema (2.1), entendemos uma função $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ satisfazendo

$$\int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla v dx - \int_\Omega f(x,u)v dx - \int_\Omega hv dx = 0, \quad \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Assim, os pontos críticos de J são precisamente as soluções fracas do problema (2.1).

Conforme foi dito na introdução, uma das ferramentas que utilizaremos para encontrar pontos críticos para o funcional J é o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale. Desta forma, mostraremos nos próximos lemas, que este funcional satisfaz a *"geometria"* do passo da montanha.

Lema 2.1 *Sob as hipóteses* (g_1) - (g_5). *Existe uma constante* $h^* > 0$ *tal que, para cada* $h(x)$ *com* $\|h\|_* < h^*$, *existe* $\rho_h > 0$ *tal que o funcional* J *satisfaz*

$$J(u) > 0, \quad \textit{para todo} \quad u \in W_0^{1,N}(\Omega) \quad \textit{com} \quad \|u\| = \rho_h.$$

Prova: Fixados $\lambda < \lambda_1$ e $\beta > \alpha_0$, temos por (g_{10}) que

$$\begin{aligned} J(u) &\geq \frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N dx - \frac{\lambda}{N}\int_\Omega |u|^N dx - C_1 \int_\Omega e^{\beta|u|^{\frac{N}{N-1}}}|u|^q dx - \|h\|_*\|u\| \\ &\geq \tfrac{1}{N}(1-\tfrac{\lambda}{\lambda_1})\int_\Omega |\nabla u|^N dx - C_1\int_\Omega e^{\beta|u|^{\frac{N}{N-1}}}|u|^q dx - \|h\|_*\|u\|. \end{aligned}$$

Pela desigualdade de Hölder, para $1/r + 1/s = 1$, temos que

$$\int_\Omega e^{\beta|u|^{\frac{N}{N-1}}}|u|^q dx \leq \left(\int_\Omega e^{[r\beta\|u\|^{\frac{N}{N-1}}(\frac{|u|}{\|u\|})^{\frac{N}{N-1}}]}dx\right)^{1/r}\left(\int_\Omega |u|^{qs}dx\right)^{1/s}.$$

Escolhendo qualquer $r > 1$ tal que

$$r\beta\|u\|^{\frac{N}{N-1}} \leq \alpha_N, \tag{2.3}$$

podemos usar a desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser para obtermos

$$\int_\Omega e^{\beta|u|^{\frac{N}{N-1}}}|u|^q dx \leq C\left(\int_\Omega |u|^{qs}dx\right)^{1/s}.$$

Destas estimativas, segue que

$$J(u) \geq \frac{1}{N}(1-\frac{\lambda}{\lambda_1})\|u\|^N - C\|u\|_{qs}^q - \|h\|_*\|u\|.$$

Pela imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$, $t \in [1,\infty)$, existe $C_2 > 0$ tal que $C_2\|u\| \geq \|u\|_{qs}$. Conseqüentemente,

$$J(u) \geq \|u\| \left\{ \frac{1}{N}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})\|u\|^{N-1} - C_3\|u\|^{q-1} - \|h\|_* \right\}.$$

Tomando $\|u\| = \rho$, temos que

$$J(u) \geq \rho \left\{ \frac{1}{N}(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1})\rho^{N-1} - C_3\rho^{q-1} - \|h\|_* \right\}. \tag{2.4}$$

Desde que $q > N$, se escolhermos $\|h\|_*$ suficientemente pequeno, existe algum ρ_h tal que $J(u) > 0$ em $B(0, \rho_h)$.

■

Lema 2.2 *Sob as hipóteses* (g_1) - (g_5), *existe* $\eta > 0$ *suficientemente pequeno tal que*

$$\inf_{\|u\| \leq \eta} J(u) < 0.$$

Além disso, existem $\eta > 0$ *e* $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *com* $\|u\| = 1$ *tais que* $J(tu) < 0$ *para todo* $0 < t < \eta$.

Prova: Escolhendo $\widetilde{u} \in W_0^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|\widetilde{u}\| = 1$ e $\displaystyle\int_\Omega h\widetilde{u}dx > 0$, para $t > 0$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(J(t\widetilde{u})) &= \int_\Omega |\nabla(t\widetilde{u})|^{N-2}\nabla(t\widetilde{u})\nabla\widetilde{u}dx - \int_\Omega f(x, t\widetilde{u})\widetilde{u}dx - \int_\Omega h\widetilde{u}dx \\
&= t^{N-1}\int_\Omega |\nabla\widetilde{u}|^N dx - \int_\Omega f(x, t\widetilde{u})\widetilde{u}dx - \int_\Omega h\widetilde{u}dx \\
&= t^{N-1} - \int_\Omega f(x, t\widetilde{u})\widetilde{u}dx - \int_\Omega h\widetilde{u}dx.
\end{aligned}$$

Como $f(x, .)$ é uma função contínua e $f(x, 0) = 0$, existe $\eta > 0$ tal que $\frac{d}{dt}(J(t\widetilde{u})) < 0$ para todo $t < \eta$. Desde que $J(0) = 0$, segue que $J(t\widetilde{u}) < 0$ para todo $0 < t < \eta$.

■

Lema 2.3 *Sob as hipóteses* (g_1) - (g_5), *existe* $u_b \in W_0^{1,N}(\Omega)$ *com* $\|u_b\| > \rho_h$ *tal que*

$$J(u_b) < \inf_{\|u\| = \rho_h} J(u).$$

Prova: Da mesma forma como no Capítulo 1, pela hipótese (g_8) para $p > N$, temos que existem constantes C_1, $D_1 > 0$ tais que

$$F(x, u) \geq C_1 u^p - D_1, \quad \text{para todo} \quad u \geq 0.$$

Escolhendo $u \in W_0^{1,N}(\Omega) \setminus \{0\}$, obtemos

$$J(u) \leq \frac{t^N}{N}\int_\Omega |\nabla u|^N dx - C_1 t^p \int_\Omega |u|^p dx + D_1|\Omega| + t\|h\|_*\|u\|.$$

Fazendo $t \to \infty$, obtemos que $J(tu) \to -\infty$.

$\blacksquare$

Para obtermos propriedades importantes do funcional J, consideraremos, novamente a seqüência (M_n) definida no Capítulo 1. Para tanto, vamos reproduzir o Lema 1.4 do Capítulo 1.

Lema 2.4 *Suponha que $f(x,u)$ satisfaz a hipótese (g_6). Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^N}{N}\int_\Omega |\nabla M_n|^N - \int_\Omega F(x,tM_n)dx\right\} < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$

Considerando a hipótese (g_7) sobre a não-linearidade $f(x,u)$, segue do Lema 2.4, o seguinte corolário:

Corolário 2.1 *Suponha que $f(x,u)$ satisfaz (g_7). Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^N}{N}\int_\Omega |\nabla M_n|^N - \int_\Omega F(x,-tM_n)dx\right\} < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$

Análogamente ao que fizemos no Capítulo 1, mostraremos, no próximo lema, que o funcional J é limitado superiormente.

Lema 2.5 *(i) Se $f(x,u)$ satisfaz a hipótese (g_6) e $h(x) \geq 0$ quase sempre em Ω, então existe $\widetilde{u} \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que*

$$J^+(t\widetilde{u}), J(t\widetilde{u}) < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}, \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

(ii) Se $f(x,u)$ satisfaz a hipótese (g_7) e $h(x)$ tem qualquer sinal, então

$$J(t\widetilde{u}) < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}, \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Prova: (i) Seja $n \in \mathbb{N}$ dado pelo Lema 2.4. Desde que $\displaystyle\int_\Omega hM_n dx > 0$ e $F(x,tM_n) = F^+(x,tM_n)$, vale que

$$\begin{aligned} J^+(tM_n) = J(tM_n) &= \frac{t^N}{N}\|M_n\|^N - \int_\Omega F(x,tM_n)dx - t\int_\Omega hM_n dx \\ &\leq \tfrac{t^N}{N}\|M_n\|^N - \int_\Omega F(x,tM_n)dx \\ &< \tfrac{1}{N}(\tfrac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}. \end{aligned}$$

(ii) Supondo que $\displaystyle\int_\Omega hM_m dx < 0$ para $m > n$ e considerando a seqüência

$$s_n = \frac{t^N}{N}\int_\Omega |\nabla M_m|^N dx - \int_\Omega F(x,-tM_m)dx.$$

Temos, pelo Corolário 2.1 e para $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, que

$$\begin{aligned}\max_{t\geq 0} J(-tM_m) &= \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^N}{N}\|M_m\|^N - \int_\Omega F(x,-tM_m)dx + t\int_\Omega hM_m dx\right\}\\ &\leq \max_{t\geq 0}\left\{\frac{t^N}{N}\|M_m\|^N - \int_\Omega F(x,-tM_m)dx\right\}\\ &< \tfrac{1}{N}(\tfrac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.\end{aligned}$$

■

Observação 2.2 *Pela continuidade de $J(u)$, segue pelos Lemas 2.1 e 2.2, que*

$$-\infty < c_0 \equiv \inf\{J(u) : u \in W_0^{1,N}(\Omega), \|u\| \leq \rho_h\} < 0. \tag{2.5}$$

Mostraremos no próximo lema que este ínfimo c_0 pode ser atingindo. Além disso, o valor de $J(u)$, ao longo de um caminho do passo da montanha, pode ser controlado se restringirmos o tamanho da norma $\|h\|_*$.

Lema 2.6 *(i) Suponha que $f(x,u)$ satisfaz a hipótese (g_6) e $h(x) \geq 0$, ou*
(ii) Suponha que $h(x)$ tem qualquer sinal e $f(x,u)$ satisfaz a hipótese (g_7).

Então existe $h^{**} > 0$ tal que para todo $0 \leq h(x) \in W^{-1,N}(\Omega)$ com $0 < \|h\|_* < h^{**}$, existe $\widetilde{u} \in W_0^{1,N}(\Omega)$ com a seguinte propriedade:

Se as hipóteses de (i), são válidas, então

$$J^+(t\widetilde{u}), J(t\widetilde{u}) < c_0 + \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}, \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0,$$

Se as hipóteses de (ii), são válidas, então

$$J(t\widetilde{u}) < c_0 + \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}, \quad \textit{para todo} \quad t \geq 0.$$

Prova: Temos, pelo lema 2.1, que a origem é um mínimo local do funcional J quando $h \equiv 0$. Seja $\rho > 0$ escolhido de modo que

$$\frac{1}{N}\|u\|^N - \int_\Omega F(x,u)dx > \delta, \quad \text{com} \quad \|u\|^N = \rho.$$

Desta maneira, notemos que $J(u)$ permanece positivo sempre que $\|u\|^N = \rho$ e $\|h\|_* < \frac{\delta}{\rho}$. De fato,

$$\begin{aligned}J(u) &= \tfrac{1}{N}\|u\|^N - \int_\Omega F(x,u)dx - \int_\Omega hudx\\ &\geq \tfrac{1}{N}\|u\|^N - \int_\Omega F(x,u)dx - \|h\|_*\|u\| > 0.\end{aligned}$$

Então é possível estimar inferiormente $J(u)$ para um determinado número c_0 diminuindo a norma $\|h\|_*$ e, pelo Lema 2.1, temos que $\rho_h \to 0$ quando $\|h\|_* \to 0$. Conseqüentemente, o ínfimo de $J(u)$ em $B(0, \rho_h)$ está crescendo e $c_0 \to 0$ quando $\|h\|_* \to 0$. Daí, para concluirmos a parte (i), basta utilizar o Lema 2.5 (i) e para parte (ii) o Lema 2.5 (ii), donde obtemos

$$J^+(t\widetilde{u}), J(t\widetilde{u}) < [\frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1} - \epsilon] \quad \text{para algum} \quad \epsilon > 0.$$

Tomando h^{**} suficientemente pequeno, resulta que $c_0 > -\epsilon$ e daí segue o resultado. ∎

2.3 Propriedades da seqüência de Palais-Smale

Pelos Lemas 2.1, 2.2 e 2.3, podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale para um determinado nível positivo $c < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$.

Para obtermos uma solução fraca do problema (2.1), mostraremos algumas propriedades desta seqüência no seguinte lema:

Lema 2.7 *Seja (u_n) uma seqüência de Palais-Smale para J para um determinado nível c. Então existe uma subseqüência, a qual denotaremos novamente por (u_n), e $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tais que*

$$f(x, u_n) \to f(x, u) \quad em \quad L^1(\Omega) \tag{2.6}$$

$$F(x, u_n) \to F(x, u) \quad em \quad L^1(\Omega) \tag{2.7}$$

$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2}\nabla u \quad fracamente\ em \quad (L^{\frac{N}{(N-1)}}(\Omega))^N. \tag{2.8}$$

Prova: Seja (u_n) uma seqüência de Palais-Smale para um nível c, isto é,

$$\frac{1}{N}\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx - \int_\Omega F(x, u_n)dx - \int_\Omega h u_n dx \to c \tag{2.9}$$

e

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla v dx - \int_\Omega f(x, u_n)v dx - \int_\Omega h v dx \to 0, \forall v \in W_0^{1,N}(\Omega). \tag{2.10}$$

Afirmação 1: (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Com efeito, de (2.9) e (2.10), obtemos que

$$\left|(\frac{\theta}{N} - 1)\int_\Omega |\nabla u_n|^N dx - \int_\Omega [\theta F(x, u_n) - f(x, u_n)u_n]dx - (\theta - 1)\int_\Omega h u_n dx\right| \leq$$
$$C + \epsilon_n \|u_n\|.$$

Portanto,

$$\left|\left\{(\frac{\theta}{N}-1)\|u_n\|^{N-1}-(\theta-1)\|h\|_*\right\}\|u_n\|-\int_\Omega[\theta F(x,u_n)-f(x,u_n)u_n]dx\right|\leq$$
$$C+\epsilon_n\|u_n\|. \tag{2.11}$$

Usando a desigualdade (2.11) e a hipótese (g_9), de maneira análoga aos cálculos feitos no Capítulo 1, obtemos que (u_n) é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Logo,

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W_0^{1,N}(\Omega),$$

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad L^q(\Omega) \quad \text{, para todo} \quad q\in[1,\infty),$$

$$u_n(x)\to u(x) \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Sendo $\|u_n\|\leq K$ para todo n, temos que

$$-K\|h\|_*\leq\int_\Omega hu_n dx\leq K\|h\|_*,$$

e, conseqüentemente, por (2.9) e (2.10), obtemos

$$\int_\Omega F(x,u_n)dx\leq C \quad \text{e} \quad \int_\Omega f(x,u_n)u_n dx\leq C. \tag{2.12}$$

Afirmação 2: $f(x,u_n)\in L^1(\Omega)$, para todo $n\in\mathbb{N}$.

De fato, sendo (u_n) limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, segue pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser, que

$$|f(x,u_n)|\leq Ce^{\beta|u_n|^{\frac{N}{N-1}}}\in L^1(\Omega) \quad \text{para cada} \quad u_n\in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Conseqüentemente, pelo Lema 1.6 temos

$$f(x,u_n)\to f(x,u) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega).$$

Afirmação 3: $F(x,u_n)\to F(x,u) \quad \text{em} \quad L^1(\Omega)$.

Com efeito, pela hipótese (g_4), existe $r>0$ tal que

$$F(x,u_n)\leq r+Mf(x,u_n),$$

donde, obtemos

$$\int_\Omega F(x,u_n)u_n dx\leq\int_\Omega ru_n dx+\int_\Omega f(x,u_n)u_n dx.$$

O primeiro termo é limitado quando $u_n \to u$ em $L^1(\Omega)$ e o segundo termo é limitado pela desigualdade (2.12). Logo, $F(x, u_n)$ satisfaz as hipóteses do Lema 1.6. Portanto $F(x, u_n) \to F(x, u)$ em $L^1(\Omega)$.

Agora mostraremos a convergência (2.8). Sem perda de generalidade, podemos supor que

$$|\nabla u_n|^N \rightharpoonup^* \mu \quad \text{em} \quad \mathcal{D}'(\Omega) \quad \text{e}$$

$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup \nu \quad \text{fracamente em} \quad (L^{\frac{N}{(N-1)}}(\Omega))^N,$$

onde μ é uma medida não-negativa regular.

Consideremos $\sigma > 0$ e $\mathcal{A}_\sigma = \{x \in \overline{\Omega} \;:\; \forall r > 0 \;,\; \mu(B(x,r) \cap \overline{\Omega}) \geq \sigma\}$. Já sabemos que $\mathcal{A}_\sigma$ é um conjunto finito. Analogamente ao capítulo 1, temos também que escolhendo $\sigma > 0$ tal que $\beta\sigma^{\frac{1}{N-1}} < C_1$, então

$$\lim_{n\to\infty} \int_K f(x, u_n(x))u_n(x)dx = \int_K f(x, u(x))u(x)dx,$$

para todo subconjunto K relativamente compacto de $\overline{\Omega} \setminus \mathcal{A}_\sigma$.

Seja $\epsilon_0 > 0$ fixado, suficientemente pequeno, tal que $B(x_i, \epsilon_0) \cap B(x_j, \epsilon_0) = \emptyset$ se $i \neq j$ e $\Omega_{\epsilon_0} = \{x \in \overline{\Omega} : \|x - x_j\| \geq \epsilon_0, j = 1, 2, \ldots, m\}$.

Afirmação 4: $\lim_{n\to\infty} \displaystyle\int_{\Omega_{\epsilon_0}} (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx = 0.$

De fato, sejam $0 < \epsilon < \epsilon_0$, $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^N, [0,1])$ tais que $\varphi \equiv 1$ em $B(0, \frac{1}{2})$ e $\varphi \equiv 0$ em $\overline{\Omega} \setminus B(0,1)$ e definamos $\psi_\epsilon(x) = 1 - \sum_{j=1}^m \varphi(\frac{x - x_j}{\epsilon})$. Notemos que $0 \leq \psi_\epsilon \leq 1$, $\psi_\epsilon \equiv 1$ em $\overline{\Omega}_\epsilon = \overline{\Omega} \setminus \cup_{j=1}^m B(x_j, \epsilon)$, $\psi_\epsilon \equiv 0$ em $\cup_{j=1}^m B(x_j, \frac{\epsilon}{2})$ e $\psi_\epsilon u_n$ é limitada em $W_0^{1,N}(\Omega)$, para cada $\epsilon > 0$.

Usando (2.10) com $v = \psi_\epsilon u_n$, temos

$$\int_\Omega |\nabla u_n|^N \psi_\epsilon + u_n|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla\psi_\epsilon - \psi_\epsilon f(x, u_n)u_n dx - \int_\Omega h u_n \psi_\epsilon dx \leq \epsilon_n \|\psi_\epsilon u_n\|.$$

De maneira análoga, usando (2.10) com $v = -\psi_\epsilon u$, temos

$$\int_\Omega -|\nabla u_n|^N \psi_\epsilon \nabla u_n \nabla u - |\nabla u_n|^{N-2} u \nabla u_n \nabla\psi_\epsilon + \psi_\epsilon f(x, u_n)u dx + \int_\Omega h u dx \leq \epsilon_n \|\psi_\epsilon u\|.$$

Combinando estas duas últimas estimativas, obtemos

$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n) - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\psi_\epsilon dx \leq$$
$$\int_\Omega |\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla\psi_\epsilon(u-u_n)dx + \int_\Omega \psi_\epsilon|\nabla u|^{N-2}\nabla u(\nabla u - \nabla u_n)dx +$$
$$\int_\Omega \psi_\epsilon f(x,u_n)(u_n-u)dx + \int_\Omega h\psi_\epsilon(u_n-u)dx + \epsilon_n\|\psi_\epsilon u\| + \epsilon_n\|\psi_\epsilon u_n\|.$$

Usando o fato que a função $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, definida por $g(v) = |v|^N$, é convexa, obtemos que

$$0 \leq (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u).$$

Conseqüentemente,

$$0 \leq \int_{\overline{\Omega}_{\epsilon_0}} (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n) - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx \leq$$
$$\int_\Omega (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n) - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)\psi_\epsilon dx.$$

Então, basta mostrarmos a seguinte convergência

$$0 \leq \int_{\overline{\Omega}_{\epsilon_0}} (|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n) - |\nabla u|^{N-2}\nabla u)(\nabla u_n - \nabla u)dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$, pelos cálculos feitos no Lema 1.5 do Capítulo 1, falta apenas mostrarmos que

$$\int_\Omega h\psi_\epsilon(u_n-u)dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Com efeito,

$$\int_\Omega h\psi_\epsilon(u_n-u)dx \leq \|h\|_*\|u_n-u\|_N \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Desde que ϵ_0 é arbitrário, obtemos que

$$\nabla u_n(x) \to \nabla u(x), \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Desta convergência e usando que a seqüência $(|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n)$ é limitada $L^{N/(N-1)}(\Omega)$, a menos de subseqüência, temos que

$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2}\nabla u \quad \text{em} \quad L^{N/(N-1)}(\Omega).$$

O que completa a prova do lema.

■

Corolário 2.2 *Segue do Lema 2.7, que qualquer seqüência de Palais-Smale para J é limitada e converge fracamente para uma solução fraca do problema (2.1).*

Prova: Seja (u_n) uma seqüência de Palais-Smale para um nível $c < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$. Usando o Lema anterior e pelos feitos no Capítulo 1, obtemos, da equação (2.10), que

$$\int_\Omega |\nabla u_0|^N \nabla u_0 \nabla \varphi dx - \int_\Omega f(x, u_0)\varphi dx - \int_\Omega h\varphi dx = 0, \quad \text{para todo} \quad \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

ou seja, u_0 é solução fraca do problema (2.1). Desde que $h \not\equiv 0$, segue que $u_0 \not\equiv 0$.

■

Observação 2.3 *No capítulo 1, foi tratado o caso $h \equiv 0$ e mostramos que existe a convergência para uma solução não-trivial para um nível de energia limitado por $\frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$.*

Agora, demonstraremos um lema que nos permitirá obter solução para outros níveis de energia.

Lema 2.8 *Seja (u_n) uma seqüência de Palais-Smale para o funcional J, satisfazendo*

$$\liminf_{n\to\infty} \|u_n\| < (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{\frac{N-1}{N}}.$$

Então existe uma subseqüência de (u_n) que converge fortemente para uma solução u_0.

Prova: Seja (u_n) uma seqüência que satisfaz a hipótese do lema. Podemos extrair uma subseqüência, que denotaremos novamente por (u_n), tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n\| = \liminf_{n\to\infty} \|u_n\|.$$

Temos, pelo corolário 2.2, que (u_n) converge fracamente para u_0 que é uma solução do problema (2.1). Considerando a sequência $u_n = u_0 + w_n$, temos que $w_n \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$ e $w_n \to 0$ em $L^t(\Omega)$, $t \in [1, \infty)$.

Pelo Lema de Brezis-Lieb (veja [20]), a menos de subseqüência, temos

$$\|u_n\|^N = \|u_0\|^N + \|w_n\|^N + o(1).$$

Desde que $u_0 \in W_0^{1,N}(\Omega)$, temos pelo Lema 2.7, que

$$\int_\Omega f(x, u_n)u_0 dx \to \int_\Omega f(x, u_0)u_0 dx.$$

Desta convergência, obtemos

$$J'(u_n)u_n = J'(u_0)u_0 + \|w_n\|^N - \int_\Omega f(x, u_n)w_n dx + o(1).$$

Desde que $\lim_{n\to\infty} \|u_n\| < (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{\frac{N-1}{N}}$, podemos escolher $q > 1$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} q\alpha_0 \|u_n\|^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N.$$

Pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser, temos

$$\int_\Omega |f(x,u_n)|^q dx \leq C \int_\Omega e^{q\alpha_0 \|u_n\|^{\frac{N}{N-1}} |\frac{u_n}{\|u_n\|}|^{\frac{N}{N-1}}} dx \leq M.$$

Logo, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_\Omega f(x,u_n) w_n dx \leq \|f(x,u_n)\|_q \|w_n\|_{q'} \to 0.$$

Conseqüentemente, $\|w_n\| \to 0$, donde segue o resultado.

■

Agora, demonstraremos que J é semi-contínuo localmente.

Lema 2.9 *Para qualquer $\epsilon > 0$ fixado, considere B a bola em $W_0^{1,N}(\Omega)$ centrada na origem com raio $(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{\frac{N-1}{N}} - \epsilon$. O funcional J é semi-contínuo inferiormente em B.*

Prova: Já sabemos, que em B, o funcional J é limitado inferiormente. Seja $(u_n) \subset B$. Logo, temos que $u_n \rightharpoonup u_0 \in B$ e

$$J(u_n) - J(u_0) = \frac{1}{N}\|u_n\|^N - \frac{1}{N}\|u_0\|^N - \int_\Omega F(x,u_n)dx + \int_\Omega F(x,u_0)dx + o(1). \tag{2.13}$$

Já sabemos que $F(x,u_n) \to F(x,u_0)$ em $L^1(\Omega)$. Assim, pela semi-continuidade da norma, obtemos que

$$J(u_0) \leq \liminf_{n\to\infty} J(u_n).$$

■

2.4 Soluções generalizadas

Nesta seção, mostraremos que uma solução fraca do problema (2.1) pode ser obtida via minimização local próximo da origem. Para tanto, vamos utilizar o Princípio Variacional de Ekeland (veja [10], [13]) e o nível c_0 definido na equação (2.5).

Lema 2.10 *Para cada $h(x) \in W^{-1,N}(\Omega)$ com $0 < \|h\|_* \leq h^*$, existe uma solução u_0 do tipo mínimo, para o problema (2.1) no nível c_0. Além disso, quando $\|h\|_* \to 0$, temos $\|u_0\| \to 0$.*

Prova: Seja ρ_h o raio da bola dado pelo Lema 2.1. Utilizando a estimativa (2.3), dada na prova do Lema 2.1 e escolhendo $h^* > 0$ suficientemente pequeno de maneira que $\rho_h < (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{\frac{N-1}{N}}$, temos que $B(0, \rho_h) \subseteq W_0^{1,N}(\Omega)$ é um espaço métrico completo com a métrica

$$d(u_1, u_2) = \|u_1 - u_2\|.$$

Sendo o funcional J semi-contínuo inferiormente e limitado inferiormente neste conjunto, temos, pelo Princípio Variacional de Ekeland, que existe uma seqüência de Palais-Smale para o nível c_0 que minimiza J em $B(0, \rho_h)$. Além disso, podemos assumir que cada elemento desta seqüência minimiza (veja [10], [13])

$$\inf\{I(u) + \delta_n \|u_n - u\| : u \in \overline{B(0, \rho_h)}\}, \tag{2.14}$$

para algum $0 < \delta_n \to 0$ quando $n \to \infty$. Pelo Lema 2.2, temos que $J(u^*) < 0$ para algum $u^* \in B(0, \rho_h)$, quando $J(u_n) \to c_0 < 0$. Pela condição (2.14), temos que $J'(u_n) \to 0$ em $W^{-1,N'}(\Omega)$, o que prova a condição de Palais-Smale. Logo, pelo Lema 2.8, temos que esta seqüência converge fortemente para um mínimo, o qual também é solução do problema.

■

Lema 2.11 *(i) Vamos assumir que $h(x) \geq 0$ quase sempre em Ω e $f(x, u)$ satisfaça à hipótese (g_6), ou*
(ii) $h(x)$ tem qualquer sinal e $f(x, u)$ satisfaça à hipótese (g_7).
Então existe um número $h^{**} > 0$ de modo que, pelo Teorema do passo da montanha sem a condição de Palais-Smale, obtemos a existência de uma solução u_M para o problema (2.1) quando $\|h\|_* \leq h^{**}$.

Prova: Pelos Lemas 2.3 e 2.5, existe alguma $\widetilde{u} \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $J(t\widetilde{u}) < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$ para todo $t \geq 0$ e $J(\bar{t}\widetilde{u}) < 0$ para $\bar{t}$ grande. Conseqüentemente, usando o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, existe uma seqüência de Palais-Smale. Observe que para h^{**} apropriadamente pequeno, a energia desta seqüência se encontra abaixo do nível $c_0 + \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$. Pelo corolário 2.2, esta seqüência de Palais-Smale converge fracamente para uma solução fraca do problema (2.1). ■

Agora, enuciaremos o seguinte teorema

Teorema 2.3 *Seja $\{u_n : \|u_n\| = 1\}$ uma seqüência em $W_0^{1,N}(\Omega)$ convergindo fracamente para uma função não-nula u_0. Então, para cada $p < (1 - \|u_0\|)^{\frac{-1}{N-1}}$ temos*

$$\sup_n \int_\Omega e^{(p\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx < \infty. \tag{2.15}$$

Para prova deste teorema veja [22]. Este teorema melhora a desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser. Com efeito, seja $(u_n) \subseteq W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $\|u_n\| = 1$ e $u_n \rightharpoonup u_o \not\equiv 0$.

Se $u_n \nrightarrow u_0$ fortemente, então pelo Lema de Brezis-Lieb (veja [20]), a menos de subseqüência, temos

$$\|u_n\|^N = \|u_0\|^N + \|v_n\|^N + o(1),$$

onde $v_n \rightharpoonup 0$, mas $\lim_{n\to\infty} \|v_n\| > 0$.
Conseqüentemente, $\|u_0\| < 1$ e $(1 - \|u_0\|)^{\frac{-1}{N-1}} > 1$. Notemos que, se $u_n \rightharpoonup 0$ os dois resultados são equivalentes e se $u_n \to u_0$ então $(1 - \|u_0\|)^{\frac{-1}{N-1}} = \infty$ e $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega e^{(p\alpha_N |u_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx < \infty$ para qualquer $p > 0$.

Lema 2.12 *Para h^{**} escolhido suficientemente pequeno, as soluções obtidas, pelos Lemas 2.10 e 2.11, são distintas.*

Prova: Sejam (u_n) uma seqüência minimizante e (v_n) uma seqüência do passo da montanha tais que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \quad \text{e} \quad v_n \rightharpoonup u_M$$

$$J(u_n) \to c_0 < 0 \quad \text{e} \quad J(v_n) \to c_M > 0$$

$$J'(u_n)u_n \to 0 \quad \text{e} \quad J'(v_n)v_n \to 0.$$

Afirmação 1: $u_0 \neq u_M$.
De fato, suponha por contradição que $u_0 = u_M$. Então pelo Lema 2.7, temos que

$$J(u_n) = \frac{1}{N}\|u_n\|^N - \int_\Omega F(x, u_0)dx - \int_\Omega hu_0 dx + o(1) \to c_0$$

e

$$J(v_n) = \frac{1}{N}\|v_n\|^N - \int_\Omega F(x, u_0)dx - \int_\Omega hu_0 dx + o(1) \to c_M.$$

Destas equações, obtemos que

$$\|u_n\|^N - \|v_n\|^N \to N(c_0 - c_M) < 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.16}$$

Desde que u_n e v_n são ambas seqüências de Palais-Smale, temos que

$$J'(u_n)u_n = \int_\Omega |\nabla u_n|^N dx - \int_\Omega f(x, u_n)u_n dx - \int_\Omega hu_n dx \to 0$$

e

$$J'(v_n)v_n = \int_\Omega |\nabla v_n|^N dx - \int_\Omega f(x, v_n)v_n dx - \int_\Omega hv_n dx \to 0.$$

Logo,

$$(\|u_n\|^N - \|v_n\|^N) - \int_\Omega [f(x, u_n)u_n - f(x, u_n)v_n + f(x, u_n)v_n - f(x, v_n)v_n]dx$$
$$- \int_\Omega [h(u_n - u_0) - h(v_n - u_0)]dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{2.17}$$

Afirmação 2: $\displaystyle\int_\Omega f(x,u_n)(u_n - v_n)dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$
De fato, desde que $\|h\|_* \in (0,h^*)$ e a seqüência que minimiza (u_n) satisfaz a condição

$$\|u_n\| < (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{\frac{N-1}{N}},$$

temos escolhendo $q>1$, suficientemente próximo de 1, que

$$\int_\Omega |f(x,u_n)|^q dx \leq C\int_\Omega e^{(q\alpha_0\|u_n\|^{\frac{N}{N-1}}|\frac{u_n}{\|u_n\|}|^{\frac{N}{N-1}}} \leq C.$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ e $v_n \rightharpoonup u_0$, segue que $(u_n - v_n)\rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Logo

$$\int_\Omega f(x,u_n)(u_n-v_n)dx \leq \|f(x,u_n)\|_q\|u_n - v_n\|_{q'} \to 0.$$

Afirmação 3: $\displaystyle\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,v_n))v_n dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$

Seja $v_n = u_0 + w_n$, com $w_n \rightharpoonup 0$. Além disso, desde que v_n é uma seqüência do passo da montanha e $v_n \nrightarrow u_0$, temos que $\lim_{n\to\infty}\|w_n\| > 0$. Logo, podemos escrever a expressão acima da seguinte forma

$$\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,v_n))u_0 dx + \int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,v_n))w_n dx \to 0.$$

Já sabemos, pelo Lema 2.7, que $f(x,u_n)$ e $f(x,v_n)$ ambas convergem em $L^1(\Omega)$ para $f(x,u_0)$. Então falta apenas provarmos que o segundo termo converge a zero. Com efeito, temos que

$$\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,v_n))w_n dx = \int_\Omega f(x,u_n)w_n dx - \int_\Omega f(x,v_n)w_n dx.$$

Como $\|u_n\| < (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{\frac{N-1}{N}}$, segue das desigualdades de Hölder e Pohozaev-Trudinger-Moser, respectivamente, que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(x,u_n)w_n dx &\leq \|f(x,u_n)\|_q\|w_n\|_{q'}\\ &\leq \left\{C\int_\Omega e^{(q\alpha_0\|u_n\|^{\frac{N}{N-1}}|\frac{u_n}{\|u_n\|}|^{\frac{N}{N-1}}}\right\}^{1/q}\|w_n\|_{q'}\\ &\leq C\|w_n\|_{q'} \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

Logo, resta analisarmos a parcela $\displaystyle\int_\Omega f(x,v_n)w_n dx.$

Afirmação 4: $\displaystyle\int_\Omega f(x,v_n)w_n dx \to 0 \quad \text{quando} \quad n\to\infty.$

De fato, pelo Lema 2.6, se escolhermos o valor de h^{**} suficientemente pequeno, temos para n grande que

$$\begin{aligned} c_M - c_0 = J(v_n) - J(u_n) + o(1) &= \frac{1}{N}\|v_n\|^N - \frac{1}{N}\|u_n\|^N + o(1)\\ &= \tfrac{1}{N}\|v_n\|^N - \tfrac{1}{N}\|u_0\|^N + o(1)\\ &< \tfrac{1}{N}(\tfrac{\alpha_n}{\alpha_0})^{N-1}. \end{aligned}$$

Tomando $q>1$ de modo que para n grande, temos

$$\|v_n\|^N - \|u_o\|^N < (\frac{\alpha_n}{q\alpha_0})^{N-1},$$

segue que

$$q^{N-1}(\frac{\alpha_0}{\alpha_N})^{N-1} < \frac{1}{\|v_n\|^N - \|u_0\|^N},$$

o que implica

$$q\alpha_0\|v_n\|^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N(1 - \|\frac{u_0}{\|v_n\|}\|)^{\frac{-1}{N-1}}. \tag{2.18}$$

Definamos $U_n := \frac{v_n}{\|v_n\|}$. Logo $\|U_n\| = 1$ e $U_n \rightharpoonup U_0 = \frac{u_0}{\lim\|v_n\|}$. Assim, obtemos que $\|U_0\| < 1$.

Pelas desigualdades de Hölder e Pohozaev-Trudinger-Moser, obtemos

$$\begin{aligned} \int_\Omega f(x,v_n)w_n dx &\le \|f(x,v_n)\|_q \|w_n\|_{q'}\\ &\le C\left(\int_\Omega e^{(q\alpha_0\|v_n\|^{\frac{N}{N-1}}|\frac{v_n}{\|v_n\|}|^{\frac{N}{N-1}})}dx\right)^{1/q}\|w_n\|_{q'}. \end{aligned}$$

Por outro lado, podemos rescrever

$$\int_\Omega e^{(q\alpha_0\|v_n\|^{\frac{N}{N-1}}|\frac{v_n}{\|v_n\|}|^{\frac{N}{N-1}})}dx = \int_\Omega e^{(p\alpha_N|U_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx,$$

daí, pela estimativa (2.18), temos que o expoente p está no intervalo necessário para aplicarmos o Teorema 2.3. Assim, temos que $\|f(x,v_n)\|_q$ é limitada. Como $\|w_n\|_{q'} \to 0$, segue que $\int_\Omega[f(x,u_n)u_n - f(x,v_n)v_n]dx \to 0$. Portanto da expressão (2.17), obtemos que $\|u_n\|^N - \|v_n\|^N \to 0$. Mas isto contradiz (2.16), e portanto $u_0 \not\equiv u_M$, ou seja, as soluções são distintas. ■

Para concluirmos esta seção, basta observamos que a prova do Teorema 2.1 segue como conseqüência dos Lemas 2.10, 2.11 e 2.12.

2.5 Sinais das soluções

No Capítulo 1, as soluções obtidas para o problema (2.1) (o caso $h \equiv 0$) são não-negativas. Agora, vamos provar a existência também de uma solução não-positiva.

Teorema 2.4 *Suponha que $h \equiv 0$ e a hipótese (g_7). Então existe pelo menos uma solução não-negativa e uma não-positiva do problema (2.1).*

Prova: Vamos trabalhar com a parte positiva de $F(x,u)$ e simetrizar. Definamos

$$\overline{F}(x,u) = \begin{cases} F(x,u), & \text{se} \quad u \geq 0 \\ F(x,-u), & \text{se} \quad u < 0 \end{cases} \tag{2.19}$$

Definamos $\overline{f}$ de forma análoga e consideremos o funcional

$$\overline{J}(u) = \frac{1}{N}\|u\|^N - \int \overline{F}(x,u)dx.$$

O funcional $\overline{J}$ satisfaz a geometria requerida e as propriedades de convergência dos Lemas 2.1, 2.3, 2.4 e Observação 2.3. Assim pelo Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, obtemos uma solução não-trivial $\overline{u}$. Desde que $\overline{J}(\overline{u}) = \overline{J}(|\overline{u}|)$, podemos assumir que $\overline{u} = |\overline{u}| \geq 0$. Desde que J e $\overline{J}$ coincidem quando $\overline{u} \geq 0$, temos que $\overline{u}$ é uma solução do problema (2.1).

Para encontrarmos uma solução negativa, definamos

$$\underline{F}(x,u) = \begin{cases} F(x,-u) & \text{se} \quad u > 0 \\ F(x,u) & \text{se} \quad u \leq 0 \end{cases} \tag{2.20}$$

Com $\underline{f}$ e $\underline{J}$ definidos analogamente, as propriedades pertinentes de geometria e de convergência conduzem a solução não-trivial $\underline{u}$. Novamente, podemos considerar $\underline{u} \geq 0$ em Ω. Agora, para qualquer $v \in C_0^\infty(\Omega)$,

$$\underline{J}'(\underline{u})v = \int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{N-2}\nabla \underline{u}\nabla v dx - \int_\Omega \underline{f}(x,\underline{u})v dx$$

Desde que $\underline{u} \geq 0$, $\underline{f}(x,\underline{u}) = -f(x,-\underline{u})$, temos que

$$\int_\Omega |\nabla(-\underline{u})|^{N-2}\nabla(-\underline{u})\nabla v dx - \int_\Omega \underline{f}(x,-\underline{u})v dx = 0,$$

e assim $-\underline{u}$ é uma solução não-positiva. Desde que as soluções tem sinais opostos e são não-triviais, então são distintas.

■

Lema 2.13 *Suponha que $h(x) \geq 0$ e a hipótese (g_6), com $h(x)$ não-nula, então as duas soluções obtidas são positivas.*

Prova: Pelos Lemas 2.10, 2.11 e 2.12 os quais são válidos J^+, temos que o funcional J^+ tem dois pontos críticos.
Seja u um ponto crítico de J^+. Decomponha u em $u = u^+ - u^-$. Então, temos

$$(J^+)'(u)u^- = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla u^- dx - \int_\Omega f^+(x,u)u^- dx - \int_\Omega hu^- dx.$$

Além disso, $f^+(x,u)u^- = 0$ quase sempre em Ω, logo

$$-\|u^-\|^N - \int_\Omega hu^- dx = 0.$$

No entanto, $h(x)u^-(x) \geq 0$ quase sempre, o que implica $\|u^-\| = 0$. Conseqüentemente $u(x) \geq 0$ em Ω. ■

Lema 2.14 *Suponha que $h(x) \leq 0$ e a hipótese (g_7), com $h(x)$ não-nula, então existe pelo menos duas soluções negativas do problema (2.1).*

Prova: Assumindo a definição de $\underline{F}$ dada em (2.20), definamos

$$\underline{J}(u) = \frac{1}{N}\|u\|^N - \int_\Omega \underline{F}(x,u)dx + \int_\Omega hudx.$$

Desde que $-h(x) \geq 0$, temos que as hipóteses do Lema 2.13 são satisfeitas. Logo, temos duas soluções não-negativas para $\underline{J}'(u) = 0$. Considerando uma solução $\underline{u}$, pela construção de $\underline{F}$, temos que $\underline{f}(x,\underline{u}) = -f(x,-\underline{u})$, assim

$$\begin{aligned} -\underline{J}'(\underline{u})v &= -\int_\Omega |\nabla \underline{u}|^{N-2}\nabla \underline{u}\nabla v dx + \int_\Omega \underline{f}(x,\underline{u})vdx - \int_\Omega hvdx \\ &= \int_\Omega |-\nabla \underline{u}|^{N-2}(-\nabla \underline{u})\nabla v dx - \int_\Omega f(x,-\underline{u})vdx - \int_\Omega hvdx \\ &= J'(-\underline{u})v = 0. \end{aligned}$$

Isto demonstra o lema.

■

Observação 2.4 *Para a existência de soluções positivas com $h(x) \geq 0$ no Teorema 2.4, podemos substituir, no Lema 2.13, a hipótese (g_6) no lugar da hipótese (g_7). Além disso, podemos enfraquecer as hipóteses (g_4) e (g_5) da seguinte maneira: Existem $R > 0$ e $M > 0$ tais que para todo $u \geq R$ e $x \in \Omega$,*

$$0 < F(x,u) \leq Mf(x,u) \quad e$$

$$\limsup_{u \to 0^+} \frac{NF(x,u)}{|u|^N} < \lambda_1$$

respectivamente.

Capítulo 3

Um problema com crescimento crítico envolvendo o operador N-laplaciano em $\mathbb{R}^N$

3.1 Introdução

Da mesma forma como no Capítulo 1 utilizaremos o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale, para discutir a existência de soluções fracas não-negativas para a seguinte classe de problemas:

$$\begin{cases} -\Delta_N u + a(x)|u|^{N-2}u = f(x,u) \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N), \ u \geq 0, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde $-\Delta_N u \equiv -div(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é operador N-laplaciano, $a(x)$ é uma função contínua e coerciva, isto é, $a(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$ e a não-linearidade $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua com crescimento crítico e $f(x,0) \equiv 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Conseqüentemente, $u \equiv 0$ é solução do problema (3.1).

Neste capítulo, vamos trabalhar num domínio ilimitado, diferentemente do Capítulo 1 onde trabalhamos num domínio limitado.

Para estudarmos a existência de soluções para o problema (3.1), vamos considerar as seguintes hipóteses sobre a função $a(x)$:

(a_1) Existe uma constante $a_0 > 0$ tal que $a(x) \geq a_0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;
(a_2) $a(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

Por outro lado, motivados pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser e pelo Lema 3.1, assumiremos as seguintes hipóteses de crescimento sobre a não-linearidade $f(x,u)$:

(h_1) A função $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e para todo $(x, u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ tem-se

$$|f(x,u)| \leq b_1|u|^{N-1} + b_2[e^{(\alpha_0|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha_0, u)],$$

onde α_0, b_1, b_2 são constantes positivas e

$$S_{N-2} = \sum_{k=0}^{N-2} \frac{\alpha_0^k}{k!}|u|^{\frac{N}{N-1}k}.$$

Além disso, suponhamos que $f(x, u)$ satisfaz as seguintes hipóteses

(h_2) Existe uma constante $\mu > N$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u > 0$,

$$0 \leq \mu F(x,u) \equiv \mu \int_0^u f(x,t)dt \leq uf(x,u).$$

(h_3) Existem constantes R_0, $M_0 > 0$ tais que, para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u \geq R_0$,

$$0 < F(x,u) \leq M_0 f(x,u).$$

(h_4) $\lim_{u\to\infty} uf(x,u)e^{(-\alpha_0|u|^{\frac{N}{N-1}})} \geq \beta_0 > 0$ uniformemente em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^N$.

Novamente motivados, pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser temos o seguinte lema

Lema 3.1 *Se $N \geq 2$, $\alpha > 0$ e $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} [e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha, u)]dx < \infty. \tag{3.2}$$

Além disso, se $\|\nabla u\|_N^N \leq 1$, $\|u\|_N \leq M < \infty$ e $\alpha < \alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, então existe uma contante $C = C(N, M, \alpha)$, que depende somente de N, M e α, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} [e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha, u)]dx \leq C(N, M, \alpha). \tag{3.3}$$

Prova: Podemos assumir $u \geq 0$, desde que podemos substituir u por $|u|$ sem modificar a integral do gradiente. Aqui, vamos usar o método de simetrização de Schwarz. Resumiremos algumas de suas propriedades básicas (veja [20], [25]). Seja $1 \leq p \leq +\infty$ e $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $u \geq 0$. Existe uma única função não-negativa $u^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$, dita simetrização de Schwarz de u, tal que ela depende somente de $|x|$, é decrescente e satisfaz

$$|\{x : u^*(x) \geq \lambda\}| = |\{x : u(x) \geq \lambda\}| \quad \text{para todo} \quad \lambda > 0,$$

e existe $R_\lambda > 0$ tal que $\{x : u^*(x) \geq \lambda\}$ é a bola $B(0, R_\lambda)$ de raio R_λ centrada na origem. Além disso, suponha que $G : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função contínua crescente tal que $G(0) = 0$.

Então, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(u^*(x))dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(u(x))dx.$$

Ainda, se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ então $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.$$

Portanto, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} [e^{(\alpha|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha, u)]dx = \int_{\mathbb{R}^N} [e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha, u^*)]dx.$$

Para um determinado número real $r > 1$, temos

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} [e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha, u^*)]dx = \\
&= \int_{|x|\leq r} [e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha, u^*)]dx + \int_{|x|\geq r} [e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha, u^*)]dx \\
&\leq \int_{|x|\leq r} [e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}]dx + \int_{|x|\geq r} [e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha, u^*)]dx.
\end{aligned}$$

Consideremos as seguintes desigualdades que serão demonstradas no Apêndice

$$(u+v)^{\frac{N}{N-1}} \leq u^{\frac{N}{N-1}} + Au^{\frac{1}{N-1}}v + v^{\frac{N}{N-1}} \quad , \quad \forall u, v \geq 0. \tag{3.4}$$

onde A é constante positiva que depende de N e γ e γ' são números reais positivos tais que $\gamma + \gamma' = 1$. Então para todo $\epsilon > 0$

$$u^\gamma v^{\gamma'} \leq \epsilon u + \epsilon^{\frac{-\gamma}{\gamma'}} v \quad , \quad \forall u, v \geq 0. \tag{3.5}$$

Tomemos $v(x) = u^*(x) - u^*(rx_0)$, onde x_0 é um vetor fixo em $\mathbb{R}^N$. Note que $v \in W_0^{1,N}(B(0,r))$. Agora de (3.4) e (3.5), temos

$$|u^*|^{\frac{N}{N-1}} = |v + u^*(rx_0)|^{\frac{N}{N-1}} \leq v^{\frac{N}{N-1}} + Av^{\frac{1}{N-1}}u^*(rx_0) + u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}},$$

e

$$v^{\frac{1}{N-1}}u^*(rx_0) = (v^{\frac{N}{N-1}})^{\frac{1}{N}}(u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}})^{\frac{N-1}{N}} \leq \frac{\epsilon}{A}v^{\frac{N}{N-1}} + (\frac{\epsilon}{A})^{\frac{1}{1-N}}u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}},$$

donde

$$|u^*|^{\frac{N}{N-1}} \leq v^{\frac{N}{N-1}} + A[\frac{\epsilon}{A}v^{\frac{N}{N-1}} + (\frac{\epsilon}{A})^{\frac{1}{1-N}}u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}}] + u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}}.$$

Assim,

$$|u^*|^{\frac{N}{N-1}} \leq (1+\epsilon)v^{\frac{N}{N-1}} + K(\epsilon, N)u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}},$$

onde $K(\epsilon, N) = A^{\frac{N}{N-1}}\epsilon^{\frac{1}{1-N}} + 1$.

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_{|x|\leq r} e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}dx &\leq \int_{|x|\leq r} e^{[(1+\epsilon)v^{\frac{N}{N-1}}+K(\epsilon,N)u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}}]}dx \\
&= \int_{|x|\leq r} e^{[(1+\epsilon)v^{\frac{N}{N-1}}]}e^{[K(\epsilon,N)u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}}]}dx \\
&= e^{[K(\epsilon,N)u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}}]}\int_{|x|\leq r} e^{[(1+\epsilon)v^{\frac{N}{N-1}}]}dx,
\end{aligned}$$

que, pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser, implica

$$\int_{|x|\leq r}[e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}]dx < \infty, \quad \forall u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N), \quad \forall \alpha > 0. \tag{3.6}$$

Além disso, tomando $\epsilon > 0$ tal que $(1+\epsilon)\alpha < \alpha_N$, obtemos

$$\int_{|x|\leq r}[e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}]dx \leq C(N)\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N e^{[K(\epsilon,N)u^*(rx_0)^{\frac{N}{N-1}}]}. \tag{3.7}$$

Pelo Lema Radial IV.A (veja [20]), para todo $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|\nabla u\|_N^N \leq 1$ e $\|u\|_N \leq M$, vale

$$|u^*(x)| \leq |x|^{-1}(\frac{N}{\omega_{N-1}})^{\frac{1}{N}}\|u^*\|_N \quad , \quad \forall x \neq 0,$$

donde

$$|u^*(x)|^{\frac{N}{N-1}} \leq \left(r^{-1}\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}} M\right)^{\frac{N}{N-1}} = \left(\frac{NM^N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N-1}}\frac{1}{r^{\frac{N}{N-1}}}.$$

Pela desigualdade (3.7), obtemos

$$\int_{|x|\leq r}[e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}]dx \leq C(N)\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N e^{\left(\left(\frac{NM^N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N-1}}\frac{K(\epsilon,N)}{r^{\frac{N}{N-1}}}\right)}. \tag{3.8}$$

Por outro lado, temos

$$e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k},$$

e

$$S_{N-2}(\alpha, u^*) = \sum_{k=0}^{N-2}\frac{\alpha^k}{k!}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k},$$

e isto implica que

$$\int_{|x|\geq r}[e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}-S_{N-2}(\alpha,u^*)]dx, \tag{3.9}$$

é igual a,

$$\frac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}\int_{|x|\geq r}|u^*|^N dx+\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{|x|\geq r}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k}dx.$$

Agora, temos a seguinte estimativa

$$\int_{|x|\geq r}\frac{1}{|x|^{\frac{N}{N-1}k}}dx=\omega_{N-1}\int_r^{\infty}\frac{\rho^{N-1}}{\rho^{\frac{N}{N-1}k}}d\rho=\frac{\omega_{N-1}}{N-\frac{N}{N-1}k}\left((\lim_{\rho\to\infty}\rho^{N-\frac{N}{N-1}k})-r^{N-\frac{N}{N-1}k}\right)$$

$$=\frac{\omega_{N-1}}{\frac{N}{N-1}k-N}r^{N-\frac{N}{N-1}k}\leq\frac{\omega_{N-1}r^N}{r^{\frac{N}{N-1}k}}\quad,\quad\forall k\geq N.$$

Desta estimativa e pelo Lema Radial IV.A (veja [20]), temos

$$\begin{aligned}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{|x|\geq r}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k}dx&\leq\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{|x|\geq r}\left(|x|^{-1}\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\|u^*\|_N\right)^{\frac{N}{N-1}k}dx\\&=\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\left\{\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\|u^*\|_N\right\}^{\frac{N}{N-1}k}\int_{|x|\geq r}\frac{1}{|x|^{\frac{N}{N-1}k}}dx\\&\leq\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\left\{\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\|u^*\|_N\right\}^{\frac{N}{N-1}k}\left\{\frac{\omega_{N-1}r^N}{r^{\frac{N}{N-1}k}}\right\}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\int_{|x|\geq r}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k}dx\leq\frac{\omega_{N-1}}{r^N}\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\left\{\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\left(\frac{\|u^*\|_N}{r}\right)\right\}^{\frac{N}{N-1}k}. \tag{3.10}$$

Finalmente, de (3.6), (3.9) e (3.10), temos a existência da integral (3.2). Além disso, no caso que $\alpha<\alpha_N$ e $\|u\|_N\leq M$ e escolhendo $r=M(\frac{N}{\omega_{N-1}})^{\frac{1}{N}}$, temos

$$\begin{aligned}&\int_{|x|\geq r}[e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}-S_{N-2}(\alpha,u^*)]dx\\&\leq\tfrac{\alpha^{N-1}}{(N-1)!}M^N+\omega_{N-1}(M(\tfrac{N}{\omega_{N-1}})^{\frac{1}{N}})^N\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\left\{\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\frac{M}{M(\frac{N}{\omega_{N-1}})^{\frac{1}{N}}}\right\}^{\frac{N}{N-1}k}\\&\leq\tfrac{\alpha_N^{N-1}}{(N-1)!}NM^N+NM^N\sum_{k=N}^{\infty}\frac{\alpha_N^k}{k!}\\&\leq NM^N\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_N^k}{k!}=NM^N\exp(\alpha_N).\end{aligned}$$

Fazendo $r = M(\frac{N}{\omega_{N-1}})^{\frac{1}{N}}$ em (3.8), obtemos

$$\int_{|x|\leq r} [e^{(\alpha|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}]dx \leq C(N)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{\left\{\left(\frac{NM^N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N-1}} \frac{K(\epsilon,N)}{r^{\frac{N}{N-1}}}\right\}}$$

$$= C(N)M^N e^{(K(\epsilon,N))}.$$

Das duas últimas desigualdades, obtemos (3.3), o que prova o lema.

■

Agora, vamos definir um espaço de funções adequado, onde tornará possível a formulação variacional do problema (3.1). Consideremos o espaço de Sobolev $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ com sua norma usual

$$\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^N + |u|^N)dx\right)^{1/N}.$$

Seja $E \subseteq W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ o subespaço definido por

$$E = \left\{u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^N dx < \infty\right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^N + a(x)|u|^N)dx\right)^{1/N},$$

onde a função $a(x)$ é contínua e satisfaz as hipóteses (a_1) e (a_2).

Como conseqüência da hipótese (a_1) temos que o subespaço E está imerso continuamente em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$.

De fato,

$$\|u\|^N = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^N dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u|^N dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^N dx + \frac{1}{a_0}\int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^N dx$$

$$\leq K\|u\|_E^N.$$

Onde $K = \max\{1, \frac{1}{a_0}\}$. Este fato, juntamente com as imersões de Sobolev implicam que as seguintes imersões são contínuas

$$E \hookrightarrow W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N), \quad \text{para todo} \quad q \in [N,\infty).$$

Logo, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_N^N \leq C\|u\|_E^N.$$

Conseqüentemente,

$$\frac{1}{C} \leq \frac{\|u\|_E^N}{\|u\|_N^N}.$$

Além disso,

$$a_0 \leq \frac{\|u\|_E^N}{\|u\|_N^N},$$

donde deduzimos que

$$\lambda_1 = \inf_{0 \neq u \in E} \frac{\|u\|_E^N}{\|u\|_N^N} \geq a_0 > 0. \tag{3.11}$$

Agora, enunciaremos o principal resultado deste capítulo que trata da existência de soluções para o problema (3.1).

Teorema 3.1 *Assuma que as hipóteses* (a_1) - (a_2) *e* (h_1) - (h_4) *sejam satisfeitas. Além disso, suponha que*

(h_5) $\limsup_{u \to 0^+} \frac{NF(x,u)}{|u|^N} < \lambda_1$ *uniformemente para* $x \in \mathbb{R}^N$.

Então o problema (3.1) tem uma solução fraca não-trivial $u \in E$.

3.2 Formulação variacional

Como estamos interessados em soluções não-negativas, vamos definir

$$f(x,u) = 0, \quad \text{para todo} \quad (x,u) \in \mathbb{R}^N \times (-\infty, 0].$$

Temos, como conseqüência imediata das hipóteses (h_1) e (h_3), a seguinte estimativa

$$|F(x,u)| \leq b_3[e^{\alpha_1 |u|^{\frac{N}{N-1}}} - S_{N-2}(\alpha_1, u)], \quad \text{para todo} \quad (x,u) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \tag{3.12}$$

com constantes α_1, $b_3 > 0$. Portanto, aplicando o Lema 3.1, segue que $F(x,u) \in L^1(\mathbb{R}^N)$, para todo $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Conseqüentemente, o funcional $\mathcal{F} : E \to \mathbb{R}$ dado por

$$\mathcal{F}(u) = \frac{1}{N}\|u\|_E^N - \int_{\mathbb{R}^N} F(x,u)dx$$

está bem definido. Além disso, é fácil de ver que $\mathcal{F} \in C^1(E, \mathbb{R})$ e

$$\mathcal{F}'(u)v = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{N-2}uvdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)vdx, \forall v \in E.$$

Para isto, usa-se que para toda seqüência $(u_n) \subseteq W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ que converge fortemente em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, existe uma subseqüência (u_{n_k}) e existe $h \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_{n_k}(x)| \leq |h(x)|$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ (veja Apêndice A).

Por uma solução fraca do problema (2.1), entendemos uma função $u \in E$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla v dx + \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{N-2}uv dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v dx = 0, \forall v \in E.$$

Assim, os pontos críticos do funcional $\mathcal{F}$ são as soluções fracas do problema (3.1).

Para encontrarmos tais pontos críticos, vamos estudar a geometria do funcional $\mathcal{F}$.

Lema 3.2 *Suponha que as hipóteses* (a_1), (h_1) - (h_3) *são satisfeitas. Então para qualquer* $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ *com suporte compacto e* $u \geq 0$, *temos que* $\mathcal{F}(tu) \to -\infty$ *quando* $t \to \infty$.

Prova: Seja $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \setminus \{0\}$ com suporte compacto e $u \geq 0$. Pelas hipóteses (h_2) e (h_3), existem constantes c, $d > 0$ tais que

$$F(x,s) \geq cs^p - d, \quad \forall x \in supp(u), \forall s \in [0,+\infty) \quad \text{e} \quad p > N.$$

Com efeito, no Lema 1.1 demonstramos que $F(x,s) \geq cs^p$, quando $p > N$ e $s \in [R,\infty)$. Já para $s \in [0,R]$, basta considerar a função $F : supp(u) \times [0,R] \to \mathbb{R}$ definida num conjunto compacto. Sendo $F(x,u)$ contínua, podemos escolher $d > 0$ de modo que

$$F(x,s) \geq cs^p - d, \quad \forall x \in supp(u), \forall s \in [0,+\infty).$$

Portanto,

$$\mathcal{F}(tu) \leq \frac{t^N}{N}\|u\|_E^N - ct^p \int_{\mathbb{R}^N} u^p dx + d|supp(u)|,$$

o que implica $\mathcal{F}(tu) \to -\infty$ quando $t \to \infty$, pois $p > N$. ■

Lema 3.3 *Suponha que as hipóteses* (a_1), (h_1) *e* (h_5) *são satisfeitas. Então existem* α, $\rho > 0$ *tais que*

$$\mathcal{F}(u) \geq \alpha \quad se \quad \|u\|_E = \rho.$$

Prova: Por (h_5), existem ϵ, $\delta > 0$ tais que

$$F(x,u) \leq \frac{(\lambda_1 - \epsilon)}{N}|u|^N, \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{e para todo} \quad |u| \leq \delta. \tag{3.13}$$

Por outro lado, por um cálculo análogo do Lema 1.2, para $q > N$ e pela hipótese (h_1), existem constantes $C = C(q,\delta)$, $\beta > 0$ tais que

$$F(x,u) \leq C|u|^q[e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\beta,u)], \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N, |u| \geq \delta \tag{3.14}$$

Por (3.13) e (3.14), temos

$$F(x,u) \leq \frac{(\lambda_1-\epsilon)}{N}|u|^N + C|u|^q[e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\beta,u)], \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

Afirmamos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^q[e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\beta,u)]dx \leq C(\beta,N)\|u\|_E^q. \tag{3.15}$$

Esta afirmação será provada mais tarde.

Note que

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) &\geq \frac{1}{N}\|u\|_E^N - \int_{\mathbb{R}^N}\left\{\frac{(\lambda_1-\epsilon)}{N}|u|^N + C|u|^q[e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\beta,u)]\right\}dx \\
&= \tfrac{1}{N}\|u\|_E^N - \tfrac{(\lambda_1-\epsilon)}{N}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^N dx - C\int_{\mathbb{R}^N}[e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\beta,u)]dx.
\end{aligned}$$

Pela caracterização de λ_1 e por (3.15), e usando que E está imerso continuamente em $L^N(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(u) &\geq \tfrac{1}{N}\|u\|_E^N - \tfrac{(\lambda_1-\epsilon)}{N}\|u\|_{L^N}^N - C\|u\|_E^q \\
&\geq \tfrac{1}{N}\|u\|_E^N - \tfrac{(\lambda_1-\epsilon)}{N}\tfrac{\|u\|_E^N}{\lambda_1} - C\|u\|_E^q \\
&= \tfrac{1}{N}(1-\tfrac{\lambda_1-\epsilon}{\lambda_1})\|u\|_E^N - C\|u\|_E^q.
\end{aligned}$$

Desde que $\epsilon > 0$ e $N < q$, podemos escolher ρ, $\alpha > 0$ tais que $\mathcal{F}(u) \geq \alpha$ se $\|u\|_E = \rho$.

Agora, provaremos (3.15). Com efeito, como no Lema 3.1, usaremos o método de simetrização de Schwarz.
Seja $R(\beta,u) = e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\beta,u)$, daí, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} R(\beta,u)|u|^q dx = \int_{\mathbb{R}^N} R(\beta,u^*)|u^*|^q dx,$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} R(\beta,u^*)|u^*|^q dx = \int_{|x|\leq\sigma} R(\beta,u^*)|u^*|^q dx + \int_{|x|\geq\sigma} R(\beta,u^*)|u^*|^q dx,$$

onde σ é um número a ser determinado. Agora usando a desigualdade de Hölder, para $1/r + 1/s = 1$, obtemos

$$\int_{|x|\le\sigma} R(\beta,u^*)|u^*|^q dx \le \int_{|x|\le\sigma} e^{(\beta|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}|u^*|^q dx$$
$$\le \left(\int_{|x|\le\sigma} e^{(\beta r|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}|u^*|^q dx\right)^{1/r}\left(\int_{|x|\le\sigma}|u^*|^{qs}\right)^{1/s}.$$

Pelos cálculos já realizados na demonstração do Lema 3.1, temos

$$\int_{|x|\le\sigma} e^{(\beta r|u^*|^{\frac{N}{N-1}})}|u^*|^q dx \le C(\beta,N),$$

se $\|u\|_E \le M$, onde M é escolhido de forma que $\beta r M^{\frac{N}{N-1}} < \alpha_N$, temos pela imersão $E \hookrightarrow L^{qs}(\mathbb{R}^N)$, que

$$\int_{|x|\le\sigma} R(\beta,u^*)|u^*|^q dx \le C(\beta,N)\|u^*\|_E^q. \tag{3.16}$$

Por outro lado, usando novamente o Lema Radial IV.A (veja [20]), segue que

$$\int_{|x|\ge\sigma}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k}|u^*|^q dx \le \left(\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\|u^*\|_N\right)^{\frac{N}{N-1}k}\int_{|x|\ge\sigma}\frac{|u^*|^q}{|x|^{\frac{N}{N-1}k}}dx$$

$$\le \left(\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\|u^*\|_N\right)^{\frac{N}{N-1}k}\left(\int_{|x|\ge\sigma}\frac{1}{|x|^{\frac{N}{N-1}rk}}dx\right)^{\frac{1}{r}}\left(\int_{|x|\ge\sigma}|u^*|^{qs}dx\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Pelos cálculos feitos na demonstração do Lema 3.1, temos

$$\int_{|x|\ge\sigma}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k}|u^*|^q dx \le \left(\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\|u^*\|_N\right)^{\frac{N}{N-1}k}\left(\frac{\omega_{N-1}\sigma^N}{\sigma^{\frac{N}{N-1}rk}}\right)\|u\|_{qs}^q$$
$$\le \omega_{N-1}\sigma^N\left(\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{\frac{1}{N}}\|u^*\|_N\ \ \sigma^{-r}\right)^{\frac{N}{N-1}k}\|u\|_{qs}^q,$$

para todo $k > N$.

Escolhendo $\sigma^r = M_0(\frac{N}{\omega_{N-1}})^{\frac{1}{N}}$, onde $\|u\|_N \le M_0 = \lambda_1^{1/N}M$ e pela imersão $E \hookrightarrow W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{qs}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{|x|\ge\sigma}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k}|u^*|^q dx \le C(N,M)\|u\|_E^q. \tag{3.17}$$

Se $\|u^*\|_E^q \le M$, pelas imersões contínuas $E \hookrightarrow W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{Nr}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\int_{|x|\geq\sigma}|u^*|^N|u^*|^q dx \leq \left(\int_{|x|\geq\sigma}|u^*|^{Nr}\right)^{1/r}\left(\int_{|x|\geq\sigma}|u^*|^{qs}\right)^{1/s} \tag{3.18}$$
$$\leq \|u^*\|_{Nr}^N\|u^*\|_{qs}^q$$
$$\leq C(N,M)\|u\|_E^q.$$

Agora, pelo cálculo feito na demonstração do Lema 3.1, temos que

$$\int_{|x|\geq\sigma} R(\beta,u^*)dx|u^*|^q dx = \int_{|x|\geq\sigma}[e^{(\beta|u^*|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\beta,u^*)]|u^*|^q dx$$

$$= \frac{\beta^{N-1}}{(N-1)!}\int_{|x|\geq\sigma}|u^*|^N|u^*|^q dx + \sum_{k=N}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}\int_{|x|\geq\sigma}|u^*|^{\frac{N}{N-1}k}|u^*|^q dx.$$

Por (3.17) e (3.18), obtemos

$$\int_{|x|\geq\sigma} R(\beta,u^*)dx|u^*|^q dx \leq \frac{\beta^{N-1}}{(N-1)!}C(N,M)\|u\|_E^q + \sum_{k=N}^{\infty}\frac{\beta^k}{k!}C(N,M)\|u\|_E^q$$

$$\leq C(N,M)e^{\beta}\|u\|_E^q.$$

Logo,

$$\int_{|x|\geq\sigma} R(\beta,u^*)dx|u^*|^q dx \leq C(N,M)e^{\beta}\|u\|_E^q. \tag{3.19}$$

Finalmente, combinando (3.16) e (3.19), segue (3.15).

■

Consideremos novamente a seguinte seqüência de funções não-negativas

$$\widetilde{M}_n(x,x_0,r) = \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}}\begin{cases}(\log n)^{\frac{N-1}{N}} & se \quad |x|\leq r/n\\ \log(\dfrac{r}{|x|})/(\log n)^{\frac{1}{N}} & se \quad r/n\leq |x|\leq r\\ 0 & se \quad |x|\geq r.\end{cases}$$

Pelo Lema 1.3, sabemos que o suporte de $\widetilde{M}_n(x,r)$ é $B[x_0,r]$, $\widetilde{M}_n(x,r)\in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ e $\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx = 1$.

Agora, provaremos um lema que será fundamental para o desenvolvimento deste capítulo.

Lema 3.4

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}\int_{\mathbb{R}^N}|\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx\right)\leq C.$$

Prova:

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx = \int_{|x|\le r/n} |\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx + \int_{r/n\le|x|\le r} |\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx.$$

Note que

$$\int_{|x|\le r/n} |\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx = \int_{|x|\le r/n} |\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}}(\log n)^{\frac{N-1}{N}}|^N dx = \frac{(\log n)^{N-1}}{N}(\frac{r}{n})^N. \tag{3.20}$$

e

$$\int_{r/n\le|x|\le r} |\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx = \int_{r/n\le|x|\le r} \left|\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}}(\log r|x|^{-1})/(\log n)^{1/N}\right|^N dx$$

$$= \frac{\omega_{N-1}^{-1}}{\log n}\int_{r/n\le|x|\le r}(\log r|x|^{-1})^N dx.$$

Agora, vamos estimar esta última integral. Com efeito,

$$\frac{\omega_{N-1}^{-1}}{\log n}\int_{r/n\le|x|\le r}(\log r|x|^{-1})^N dx = \frac{1}{\log n}\int_{r/n}^{r}[\log(r\rho^{-1})]^N \rho^{N-1} d\rho.$$

Fazendo a substituição $u = \log(r\rho^{-1})$, obtemos

$$\frac{1}{\log n}\int_{r/n}^{r}[\log(r\rho^{-1})]^N \rho^{N-1} d\rho = \frac{r^N}{\log n}\int_0^{\log n} e^{-Nu}u^N du. \tag{3.21}$$

$$\le r^N(\log n)^{N-1}\int_0^{\log n} e^{-Nu} du$$

$$= r^N(\log n)^{N-1}\tfrac{1}{N}(1-e^{-N\log n})$$

$$= \tfrac{r^N}{N}(\log n)^{N-1}(\tfrac{n^N-1}{n^N}).$$

Logo, por (3.20), temos

$$\left(\frac{1}{\log n}\int_{|x|\le r/n} |\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx\right) \to 0 \;\; quando \;\; n\to\infty,$$

e por (3.21), temos

$$\left(\frac{1}{\log n}\int_{r/n\le|x|\le r} |\widetilde{M}_n(x,r)|^N dx\right) \to 0 \;\; quando \;\; n\to\infty,$$

o que prova o Lema. ■

Definamos a seqüência
$$M_n(x,r) = \frac{\widetilde{M}_n}{\|\widetilde{M}_n\|_E}.$$
Temos que
$$M_n^{\frac{N}{N-1}}(x,r) = \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n + d_n \quad \text{para todo} \quad |x| \leq r/n, \tag{3.22}$$
onde d_n é a seqüência definida por
$$d_n = \omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n \left(\frac{1}{\|\widetilde{M}_n\|_E^{N/(N-1)}} - 1 \right).$$
Segue pelo lema anterior, que $d_n/\log n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Agora, analogamente ao que fizemos no Capítulo 1, demonstraremos um lema que dará uma limitação superior para o nível do passo da montanha. Este resultado será de fundamental importância para obtermos o resultado de existência de uma solução fraca não-trivial do problema (3.1).

Lema 3.5 *Sob as hipóteses* (a_1) *e* (h_1) - (h_5), *existe* $M_n(\cdot, r)$ *tal que*
$$\max\{I(tM_n) : t \geq 0\} < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$

Prova: Seja $r > 0$ fixado tal que
$$\beta_0 > \frac{1}{r^N}(\frac{N}{\alpha_0})^{N-1}. \tag{3.23}$$
Suponha, por contradição, que para todo $n \in \mathbb{N}$ temos
$$\max\{I(tM_n) : t \geq 0\} \geq \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$
Pelo Lema 3.2, dado $A > 0$, temos que $I(tM_n) < -A$ para todo $t > A$ e pelo Lema 3.3 existe $\delta > 0$ tal que $I(tM_n) \geq \delta$ para algum t. Consideremos a função $h : [0, \xi_n] \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = I(tM_n)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado, onde $[0, \xi_n]$ é escolhido de maneira que $I(tM_n) \geq 0$ para todo $t \in [0, \xi_n]$. Como h é uma função contínua definida num conjunto compacto, existe $t_n \in [0, \xi_n]$ tal que
$$h(t_n) = \max_{t \in [0,\xi_n]} h(t).$$
Logo, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n > 0$ tal que
$$I(t_n M_n) = \max\{I(tM_n) : t \geq 0\}.$$
Note que não podemos ter $t_n = 0$. Caso contrário, teríamos $I(t_n M_n) = 0$, contradizendo o fato que
$$\max\{I(tM_n) : t \geq 0\} \geq \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1} > 0.$$

Afirmação:
$$t_n^N \to (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}.$$
De fato, temos que
$$I(t_nM_n) = \frac{t_n^N}{N}\|M_n\|_E^N - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t_nM_n)dx.$$
Daí, usando que $\|M_n(\cdot, r)\|_E = 1$, obtemos
$$I(t_nM_n) = \frac{t_n^N}{N} - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, t_nM_n)dx \geq \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}. \tag{3.24}$$
Como $F(x, u) \geq 0$, segue que
$$t_n^N \geq (\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}. \tag{3.25}$$
Desde que $\frac{d}{dt}(I(tM_n)) = 0$ para $t = t_n$, temos
$$t_n^N = \int_{\mathbb{R}^N} t_nM_nf(x, t_nM_n)dx = \int_{|x|\leq r} t_nM_nf(x, t_nM_n)dx. \tag{3.26}$$
Por outro lado, por (h_5), dado $\epsilon > 0$ existe $R_\epsilon > 0$ tal que para todo $u \geq R_\epsilon$ e para todo $|x| \leq r$, vale
$$uf(x, u) \geq (\beta_0 - \epsilon)e^{(\alpha_0|u|^{\frac{N}{N-1}})}. \tag{3.27}$$
Observe que
$$t_n^N = \int_{|x|\leq r} t_nM_nf(x, t_nM_n)dx \geq \int_{|x|\leq \frac{r}{n}} t_nM_nf(x, t_nM_n)dx.$$
Por (3.26) e (3.27), quando $t_nM_n \geq R_\epsilon$ para $|x| \leq \frac{r}{n}$ e n suficientemente grande, temos
$$t_n^N \geq (\beta_0 - \epsilon)\int_{|x|\leq \frac{r}{n}} e^{(\alpha_0|t_nM_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx.$$
Daí, de forma análoga aos cálculos feitos no Lema 1.4, obtemos
$$t_n^N \geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N n^{-N} e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}[\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n + d_n])}.$$
Portanto,
$$e^{\ln t_n^N} \geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N e^{\ln n^{-N}} e^{(\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}[\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}} \log n + d_n])},$$
o que implica

$$1 \geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{\left(\frac{\alpha_0 N \log n}{\alpha_N} t_n^{\frac{N}{N-1}} + \alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} d_n - N \ln t_n - N \log n\right)}.$$

Logo,

$$\left(\frac{\alpha_0 N \log n}{\alpha_N} t_n^{\frac{N}{N-1}} + \alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} d_n - N \ln t_n - N \log n\right) \leq K,$$

se, e somente se,

$$\frac{\alpha_0 N \log n}{\alpha_N} t_n^{\frac{N}{N-1}} \left(1 + \frac{\alpha_N d_n}{N \log n} - \frac{\alpha_N \ln t_n}{\alpha_0 \log n \ t_n^{\frac{N}{N-1}}} - \frac{\alpha_N}{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}\right) \leq K.$$

Desta desigualdade, temos que (t_n) é limitada. Caso contrário, a menos de subseqüência, teríamos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_0 N \log n}{\alpha_N} t_n^{\frac{N}{N-1}} \left(1 + \frac{\alpha_N d_n}{N \log n} - \frac{\alpha_N \ln t_n}{\alpha_0 \log n \ t_n^{\frac{N}{N-1}}} - \frac{\alpha_N}{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}\right) \to \infty,$$

o que é uma contradição.

Além disso, afirmamos que

$$t_n^N \to \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{3.28}$$

Com efeito, como (t_n) é limitada, possui uma subseqüência convergente, a qual também denotaremos por (t_n). Por (3.25) temos

$$t_n^N \geq \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Suponhamos, por contradição, que

$$t_n \to t_0 > \left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{\frac{N-1}{N}},$$

ou seja,

$$\frac{\alpha_0 t_0^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1 > 0.$$

Como

$$t_n^N \geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{\left[\left(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1\right) N \log n + \alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} d_n\right]},$$

se tomarmos o limite quando $n \to \infty$, obtemos que

$$t_0^N \geq (\beta_0 - \epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N} r^N e^{\left[(\frac{\alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}}}{\alpha_N} - 1)N \log n + \alpha_0 t_n^{\frac{N}{N-1}} d_n\right]} \to \infty,$$

o que é uma contradição.

Agora, consideremos novamente os conjuntos

$$A_n = \{x \in B[0,r] : t_n M_n \geq R_\epsilon\} \quad \text{e} \quad B_n = B[0,r] \setminus A_n.$$

Usando (3.26) e (3.27), obtemos

$$\begin{aligned}
t_n^N &= \int_{|x|\leq r} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&= \int_{A_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx + \int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&\geq (\beta_0 - \epsilon) \int_{A_n} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx + \int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&= (\beta_0 - \epsilon) \int_{|x|\leq r} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx + \int_{B_n} t_n M_n f(x, t_n M_n) dx \\
&\quad -(\beta_0 - \epsilon) \int_{B_n} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} dx.
\end{aligned}$$

Note que $M_n(x) \to 0$ e $\mathcal{X}_{B_n}(x) \to 1$ quase sempre em $|x| \leq r$, quando $n \to \infty$. Em B_n vale que $t_n M_n \leq R_\epsilon$. Logo,

$$\mathcal{X}_{B_n} t_n M_n f(\cdot, t_n M_n) \leq R_\epsilon C e^{(\beta |R_\epsilon|^{\frac{N}{N-1}})} \in L^1(\Omega),$$

$$\mathcal{X}_{B_n}(x) t_n M_n(x) f(x, t_n M_n(x)) \to 0 \quad \text{quase sempre em} \quad B_n.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{B_n} t_n M_n(x) f(x, t_n M_n) dx \to 0.$$

Analogamente, temos

$$\mathcal{X}_{B_n} e^{(\alpha_0 |t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})} \leq \exp(\alpha_0 |R_\epsilon|^{\frac{N}{N-1}}) \in L^1(\Omega),$$

$$\mathcal{X}_{B_n}(x) e^{(\alpha_0 |t_n M_n(x)|^{\frac{N}{N-1}})} \to 1 \quad \text{quase sempre em} \quad B_n.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{B_n} e^{(\alpha_0 |t_n M_n(x)|^{\frac{N}{N-1}})} \to \frac{\omega_{N-1}}{N} r^N,$$

e por (3.25), obtemos

$$\int_{|x|\le r} e^{(\alpha_0|t_n M_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx \ge \int_{|x|\le r} e^{(\alpha_N|M_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx$$
$$= \int_{|x|\le \frac{r}{n}} e^{(\alpha_N|M_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx + \int_{\frac{r}{n}\le|x|\le r} e^{(\alpha_N|M_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx.$$

Agora, vamos trabalhar com estas integrais.

Desde que $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$, temos

$$\int_{|x|\le \frac{r}{n}} e^{(\alpha_N|M_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx = \int_{|x|\le \frac{r}{n}} e^{\left[\alpha_N\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}}(\log n)+\alpha_N d_n\right]}dx$$
$$= \int_{|x|\le \frac{r}{n}} e^{\left[\log n^{(\alpha_n\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}})}+\alpha_N d_n\right]}dx$$
$$= \tfrac{\omega_{N-1}}{N}(\tfrac{r}{n})^N e^{[N\log n+\alpha_N d_n]}$$
$$= \tfrac{\omega_{N-1}}{N}(\tfrac{r}{n})^N e^{\log n^{(N+\frac{\alpha_N d_n}{\log n})}}.$$
$$= \tfrac{\omega_{N-1}}{N}(\tfrac{r}{n})^N n^{(N+\frac{\alpha_N d_n}{\log n})}.$$
$$= \tfrac{\omega_{N-1}}{N} r^N n^{\frac{\alpha_N d_n}{\log n}},$$

donde, obtemos que

$$\int_{|x|\le \frac{r}{n}} e^{(\alpha_N|M_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx \to \frac{\omega_{N-1}}{N}r^N.$$

Agora, vamos calcular a segunda integral

$$I = \int_{\frac{r}{n}\le|x|\le r} e^{(\alpha_N|M_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx.$$

Temos que

$$I = \int_{\frac{r}{n}\le|x|\le r} e^{\alpha_N[\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N}}(\log n)^{\frac{-1}{N}}\log(r|x|^{-1})]^{\frac{N}{N-1}}\|\widetilde{M}_n\|_E^{\frac{-N}{N-1}}}dx.$$

Usando coordenadas esféricas, obtemos

$$I = \omega_{N-1}\int_{\frac{r}{n}}^{r} \rho^{N-1} e^{\alpha_N\omega_{N-1}^{\frac{-1}{N-1}}(\log n)^{\frac{-1}{N-1}}[\log(r\rho^{-1})]^{\frac{N}{N-1}}\|\widetilde{M}_n\|_E^{\frac{-N}{N-1}}}d\rho,$$

donde

$$I = \omega_{N-1}\int_{\frac{r}{n}}^{r} \rho^{N-1} e^{N\log n(\frac{\log(r\rho^{-1})}{\log n})^{\frac{N}{N-1}}\|\widetilde{M}_n\|_E^{\frac{-N}{N-1}}}d\rho.$$

Tomando $\tau = \frac{\log r\rho^{-1}}{\zeta_n \log n}$, segue que

$$\rho = re^{\tau\zeta_n \log n} \quad \text{e} \quad d\rho = -r\zeta_n(\log n)e^{-\tau\zeta_n \log n}d\tau$$

onde $\zeta_n = \|\widetilde{M_n}\|_E$.

Daí, fazendo as devidas substituições, obtemos

$$I = \omega_{N-1}r^N\zeta_n \log n \int_0^{\zeta_n^{-1}} e^{N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\zeta_n\tau)}d\tau$$

No Apêndice está provado que $\zeta_n N \log n \displaystyle\int_0^{\zeta_n^{-1}} e^{N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\zeta_n\tau)}d\tau \to N$ quando $n \to \infty$. Conseqüentemente,

$$\omega_{N-1}r^N\zeta_n \log n \int_0^{\zeta_n^{-1}} e^{N\log n(\tau^{\frac{N}{N-1}}-\zeta_n\tau)}d\tau \to \omega_{N-1}r^N.$$

Agora, para concluírmos a prova, desde que

$$\begin{aligned} t_n^N \geq (\beta_0 - \epsilon)\int_{|x|\leq r} e^{(\alpha_0|t_nM_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx + \int_{B_n} t_nM_nf(x,t_nM_n)dx \\ -(\beta_0-\epsilon)\int_{B_n} e^{(\alpha_0|t_nM_n|^{\frac{N}{N-1}})}dx. \end{aligned}$$

e fazendo o limite quando $n \to \infty$, obtemos

$$\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} \geq (\beta_0-\epsilon)[\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N + \omega_{N-1}r^N] - (\beta_0-\epsilon)\frac{\omega_{N-1}}{N}r^N.$$

Logo,

$$\left(\frac{\alpha_N}{\alpha_0}\right)^{N-1} \geq (\beta_0-\epsilon)\omega_{N-1}r^N,$$

o que implica

$$\beta_0 \leq \frac{1}{r^N}\left(\frac{N}{\alpha_0}\right)^{N-1}.$$

Isto contradiz (3.23).

■

3.3 Resultado de existência

Pelos lemas 3.2 e 3.3 podemos aplicar o Teorema do Passo da Montanha sem a condição de Palais-Smale para obtermos uma seqüência $(u_n) \subset E$ tal que $I(u_n) \rightarrow c$ e $I'(u_n) \rightarrow 0$, isto é,

$$\frac{1}{N}\|u\|_E^N - \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n)dx \rightarrow c \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty \tag{3.29}$$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} [|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \nabla v - a(x)|u_n|^{N-2}u_n v]dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)vdx \right| \leq \epsilon_n \|v\|_E, \tag{3.30}$$

para todo $v \in E$, onde $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, pelo Lema 3.5, temos que $c < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$.

Afirmação 1: A seqüência (u_n) converge para uma solução fraca não-trivial u do problema (3.1).

De fato, por (3.29), (3.30) e (h_2), procedendo de maneira análoga ao Lema 1.5, obtemos que

$$C + \epsilon_n\|u_n\|_E \geq \left(\frac{\mu}{N} - 1\right)\|u_n\|_E^N - \int_{\mathbb{R}^N} (\mu F(x, u_n) - f(x, u_n)u_n)dx.$$

Logo, temos

$$C + \epsilon_n\|u_n\|_E \geq \left(\frac{\mu}{N} - 1\right)\|u_n\|_E^N.$$

Esta estimativa, juntamente com (3.29) e (3.30), implica que

$$\|u_n\|_E \leq C, \quad \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u_n)u_n dx \leq C \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N} F(x, u_n)dx \leq C.$$

No Apêndice, mostrarmos que usando as imersões de Sobolev simultaneamente com as condições (a_1) e (a_2), o espaço E está imerso compactamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [N, +\infty)$. Conseqüetemente, a menos de subseqüência, temos

$$\begin{array}{ll} u_n \rightharpoonup u, & \text{fracamente em} \quad E, \\ u_n \rightarrow u, & \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N), \forall q \geq N \quad \text{e} \\ u_n(x) \rightarrow u(x), & \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^N. \end{array}$$

Além disso, de forma idêntica ao que foi demonstrado no Lema 1.5, temos, para todo $R > 0$, que

$$f(x, u_n) \rightarrow f(x, u) \quad \text{em} \quad L^1(B(0, R)), \tag{3.31}$$

$$|\nabla u_n|^{N-2}\nabla u_n \rightharpoonup |\nabla u|^{N-2}\nabla u \quad \text{fracamente em} \quad (L^{N/(N-1)}(B(0, R)))^N.$$

Portanto, por (3.30), tomando o limite quando $n \to \infty$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{N-2}u\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)\varphi dx, \forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N),$$

e, por densidade, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla v dx - \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^{N-2}uv dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x,u)v dx, \quad \forall v \in E.$$

Assim, u é solução fraca do problema (3.1).

Afirmação 2: u é solução não-trivial.

De fato, suponha por contradição, que $u \equiv 0$. Usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, a hipótese (h_3) e o primeiro resultado em (3.31), afirmamos que que $F(x,u_n) \to 0$ em $L^1(B(0,R))$ para todo $R > 0$.
Conseqüentemente, usando a estimativa (3.12) do Lema Radial IV.A ([20]), obtemos $F(x,u_n) \to 0$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$. Com efeito,

$$|F(x,u_n)| \leq b_3[e^{(\alpha_1|u_n|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha_1,u_n)].$$

De maneira análoga ao cálculo feito no lema 3.1, temos para $k \geq N$,

$$\int_{|x|\geq R} |F(x,u_n)|dx \leq \frac{\omega_{N-1}R^N}{R^{\frac{N}{N-1}k}} + \omega_{N-1}R^N \sum_{k=N}^{\infty} \frac{\alpha_1^k}{k!} \left(\left(\frac{N}{\omega_{N-1}}\right)^{1/N} \left(\frac{\|u_n\|_N}{R}\right)\right)^{\frac{N}{N-1}k},$$

que converge para zero quando $n \to \infty$ e $R \to \infty$. Este fato juntamente com (3.29) implica

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^N dx = Nc. \tag{3.32}$$

Portanto, dado $\epsilon > 0$ temos $\|u_n\|^N \leq Nc + \epsilon$ para n grande. Usando que $c < \frac{1}{N}(\frac{\alpha_N}{\alpha_0})^{N-1}$ e escolhendo $q > 1$ suficientemente próximo de 1 e ϵ suficientemente pequeno, obtemos $q\alpha_0\|u_n\| < \alpha_N$. Conseqüentemente, pelo mesmo argumento do lema 3.1, concluimos

$$\int_{\mathbb{R}^N} [e^{(\alpha|u_n|^{\frac{N}{N-1}})} - S_{N-2}(\alpha,u_n)]dx \leq C, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Isto juntamente com a desigualdade de Hölder e (h_1), implicam que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n)|u_n dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |f(x,u_n)|^q dx\right)^{1/q} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q'} dx\right)^{1/q'} \\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{q'} dx\right)^{1/q'}
\end{aligned}
$$

que converge a zero quando $n \to \infty$.

Portanto, de (3.30) com $v = u_n$, obtemos

$$
\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^N dx = 0,
$$

contradizendo (3.32), pois $c > 0$. Portanto, u é solução não-trivial. Por fim, pelo mesmo argumento usado no Capítulo 1, temos que $u \geq 0$.

Apêndice A

Resultados fundamentais

Neste apêndice, demonstraremos alguns resultados que foram usados nesta dissertação.

A.1 Desigualdades

Lema A.1.1 *Dado um número natural $N \geq 2$, temos que*

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^1 e^{n\left(t^{\frac{N}{N-1}}-t\right)} dt = N.$$

Prova: Dado $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que

$$n \int_0^1 e^{n\left(t^{\frac{N}{N-1}}-t\right)} dt = n \int_0^{\epsilon} e^{n\left(t^{\frac{N}{N-1}}-t\right)} dt + n \int_{\epsilon}^{1-\epsilon} e^{n\left(t^{\frac{N}{N-1}}-t\right)} dt + n \int_{1-\epsilon}^{1} e^{n\left(t^{\frac{N}{N-1}}-t\right)} dt.$$

Agora, vamos analisar estas integrais separadamente. Para tanto, consideremos a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = n(t^{\frac{N}{N-1}} - t)$. Notemos que $g'(0) = -n$ e $g'(1) = \frac{n}{N-1}$.

Pela expansão em Série de Taylor de g nos pontos $t = 0$ e $t = 1$, temos

$$g(t) = -nt + o(t) \quad \text{para} \quad t \in [0, \epsilon],$$

$$g(t) = \frac{n}{N-1}(t-1) + o(t) \quad \text{para} \quad t \in [1-\epsilon, 1].$$

Conseqüentemente, temos que

$$\lim_{n\to\infty} n \int_0^{\epsilon} e^{n(t^{\frac{N}{N-1}}-t)} dt = \lim_{n\to\infty} n \int_0^{\epsilon} e^{-nt} dt = 1$$

e

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{1-\epsilon}^{1} e^{n(t^{\frac{N}{N-1}}-t)} dt = \lim_{n\to\infty} n \int_{1-\epsilon}^{1} e^{\frac{n}{N-1}t - \frac{n}{N-1}} dt = N - 1.$$

Finalmente, afirmamos que

$$\lim_{n\to\infty} n\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} e^{n\left(t^{\frac{N}{N-1}}-t\right)}dt = 0.$$

De fato, para n fixado, existe $\xi_n \in (\epsilon, 1-\epsilon)$ tal que

$$n\int_{\epsilon}^{1-\epsilon} e^{n\left(t^{\frac{N}{N-1}}-t\right)}dt = ne^{n\left(\xi_n^{\frac{N}{N-1}}-\xi_n\right)}(1-2\epsilon).$$

A menos de subseqüência, temos que $\xi_n \to \xi$, com $\xi^{\frac{N}{N-1}} - \xi < 0$, pois $\xi \in [\epsilon, 1-\epsilon]$. Então segue que

$$\lim_{n\to\infty} ne^{n\left(\xi_n^{\frac{N}{N-1}}-\xi_n\right)}(1-2\epsilon) \to 0 \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo, destas três estimativas, segue a prova do lema.

■

Lema A.1.2 *Se* $1 \le p < \infty$ *e* $a \ge 0$, $b \ge 0$, *então*

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p) \tag{A.1}$$

Prova: Consideremos a função $h : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = t^p$. Para $1 \le p < \infty$ a função h é convexa. Logo, dados a, $b \ge 0$, temos

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^p \le \frac{a^p + b^p}{2},$$

o que implica

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

■

Lema A.1.3 *Para todo* u, $v \ge 0$, *temos que*

$$(u+v)^{\frac{N}{N-1}} \le u^{\frac{N}{N-1}} + Au^{\frac{1}{N-1}}v + v^{\frac{N}{N-1}},$$

onde A *é uma constante que depende somente de* N.

Prova: Se u ou v é igual a zero a desigualdade é óbvia. Então vamos estudar o caso $u > 0$ e $v > 0$. Para isto consideremos a função $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $h(t) = t^p$ com $p = N/(N-1)$.

Afirmação: $h(t)$ é uma função limitada.

De fato, pelo Teorema do valor Médio, temos que

$$\frac{(t+1)^p - t^p}{t^{p-1}} = \frac{p\ \theta_t^{p-1}}{t^{p-1}} \quad , \quad \text{com} \quad \theta_t \in (t, t+1).$$

Logo

$$\frac{(t+1)^p - t^p}{t^{p-1}} \leq \frac{p(t+1)^{p-1}}{t^{p-1}} = p\left(1+\frac{1}{t}\right). \tag{A.2}$$

Tomando o limite com $t \to \infty$ em (A.2), obtemos

$$\lim_{t\to\infty} h(t) \leq A(N).$$

Logo, $h(t)$ é uma função limitada. Calculando $h(u/v)$ e usando o fato de que $h(t)$ é limitada, temos que

$$\left[\left(\frac{u}{v}+1\right)^{\frac{N}{N-1}} - \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{N}{N-1}} - 1\right] / \left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{N-1}} \leq A,$$

o que implica

$$\frac{(u+v)^{\frac{N}{N-1}}}{v^{\frac{N}{N-1}}} - \frac{u^{\frac{N}{N-1}}}{v^{\frac{N}{N-1}}} - 1 \leq A\left(\frac{u}{v}\right)^{\frac{1}{N-1}}.$$

Multiplicando ambos os lados desta desigualdade por $v^{\frac{N}{N-1}}$, obtemos

$$(u+v)^{\frac{N}{N-1}} - u^{\frac{N}{N-1}} - v^{\frac{N}{N-1}} \leq A u^{\frac{1}{N-1}} v^{\frac{-1}{N-1}} v^{\frac{N}{N-1}},$$

donde

$$(u+v)^{\frac{N}{N-1}} \leq u^{\frac{N}{N-1}} + A u^{\frac{1}{N-1}} v + v^{\frac{N}{N-1}}.$$

■

Lema A.1.4 *Sejam γ e γ' números reais positivos tais que $\gamma + \gamma' = 1$. Então para todo $\epsilon > 0$, temos*

$$u^\gamma v^{\gamma'} \leq \epsilon u + \epsilon^{-\gamma'/\gamma} v, \quad \text{para todo} \quad u,\ v \geq 0.$$

Prova: Consideremos a função $g : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \epsilon t - t^\gamma + \epsilon^{-\gamma/\gamma'}.$$

Afirmamos que

$$\epsilon t - t^\gamma + \epsilon^{-\gamma/\gamma'} \geq 0. \tag{A.3}$$

De fato, $g(0) = \epsilon^{-\gamma/\gamma'}$, $\lim_{t\to\infty} g(t) \to \infty$ e $g'(t) = \epsilon - \gamma t^{\gamma-1} = 0$ se e, só se, $t = (\frac{\epsilon}{\gamma})^{1/\gamma'}$. Calculando $g((\frac{\epsilon}{\gamma})^{1/\gamma'})$, obtemos

$$\begin{aligned} g\left((\frac{\epsilon}{\gamma})^{1/\gamma'}\right) &= \epsilon\left(\frac{\epsilon}{\gamma}\right)^{1/\gamma'} + \epsilon^{-\gamma/\gamma'} - \left(\frac{\epsilon}{\gamma}\right)^{\gamma/\gamma'} \\ &= \epsilon^{-\gamma/\gamma'}\left(\frac{\epsilon^{2/\gamma'}}{\gamma^{\gamma'}} - \left(\frac{\epsilon^{2/\gamma'}}{\gamma^{\gamma'}}\right)^\gamma + 1\right) > 0, \end{aligned}$$

pois $0 < \gamma < 1$. Fazendo $t = u/v$ em (A.3), obtemos o resultado. ■

A.2 Funcionais diferenciáveis

Definição A.2.1 *Considere um funcional $I : E \to \mathbb{R}$, onde E é um espaço normado. O funcional I é Fréchet Diferenciável em $u \in E$, se existir $T : E \to \mathbb{R}$ funcional linear contínuo verificando*

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0} \frac{|I(u+\varphi) - I(u) - T(\varphi)|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Dizemos que o funcional $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ se a derivada de Fréchet de I existir e for contínua.

Observação A.2.1

1. A derivada de Gateaux é dada por

$$I'(u)\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{I(u+t\varphi) - I(u)}{t}.$$

2. Todo funcional Fréchet diferenciável é também Gateaux diferenciável.

Agora, nosso objetivo é obter a formulação variacional dos problemas abordados nos Capítulos 1 e 2, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta_N u = f(x,u) + h(x) \quad \text{em} \quad \Omega, \\ u \in W_0^{1,N}(\Omega), \;\; u \geq 0 \;, \end{cases} \tag{A.4}$$

onde $-\Delta_N u \equiv -div(|\nabla u|^{N-2}\nabla u)$ é o operador N-laplaciano, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ é um domínio limitado com fronteira suave, a não-linearidade $f(x,u)$ tem crescimento crítico e $h(x) \in W^{-1,N}(\Omega)$.

Com efeito, multiplicando o problema (A.4) por uma função teste $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, temos

$$-\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i})\varphi = f\varphi + h\varphi.$$

Integrando em Ω, obtemos

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi dx = \int_\Omega f\varphi dx + \int_\Omega h\varphi dx.$$

Mas,

$$-\int_\Omega \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi dx = -\sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi dx. \tag{A.5}$$

Daí, usando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$-\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\varphi dx=\sum_{i=1}^{N}\int_{\Omega}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx.$$

Logo,

$$\int_{\Omega}\sum_{i=1}^{N}\left(|\nabla u|^{N-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}dx=\int_{\Omega}|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla\varphi dx.$$

Portanto, por (A.5), temos

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla\varphi dx-\int_{\Omega}f(x,u)\varphi dx-\int_{\Omega}h\varphi dx=0,\quad \forall\varphi\in C_0^{\infty}(\Omega).$$

Por densidade, obtemos

$$\int_{\Omega}|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla v dx-\int_{\Omega}f(x,u)v dx-\int_{\Omega}hv dx=0,\quad \forall v\in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Agora, mostraremos que o funcional $I: W_0^{1,N}(\Omega)\to\mathbb{R}$ definido por

$$I(u)=\frac{1}{N}\|u\|^N-\int_{\Omega}F(x,u)dx-\int_{\Omega}hv dx,$$

está bem definido e $I\in C^1(W_0^{1,N}(\Omega),\mathbb{R})$, com derivada de Fréchet dada por

$$I'(u)v=\int_{\Omega}|\nabla u|^{N-2}\nabla u\nabla v dx-\int_{\Omega}f(x,u)v dx-\int_{\Omega}hv dx,\quad \forall v\in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Afirmação 1: O funcional I está bem definido.

De fato, a primeira parcela do funcional I corresponde a norma do espaço de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega)$.

Pela hipótese (f_2), existe $r>0$ tal que

$$F(x,u)\le r+Mf(x,u),\quad \text{para todo}\quad (x,u)\in\Omega\times\mathbb{R}.$$

Seja $u\in W_0^{1,N}(\Omega)$, desde que $f(x,u)\le Ce^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})}$ se $\beta>\alpha$, temos que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega}F(x,u)dx&\le r\int_{\Omega}dx+C\int_{\Omega}e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})}dx\\&=r|\Omega|+C\int_{\Omega}e^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})}dx.\end{aligned}$$

Logo, pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser, segue que

$$\int_\Omega F(x,u)dx < \infty.$$

Por fim, temos que

$$\int_\Omega hudx \leq \|h\|_* \|u\| < \infty.$$

Portanto, o funcional I está bem definido.

Afirmação 2: O funcional $I \in C^1(W_0^{1,N}(\Omega,\mathbb{R}))$.

Esta afirmação será demonstrada através dos seguintes lemas.

Lema A.1 *Se* $p \in [2,+\infty)$ *então*

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2} \quad \forall\, y,z \in \mathbb{R}^N, \ \textit{para algum } \beta \in \mathbb{R}.$$

Prova: Consideremos a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$f(t) = |y + t(z-y)|^{p-2}(y + t(z-y)), \quad com \quad p > 2.$$

Como

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)dt,$$

segue que

$$|f(1) - f(0)| \leq \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Além disso, desde que, para $t \in [0,1]$, vale

$$|y + t(z-y)| \leq |y| + t|z-y| \leq |y| + |z-y| \leq |y| + |z| + |y| \leq 2(|z|+|y|),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| &\leq |z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-2}\, dt \\
&+ (p-2)|z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-4} |(y+t(z-y))(y+t(z-y))|\, dt \\
&= (p-1)|z-y| \int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-2}\, dt \\
&\leq (p-1)|z-y| \int_0^1 [2(|z|+|y|)]^{p-2}\, dt \\
&= 2^{p-2}(p-1)|z-y|(|z|+|y|)^{p-2}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq 2^{p-2}(p-1)|z-y|(|z|+|y|)^{p-2} = \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2},$$

com $\beta = 2^{p-2}(p-1)$.
O caso $p = 2$ é imediato. ■

Lema A.2.1 *O funcional* $I_1 : W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definido por* $I_1(u) = \|u\|^N$ *é de classe* $C^1(W^{1,N}(\mathbb{R}^N), \mathbb{R})$ *com*

$$I_1'(u)v = N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v dx \quad \textit{para todo} \quad v \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N).$$

Prova: Já sabemos que I_1 está bem definido, pois corresponde a norma do espaço de Sobolev $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$.

(i) Existência da derivada de Gateaux de I_1.
Sejam u e $\varphi \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Defina $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = |\nabla u + t\nabla\varphi|^N$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (0,t)$ tal que $f(t) - f(0) = f'(t_0)t$. Podemos escrever $t_0 = \epsilon t$, onde $\epsilon \in (0,1)$. Temos

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N}(u_{x_i} + t\varphi_{x_i})^2\right)^{N/2} = N|\nabla u + t\nabla\varphi|^{N-2}(\nabla u + t\nabla\varphi, \nabla\varphi).$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{||\nabla u + t\nabla\varphi|^N - |\nabla u|^N|}{|t|} &= N\ |\nabla u + \varepsilon t\nabla\varphi|^{N-2}|(\nabla u + \varepsilon t\nabla\varphi, \nabla\varphi)| \\
&\leq N\ (|\nabla u| + |\nabla\varphi|)^{N-2}(|\nabla u| + |\nabla\varphi|)|\nabla\varphi| \\
&= N\ (|\nabla u| + |\nabla\varphi|)^{N-1}|\nabla\varphi|.
\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, para $1/N + 1/N' = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
N\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u| + |\nabla\varphi|)^{N-1}|\nabla\varphi|dx &\leq N\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u| + |\nabla\varphi|)^N dx\right)^{1/N'}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^N dx\right)^{1/N} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{I_1(u + t\varphi) - I_1(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla u + t\nabla\varphi|^N - |\nabla u|^N}{t}dx \\
&= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} N|\nabla u + \epsilon t\nabla\varphi|^{N-2}(\nabla u + \epsilon t\nabla\varphi, \nabla\varphi)dx \\
&= N\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{N-2}(\nabla u, \nabla\varphi)dx.
\end{aligned}$$

Escrevendo $I_1'(u)\varphi = \lim_{t\to 0} \dfrac{I_1(u+t\varphi) - I(u)}{t}$, temos $I_1'(u) : W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathbb{R}$ linear e limitado, pois

$$|I_1'(u)\varphi| \leq N \, \|u\|^{N/N'}\|\varphi\| = C_u\|\varphi\| \;\; \forall \, \varphi \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N,$$

onde C_u é uma constante que depende de u. Assim, I_1 é Gateaux-Diferenciável.

Agora consideremos o espaço produto $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^N L^{N'}(\mathbb{R}^N)$ munido da norma

$$[f]_{\mathcal{X}} = \left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{N'}^{N'}\right)^{1/N'}, \quad \text{para} \quad f = (f_1, \ldots, f_N) \in \mathcal{X}.$$

Definamos $h = (h_1, \ldots, h_N) : W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{X}$ por $h(u) = |\nabla u|^{N-2}\nabla u$, para $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Esta função está bem definida e é limitada, isto é, aplica conjuntos limitados de $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ em conjuntos limitados de $\mathcal{X}$. De fato, para $i = 1, \ldots, N$, temos:

$$\|h_i(u)\|_{N'}^{N'} = \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u|^{N-2} \frac{\partial u}{\partial x_i} \right|^{N'} \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{(N-1)N'} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^N = \|u\|^N.$$

Provemos que h é contínua. Pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, podemos encontrar uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$[h]_{\mathcal{X}}^{N'} \leq C_1 \int_{\mathbb{R}} |h|^{N'}, \qquad \forall \, h \in \mathcal{X}.$$

Como $N \geq 2$ e $u, v \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, pelo Lema A.1, temos

$$\begin{aligned}
[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}}^{N'} &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |h(u) - h(v)|^{N'} = C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u|^{N-2}\nabla u - |\nabla v|^{N-2}\nabla v \right|^{N'} \\
&\leq C_1 \beta^{N'} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^{N'} \left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{N'(N-2)}.
\end{aligned}$$

Como $|\nabla u - \nabla v|^{N'} \in L^{N/N'}(\mathbb{R}^N)$ e $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{N'(N-2)} \in L^{N/N'(N-2)}(\mathbb{R}^N)$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}}^{N'} &\leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^N\right)^{\frac{N'}{N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u| + |\nabla v|)^N\right)^{\frac{N'(N-2)}{N}} \\
&\leq C_2 \|\nabla u - \nabla v\|_N^{N'} \left(\|\nabla u\|_N + \|\nabla v\|_N\right)^{N'(N-2)} \\
&= C_2 \|u - v\|^{N'} \left(\|u\| + \|v\|\right)^{N'(N-2)},
\end{aligned}$$

implicando que

$$[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}} \leq C\|u - v\| \left(\|u\| + \|v\|\right)^{(N-2)}, \tag{A.6}$$

com $C > 0$ constante independente de u e v. Assim segue a continuidade de h.

(ii) Provemos agora que I_1 é Fréchet diferenciável em $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, com

$$I_1'(u)v = N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v dx. \tag{A.7}$$

Utilizando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
I_1(u+v) - I_1(u) - N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u + \nabla v|^N - |\nabla u|^N - N|\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} |\nabla u + t\nabla v|^N dt - \int_0^1 N |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v dt \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} |\nabla u + t\nabla v|^N dt - N|\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v \right) dt\ dx \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \left(N|\nabla u + t\nabla v|^{p-2} (\nabla u + t\nabla v) \nabla v - N|\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v \right) dx\ dt \\
&= N \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} (h(u+tv) - h(u)) \nabla v\ dx\ dt.
\end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade de Hölder e pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned}
\left| I_1(u+v) - I_1(u) - N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v \right| &\leq N \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |h(u+tv) - h(u)|\, |\nabla v| dx dt \\
&\leq N \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(u+tv) - h(u)|^{N'} dx \right)^{\frac{1}{N'}} \|\nabla v\|_N dt \\
&= N \|v\| \left(\int_0^1 \|h(u+tv) - h(u)\|_{N'} dt \right) \\
&\leq CN \|v\| \left(\int_0^1 [h(u+tv) - h(u)]_{\mathcal{X}} dt \right),
\end{aligned}$$

com a constante $C > 0$ independente de u e v. Logo,

$$\frac{\left| I_1(u+v) - I_1(u) - N \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2} \nabla u \nabla v \right|}{\|v\|} \leq CN \int_0^1 [h(u+tv) - h(u)]_{\mathcal{X}} dt.$$

Fazendo $v \to 0$ em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ na última desigualdade e aplicando o Teorema da Convergência de Lebesgue (pois h é contínua e limitada), concluímos que I_1 é Fréchet diferenciável e que (A.7) é válido.

(iii) Afirmamos agora que $I_1' : W^{1,N}(\mathbb{R}^N) \to W^{-1,N'}$ é contínuo. De fato, pela continuidade de h, é suficiente mostrarmos que

$$\|I_1'(u) - I_1'(v)\|_* \leq C[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}} \quad \forall u, v \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N), \tag{A.8}$$

onde $C > 0$ é uma constante independente de $u, v \in W_0^{1,N}$. Pela desigualdade de Hölder e pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, temos

$$
\begin{aligned}
|(I_1'(u) - I_1'(v), w)| &= N\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla w - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{N-2}\nabla v \nabla w\right| \\
&\leq N\int_{\mathbb{R}^N} \left|\left(|\nabla u|^{N-2}\nabla u - |\nabla v|^{N-2}\nabla v\right)\right| |\nabla w| \\
&= N\int_{\mathbb{R}^N} |h(u) - h(v)|\, |\nabla w| \\
&\leq N\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(u) - h(v)|^{N'}\right)^{\frac{1}{N'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^N\right)^{\frac{1}{N}} \\
&\leq NC\left(\sum_{i=1}^{N} \|h_i(u) - h_i(v)\|_{N'}^{N'}\right)^{\frac{1}{N'}} \|\nabla w\|_N \\
&= NC\,[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}}\, \|w\|
\end{aligned}
$$

para $u, v, w \in W_0^{1,N}$, provando assim (A.18), ou seja, I_1 é contínuo.

■

Corolário A.2.1 *O funcional $I_2 : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $I_2(u) = \frac{1}{N}\|u\|^N$ é de classe C^1 e*

$$I_2'(u)v = \int_\Omega |\nabla u|^{N-2}\nabla u \nabla v dx \quad \textit{para todo} \quad v \in W_0^{1,N}(\Omega).$$

Lema A.2.2 *O funcional $I_3 : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $I_3(u) = \displaystyle\int_\Omega F(x,u)dx$ é de classe C^1 e*

$$I_3'(u)v = \int_\Omega f(x,u)v dx \quad \textit{para todo} \quad v \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

onde $F(x,u) = \displaystyle\int_0^u f(x,s)ds.$

Prova: Seja $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$ fixada. Para cada $v \in W_0^{1,N}(\Omega)$ consideremos

$$r(v) = I_3(u+v) - I_3(v) - \int_\Omega f(x,u)v dx \tag{A.9}$$

Afirmamos que

$$\lim_{\|v\|\to 0} \frac{|r(v)|}{\|v\|} = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{\|v_n\|\to 0} \frac{|r(v_n)|}{\|v_n\|} = 0.$$

De fato, consideremos a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = F(x, u + tv_n)$. Note que g é contínua e $g'(t) = f(x, u + tv_n)v_n$. Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\int_0^1 g'(t)dt = g(1) - g(0).$$

Por outro lado, temos

$$\int_0^1 g'(t)dt = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F(x, u + tv_n))dt,$$

donde obtemos

$$F(x, u + v_n) - F(x, u) = \int_0^1 \frac{d}{dt}(F(x, u + tv_n))dt.$$

Mas

$$\frac{d}{dt}(F(x, u + tv_n)) = f(x, u + tv_n)v_n,$$

o que implica

$$F(x, u + v_n) - F(x, u) = \int_0^1 f(x, u + tv_n)v_n dt.$$

Conseqüentemente,

$$r(v_n) = \int_\Omega \left(\int_0^1 f(x, u + tv_n)v_n dt \right) dx - \int_\Omega f(x, u)v_n dx,$$

o que implica

$$r(v_n) = \int_\Omega \int_0^1 (f(x, u + tv_n) - f(x, u))v_n dt dx.$$

Logo,

$$|r(v_n)| \leq \int_\Omega \int_0^1 |f(x, u + tv_n) - f(x, u)||v_n| dt dx.$$

Aplicando o Teorema de Fubini, obtemos

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \int_\Omega |f(x, u + tv_n) - f(x, u)||v_n| dx dt,$$

e pela desigualdade de Hölder, para $1/r + 1/s = 1$, obtemos

$$|r(v_n)| \leq \int_0^1 \|f(., u + tv_n) - f(., u)\|_r \|v_n\|_s dt.$$

Usando a imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ para todo $t \in [1, \infty)$, obtemos

$$|r(v)| \leq C\|v_n\| \int_0^1 \|f(.,u+tv_n) - f(.,u)\|_r dt.$$

Notemos que

$$|f(x,u+tv_n) - f(x,u)|^r \leq [Ce^{(\beta|u+tv_n|^{\frac{N}{N-1}})} + Ce^{(\beta|u|^{\frac{N}{N-1}})}]^r,$$

o que implica

$$|f(x,u+tv_n) - f(x,u)|^r \leq C[e^{(\beta r|u+v_n|^{\frac{N}{N-1}})} + e^{(\beta r|u|^{\frac{N}{N-1}})}].$$

Usando o fato que para toda sequência (v_n) que converge fortemente em $W_0^{1,N}(\Omega)$ existem uma subsequência $(v_{n_k}) \subset W_0^{1,N}(\Omega)$ e $h \in W_0^{1,N}(\Omega)$ tal que $|v_{n_k}(x)| \leq |h(x)|$ quase sempre em Ω (veja **Proposição A.2.2**), temos que

$$|f(x,u+tv_{n_k}) - f(x,u)|^r \leq C[e^{(\beta r|u+h|^{\frac{N}{N-1}})} + e^{(\beta r|u|^{\frac{N}{N-1}})}].$$

Logo, pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser, temos que $|f(x,u+tv_{n_k}) - f(x,u)|^r \in L^1(\Omega)$, e pelas imersões de Sobolev, obtemos $u(x) + tv_{n_k}(x) \to u(x)$ quase sempre em Ω. Sendo f contínua, obtemos

$$|f(x,u(x)+tv_{n_k}(x)) - f(x,u(x))|^r \to 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \Omega.$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue

$$\|f(.,u+tv_{n_k}) - f(.,u)\|_r \to 0.$$

Desde que

$$\frac{r(v_{n_k})}{\|v_{n_k}\|} \leq C \int_0^1 \|f(\cdot,u(\cdot)+tv_{n_k}(\cdot)) - f(\cdot,u(\cdot))\|_r dt,$$

tomando o limite quando $\|v_{n_k}\| \to 0$, obtemos

$$\lim_{\|v_{n_k}\| \to 0} \frac{r(v_{n_k})}{\|v_{n_k}\|} = 0.$$

Agora, notemos que $I_3'(u) : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é linear e limitado, pois

$$|I_3'(u)v| \leq \int_\Omega |f(x,u)v|dx \leq \left(\int_\Omega |f(x,u)|^q dx\right)^{1/q} \|v\|_p,$$

e pela desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser e pela imersão de Sobolev $W_0^{1,N}(\Omega) \hookrightarrow L^t(\Omega)$ para todo $t \in [1,\infty)$, obtemos

$$|I_3'(u)v| \leq C\|v\|.$$

Para provarmos que $I_3'(u)$ é contínuo, seja $u_n \to u$ em $W_0^{1,N}(\Omega)$. Daí

$$\|I_3'(u_n) - I_3'(u)\|_* = \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left|\int_\Omega (f(x,u_n) - f(x,u))\varphi dx\right| \leq C\|f(.,u_n) - f(.,u)\|_r \|\varphi\|_s,$$

onde usamos a desigualdade de Hölder, para $1/r + 1/s = 1$. Pelas imersões de Sobolev, obtemos

$$\|I_3'(u_n) - I_3'(u)\| \leq C\|f(.,u_n) - f(.,u)\|_r.$$

Usando novamente a desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser e procedendo de forma análoga aos cálculos feitos acima, temos que

$$\|I_3'(u_n) - I_3'(u)\| \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto, $I_3'(u)$ é contínuo.

■

Proposição A.2.1 *O funcional $I_4 : W_0^{1,N}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $\int_\Omega hudx$ é de classe C^1 e*

$$I_4'(u)v = \int_\Omega hvdx, \quad \textit{para todo} \quad v \in W_0^{1,N}(\Omega),$$

onde $h \in W^{-1,N'}(\Omega)$.

Prova: É imediata, pois o funcional I_4 é linear e limitado. ■

Proposição A.2.2 *Suponha que (u_n) uma seqüência que converge fortemente em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Então existe um subseqüência (u_{n_k}) de (u_n) e existe $h \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ tal que $|u_{n_k}(x)| \leq h(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$.*

Prova: Seja (u_n) uma seqüência em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Então (u_n) é uma seqüência de Cauchy em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$, logo podemos extrair uma subseqüência (u_{n_k}) de (u_n) tal que

$$\|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\| \leq \frac{1}{2^k}, \quad \forall k \geq 1. \tag{A.10}$$

Ponhamos

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \big|u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)\big|,$$

então

$$\nabla g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \big|\nabla u_{n_{k+1}}(x) - \nabla u_{n_k}(x)\big|.$$

Destas expressões, obtemos

$$\|g_n\| \leq \sum_{k=1}^{n} \||u_{n_{k+1}} - u_{n_k}|\| = \sum_{k=1}^{n} \|u_{n_{k+1}} - u_{n_k}\|. \tag{A.11}$$

Logo, por (A.10) e (A.11), temos que

$$\|g_n\| \leq 1.$$

Conseqüentemente

$$\|g_n\|_N \leq 1 \quad e \quad \|\nabla g_n\|_N \leq 1.$$

Pelo Teorema da Convergência Monótona se deduz que quase sempre em $\mathbb{R}^N$, $g_n(x)$ converge a um limite, que se denota por $g(x)$, com $g \in L^N(\mathbb{R}^N)$. Além disso, afirmamos que $\|g_n - g\|_N \to 0$.

Com efeito,

$|g(x) - g_n(x)|^N \to 0$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$ e $|g(x) - g_n(x)|^N \leq 1$. Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue segue a afirmação.

Por outro lado, temos que (∇g_n) é uma seqüência limitada em $(L^N(\mathbb{R}^n))^N$, conseqüentemente $g \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ (veja [7], Capítulo IX, Nota 4.a).

Agora, notemos que para todo k se verifica

$$|u_{n_{k+j}}(x) - u_{n_k}(x)| \leq |u_{n_{k+j}}(x) - u_{n_{k+j-1}}(x)| + ... + |u_{n_{k+1}}(x) - u_{n_k}(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x).$$

Desta estimativa resulta que quase sempre em $\mathbb{R}^N$ $(u_{n_k}(x))$ é uma seqüência de Cauchy e converge quase sempre a um limite, que denotaremos por $u^*(x)$. Inicialmente é necessário distinguir u e u^*. Sabemos que $u_n \to u$ em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ e que $u_{n_k}(x) \to u^*(x)$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$.

Usando a estimativa

$$|u_{n_{k+j}}(x) - u_{n_k}(x)| \leq g(x) - g_{n-1}(x),$$

obtemos que

$$|u^*(x) - u_{n_k}(x)| \leq g(x) \quad \forall k, \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^N, \quad \text{com} \quad g \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N).$$

Pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, obtemos que

$$u^* \in L^N(\mathbb{R}^N) \quad \text{e} \quad \|u_{n_k} - u^*\|_N \to 0.$$

Como (u_{n_k}) é uma seqüência em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u_{n_k} - u^*\|_N \to 0$ e a seqüência (∇u_{n_k}) converge a um limite em $(L^N(\mathbb{R}^N))^N$, pois a seqüência (u_n) converge forte em $W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$. Segue-se então que $u^* \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ e $\|u_{n_k} - u^*\| \to 0$ (veja [7], Capítulo IX, Nota 4.a). Conseqüentemente, $u^* = u$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$. Como

$$|u_{n_k}(x)| \leq |u^*(x)| + g(x) \quad \forall k, \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^N.$$

Basta tomar $h = |u^*| + g$, para obtermos o resultado desejado.

■

A.3 Resultado de compacidade

Nesta seção, mostraremos que o espaço E definido por

$$E = \left\{ u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N) : \int_{\mathbb{R}^N} a(x)|u|^N dx < \infty \right\},$$

munino com a norma

$$\|u\|_E = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^N + a(x)|u|^N) dx \right)^{\frac{1}{N}}.$$

Está imerso compactamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $q \in [N, \infty)$.

A função $a(x)$ é contínua e satisfaz as seguintes hipóteses

(a_1) Existe um número real $a_0 > 0$ tal que $a(x) \geq a_0$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$,
(a_2) $a(x) \to \infty$ quando $|x| \to \infty$.

Vamos dividir a prova em algumas afirmações.

Afirmação 1: E é um espaço reflexivo.

De fato, consideremos o seguinte operador linear $T : E \to (L^N(\mathbb{R}^N)^N \times L^N(\mathbb{R}^N)$ definido por $T(u) = (\nabla u, a(x)^{\frac{1}{N}} u)$. Para simplificar a notação denotaremos $\mathcal{Z} = (L^N(\mathbb{R}^N))^N \times L^N(\mathbb{R}^N)$ munido da seguinte norma $\|(u,v)\|_{\mathcal{Z}} = (\|\nabla u\|_N^N + \|v\|_N^N)^{\frac{1}{N}}$. Temos que T é uma isometria de E em $\mathcal{Z}$, e portanto $T(E)$ é um subespaço fechado de $\mathcal{Z}$, resultando (proposição III.7 [7]) que $T(E)$ é reflexivo, e conseqüentemente E também é reflexivo.

Afirmação 2: $E \hookrightarrow L^N(\mathbb{R}^N)$ compactamente.

Com efeito, seja (u_n) uma sequência limitada em E, isto é, $\|u_n\|_E \leq C$, onde C é uma constante positiva. Desde que E é reflexivo, a menos de subsequência temos

$$u_n \rightharpoonup u \in E.$$

Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $u = 0$ e mostraremos que

$$u_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^N(\mathbb{R}^N).$$

De fato ,dado $\epsilon > 0$, pela hipótese em $a(x)$, existe $R > 0$ tal que $a(x) \geq NC^N/\epsilon$ para $|x| \geq R$.

Se $u \in W^{1,N}(\mathbb{R}^N)$ então $u|_{B(0,R)} \in W^{1,N}(B(0,R))$, em particular

$$u_n|_{B(0,R)} \rightharpoonup 0, \quad \text{pois} \quad W^{-1,N'}(B(0,R)) \subset W^{-1,N'}(\mathbb{R}^N).$$

Desde que $W^{1,N}(B(0,R))$ está imerso compactamente em $L^N(B(0,R)$, obtemos

$$u_n|_{B(0,R)} \to 0 \quad \text{em} \quad L^N(B(0,R)).$$

Logo existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_{B(0,R)} |u_n|^N dx \leq \frac{\epsilon}{2}, \forall n \geq n_0. \tag{A.12}$$

Pela escolha de $R > 0$, temos que

$$\frac{2}{\epsilon}\int_{B^c(0,R)} |u_n|^N dx \leq \int_{B^c(0,R)} \frac{a(x)}{C^N}|u_n|^N dx \leq \frac{1}{C^N}\|u_n\|_E^N \leq 1.$$

Daí

$$\int_{B^c(0,R)} |u_n|^N dx \leq \frac{\epsilon}{2}. \tag{A.13}$$

Logo, de (A.12) e (A.13), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^N dx \leq \epsilon, \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Portanto

$$u_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^N(\mathbb{R}^N).$$

Afirmação 3: $E \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N)$ compactamente para $N \leq q < \infty$.

De fato, usando a desigualdade de interpolação (veja [7]) temos

$$\|u_n\|_q \leq \|u_n\|_N^\alpha \|u_n\|_r^{1-\alpha}, \quad \text{onde} \quad \frac{1}{q} = \frac{\alpha}{N} + \frac{1-\alpha}{r}, \quad (0 \leq \alpha \leq 1);$$

Assumindo $0 < \alpha \leq 1$, temos $N \leq q < \infty$. Desde que E está imerso continuamente em $L^r(\mathbb{R}^N)$ para $N \leq r < \infty$, segue que

$$\|u_n\|_q \leq \|u_n\|_N^\alpha (C_1\|u_n\|_E)^{1-\alpha}, \quad C_1 > 0.$$

Como (u_n) é limitada em E e $u_n \to 0$ em $L^N(\mathbb{R}^N)$, concluimos que

$$u_n \to 0 \quad \text{em} \quad L^q(\mathbb{R}^N) \quad \text{para} \quad N \leq q < \infty.$$

Isto mostra que E está imerso compactamente em $L^q(\mathbb{R}^N)$ para $N \leq q < \infty$.

A.4 Resultado de densidade

Proposição A.4.1 *$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em E com relação a norma $\|\cdot\|_E$.*

Prova: Primeiro, seja $u \in E$ com suporte $K = supp(u)$ compacto. Então $u \in L^N(K)$ o que implica que $u \in L^N(\mathbb{R}^N)$.

Consideremos ρ_n uma sequência regularizante em $\mathbb{R}^N$. Temos

$\phi_n = \rho_n * u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\phi_n \to u$ em $L^N(\mathbb{R}^N)$ e $\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} = \rho_n * \frac{\partial u}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i}$ em $L^N(\mathbb{R}^N)$.

Notemos que existe alguma compacto K_1 tal que $K \cup supp(\phi_n) \subset K_1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto

$$\int_{\mathbb{R}^N} a|\phi_n - u|^N dx = \int_{K_1} a|\phi_N - u|^N dx \le \max_{x \in K_1} a(x) \int_{K_1} |\phi_N - u|^N dx,$$

de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^N} a|\phi_n - u|^N dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Além disso,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_n - \nabla u|^N dx = \sum_{i=1}^N \left\| \frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_N \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Logo

$$\|\phi_n - u\|_E \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Agora, dado $u \in E$, seja $u_n(x) = M_n(x)u(x)$, onde $M_n(x) = M(x/n)$ e M é uma função de truncamento em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ definida por

$$M(x) = \begin{cases} 1 & se \quad x \in B(0,1) \\ 0 & se \quad x \in B^c(0,2). \end{cases}$$

É claro que $|u_n| \le |u|$ e $u_n \to u$ quase sempre em $\mathbb{R}^N$, e daí pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} a|u_n - u|^N dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Por outro lado,

$$\frac{\partial u_n}{\partial x_i} = \frac{1}{n} \frac{\partial M}{\partial x_i} u + M_n \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

e com isso

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^N dx \leq 2^{N-1}\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\right|^N dx + \int_{\mathbb{R}^N} \left|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^N dx\right).$$

Desde que

$$\left|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^N \to 0 \quad \text{quase sempre em} \quad \mathbb{R}^N$$

e

$$\left|M_n\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^N \leq 2(\frac{\partial u}{\partial x_i})^N \in L^N(\mathbb{R}^N),$$

obtemos, pelo Teoreama da Convergência Dominada de Lebesgue

$$M_n\frac{\partial u}{\partial x_i} \to \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad \text{em} \quad L^N(\mathbb{R}^N).$$

Resta mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\right|^N dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Observemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\right|^N dx = \int_{B(0,20)\backslash B(0,n)} \left|\frac{1}{n}\frac{\partial M}{\partial x_i}u\right|^N dx \leq \frac{C}{n^N}\int_{B(0,20)\backslash B(0,n)} |u|^n dx \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Portanto

$$\left\|\frac{\partial u_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_N \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Mostrando que

$$\|u - u_n\|_E^N = \sum_{i=1}^{N}\left\|\frac{\partial \phi_n}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_N + \int_{\mathbb{R}^N} a|u_n - u|^N dx \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty,$$

ou seja

$$u_n \to u \quad \text{em} \quad E.$$

■

A.5 Desigualdade de Pohozaev-Trudinger-Moser

Teorema A.5.1 *Seja* $u \in W_0^{1,N}(\Omega)$, $N \geq 2$ *e*

$$\int_\Omega |\nabla u|^N dx \leq 1. \tag{A.14}$$

Então existe uma constante $C(N)$ *que depende somente de* N *tal que*

$$\int_\Omega e^{(\alpha_N |u|^{\frac{N}{N-1}})} dx \leq C(N)|\Omega|,$$

onde $\alpha_N = N\omega_{N-1}^{\frac{1}{N-1}}$ *e* ω_{N-1} *é o volume da esfera unitária* $(N-1)$*-dimensional. A integral do lado esquerdo é finita para qualquer* $\alpha > 0$, *mas se* $\alpha > \alpha_N$ *ela pode assumir valores arbitrariamente grandes pela escolha apropriada de* u.

Prova: Podemos assumir que $u \geq 0$, pois substituindo u por $|u|$ não alteramos a integral do gradiente. Notemos também que é suficiente provarmos a afirmação do teorema num conjunto de funções que seja denso na bola unitária de $W_0^{1,N}(\Omega)$. Desta maneira vamos supor que $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

Para prova usaremos a simetrização de Schwarz, isto é, com $u(x) \geq 0$ associamos uma função $u^*(x)$ que dependendo somente da $|x|$ e tal que

$$|\{x \ : \ u^* > \rho\}| = |\{x \in \Omega \ : \ u > \rho\}| \quad \text{para todo} \quad \rho \geq 0.$$

Notemos que u^* é uma função decrescente da $|x|$, que é identicamente nula para $|x| > R$, onde R é o raio da bola de volume igual a medida de Ω.

Definamos Ω^* como sendo a bola unitária de raio R com centro na origem. Um resultado básico de simetrização (veja [20]) é que

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^N dx \leq \int_\Omega |\nabla u|^N dx.$$

Donde, obtemos

$$\int_{\Omega^*} e^{\alpha u^{*N}} dx \leq \int_{\Omega^*} e^{\alpha u^N} dx.$$

Isto reduz imediatamente o problema para dimensão 1. Por conveniência vamos introduzir a variável t dada por

$$\frac{|x|^N}{R^N} = e^{-t},$$

e seja

$$\Psi(t) = N^{N-1/N}\omega_{N-1}^{1/N} u^*(x).$$

Então Ψ é monótono decrescente e valem

$$\int_0^\infty \Psi^N dt = \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^N dx \quad \text{e} \quad \int_0^\infty e^{\beta\Psi^p - t} dt = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega^*} e^{\alpha u^{*p}} ds,$$

onde $\beta = \alpha/\alpha_N$.

Portanto é suficiente para prova o seguinte fato:

se $q \geq 2$ e $\Psi \in C^1([0,\infty))$ é uma função satisfazendo

$$\Psi(0) = 0, \ \Psi \geq 0 \quad \text{e} \quad \int_0^\infty \Psi^q dt \leq 1. \tag{A.15}$$

Então

$$\int_0^\infty e^{\beta\Psi^p - t} dt \leq c_1 \quad \text{se} \quad \beta \leq 1 \quad \text{com} \quad 1/p + 1/q = 1, \tag{A.16}$$

onde c_1 é uma constante que depende somente de q.

De fato, pela desigualdade de Hölder

$$\Psi(t) = \int_0^t \Psi dt \leq t^{1/p}\left(\int_0^t \Psi^q\right)^{1/q} \leq t^{1/p}, \tag{A.17}$$

é claro que

$$\int_0^\infty e^{\beta\Psi^p - t} dt \leq \int_0^\infty e^{\beta - t} dt = \frac{1}{(1-\beta)} \quad \text{para} \quad \beta < 1.$$

No entanto, para $\beta = 1$ a prova é mais delicada. Com o mesmo argumento vamos mostrar que a integral em (A.16) existe para qualquer β positivo. Com efeito, dado qualquer $\epsilon > 0$ existe um $T = T(\epsilon)$ tal que

$$\int_T^\infty \Psi^q dt < \epsilon,$$

donde concluímos, novamente pela desigualdade de Hölder, que

$$\Psi(t) \leq \Psi(T) + \epsilon^{1/q}(t-T)^{1/p}, \quad \text{para} \quad t \geq T,$$

portanto

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\Psi(t)}{t^{1/p}} = 0.$$

Conseqüentemente $\beta\Psi^P < t/2$ para t suficientemente grande, o que prova a existência da integral em (A.16).

Agora mostraremos que para $\beta > 1$ esta integral pode assumir valores arbitrariamente grandes. Para isto, consideremos a função $\eta(s) = \min\{s, 1\}$ e seja $\Psi = t_1^{1/p}\eta(t/t_1)$. Claramente, esta função satisfaz as condições em (A.15), mas

$$\int_0^\infty e^{\beta\Psi^p - t}dt \geq \int_{t_1}^\infty e^{\beta t_1 - t}dt = e^{(\beta-1)t_1}$$

e notemos que $e^{(\beta-1)t_1} \to \infty$, quando $t_1 \to \infty$. O que prova a afirmação.

Agora queremos provar a estimativa (A.16). Os detalhes da prova de (A.16) são técnicos. Descreveremos a idéia que sai primeiramente da verificação de várias estimativas para mais tarde concluímos a prova de (A.16).

Embora a desigualdade (A.17) seja a melhor possível, notemos que podemos ter a igualdade $\Psi(t_1) = t_1^{1/p}$ para algum t_1 se, e somente se, Ψ tem a forma $t_1^{1/p}\eta(t/t_1)$, que é justamente a reta quebrada considerada. Verifica-se que a integral relevante é de fato limitada para esta família de funções. Mostraremos agora que se $t^{-1/p}\Psi(t)$, ou sua q^{th} potência de $t^{-q+1}\Psi^q(t)$, estão próximas da função $\Psi(t)$, então uma destas funções está próxima da reta quebrada.

Mais especificamente, podemos assumir que Ψ é identicamente nula próximo de $t = 0$ e é constante para t suficientemente grande, desde que qualquer Ψ em (A.15) pode ser aproximada por uma tal função. Então seja

$$1 - \delta = \max_t t^{-q+1}\Psi^q(t) = t_1^{-q+1}\Psi^q(t_1), \tag{A.18}$$

e observe que $0 < \delta \leq 1$. De fato, se δ fosse nulo Ψ teria que ser uma reta quebrada, daí não seria identicamente nula perto de zero.

Introduzindo as variavéis s, $y(s)$ pelas substituições

$$t = t_1 s \quad \text{e} \quad \Psi(t) = t_1^{1/p}y(s),$$

obtemos que

$$y(0) = 0, \quad y' \geq 0, \quad \int_0^\infty y'^q ds \leq 1, \quad s^{-q+1}y^q(s) \leq 1 - \delta = y_1^q, \tag{A.19}$$

onde $y(1) = y_1$ e $0 < \delta \leq 1$.

Queremos mostrar que para δ suficientemente pequeno a função $y(s)$ não pode ser muito maior do que $\eta(s) = \min\{1, s\}$. Isto é expressado pela seguinte desigualdade

$$(q-1)y_1^{q-2}\int_0^1 (y' - y_1)^2 ds + \int_1^\infty y'^q ds \leq \delta, \tag{A.20}$$

a qual segue de (A.19) como provaremos mais tarde. Esta desigualdade implica que ambas as integrais separadamente são $\leq \delta$ e isto permite que mostremos que toda função $y(s)$ satisfazendo (A.19) para $0 < \delta < 1/2$ pode ser dominada por

$$y(s) \leq z(s) \tag{A.21}$$

onde

$$z(s) = \begin{cases} s + \min\{(2\delta)^{1/q} s^{1/p}, c_3(\delta(1-s))^{1/2}\} & \text{para} \quad 0 \leq s \leq 1, \\ 1 + \delta^{1/q}(s-1)^{1/p} \quad \text{para} \quad s \geq 1, \end{cases} \tag{A.22}$$

onde c_3 é uma constante positiva que depende somente de q.

Agora, faremos uma estimativa da funcão $z^p - s$. Para isto definamos a função

$$\varphi(s) = \begin{cases} s & \text{para} \quad 0 \leq s \leq 1/2, \\ |s-1| & \text{para} \quad 1/2 \leq s < \infty. \end{cases}$$

Afirmamos que existem constantes positivas $\delta_0 < 1/2$, c_4 e c_5 que dependem somente de q tais que para $0 < \delta < \delta_0$ e para todo $s \geq 0$ fora do intervalo $\Delta = \{s : |s-1| < c_4\delta\}$, temos

$$z^p - s \leq -c_5^{-1}\varphi(s). \tag{A.23}$$

Novamente deixaremos a prova de (A.23) para a próxima seção. Note que de (A.23), obtemos a limitação da integral para $\beta = 1$. Por (A.23) temos

$$\Psi^p - t = t_1(y^p - s) \leq -c_5^{-1}\varphi(s)t_1 \quad \text{para} \quad t = t_1 s, \tag{A.24}$$

se excluímos o intervalo $\Delta_1 = \{t : |t - t_1| < c_4\delta t_1\}$.

Neste intervalo podemos usar (A.18), donde

$$\Psi^p(t) \leq (1-\delta)^{p-1}t, \tag{A.25}$$

e desde que $1 - (1-\delta)^{p-1} \geq (p-1)\delta$ para $1 < p < 2$, temos que

$$\int_{\Delta_1} e^{\Psi^p - t} dt \leq \int_{\Delta_1} e^{-(p-1)\delta t} dt \leq 2c_4\delta t_1 \max_{\Delta_1} e^{-(p-1)\delta t}.$$

Se escolhermos $\delta_0 < (2c_4)^{-1}$ temos que $t > t_1(1 - c_4\delta) > t_4/2$ e conseqüentemente

$$\int_{\Delta_1} e^{\Psi^p - t} dt \leq 2c_4\delta t_1 e^{-(p-1)\delta t_1/2} \leq 4c_4(p-1)^{-1}e^{-1},$$

desde que $xe^{-x} \leq e^{-1}$ para $x \geq 0$.
Para estimativa fora do intervalo Δ_1 usamos (A.23) e obtemos a limitação

$$t_1 \int_0^\infty e^{-t_1 c_5^{-1}\varphi(s)} ds \leq 3c_5,$$

onde cada intervalo $(0, 1/2)$, $(1/2, 1)$, $(1, \infty)$ contribui com uma constante c_5, como vemos facilmente. Conseqüentemente

$$\int_0^\infty e^{\Psi^p - t} dt \leq 3c_5 + 4c_4(p-1)^{-1}e^{-1} = c_6,$$

para $0 < \delta < \delta_0$, onde c_6 é definida por esta equação.

Finalmente, para $\delta_0 \leq \delta \leq 1$ temos novamente por (A.25) que $\Psi^p - t \leq -(p-1)\delta t$ e conseqüentemente

$$\int_0^\infty e^{\Psi^p - t} dt \leq \int_0^\infty e^{-(p-1)\delta t} dt \leq \frac{1}{(p-1)\delta_0}.$$

Portanto (A.16) está provado para $\beta = 1$ se tomarmos $c_1 = c_6 + (1/(p-1)\delta_0)$.

Portanto para concluímos a prova do Teorema devemos estabelecer (A.20) e (A.21) com as definições (A.22) e (A.23). Para este propósito usaremos as seguintes estimativas elementares:

Se $q \geq 2$, $a \geq 0$ e $a + b \geq 0$, então

$$a^q + qa^{q-1}b + (q-1)a^{q-2}b^2 \leq (a+b)^q. \tag{A.26}$$

Se, além disso, $a \geq 0$ e $b \geq 0$, então

$$a^q + qa^{q-1}b + b^q \leq (a+b)^q \leq a^q + c_7(a^{q-1}b + b^q). \tag{A.27}$$

Onde c_7 é uma constante positiva que dependendo somente de q. A estimativa por cima de $(a+b)^q$ vale até mesmo para $q \geq 1$. Já as estimativas por baixo de $(a+b)^q$ seguem da fórmula de Taylor

$$(a+b)^q = a^q + qa^{q-1}b + q(q-1)b^2 \int_0^1 (a + xb)^{q-2}(1-x)dx,$$

pelas estimativas $a + xb = (1-x)a + x(a+b) \geq (1-x)a$, no primeiro caso, e $a + xb \geq xb$ no segundo caso. A estimativa por cima em $(A.27)$ segue-se da limitação de

$$\frac{(1+x)^q - 1}{x + x^q},$$

para $0 \leq x < \infty$.

Para provarmos $(A.25)$ seja $a = y_1 \geq 0$ e $b = y' - y_1$ em $(A.26)$, observemos que $a + b = y' \geq 0$. Integrando a desigualdade resultante sobre $0 \leq s \leq 1$, obtemos que

$$y_1^q + (q-1)y_1^{q-2} \int_0^1 (y' - y_1)^2 ds \leq \int_0^1 y'^q ds.$$

No entanto, por $(A.19)$

$$\int_0^1 y'^q ds = \int_0^\infty y'^q ds - \int_1^\infty y'^q ds \leq 1 - \int_1^\infty y'^q ds = \delta + y_1^q - \int_1^\infty y'^q ds,$$

daí, a desigualdade $(A.20)$ segue protamente eliminando-se y_1^q das duas últimas desigualdades.

Obviamente, que ambos os somandos em $(A.20)$ são $\leq \delta$. Aplicando a desigualdade de Hölder como antes, obtemos

$$y(s) \leq y_1 + \delta^{1/q}(s-1)^{1/p} < 1 + \delta^{1/q}(s-1)^{1/p}, \quad \text{para} \quad s \geq 1,$$

o que prova $(A.21)$ para $s \geq 1$. Analogamente, da desigualdade de Schwarz, obtemos

$$y(s) \leq s + c_3(\delta(1-s))^{1/2}, \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq 1.$$

Para completar a prova de $(A.21)$, devemos mostrar que

$$y(s) \leq s + (2\delta)^{1/q} s^{1/p}, \quad \text{para} \quad 0 \leq s \leq 1, \tag{A.28}$$

Para isto teremos que proceder diferente. Fixamos uma constante σ em $0 < \sigma < 1$ e maximizamos $y(\sigma)$ no conjunto de todas as funções $y(s)$ satisfazendo

$$y(0) = 0, \quad y(1) = y_1 \quad \text{e} \quad \int_0^1 y'^q ds \leq 1.$$

Claramente, o máximo y^* é atingido para uma função extremal que é uma reta quebrada, isto é, uma reta que conecta $(0,0)$ com (σ, y^*) e outra que passa de (σ, y^*) para $(1,1)$. Assim a condição integrante requer que

$$(\frac{y^*}{\sigma})^q \sigma + \left|\frac{y_1 - y^*}{1-\sigma}\right|^q (1-\sigma) \leq 1.$$

Está claro que $y^* \geq y_1\sigma$ e conseqüentemente podemos escrever $y^* = y_1(\sigma + \rho)$ com $\rho \geq 0$. Então a última desigualdade escreve-se

$$\left(1 + \frac{\rho}{\sigma}\right)^q \sigma + \left|1 - \frac{\rho}{1-\sigma}\right|^q (1-\sigma) \leq \frac{1}{y_1^q} = \frac{1}{1-\delta}.$$

Por outro lado, temos que $|1-x|^q \geq 1 - qx$ para todo x, se calculamos a primeira estimativa por baixo em (A.27), obtemos

$$\left(1 + q\frac{\rho}{\sigma} + (\frac{\rho}{\sigma})^q\right)\sigma + \left(1 - q\frac{\rho}{1-\sigma}\right)(1-\sigma) \leq \frac{1}{1-\delta},$$

ou

$$\frac{\rho^q}{\sigma^{q-1}} \leq \frac{\delta}{1-\delta} < 2\delta,$$

desde que assumimos $0 < \delta < 1/2$. Portanto, com $y_1 \leq 1$, temos

$$y(\sigma) \leq y_1(\sigma + \rho) \leq \sigma + (2\delta)^{1/q}\sigma^{(q-1)/q}.$$

Como σ era um número arbitrário em $0 < \sigma < 1$, então vale (A.28) e conseqüentemente (A.21) esta provado.

Finalmente estabelecemos (A.23) como uma conseqüência de (A.22). Em $0 < s < 1/2$ temos por (A.22), usando (A.27),

$$z^p \leq (s + (2\delta)^{1/q} s^{1/p})^p \leq s^p + c_7(2\delta)^{1/q} s^{p-1+(1/p)} + c_7(2\delta)^{p/q} s.$$

desde que $p + 1/p > 2$, $2\delta < 1$ e $0 < s < 1/2$, temos

$$z^p - s \leq s(s^p - 1 + 2c_7(2\delta)^{1/q}) \leq s((1/2)^{(p-1)/2} - 1),$$

se $0 < \delta < \delta_0$ e δ_0 é escolhido suficientemente pequeno. Então esta estimativa verifica (A.23) no intervalo $(0, 1/2)$ assim o coeficiente de s é negativo.

Os intervalos restantes são tratados similarmente exceto próximo de $s = 1$, onde devemos considerar um pequeno intervalo que o contém. Para $1/2 < s < 1$ fixamos $\sigma = 1 - s$ e temos de (A.21)

$$\begin{aligned}
z^p - s &\leq (s + c_3(\delta\sigma)^{1/2})^p - s \\
&= s^p - s + c_7 c_3 s^{p-1}(\delta\sigma)^{1/2} + c_7(c_3(\delta\sigma)^{1/2})^p \\
&\leq s((1-\sigma)^{p-1} - 1) + c_8(\delta\sigma)^{1/2} \\
&\leq -1/2(p-1)\sigma + c_8(\delta\sigma)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Na última estimativa usamos que $p \leq 2$ e $s \geq 1/2$. Se restringimos agora σ para $\sigma < (4c_8/(p-1))^2\delta$ então $c_8(\delta\sigma)^{1/2} < (p-1)\sigma/4$ e

$$z^p - s \leq -\frac{p-1}{4}\sigma = -\frac{p-1}{4}(1-s).$$

No intervalo $s > 1$ temos de (A.21) que

$$\begin{aligned}
z^p - s &\leq (1 + \delta^{1/q}(s-1)^{1/p})^p - s \\
&\leq 1 - s + c_7\delta^{1/q}(s-1)^{1/p} + c_7\delta p/q(s-1) \\
&= (s-1)\{-1 + c_7(\tfrac{\delta}{s-1})^{1/q} + c_7\delta^{p/q}\} \\
&\leq (s-1)\{-\tfrac{1}{2} + c_7(\tfrac{\delta}{s-1})^{1/q}\},
\end{aligned}$$

se δ_0 é escolhido suficientemente pequeno. Para $s - 1 > (4c_7)^q\delta$ o segundo termo do parenteses é $< 1/4$ e portanto

$$z^p - s \leq -\frac{1}{4}(s-1).$$

Combinando estas estimativas obtemos (A.23) com $c_4 = (4c_8/(p-1))^2 + (4c_7)^2$ e $c_5 = (1 - 2^{(1-p)/2)})^{-1} + 4/(p-1)$. Isto completa a prova do Teorema.

$\blacksquare$

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F., *Sobolev Spaces, second edition*, Elsevier Science, Oxford, 2003.

[2] Ambrosetti, A. and Rabinowitz, P. H., *Dual variational methods in critical point theory and applications*, Funct. Anal. **14** (1973), 349–381.

[3] Anane, A., *Simplicité et isolation de la première valuer propre de p-Laplacien avec poids*, C.R. Acad. Sci. Paris **305** (1987), 725–728.

[4] Bartle, R. G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[5] Berestyski, H. and Lions, P. L., *Nonlinear scalar field equation, I. existence of ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313–127.

[6] Berger, M. S., *Nonlinearity and Functional Analysis.* Academic Press, New York, 1978.

[7] Brezis, H., *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.

[8] Cao, D. M., *Nontrivial solution of semilinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Comm. Partial Differential Equations **17** (1992), 407–435.

[9] Cao, D. M. and Zhang, Z. J., *Eigenfuntions of nonlinear elliptic equation with critical exponent in* $\mathbb{R}^2$, Acta Math. Sci. (English Ed.) **13** (1993), 74–88.

[10] Chabrowski, J., *On multiple solutions for the nonhomgegeneous p-laplacian with a critical Sobolev exponent*, J. Differential Equations **8** (1995), 113–127.

[11] Costa, D. G., *Tópicos em Análise Não Linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[12] de Figueiredo, D. G., *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Escola Latino-Americana de Eq. Diferenciais, Universidade de São Paulo, 1981.

[13] de Figueiredo, D. G., *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[14] de Figueiredo, D. G., Miyagaki, O. H. e Ruf, B. *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calculus of Variations and Partial Differential Equations **3** (1995), 139–153.

[15] do Ó, J. M., *Semilinear Dirichlet problems for the N-laplaciano in* $\mathbb{R}^N$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Differential Integral Equations **5** (1996), 967–979.

[16] do Ó, J. M., *N-Laplacian equations in* $\mathbb{R}^N$ *with critical growth*, Abstract and Applied Analysis **2** (1997), 301–315.

[17] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, 1998.

[18] Fernandez, P. J., *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[19] Gilbarg, D. and Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*. Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[20] Kavian, O., *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[21] Kreyszig, E. *Introductory functional analysis with applications.* Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

[22] Lions, P.L., *The Concentration Compactness Principle in the Calculus of Variations, part I* , Rev. Mat. Iberiamericana **1** (1985), 185–201.

[23] J. Moser, *A sharp form of an inequality by N. Trudinger*, Ind. Univ. Math. J. **20** (1971), 1077–1092.

[24] Pohozaev, S. I., *The Sobolev embedding in the case* $pl = n$*, Proceedings of the* Technical Scientific Conference on Advances of Scientific Research 1964-1965. Mathematics Section, 158-170, Moscov. Energet. Inst., Moscow, 1965.

[25] Pólya, G. and Szegö, G. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1951.

[26] Rabinowitz, P. H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations.* CBMS, n. 65, AMS, 1986.

[27] Rabinowitz, P. H., *Some global results for nonlinear eigenvalue problems.* J. Functional Analysis, 1971.

[28] Tonkes, E., *Solution to a pertuebed critical semilinear equation concerning the N-Laplacian in* $\mathbb{R}^N$. Comment. Math. Univ. Carolinac **40** (1999), 679–699.

[29] Trudinger, N. S., *On imbedding into Orlicz spaces and some applications*, J. Math. Mech. **17** (1967), 473–484.

[30] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, (1996).