Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Autovalor principal para problemas elípticos com peso indefinido em $\mathbb{R}^N$ e aplicações

por

Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

sob orientação do

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2006
João Pessoa - PB

Autovalor principal para problemas elípticos com peso indefinido em $\mathbb{R}^N$ e aplicações

por

Elisandra de Fátima Gloss de Moraes

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Co-orientador)

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - UFV

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2006

Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pelas oportunidades, a minha família pelo apoio e compreensão, aos amigos e a todos que sempre me deram apoio e incentivo, especialmente a Bruno, meu companheiro em todos os momentos. Agradeço aos professores dos colégios e universidades onde estudei, aos professores com quem convivi no mestrado, João Marcos Bezerra do Ó, Flávia Jerônimo Barbosa, Nelson Nery de Oliveira Castro, José Gomes de Assis, Pedro Hinojosa Vera, Uberlândio Batista Severo e, em especial, ao meu orientador Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros. Agradeço ainda ao CNPq, pelo apoio financeiro.

Dedicatória

A minha família

Resumo

Os objetivos desta dissertação são estabelecer a existência de um autovalor principal para problemas de autovalor com peso indefinido em $\mathbb{R}^N$, envolvendo operadores elípticos de segunda ordem do tipo semilinear e quasilinear, e aplicar os resultados obtidos a uma classe de problemas não lineares, envolvendo teoria de bifurcação. Estabeleceremos resultados do tipo Krein-Rutman para um problema envolvendo o operador p-laplaciano com $1 < p < N$. Mais precisamente, sob certas hipóteses sobre a função peso, mostraremos a existência de um único autovalor principal o qual é positivo, ou de dois autovalores principais de sinais opostos. Além disso, provaremos que estes autovalores principais são simples e isolados. Para o caso particular $p = 2$, usaremos a teoria dos operadores compactos e para o caso geral, usaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para obter os resultados. Obteremos também resultados de regularidade das soluções, bem como informações sobre os seus comportamentos assintóticos. Em seguida, estudaremos um problema não linear envolvendo o operador p-laplaciano. Usando teoria da bifurcação e as propriedades do primeiro autovalor do problema linearizado, mostraremos a existência de um ramo de soluções para este problema.

Abstract

The aim of this work are: to establish the existence of a principal eigenvalue for eigenvalue problems with indefinite weight in $\mathbb{R}^N$, involving second order elliptic operators of semilinear and quasilinear types; and to apply these results to a class of nonlinear problems involving bifurcation theory. We establish Krein-Rutman type results for problems involving the p-laplacian operator with $1 < p < N$. More precisely, under certain hypothesis on the weight function, we show the existence of either a unique principal eigenvalue, which is positive, or two principal eigenvalues with opposite signs. Moreover, we prove that this eigenvalue is simple and isolated. For the particular case where $p = 2$, we use the compact operator theory and, for the general case, we use the Lagrange multipliers theorem to obtain the results. We also obtain regularity results for the solutions and information about their asymptotic behavior. Next, we study a nonlinear problem involving the p-laplacian operator. Using the bifurcation theory and the properties of the first eigenvalue of the linearized problem, we show the existence of a continuum of solutions for this problem.

Sumário

Notações

$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais não negativos
$B_\delta(x)$	bola aberta de centro x e raio δ
$\rightharpoonup, \to$	convergência fraca e forte respectivamente
$\|A\|$	medida de Lebesgue de um conjunto A
q.t.p	em quase toda parte
$\text{supp} f$	suporte da função f
$N(f)$, $R(f)$	núcleo e imagem da aplicação f
$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ ou u_{x_i}	derivada parcial de u em relação a x_i
$\text{div} f = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}$	divergente de f, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u, $u : \Omega \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	laplaciano de u
$\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = \partial_\eta u = \eta \cdot \nabla u$	derivada normal exterior
$\cdot$ ou $(\,,)$	denotaram produto interno

$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \ \text{ mensurável };\ \displaystyle\int_\Omega |u|^p dx < \infty \right\}$, $1 \leq p < \infty$

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\displaystyle\int_\Omega |u|^p \right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}$ mensurável ; $|u(x)| \leq C$ q.t.p sobre Ω para algum $C > 0\}$

$\|\, u\|_\infty = \displaystyle\sup_{x \in \Omega} |u(x)|$ norma do espaço $L^\infty(\Omega)$

$L^p_{loc}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega') \text{ para todo } \Omega' \subset \Omega \text{ compacto }\}$, $1 \leq p \leq \infty$

$[u]$ espaço gerado por u

$\mathcal{L}(X, Y)$ espaço das aplicações lineares e limitadas de X em Y

$\mathcal{L}(X)$ espaço das aplicações lineares e limitadas de X em X

$C(X, Y)$ espaço das aplicações contínuas de X em Y

$C(\Omega)$ funções contínuas definidas de Ω em $\mathbb{R}$

$C_c(\Omega)$ funções contínuas com suporte compacto em Ω

$C^k(\Omega)$ funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$

$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k\geq 0} C^k(\Omega)$; $C^k_c(\Omega) = C^k(\Omega) \cap C_c(\Omega)$; $C^\infty_c(\Omega) = C^\infty(\Omega) \cap C_c(\Omega)$

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) \;\middle|\; \begin{array}{c} \exists\, g_1, g_2, \ldots, g_N \in L^p(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i \varphi, \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega), \forall i = 1, \ldots, N \end{array} \right\},$$

$1 \leq p \leq \infty$. Se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ denota-se $g_i := u_{x_i}$

$\|u\|_{W^{1,p}} = \|u\|_{L^p} + \sum_{i=1}^{N} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p}$ norma do espaço de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

$W^{1,p}_{loc}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega') \text{ para todo } \Omega' \subset \Omega \text{ compacto}\}$

$W^{1,p}_0(\Omega)$ é o completamento de $C^1_c(\Omega)$, na norma $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$, $1 \leq p < \infty$

$p^* = \frac{Np}{N-p}$ para $1 \leq p < N$ expoente crítico de Sobolev

$\mathcal{D}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^{p^*}(\Omega) : \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\}$, $1 < p < N$

$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ norma do espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$

$\mathcal{D}^{1,p}_0(\Omega)$ é o completamento de $C^\infty_c(\Omega)$ com respeito à norma $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{1,p}}$

$\mathcal{D}^{-1,p^*}(\mathbb{R}^N)$ espaço dual de $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$f = o(g)$ quando $x \to x_0$ se $\lim_{x \to x_0} |f(x)|/|g(x)| = 0$

$f = O(g)$ quando $x \to x_0$, se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C|g(x)|$ para x suficientemente próximo de x_0

Introdução

Nesta dissertação, vamos estudar a existência e simplicidade de um autovalor principal positivo para a seguinte classe de problemas elípticos quasilineares

$$\begin{aligned} &-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ &\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \quad u > 0,\ \text{em } \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ denota o operador p-laplaciano, $1 < p < N$, λ é um parâmetro real e a função peso g é uma função que pode mudar de sinal.

Baseados no artigo de Brown e Stavrakakis [10], estudaremos inicialmente o caso semilinear do problema (1) o que corresponde ao caso particular em que $p = 2$ e o operador p-laplaciano é o operador laplaciano clássico. Mais precisamente, estudaremos o seguinte problema

$$\begin{aligned} &-\Delta u = \lambda g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \\ &\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \quad u > 0 \ \text{ em } \ \mathbb{R}^N. \end{aligned} \tag{2}$$

Neste caso, assumiremos que a função peso g é suave e satisfaz a seguinte condição:

$$g \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N) \ \text{ e } \ g(x_0) > 0 \text{ para algum } x_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Para este problema, usando a teoria clássica dos operadores compactos e autoadjuntos, mostraremos um teorema do tipo Krein-Rutman, ou seja, que existe um menor autovalor positivo, λ_1, o qual é simples e isolado. Além disso, este é o único autovalor positivo que admite autofunção positiva.

O estudo do problema (2), foi motivado pelo fato de que o mesmo corresponde à linearização do seguinte problema não linear:

$$\begin{aligned} &-\Delta u = \lambda g(x)f(u), \qquad x \in \mathbb{R}^N, \\ &\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \qquad 0 < u < 1, \qquad x \in \mathbb{R}^N, \end{aligned} \tag{3}$$

onde a não linearidade f satisfaz a seguinte hipótese:

(f) $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ é uma função suave tal que $f(0) = f(1) = 0,\ f'(0) > 0,\ f'(1) < 0$, e $f(u) > 0$ para todo $0 < u < 1$.

Sob algumas restrições sobre N, mostraremos que o autovalor λ_1 é um ponto de bifurcação global para o problema (3). Para isto, usaremos os resultados clássicos de bifurcação devidos a Crandall e Rabinowitz (veja [12] e [25]). Todo o estudo do problema (3) é baseado no artigo [10].

Para $1 < p < N$, via Identidade de Picone, mostraremos também um teorema do tipo Krein-Rutman para o problema quasilinear (1). Baseados nos trabalhos de Fleckinger, Manásevich, Stavrakakis e de Thélin [18] e Allegretto e Huang [3], mostraremos a existência de autovalores principais para este problema. Neste caso, assumiremos as seguintes hipóteses:

($\mathcal{G}$) g é uma função suave (pelo menos $C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\gamma \in (0,1)$), tal que $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $|\Omega^+| > 0$, onde

$$\Omega^+ := \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, g(x) > 0\},$$

($\mathcal{G}^+$) g satisfaz ($\mathcal{G}$) e $g \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$, ou,

($\mathcal{G}^-$) g satisfaz ($\mathcal{G}$) e $|\Omega^-| > 0$, onde

$$\Omega^- := \{x \in \mathbb{R}^N \,:\, g(x) < 0\}.$$

Sabendo que os autovalores do problema (1) são os possíveis pontos de bifurcação para o problema quasilinear

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(\lambda, x, u) \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4}$$

baseados no artigo de Drábek e Huang [16], usaremos a teoria do grau topológico para operadores demicontínuos e provaremos um resultado de bifurcação global a partir dos autovalores principais do problema (1). Para isto, assumiremos as seguintes hipóteses sobre a não linearidade $f(\lambda, x, u)$:

($\mathbf{f}_1$) f é uma função de Carathéodory, i.e., $f(\cdot, x, \cdot)$ é contínua q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e $f(\lambda, \cdot, u)$ é mensurável para todo $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$;

($\mathbf{f}_2$) $|f(\lambda, x, u)| \leq c(\lambda)(\sigma(x) + \rho(x)|u|^\gamma)$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, onde $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e limitada sobre subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$, $p - 1 < \gamma < p^* - 1$, $0 \leq \rho \in L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N)$ com $\gamma_1 = p^*/(p^* - \gamma - 1)$, $0 \leq \sigma \in L^{N/p}(w^{N/p}, \mathbb{R}^N)$, onde $L^{N/p}(w^{N/p}, \mathbb{R}^N)$ é o espaço com peso $L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ com a função peso $w^{N/p}$, e ou

- **(i)** $\sigma \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)$, $(p^*)' = Np/(Np - (N - p))$, ou
- **(ii)** $\sigma \in L^{p'}(w^{1/(1-p)}, \mathbb{R}^N)$;

($\mathbf{f}_3$) o seguinte limite existe

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(\lambda, x, u)}{w(x)|u|^{p-2}u} = 0,$$

uniformemente q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e λ em um intervalo limitado.

Problemas onde o operador $-\Delta_p$ está presente surgem tanto na matemática pura, como na teoria de aplicações quasiregulares e quasiconformais, bem como em uma variedade de aplicações, por exemplo, fluidos não Newtonianos, problemas de reação-difusão, corrente através de meio poroso, elasticidade não linear, extração de petróleo, astronomia, etc (veja [18] e suas referências).

No caso do problema de autovalor para domínios limitados, sob várias condições de fronteira, existe vasta literatura sobre o autovalor e autofunção principais. Mencionamos, entre outros, os trabalhos de Anane [4] e Huang [22] e suas referências. Para o caso particular $p = 2$, podemos citar, entre outros, os trabalhos de de Figueiredo [14] o qual trata de um problema de autovalor envolvendo um operador elíptico de segunda ordem geral com peso indefinido e com condição de fronteira de Dirichlet, e Senn e Hess [26] que estudam o problema com condição de fronteira de Neumann.

O problema de autovalor para domínios não limitados torna-se mais complicado já que, em geral, o operador associado à equação não é compacto. Também não é claro, a priori, o espaço de funções ao qual as autofunções pertencem.

Nos últimos anos, muitos trabalhos sobre o problema de autovalor em domínios não limitados têm aparecido. Veja, por exemplo, Brown, Cosner e Fleckinger [9], Allegretto e Huang [2], Fleckinger, Manásevich, Stavrakakis e de Thélin [18], Huang [23] e suas referências. A seguir detalharemos como esta dissertação está escrita.

Faremos um capítulo inicial com alguns resultados clássicos que serão utilizados no decorrer deste trabalho, os quais serão enunciados sem demonstração e com as devidas referências para possíveis consultas.

No Capítulo 1, estudaremos o problema (2). Utilizando a teoria dos operadores compactos mostraremos a existência de soluções clássicas bem como a existência, unicidade e simplicidade de um autovalor principal positivo para este problema.

O Capítulo 2 é voltado ao estudo do problema (3). Usaremos o autovalor principal positivo λ_1, obtido no Capítulo 1, para garantir a existência de soluções para o problema (3), as quais veremos que são clássicas. Mais precisamente, mostraremos que λ_1 é um ponto de bifurcação para o problema (3).

No Capítulo 3, usaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange para garantir a existência de soluções fracas e de autovalores para o problema (1). Veremos que, quando g satisfaz a condição $(\mathcal{G}^+)$ existe um autovalor principal positivo, λ_1, e quando g satisfaz a condição $(\mathcal{G}^-)$ existem dois autovalores principais de sinais opostos, λ_1^+ e λ_1^-. Para este problema temos apenas soluções fracas. Mostraremos que estas soluções pertencem a $C^{1,\alpha}(B_R)$ para todo $R > 0$ onde $\alpha = \alpha(R) \in (0, 1)$. Depois disso, usaremos a Identidade de Picone para garantir a simplicidade e unicidade destes autovalores principais. Por último, veremos que estes autovalores principais são também isolados.

O Capítulo 4 é voltado ao estudo do problema (4). Mostraremos que o autovalor principal do problema (1), λ_1 (respectivamente λ_1^+,λ_1^-), é um ponto de bifurcação para o problema (4), garantindo assim, a solubilidade deste. Neste capítulo, usaremos a teoria do grau topológico para operadores demicontínuos satisfazendo uma determinada condição de convergência e faremos uma adaptação da prova do Teorema 1.3 em [25] para garantir a validade dos resultados no caso do p-laplaciano.

Finalmente, no Apêndice provaremos alguns resultados utilizados no decorrer deste trabalho.

Preliminares

Enunciaremos aqui importantes resultados os quais são necessários para uma melhor compreensão do trabalho que será desenvolvido.

Resultados básicos

Em várias partes deste trabalho iremos recorrer aos seguintes resultados.

Teorema 1 ([8], Proposição 3.5) *Sejam X um espaço de Banach e (x_n) uma seqüência em X. Se $x_n \rightharpoonup x$ em X, então $\|x_n\|$ é limitada e*

$$\|x\| \leq \liminf_{n \to \infty} \|x_n\|.$$

Teorema 2 ([8], Proposição 3.5(iv)) *Sejam X um espaço de Banach, (f_n) em X^* uma seqüência tal que $f_n \to f$ em X^* e (x_n) uma seqüência em X tal que $x_n \rightharpoonup x$ em X. Então*

$$f_n(x_n) \to f(x).$$

Teorema 3 ([8], Teorema 3.27) *Se X é um espaço de Banach reflexivo e (x_n) uma seqüência limitada em X, então existe uma subseqüência (x_{n_k}) que converge na topologia fraca de X.*

Teorema 4 ([8], Proposição 3.30) *Seja X um espaço de Banach uniformemente convexo. Seja (x_n) uma seqüência em X tal que e $x_n \rightharpoonup x$ e*

$$\limsup \|x_n\| \leq \|x\|.$$

Então $x_n \to x$ em X. Em outras palavras, se $x_n \rightharpoonup x$ e $\|x_n\| \to \|x\|$ então $x_n \to x$ em X.

Teorema 5 ([11], Teorema 1.3) *Seja X um espaço de Hilbert (ou espaço de Banach Reflexivo) e suponha que $\phi : X \to \mathbb{R}$ satisfaz:*

i) *ϕ é fracamente semicontínuo inferiormente;*

ii) *ϕ é coercivo, isto é, $\phi(u) \to \infty$ quando $\|u\| \to \infty$.*

Então ϕ é limitado inferiormente e existe $u_0 \in X$ tal que

$$\phi(u_0) = \inf_{u \in X} \phi(u).$$

Teorema 6 ([15], Teorema 1.4) *Seja $\phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, onde X é um espaço de Banach. Então ϕ é semicontínua inferiormente se, e somente se, é fracamente semicontínua inferiormente.*

No que segue vamos assumir que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto. O próximo teorema afirma que sob certas condições, a integral é absolutamente contínua.

Teorema 7 ([19], Corolário 4.1.2) *Se f é uma função não negativa, mensurável e $\int_\Omega f d\mu < \infty$ então $\int_\Omega f d\mu$ é absolutamente contínua em relação a μ, ou seja, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que $\mu(\Omega) < \delta$ implica $\int_\Omega f d\mu < \varepsilon$.*

O resultado seguinte é o conhecido Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue.

Teorema 8 ([5], Teorema 5.6) *Seja (f_n) uma seqüência de funções de $L^1(\Omega)$ tal que:*

i) *$f_n(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω;*

ii) *existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \geq 1$, temos*

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad q.t.p \text{ em } \Omega.$$

Então $f \in L^1(\Omega)$ e

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} = 0,$$

isto é,

$$\int_\Omega f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n(x)dx.$$

Teorema 9 ([8], Teorema 4.9) *Sejam (f_n) uma seqüência em $L^p(\Omega)$ e $f \in L^p(\Omega)$, tais que*

$$\|f_n - f\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Então podemos extrair uma subseqüência (f_{n_k}) tal que

i) *$f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω, e*

ii) *$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$, q.t.p em Ω, $\forall k \in \mathbb{N}$, com $h \in L^p(\Omega)$.*

Teorema 10 ([17], Teorema de Egorov) *Sejam (f_n) e f funções mensuráveis tais que*

$$f_n(x) \to f(x) \quad q.t.p \text{ em } \Omega,$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é mensurável e $|\Omega| < \infty$. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe um subconjunto mensurável $\Omega' \subset \Omega$ tal que

i) *$|\Omega - \Omega'| \leq \varepsilon$, e*

ii) *$f_n \to f$ uniformemente sobre Ω'.*

Teorema 11 ([1], Teorema 2.7) *Seja $0 < p < 1$. Se $u, v \in L^p(\Omega)$, então*

$$\||u| + |v|\|_{L^p} \geq \|u\|_{L^p} + \|v\|_{L^p}.$$

Teorema 12 ([8], desigualdade de Hölder generalizada) *Suponha que as funções $f_1, f_2, \ldots, f_k$ são tais que*

$$f_i \in L^{p_i}(\Omega) \quad i = 1, 2, \ldots, k \quad \textit{com} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \ldots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Então o produto $f = f_1 f_2 \ldots f_k$ pertence a $L^p(\Omega)$ e

$$\|f\|_{L^p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}} \|f_2\|_{L^{p_2}} \ldots \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

Em particular, se $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ com $1 \leq p \leq q \leq \infty$, então $f \in L^r(\Omega)$ para todo $p \leq r \leq q$ e se verifica a desigualdade de interpolação

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha} \quad \text{onde} \quad \frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q} \quad (0 \leq \alpha \leq 1).$$

Teorema 13 ([15], Teorema 2.3) *Seja $f : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory. Suponha que existam uma função $b \in L^q(\Omega)$, $1 \leq q \leq \infty$, uma constante $c > 0$ e $r > 0$ tais que*

$$|f(x, s)| \leq c|s|^r + b(x), \qquad \forall x \in \Omega, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Então o Operador de Nemytskii $N_f : L^{qr}(\Omega) \to L^q(\Omega)$, definido por

$$N_f(u) = f(x, u)$$

é contínuo e limitado (ou seja, aplica conjuntos limitados em conjuntos limitados)

Teorema 14 ([17], Gagliardo-Nirenberg-Sobolev) *Seja $1 \leq p < N$. Existe uma constante C, dependendo apenas de p e N, tal que*

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)},$$

para todo $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$, onde $p^* = Np/(N-p)$.

Teorema 15 ([8], Rellich-Kondrachov) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto limitado de classe C^1 . Se $1 \leq p < N$ então $W^{1,p}(\Omega)$ está imerso compactamente em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [1, p^*)$.*

O espaço $\mathcal{D}^{1,p}$

Nesta seção, vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e $p \in [1, N)$. Para maiores detalhes veja [6]. Definimos o espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ como sendo

$$\mathcal{D}^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^{p^*}(\Omega) : \nabla u \in (L^p(\Omega))^N \right\},$$

munido da norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} := \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Definimos $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ como sendo o completamento de $C_c^\infty(\Omega)$ com respeito à norma $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}}$.

Para $p > 1$, $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ e $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ são espaços de Banach reflexivos e separáveis. Sobre $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$ introduzimos uma seminorma $\|\cdot\|_{\mathcal{D}_0^{1,p}}$ definida por

$$\|u\|_{\mathcal{D}_0^{1,p}} := \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Devido à desigualdade de Sobolev, Teorema 14, que pode ser estendida por densidade a $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$, concluímos que esta seminorma é realmente uma norma e, além disso, é equivalente à norma $\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}}$ sobre $\mathcal{D}_0^{1,p}(\Omega)$.

O próximo teorema estabelece algumas relações entre $\mathcal{D}^{1,p}$ e $W^{1,p}$.

Teorema 16 ([6], Lema 1.2) $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) = W_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathcal{D}_0^{1,p}(\mathbb{R}^N) = \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Assim, podemos considerar o espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ munido com a norma

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{1/p}.$$

Pela imersão de Sobolev, Teorema 14, existe $K > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq K\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}}\ , \quad \forall u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N). \tag{5}$$

Portanto, $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ está continuamente imerso em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Denotamos por $\mathcal{D}^{-1,p^*}$ o espaço dual de $\mathcal{D}^{1,p}$.

Observação 1 *Se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um subconjunto aberto de medida finita com fronteira de classe C^1, temos para $1 \leq p < N$*

$$W^{1,p}(\Omega) = \mathcal{D}^{1,p}(\Omega) \quad \subset\subset \quad L^q(\Omega), \qquad \forall\ q \in [1, p^*),$$

onde $\subset\subset$ denota imersão compacta.

Teorema 17 ([6], Proposição 1.1) *Sejam $\Omega' \subseteq \Omega$ dois subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^N$. Se $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\Omega)$ então a restrição de u a Ω', que denotamos por $u|_{\Omega'}$, pertence a $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega')$ e temos $(u|_{\Omega'})_{x_i} = (u_{x_i})|_{\Omega'}$. Além disso, o operador restrição $\mathcal{D}^{1,p}(\Omega) \to \mathcal{D}^{1,p}(\Omega') : u \mapsto u|_{\Omega'}$ é contínuo.*

Operadores compactos

Sejam X e Y espaços de Banach.

Definição 1 *Dizemos que um operador $T : X \to Y$ é compacto se $T(B)$ é relativamente compacto (i,e. $\overline{T(B)}$ é compacto) para qualquer $B \subset X$ limitado.*

Observação 2 *Mostra-se que um operador $T : X \to Y$ é compacto se, e somente se, (Tx_n) possui subseqüência convergente, para qualquer seqüência (x_n) em X limitada. Se T é linear e compacto e $x_n \rightharpoonup x$ então $Tx_n \to Tx$.*

Teorema 18 ([8], Alternativa de Fredholm) *Seja $T : X \to X$ um operador linear compacto. Então*

i) $N(I-T)$ *possui dimensão finita,*

ii) $R(I-T)$ *é fechada e* $R(I-T) = N(I-T^*)^{\perp}$*,*

iii) $N(I-T) = \{0\} \Longleftrightarrow R(I-T) = E$*,*

iv) $\text{dim}N(I-T) = \text{dim}N(I-T^*)$*,*

onde T^* *é o operador adjunto de* T*.*

Sobre o espectro de um operador linear compacto usaremos os seguintes resultados.

Definição 2 *Seja* $T : X \to X$ *linear e contínuo. O conjunto resolvente de* T *é* $\rho(T)$*, onde* $\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : (T-\lambda I) \text{ é bijeção }\}$*. O espectro* $\sigma(T)$ *é o complementar do conjunto resolvente, isto é,* $\sigma(T) = \mathbb{R}\backslash\rho(T)$*. Dizemos que* λ *é um valor próprio ou autovalor de* T *se* $N(T-\lambda I) \neq 0$*. Denotamos por* $VP(T)$ *o conjunto dos autovalores do operador* T *e* $N(T-\lambda I)$ *é dito o autoespaço associado a* λ*.*

Definição 3 *Seja* H *um espaço de Hilbert. Um operador* $T \in \mathcal{L}(H)$ *diz-se autoadjunto se* $T = T^*$*, ou ainda, se*

$$(Tu, v) = (u, Tv), \quad \forall\ u, v \in H.$$

Teorema 19 *Seja* H *um espaço de Hilbert e* $T \in \mathcal{L}(H)$ *um operador compacto e autoadjunto. Se*

$$M = \sup_{\substack{u \in H \\ |u|=1}} (Tu, u) > 0$$

então M *é um autovalor de* T*.*

Prova: Inicialmente vamos provar que $M \in \sigma(T)$. Seja $a : H \times H \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear definida por $a(u, v) = (Mu - Tu, v)$. Sendo T um operador autoadjunto, segue que $a(\cdot, \cdot)$ é simétrica. Além disso, pela definição de M, para $u \in H$ com $\|u\| = 1$ temos

$$a(u, u) = (Mu - Tu, u) = M(u, u) - (Tu, u) \geq 0.$$

Então, dado $v \in H\backslash\{0\}$, tomando $u = v/\|v\|$ temos $\|v\|^{-2}a(v, v) = a(u, u) \geq 0$, logo $a(v, v) \geq 0$ para todo $v \in H$. Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz à forma bilinear $a(\cdot, \cdot)$ obtemos

$$|(Mu - Tu, v)| \leq (Mu - Tu, u)^{1/2}(Mv - Tv, v)^{1/2} \quad \forall u, v \in H.$$

Daí tomando $v = Mu - Tu$ obtemos,

$$\|Mu - Tu\| \leq C(Mu - Tu, u)^{1/2} \quad \forall u \in H.$$

Seja (u_n) uma seqüência em H tal que $\|u_n\| = 1$ e $(Tu_n, u_n) \to M$. Devido a esta última desigualdade temos que $\|Mu_n - Tu_n\| \to 0$. Afirmamos que $M \in \sigma(T)$. De fato, se $M \in \rho(T)$ então $u_n = (MI - T)^{-1}(Mu_n - Tu_n) \to 0$ contrariando o fato de que $\|u_n\| = 1$ para todo n. Sendo $M > 0$ provaremos que é um autovalor de T. Suponha por absurdo que $N(T - MI) = \{0\}$. Então, pela Alternativa de Fredholm temos $R(T - MI) = H$ e portanto $M \in \rho(T)$ o que é um absurdo. Portanto $M \in VP(T)$.

Definição 4 ([8]) *Sejam X e Y espaços de Banach. Dizemos que um operador $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ é de Fredholm se*

i) *$N(T)$ possui dimensão finita;*

ii) *$R(T)$ é fechado e de codimensão finita.*

Definimos o índice de T por $Ind(T) = \dim N(T) - \operatorname{codim} R(T)$.

Multiplicadores de Lagrange

Definição 5 *Sejam X um espaço de Banach, $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ e um conjunto de vínculos*

$$S := \{u \in X : F(u) = 0\}.$$

Suponhamos que para todo $u \in S$, temos que $F'(u) \neq 0$. Seja $J \in C^1(X, \mathbb{R})$. Dizemos que $c \in \mathbb{R}$ é valor crítico de J sobre S se existem $u \in S$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $J(u) = c$ e $J'(u) = \lambda F'(u)$. O ponto u é um ponto crítico de J sobre S e o número real λ é chamado multiplicador de Lagrange para o valor crítico c.

Utilizaremos o seguinte

Teorema 20 ([24], Multiplicadores de Lagrange) *Sob as hipóteses e notações da definição acima, suponhamos que $u_0 \in S$ é tal que*

$$J(u_0) = \inf_{u \in S} J(u).$$

Então existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$J'(u_0) = \lambda F'(u_0).$$

Princípio do máximo e regularidade

Inicialmente iremos considerar operadores elípticos L, tendo a forma

$$Lu = -\Delta u + cu, \tag{6}$$

onde $c \in L^\infty(\Omega)$. Estes próximos resultados são válidos para operadores elípticos mais gerais. No entanto, apresentaremos apenas o que será necessário ao nosso trabalho.

Teorema 21 ([17], Princípio do Máximo Forte com $c \geq 0$) *Suponha que L é um operador elíptico dado por (6), $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto, limitado e conexo, $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$ em Ω.*

i) *Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge um máximo não negativo em $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω.*

ii) *Analogamente, se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge um mínimo não positivo em $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω.*

Teorema 22 ([29], Lema B.3) *Seja Ω um domínio em $\mathbb{R}^N$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de Carathéodory tal que*

$$|g(x,u)| \leq c(x)(1+|u|) \ \ q.t.p \ em \ \Omega,$$

com $c(x) \in L^{N/2}_{loc}(\Omega)$. Se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ é uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = g(x,u) \ \ em \ \Omega,$$

então $u \in L^q_{loc}(\Omega)$ para qualquer $q < \infty$.

Teorema 23 ([20],Teorema 8.17) *Seja $q : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e limitada e $h \in L^{s/2}(\mathbb{R}^N)$ uma função suave com $s > N$. Fixado $R > 0$ e $p > 1$, existe $C > 0$, $C = C(N, R, p, \|q\|_\infty)$, tal que para cada solução $u \in W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ de*

$$-\Delta u(x) + q(x)u(x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{7}$$

tem-se

$$\sup_{y \in B_R(x)} |u(y)| \leq C \left\{ R^{-N/p} \|u\|_{L^p(B_{2R}(x))} + R^{2\delta} \|h\|_{L^{s/2}} \right\},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, onde $\delta = 1 - (N/s)$.

Teorema 24 ([21], Weyl's lemma) *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio. Considere o operador elíptico dado por (6), onde $c \in C^1(\Omega)$. Se u é uma função localmente integrável em Ω e*

$$\int_\Omega u(x)L(\varphi)dx = 0, \qquad \forall \varphi \in C^\infty_c(\Omega), \tag{8}$$

então $u \in C^2(\Omega)$.

Teoria do grau

Grau topológico em dimensão finita (Brouwer)

Definiremos uma função que nos dará informações quanto à existência, unicidade ou multiplicidade de soluções para equações da forma $\varphi(x) = b$, onde $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado e b é um ponto fixado em $\mathbb{R}^N$. Tal função é denotada por d e a cada terno (φ, Ω, b) associa um número inteiro $d(\varphi, \Omega, b)$ o grau de φ sobre Ω com respeito a b. Os resultados desta seção podem ser encontrados em [7] ou [13].

Começaremos definindo o grau para valores regulares de $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, isto é, para os pontos $b \in \mathbb{R}^N$ tais que $\varphi'(x)$ é invertível para todo $x \in \varphi^{-1}(b)$. Num segundo momento, estenderemos a definição do grau para qualquer valor de $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e por fim, generalizamos a definição para aplicações $\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

Denotamos por S_φ o conjunto dos pontos críticos de φ, ou seja, o conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $\varphi'(x)$ não é invertível. Neste caso, $b = \varphi(x)$ é dito um valor crítico (ou singular) de φ.

Definição 6 *Sejam $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $b \in \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado. Então definimos,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \Sigma_{x \in \varphi^{-1}(b)} \mathrm{sgn} J_\varphi(x).$$

Modifiquemos a definição inicial de modo a abranger também valores singulares.

Definição 7 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado,* $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *e* $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. *Definimos,* $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b^1)$, *onde* b^1 *é um valor regular de* φ *tal que* $|b^1 - b| < \varrho(b, \varphi(\partial\Omega))$ *e* $d(\varphi, \Omega, b^1)$ *é dado pela Definição 6, onde* $\varrho(b, \varphi(\partial\Omega)) = \inf\{|b - a| : a \in \varphi(\partial\Omega)\}$.

Generalizemos agora a definição do grau para funções contínuas suficientemente próximas de funções $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Definição 8 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *aberto e limitado,* $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ *e* $b \in \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. *Definimos* $d(\varphi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega, b)$, *onde* $\phi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ *é tal que* $\|\phi - \varphi\|_\infty < \varrho(b, \varphi(\partial\Omega))$ *e o* $d(\phi, \Omega, b)$ *é dado pela Definição 7.*

Principais propriedades do grau de Brouwer

d_1) **Continuidade em relação a função.** Sejam $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de φ em $C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que para toda $\psi \in V$,

$$b \notin \psi(\partial\Omega) \quad \text{e} \quad d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$$

d_2) **Invariância homotópica do grau.** Sejam $H \in C(\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então $d(H(., t), \Omega, b)$ é constante para $t \in [0,1]$.

d_3) **O Grau é constante em componentes conexas do $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$.** Se b e $\hat{b}$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, \hat{b})$$

d_4) **Aditividade.** Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são abertos de $\mathbb{R}^N$ tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$ então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b)$$

Conseqüências das propriedades do grau de Brouwer

d_5)

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad b \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

d_6) Se $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$ então $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.
d_7) Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.
d_8) Sejam $K \subset \Omega$ fechado e $b \notin \varphi(K)$ então $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega - K, b)$.

Nesta próxima subseção, definiremos o grau topológico para operadores demicontínuos $\varphi : X \to X^*$ onde X é um espaço de Banach reflexivo e separável.

Grau topológico para operadores demicontínuos

Os resultados desta seção podem ser encontrados no livro *Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*, de Igor Vladimirovic Skrypnik, veja [28].

Seja X um espaço de Banach reflexivo separável e X^* seu dual. Considere $D \subset X$ e um operador $A : D \to X^*$. Seja F um subconjunto arbitrário de D.

Definição 9 *Dizemos que o operador A satisfaz a condição $\alpha_0(F)$ se para uma seqüência arbitrária (u_n) em F, a relação: $u_n \rightharpoonup u_0$, $Au_n \rightharpoonup 0$ e*

$$\limsup_{n\to\infty}(Au_n, u_n - u_0) \leq 0 \tag{9}$$

implicar na convergência forte de (u_n) para u_0.

Definição 10 *Dizemos que o operador A satisfaz a condição $\alpha(F)$ se para uma seqüência arbitrária (u_n) em F, a relação $u_n \rightharpoonup u_0$, juntamente com (9), implicar na convergência forte de (u_n) para u_0.*

É claro que se um operador A satisfaz a condição $\alpha(F)$, então A satisfaz também a condição $\alpha_0(F)$.

Definição 11 *Um operador $A : D \to X^*$ é dito demicontínuo se para qualquer seqüência (u_n) em D fortemente convergente para $u_0 \in D$ satisfaz a condição $Au_n \rightharpoonup Au_0$.*

Observação 3 *Note que todo operador contínuo $A : X \to X^*$ é também demicontínuo.*

Seja $(v_i), i = 1, 2, \ldots$ um subconjunto arbitrário completo do espaço X e assumamos que para cada n os elementos $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Denote por F_n o subespaço gerado pelos elementos $v_1, \ldots, v_n$. Além disso, seja $D \subset X$ um subconjunto aberto e limitado arbitrário.

Vamos introduzir as classes de operadores para as quais o grau será definido.

Definição 12 *Para $F \subset D$ denotemos por $A_0(D, F)$ e $A(D, F)$ o conjunto dos operadores demicontínuos limitados $A : D \to X^*$ que satisfazem a condição $\alpha_0(F)$ e $\alpha(F)$, respectivamente. Se $F = D$ escrevemos apenas $A_0(D)$ e $A(D)$.*

Vamos definir $Deg(A, \overline{D}, 0)$ - o grau da aplicação A sobre o conjunto $\overline{D}$ com respeito ao zero do espaço X^* - sob as condições

(a) $A \in A_0(D, \partial D)$;

(b) $A(u) \neq 0$ para qualquer $u \in \partial D$.

Para todo $n = 1, 2, \ldots$ definimos aproximações de posto finito A_n do operador A da seguinte maneira:

$$A_n(u) = \sum_{i=1}^{n}(Au, v_i)v_i \qquad \text{para} \qquad u \in D_n = \overline{D} \cap F_n. \tag{10}$$

Teorema 25 ([28], Teorema 1.1.1) *Seja A um operador satisfazendo as condições (a) e (b). Então existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N_0$ as seguintes afirmações são válidas:*

(1) *a equação* $A_n u = 0$ *não tem soluções pertencentes a* ∂D_n*;*

(2) *o grau de Brouwer* $\deg(A_n, D_n, o)$ *da aplicação* A_n *no conjunto* D_n *com respeito a* $0 \in F_n$ *está definido e independe de* n*.*

O Teorema 25 implica a existência do limite

$$\lim_{n\to\infty} \deg(A_n, D_n, 0).$$

Denotamos este limite por $D(v_i)$.

Teorema 26 ([28], Teorema 1.1.2) *Suponha que as condições* (a) *e* (b) *são satisfeitas. Então o limite*

$$D(v_i) = \lim_{n\to\infty} \deg(A_n, D_n, 0)$$

é independente da escolha do sistema (v_i)*.*

Os Teoremas 25 e 26 justificam a seguinte definição

Definição 13 *Considere um operador* A *satisfazendo as condições* (a), (b) *e sejam* A_n *e* D_n *definidos por (10). Então o número*

$$\lim_{n\to\infty} \deg(A_n, D_n, 0)$$

é chamado o grau da aplicação A *sobre o conjunto* $\overline{D}$ *com respeito a* $0 \in X^*$*, e é denotado por* $\mathrm{Deg}(A, \overline{D}, 0)$*.*

Agora, considere $A_t : \overline{D} \to X^*,\ t \in [0,1]$ uma família parametrizada de aplicações não lineares.

Definição 14 *Dizemos que a família* A_t *satisfaz a condição* $\alpha_0^{(t)}(\partial D)$*, se para qualquer seqüência* (u_n) *em* ∂D*,* (t_n) *em* $[0,1]$*, a relação*

$$u_n \rightharpoonup u_0, \quad A_{t_n}(u_n) \rightharpoonup 0 \quad e \quad \lim_{n\to\infty} (A_{t_n}(u_n), u_n - u_0) = 0$$

implica que $u_n \to u_0$*.*

Definição 15 *Sejam* $A', A'' : \overline{D} \to X^*$ *aplicações de classe* $A_0(D, \partial D)$ *tais que* $A'(u) \neq 0$ *e* $A''(u) \neq 0$ *para* $u \in \partial D$*. As aplicações* A' *e* A'' *são ditas homotópicas sobre* $\overline{D}$ *se existe uma família uniparametrizada de aplicações* $A_t : \overline{D} \to X^*,\ t \in [0,1]$ *satisfazendo a condição* $\alpha_0^{(t)}(\partial D)$ *e tais que*

(a') $A_t(u) \neq 0$ *para* $u \in \partial D,\ t \in [0,1]$*;* $\quad A_0 = A',\ A_1 = A''$*;*

(b') *para quaisquer seqüências* (t_n) *em* $[0,1]$*,* (u_n) *em* ∂D*, tal que* $t_n \to t_0$ *e* $u_n \to u_0$*, a seqüência* $A_{t_n}(u_n)$ *converge fracamente para* $A_{t_0}(u_0)$*.*

Teorema 27 ([28], Teorema 1.3.1) *Sejam* $A', A'' : \overline{D} \to X^*$ *aplicações de classe* $A_0(D, \partial D)$*. Assuma que* $A'(u) \neq 0, A''(u) \neq 0$ *para* $u \in \partial D$ *e que* A', A'' *são homotópicas sobre* $\overline{D}$*. Então*

$$\mathrm{Deg}(A', \overline{D}, 0) = \mathrm{Deg}(A'', \overline{D}, 0). \tag{11}$$

Teorema 28 ([28], Teorema 1.3.3) *Seja $A : \overline{D} \to X^*$ aplicação de classe $A_0(D)$ e assuma que*

$$Au \neq 0 \quad \textit{para} \quad u \in \overline{D}.$$

Então $\mathrm{Deg}(A, \overline{D}, 0) = 0$.

Do Teorema 28 obtemos o seguinte critério de solubilidade da equação $Au = 0$.

Corolário 1 *Seja $A : \overline{D} \to X^*$ aplicação de classe $A_0(D)$ e assuma que $A(u) \neq 0$ para $u \in \partial D$. Uma condição suficiente para a equação $Au = 0$ ter uma solução em D é* $\mathrm{Deg}(A, \overline{D}, 0) \neq 0$.

Teorema 29 ([28], Teorema 1.3.4) *Seja $A : \overline{D} \to X^*$ aplicação de classe $A_0(D, \partial D)$. Assumamos que $0 \in \overline{D} \backslash \partial D$ e que para $u \in \partial D$ a desigualdade*

$$(Au, u) > 0$$

seja válida. Então $\mathrm{Deg}(A, \overline{D}, 0) = 1$.

Definição 16 *Seja $A : \overline{D} \to X^*$ aplicação de classe $A_0(D)$. Um ponto $u_0 \in D$ é chamado um ponto crítico do operador A se $Au_0 = 0$.*

Seja u_0 um ponto crítico isolado de A, isto é, existe uma bola $B_{r_0}(u_0)$ que não contém pontos críticos do operador A, exceto u_0. Mostra-se que para $0 < r \leq r_0$, vale a igualdade

$$\mathrm{Deg}(A, B_r(u_0), 0) = \mathrm{Deg}(A, B_{r_0}(u_0), 0).$$

Este fato justifica a seguinte

Definição 17 *O número*

$$\lim_{r \to 0} \mathrm{Deg}(A, B_r(u_0), 0)$$

é chamado o índice do ponto crítico isolado u_0 do operador A e é denotado por $\mathrm{Ind}(A, u_0)$.

Teorema 30 ([28], Teorema 1.4.1) *Assuma que a aplicação $A : \overline{D} \to X^*$ de classe $A_0(D)$ tem apenas pontos críticos isolados em $\overline{D}$ e que $Au \neq 0$ para $u \in \partial D$. Então existe apenas um número finito de pontos críticos e a igualdade*

$$\mathrm{Deg}(A, \overline{D}, 0) = \sum_{i=1}^{I} \mathrm{Ind}(A, u_i)$$

é satisfeita, onde u_i, $i = 1, \ldots, I$ são todos pontos críticos do operador A em D.

Seja U uma vizinhança do zero em X. Assuma que $F : U \to \mathbb{R}$ é um funcional não linear que possui derivada de Gateaux $F'(u)$ em cada ponto $u \in U$.

Teorema 31 ([28], Teorema 1.5.1) *Assuma que o funcional F tem um mínimo local em zero, sua derivada de Gateaux pertente à classe $A(U)$ e zero é um ponto crítico isolado da aplicação F'. Então* $\mathrm{Ind}(F', 0) = 1$.

Bifurcação

Nesta seção, apresentamos algumas noções e resultados básicos da teoria de bifurcação.

Definição 18 *Sejam X e Y espaços de Banach, $J = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \subset \mathbb{R}$ e $\Omega \subset X$ uma vizinhança de $x = 0$, $T : J \times \Omega \to Y$ tal que $T(\lambda, 0) = 0$ sobre J. Então $(\lambda_0, 0)$ é dito um ponto de bifurcação para $T(\lambda, x) = 0$ se, e somente se, $(\lambda_0, 0) \in \overline{\mathcal{C}}$, onde*

$$\mathcal{C} = \{(\lambda, x) \in J \times \Omega : T(\lambda, x) = 0 \quad e \quad x \neq 0\}.$$

Note que, $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação se, e somente se, $(\lambda_0, 0) = \lim_{n\to\infty}(\lambda_n, x_n)$ com $T(\lambda_n, x_n) = 0$ e $x_n \neq 0 \ \ \forall\, n$. Neste caso é conveniente dizer que soluções não triviais bifurcam em λ_0 a partir da reta de soluções triviais $\{(\lambda, 0) : \lambda \in J\}$.

O próximo resultado, devido a Crandall e Rabinowitz [12], é um Teorema de Bifurcação Local e será usado no Capítulo 2 para estabelecer resultados de existência de soluções para uma classe de problemas semilineares.

Teorema 32 ([13], Teorema 28.6) *Sejam X e Y espaços de Banach sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $\Omega \subset \mathbb{K} \times X$ uma vizinhança de $(\lambda_0, 0)$ e $T : \Omega \to Y$ tal que:*

i) *$T(\lambda, 0) = 0,\ T \in C^1(\Omega)$ e $T_{\lambda x} \in C(\Omega)$;*

ii) *$T_x(\lambda_0, 0)$ é Fredholm de índice zero e $N(T_x(\lambda_0, 0)) = [v]$;*

iii) *$T_{\lambda x}(\lambda_0, 0)v \notin R(T_x(\lambda_0, 0))$.*

Então $(\lambda_0, 0)$ é um ponto de bifurcação para $T(\lambda, x) = 0$ e

$$T^{-1}(0) \cap U = \{(\lambda_0 + \mu(t), tv + tz(t)) : |t| < \delta\} \cup \{(\lambda, 0) : (\lambda, 0) \in U\}$$

para algum $\delta > 0$ e alguma vizinhança U de $(\lambda_0, 0)$, onde $\mu(\cdot)$, $z(\cdot)$ são aplicações contínuas, $\mu(0) = 0$, $z(0) = 0$ e $z(\cdot)$ tem sua imagem no complementar topológico de $[v]$. Se $F \in C^k$ para algum $k \geq 2$, então $\mu(\cdot)$ e $z(\cdot)$ são C^{k-1}.

Agora veremos o Teorema de Bifurcação Global devido a Paul Rabinowitz. Seja X um espaço de Banach real e $G : \mathbb{R} \times X \to X$ uma aplicação compacta e contínua. Estamos interessados em estudar a equação

$$u = G(\lambda, u); \quad \lambda \in \mathbb{R}, u \in X. \tag{12}$$

Aqui vamos supor que $G(\lambda, u) = \lambda L(u) + H(\lambda, u)$, onde $H(\lambda, u) = O(\|u\|)$ para $\|u\| \to 0$, λ em intervalos limitados, e $L : X \to X$ é uma aplicação linear compacta. A solução de (12) é um par $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X$. Denotemos por $\overline{\mathcal{C}}$ o fecho do conjunto das soluções não triviais de (12), ou seja,

$$\mathcal{C} := \{(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times X : u = G(\lambda, u) \ \text{ e } \ u \neq 0\}.$$

Denotemos por $r(L)$ o conjunto de $\mu \in \mathbb{R}$ tal que existe $v \in X,\ v \neq 0$, com $v = \mu L(v)$, e dizemos que μ é um valor característico de L. A multiplicidade de $\mu \in r(L)$ é a dimensão de $\cup_{j=1}^{\infty} N((\mu L - I)^j)$ onde I é a aplicação identidade e $N(P)$ denota o núcleo do operador P. Desde que L é um operador compacto, μ tem multiplicidade finita.

Teorema 33 ([25], Teorema 1.3) *Se $\mu \in r(L)$ é de multiplicidade ímpar, então $\overline{\mathcal{C}}$ possui um subconjunto conexo maximal $\mathcal{C}_\mu$ tal que $(\mu, 0) \in \mathcal{C}_\mu$. Além disso,*

(i) *$\mathcal{C}_\mu$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times X$, ou*

(ii) *$\mathcal{C}_\mu$ contém algum $(\widehat{\mu}, 0)$ onde $\mu \neq \widehat{\mu} \in r(L)$.*

Teorema 34 ([31]) *Seja K um espaço métrico compacto e A e B subconjuntos de K fechados e disjuntos. Então, ou existe um subconjunto de K conexo e fechado que intersecta A e B ou $K = K_A \cup K_B$, onde K_A, K_B são subconjuntos de K disjuntos e compactos contendo A e B, respectivamente.*

Capítulo 1

Problema de autovalor com peso indefinido envolvendo o operador laplaciano

1.1 Introdução e resultados principais

Neste capítulo vamos discutir a existência de um autovalor principal para o problema

$$-\Delta u = \lambda g(x)u, \quad x \in \mathbb{R}^N; \tag{1.1}$$

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0, \quad u > 0 \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{1.2}$$

onde assumiremos que $N \geq 3$, λ é um parâmetro real e g é uma função suave satisfazendo a seguinte hipótese:

(g) $g \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $g(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

Os resultados deste capítulo são devidos a Brown e Stavrakakis veja [10].

O espaço natural para estudar este problema é o espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Para simplificar, usaremos $\mathcal{D}^{1,2}$ para indicar $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ e $\|\cdot\|_{L^p}$ para indicar a norma $\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

Definição 1.1 *Diremos que* $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}^{1,2} \backslash \{0\}$ *é uma solução fraca de* (1.1) *se* ,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g u \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,2},$$

e é uma solução (clássica) de (1.1) *se* $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$ *e satisfaz* (1.1) *pontualmente. Se* (λ, u) *é uma solução fraca de* (1.1), *então* u *é dito uma autofunção associada ao autovalor* λ. *Dizemos que* λ *é um autovalor principal de* (1.1), *se existe uma autofunção associada a* λ *que é estritamente positiva em* $\mathbb{R}^N$ *e que* λ *é um autovalor simples se o autoespaço associado a* λ *tem dimensão 1.*

Aqui, vamos provar a existência, unicidade e simplicidade de um autovalor principal positivo.

O nosso principal resultado neste capítulo, é um resultado do tipo Krein-Rutman, mais precisamente temos

Teorema 1.1 (Krein-Rutman) *Suponha que $g \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, $N \geq 3$, seja uma função suave, limitada e que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $g(x_0) > 0$. Então existe um único autovalor principal positivo para o problema* (1.1). *Além disso, este autovalor é simples.*

Apresentaremos a prova deste resultado em etapas, como segue

- Na Seção 1.2 provaremos a existência de um autovalor principal positivo para o problema (1.1);
- Na Seção 1.3 provaremos que este autovalor principal positivo é único e simples.

1.2 Existência de um autovalor principal

Para mostrarmos a existência de um autovalor principal positivo, usaremos a teoria clássica dos operadores compactos e autoadjuntos. Para isto, vamos introduzir um novo espaço vetorial onde será usado o seguinte resultado:

Lema 1.1 *Suponha que $g \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$. Então existe $\alpha > 0$ tal que*

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |g|u^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

para todo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Prova: Usando a desigualdade de Hölder juntamente com a imersão contínua $\mathcal{D}^{1,2} \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |g|u^2 dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g|^{N/2} dx\right)^{2/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} u^{2^*} dx\right)^{(N-2)/N} \\ &= \|g\|_{L^{N/2}} \|u\|_{L^{2^*}}^2 \leq K^2 \|g\|_{L^{N/2}} \|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}^2. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = K^{-2}\|g\|_{L^{N/2}}^{-1}$, temos o desejado. ■

Se g e $\alpha > 0$ são como no lema anterior, podemos definir um produto interno sobre $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ por

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} guv dx.$$

Esta forma bilinear é simétrica e positiva definida. De fato, usando o lema anterior, obtemos

$$(u, u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^n} gu^2 dx \geq \frac{\alpha}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |g|u^2 dx \geq 0. \tag{1.3}$$

Além disso, se $(u, u) = 0$ obtemos de (1.3) que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} gu^2 dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |g|u^2 dx = 0.$$

Ainda por (1.3), temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx = 0.$$

Como esta integral é justamente a norma de u em $\mathcal{D}^{1,2}$, segue que $u \equiv 0$.

Definimos $\mathbb{V}$ como sendo o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito à norma induzida pelo produto interno dado acima, ou seja,

$$\|u\|_{\mathbb{V}}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N} gu^2 dx.$$

A princípio o espaço $\mathbb{V}$ parece depender da função g, porém temos o seguinte lema.

Lema 1.2 *Suponha que $g \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$. Então $\mathbb{V} = \mathcal{D}^{1,2}$.*

Prova: Por densidade, é suficiente mostrar que as normas de $\mathbb{V}$ e $\mathcal{D}^{1,2}$ são equivalentes sobre $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Para $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos, pelo Lema 1.1

$$\left|\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N} gu^2 dx\right| \leq \frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |g|u^2 dx \leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx.$$

Assim,

$$\|u\|_{\mathbb{V}}^2 \geq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \left|\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N} gu^2 dx\right| \geq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx$$

e

$$\|u\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \left|\frac{\alpha}{2}\int_{\mathbb{R}^N} gu^2 dx\right| \leq \frac{3}{2}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx,$$

ou seja,

$$\frac{1}{2}\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}^2 \leq \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \leq \frac{3}{2}\|u\|_{\mathcal{D}^{1,2}}^2.$$

Portanto as normas são equivalentes e $\mathbb{V} = \mathcal{D}^{1,2}$. ■

Podemos assim supor que a norma em $\mathbb{V}$ coincide com a norma em $\mathcal{D}^{1,2}$ e que o produto interno em $\mathbb{V}$ é dado por

$$(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla v dx.$$

Agora, considere o operador linear $L : \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definido por:

$$(Lu, v) = \int_{\mathbb{R}^N} guv dx, \quad u, v \in \mathbb{V},$$

onde $(\, ,)$ denota o produto interno em $\mathbb{V}$.

Lema 1.3 *O operador L está bem definido.*

Prova: Considere a forma bilinear $\beta : \mathbb{V} \times \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\beta(u, v) = \int_{\mathbb{R}^N} guv dx, \ \ \forall u, v \in \mathbb{V}.$$

Usando a desigualdade de Hölder generalizada, obtemos

$$|\beta(u, v)| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |g||u||v| dx \leq \|g\|_{L^{N/2}}\|u\|_{L^{2^*}}\|v\|_{L^{2^*}} \leq K^2\|g\|_{L^{N/2}}\|u\|_{\mathbb{V}}\|v\|_{\mathbb{V}} \tag{1.4}$$

para todo $u, v \in \mathbb{V}$ e assim β é limitada. Então, fixado $u \in \mathbb{V}$ a aplicação $v \longrightarrow \beta(u,v)$ é linear e limitada sobre $\mathbb{V}$. Assim, pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único $w \in \mathbb{V}$ tal que $(w,v) = \beta(u,v)$ para todo $v \in \mathbb{V}$. Pela definição de L temos $Lu = w$ e, portanto L está bem definido. ■

Lema 1.4 *O operador L é autoadjunto e compacto.*

Prova: Sejam $u, v \in \mathbb{V}$ e observe que

$$(Lu, v) = \int_{\mathbb{R}^N} guvdx = \int_{\mathbb{R}^N} gvudx = (Lv, u).$$

Portanto, L é autoadjunto. Agora, seja (u_n) uma seqüência limitada em $\mathbb{V}$. Afirmamos que (Lu_n) possui uma subseqüência convergente. De fato, para $m, n \in \mathbb{N}$ temos

$$\|Lu_n - Lu_m\|_{\mathbb{V}}^2 = \beta(u_n - u_m, Lu_n - Lu_m) = \int_{\mathbb{R}^N} g(u_n - u_m)(Lu_n - Lu_m)dx.$$

Notemos que $g(u_n - u_m) \in L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbb{R}^N)$. Com efeito, pela imersão $\mathcal{D}^{1,2} \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ obtemos que (u_n) é limitada na norma de $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Isto juntamente com a desigualdade de Hölder implica que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (|g||u_n - u_m|)^{\frac{2N}{N+2}}\, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g|^{N/2} dx\right)^{\frac{4}{2+N}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_n - u_m|^{2^*} dx\right)^{\frac{N-2}{N+2}} \\ &< \infty. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|Lu_n - Lu_m\|_{\mathbb{V}}^2 &\leq \|g(u_n - u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \|Lu_n - Lu_m\|_{L^{2^*}} \\ &\leq K\|g(u_n - u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \|Lu_n - Lu_m\|_{\mathbb{V}}, \end{aligned}$$

conseqüentemente,

$$\|Lu_n - Lu_m\|_{\mathbb{V}} \leq K\|g(u_n - u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}. \tag{1.6}$$

Sendo (u_n) limitada em $\mathcal{D}^{1,2}$ que é um espaço de Banach reflexivo, passando a subseqüência se necessário, temos que $u_n \rightharpoonup u_0$ para algum $u_0 \in \mathcal{D}^{1,2}$. Desde que o operador restrição de $\mathcal{D}^{1,2}$ em $\mathcal{D}^{1,2}(B_R)$ é linear e contínuo, e a imersão $\mathcal{D}^{1,2}(B_R) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N+2}}(B_R)$ é linear e compacta, para toda bola aberta $B_R(0)$, temos que

$$u_n \to u_0 \quad \text{em} \quad L^{\frac{2N}{N+2}}(B_R)$$

para todo $R > 0$. Agora usaremos (1.6) para provar que (Lu_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{V}$. Para isto, é suficiente provarmos a seguinte afirmação:

Afirmação 1.1 *Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\|g(u_n - u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}} \leq \varepsilon/K$ para $m, n \geq k_0$.*

De fato, escrevendo

$$\|g(u_n-u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}=\left(\int_{B_R}|g(u_n-u_m)|^{\frac{2N}{N+2}}dx+\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}|g(u_n-u_m)|^{\frac{2N}{N+2}}dx\right)^{\frac{N+2}{2N}}$$

e usando o fato de que $(a+b)^t\leq a^t+b^t$ para $a,b\in[0,\infty)$ e $t\in(0,1)$, obtemos

$$\|g(u_n-u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}}\leq\|g(u_n-u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(B_R)}+\|g(u_n-u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)}. \tag{1.7}$$

Agora, usando (1.2) e a limitação de (u_n) em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}\|g(u_n-u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)} &\leq \|g\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)}\|u_n-u_m\|_{L^{2^*}(\mathbb{R}^N)}\\ &\leq C\|g\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)},\end{aligned}\tag{1.8}$$

onde C não depende de R. Desde que $g\in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$, fixado $\varepsilon>0$ existe $R_0>0$ tal que

$$\|g\|_{L^{N/2}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)}<\frac{\varepsilon}{2KC}\qquad\forall R\geq R_0.$$

Portanto, para todo $m,n\in\mathbb{N}$ e $R\geq R_0$ obtemos por (1.8)

$$\|g(u_n-u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)}<\frac{\varepsilon}{2K}. \tag{1.9}$$

Agora, usando o fato que g é limitada em $\mathbb{R}^N$, temos $|g(x)|\leq\|g\|_\infty$ para todo $x\in\mathbb{R}^N$. Além disso, sabemos que $u_n\to u_0$ em $L^{\frac{2N}{N+2}}(B_{R_0})$. Assim, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$\|u_n-u_m\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(B_{R_0})}<\frac{\varepsilon}{2K\|g\|_\infty}\qquad\forall m,n\geq n_0,$$

logo,

$$\|g(u_n-u_m)\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(B_{R_0})}\leq\|g\|_\infty\|u_n-u_m\|_{L^{\frac{2N}{N+2}}(B_{R_0})}<\frac{\varepsilon}{2K} \tag{1.10}$$

para todo $m,n\geq n_0$. Assim, por (1.7), (1.9) e (1.10) concluímos a afirmação.

Como conseqüência desta afirmação e (1.6), (Lu_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathbb{V}$, que é um espaço de Banach. Portanto, (Lu_n) é convergente e assim, L é um operador compacto. ■

Lema 1.5 *Se*

$$\mu=\sup\left\{\frac{(Lu,u)}{(u,u)}:u\in\mathbb{V}\backslash\{0\}\right\}>0$$

e $\phi\in\mathbb{V}\setminus\{0\}$ *é tal que* $(L\phi,\phi)/(\phi,\phi)=\mu$, *então* $L\phi=\mu\phi$.

Prova: Inicialmente, observe que por (1.4) o número μ, definido acima, é finito. Além disso,

$$\sup\left\{\frac{(Lu,u)}{(u,u)}:u\in\mathbb{V}\setminus\{0\}\right\}=\sup\left\{(Lu,u):u\in\mathbb{V},\|u\|_{\mathbb{V}}=1\right\}.$$

Seja $\phi\in\mathbb{V}\setminus\{0\}$ tal que $(L\phi,\phi)/(\phi,\phi)=\mu$. Tomando $\phi_0=\phi/\|\phi\|_{\mathbb{V}}$ temos $\mu=(L\phi_0,\phi_0)$. Afirmamos que $L\phi_0=\mu\phi_0$. Para provar esta afirmação definamos o operador linear $A:\mathbb{V}\longrightarrow\mathbb{V}$ por $A(u)=(L-\mu I)(u)$. Sendo A autoadjunto, se $u\in\mathbb{V}$ e $\|u\|_{\mathbb{V}}=1$ temos

$$(Au,u)=(Lu-\mu u,u)=(Lu,u)-\mu(u,u)=(Lu,u)-\mu\leq0,$$

já que $(Lu, u) \leq \mu$. Em particular, $(A\phi_0, \phi_0) = (L\phi_0, \phi_0) - \mu = \mu - \mu = 0$. Agora se $v \in \mathbb{V} \setminus \{0\}$ e $u = v/\|v\|_{\mathbb{V}}$ temos

$$\frac{1}{\|v\|_{\mathbb{V}}^2}(Av, v) = (Au, u) \leq 0.$$

Portanto, $(Av, v) \leq 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$. Tomemos $u_t = t\phi_0 + v$ onde $v \in \mathbb{V}$ e $t \in \mathbb{R}$. Desde que $(Au_t, u_t) \leq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, usando o fato de que A é autoadjunto e $(A\phi_0, \phi_0) = 0$, obtemos

$$\begin{aligned}(Au_t, u_t) &= t^2(A\phi_0, \phi_0) + t(A\phi_0, v) + t(Av, \phi_0) + (Av, v) \\ &= 2t(A\phi_0, v) + (Av, v) \\ &\leq 0,\end{aligned}$$

ou seja, $2t(A\phi_0, v) \leq -(Av, v)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e todo $v \in \mathbb{V}$. Assim se $t > 0$ temos $2(A\phi_0, v) \leq -(Av, v)/t$ para todo $v \in \mathbb{V}$. Fazendo $t \to +\infty$ obtemos $(A\phi_0, v) \leq 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$. Trocando v por $-v$ nessa última desigualdade obtemos $(A\phi_0, v) \geq 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$. Assim $(A\phi_0, v) = 0$ para todo $v \in \mathbb{V}$, logo $A\phi_0 = 0$, ou seja, $L\phi_0 = \mu\phi_0$ como afirmamos. Conseqüentemente, $L\phi = \mu\phi$ como queríamos demonstrar. ■

Agora vamos provar a existência de um autovalor principal positivo.

Proposição 1.2 *Suponha que $g \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N)$ e que existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $g(x_0) > 0$. Então L tem um autovalor principal positivo μ_1. Além disso, toda autofunção associada a μ_1 não muda de sinal. Em particular, $\lambda_1 = \mu_1^{-1}$ é um autovalor principal positivo de* (1.1).

Prova: Seja

$$\mu_1 = \sup_{\substack{u \in \mathbb{V} \\ u \neq 0}} \frac{(Lu, u)}{(u, u)} = \sup_{\substack{u \in \mathbb{V} \\ u \neq 0}} \frac{\beta(u, u)}{(u, u)} = \sup_{\substack{u \in \mathbb{V} \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} gu^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx}.$$

Afirmamos que μ_1 é positivo. De fato, desde que g é contínua e $g(x_0) > 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$, g é positiva em um aberto G contendo x_0. Então podemos escolher $\psi \in \mathbb{V}$ tal que supp$\psi \subset G$. Assim,

$$\mu_1 \geq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} g\psi^2 dx}{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\psi|^2 dx} = \frac{\int_G g\psi^2 dx}{\int_G |\nabla\psi|^2 dx} > 0.$$

Pelo Teorema 19, μ_1 é um autovalor de L. Além disso, este é o maior autovalor de L, pois se $L\varphi = \mu\varphi$, pela definição de μ_1 obtemos

$$\mu = \frac{(L\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)} \leq \mu_1.$$

Afirmamos que toda autofunção associada ao autovalor μ_1 não muda de sinal, assim poderemos considerar uma autofunção estritamente positiva. Dessa forma, μ_1 será um autovalor principal positivo de L. De fato, se $\phi \in \mathbb{V}$ é tal que $L\phi = \mu_1\phi$, temos

$$\mu_1(\phi, v) = (L\phi, v) = \beta(\phi, v), \qquad \forall v \in \mathbb{V},$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla\phi\nabla v dx = \frac{1}{\mu_1}\int_{\mathbb{R}^N} g\phi v dx, \ \forall v \in \mathbb{V}.$$

Assim, ϕ é uma solução fraca de (1.1) com $\lambda_1 = \mu_1^{-1}$ e, pelo Teorema 24, ϕ é uma solução clássica. Vamos provar que ϕ não muda de sinal em $\mathbb{R}^N$. Sejam ϕ^+, ϕ^- as partes positiva e negativa de ϕ respectivamente (ou seja, $\phi^+ = \max\{\phi, 0\}$ e $\phi^- = \min\{\phi, 0\}$). Sabemos que $\phi = \phi^+ + \phi^-$. Agora, observando que ϕ^+, $\phi^- \in \mathbb{V}$ e $(\phi^+, \phi^-) = 0 = \beta(\phi^+, \phi^-)$, obtemos

$$(\phi, \phi) = (\phi^+ + \phi^-, \phi^+ + \phi^-) = (\phi^+, \phi^+) + (\phi^-, \phi^-),$$

e

$$\beta(\phi, \phi) = \beta(\phi^+ + \phi^-, \phi^+ + \phi^-) = \beta(\phi^+, \phi^+) + \beta(\phi^-, \phi^-).$$

Conseqüentemente,

$$\mu_1 = \frac{\beta(\phi, \phi)}{(\phi, \phi)} \leq max \left\{ \frac{\beta(\phi^+, \phi^+)}{(\phi^+, \phi^+)}, \frac{\beta(\phi^-, \phi^-)}{(\phi^-, \phi^-)} \right\}.$$

Então pela definição de μ_1, temos que

$$\frac{\beta(\phi^+, \phi^+)}{(\phi^+, \phi^+)} = \mu_1 \quad \text{ou} \quad \frac{\beta(\phi^-, \phi^-)}{(\phi^-, \phi^-)} = \mu_1.$$

Pelo Lema 1.5 segue que ϕ^+ ou ϕ^- é uma autofunção de L associada a μ_1. Denotemos esta autofunção por φ e podemos assumir que $\varphi \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$ ($\varphi = \phi^+$ ou $\varphi = -\phi^-$). Afirmamos que $\varphi > 0$ em $\mathbb{R}^N$. De fato, suponhamos que exista $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $\varphi(x_0) = 0$. Seja B qualquer bola em $\mathbb{R}^N$ centrada em x_0 tal que φ não é nula em B. Escolha $C > 0$ tal que $C - \lambda_1 g(x) \geq 0$ em B, o que é possível já que g é limitada. Então

$$-\Delta\varphi + (C - \lambda_1 g)\varphi = C\varphi \geq 0 \;\; \text{em } B; \;\;\; \varphi \geq 0 \;\; \text{em} \;\; \partial B.$$

Pelo Princípio do Máximo, Teorema 21, $\varphi \equiv 0$ em B, o que contraria a escolha de B. Logo devemos ter $\varphi > 0$ em $\mathbb{R}^N$, ou seja, $\phi^+ = max\{\phi, 0\} > 0$ em $\mathbb{R}^N$ o que implica $\phi > 0$ em $\mathbb{R}^N$, ou $\phi^- = min\{\phi, 0\} < 0$ em $\mathbb{R}^N$, mostrando que $\phi < 0$ em $\mathbb{R}^N$. Portanto ϕ não muda de sinal em $\mathbb{R}^N$ e μ_1 é um autovalor principal de L. ■

Agora, vamos estudar o comportamento assintótico das soluções de (1.1).

Proposição 1.3 *Suponha que $u \in \mathcal{D}^{1,2}$ é uma solução de* (1.1). *Então*

$$\lim_{|x|\to\infty} |u(x)| = 0.$$

Prova: Se $u \in \mathcal{D}^{1,2}$ então pela Observação 1, $u \in W^{1,2}(B_R)$ para todo R positivo. Além disso, se u é solução de (1.1) então pelo Teorema 23, com $q(x) = -\lambda g(x)$, $h \equiv 0$, $p = 2^*$ e $R = 1$, existe $C > 0$ tal que

$$|u(x)| \leq \sup_{y \in B_1(x)} |u(y)| \leq C\|u\|_{L^{2^*}(B_2(x))}, \tag{1.11}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, onde $C = C(N, \|q\|_\infty)$. Desde que $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx = \int_{B_n} |u|^{2^*} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_n} |u|^{2^*} dx < \infty,$$

onde B_n é a bola aberta centrada na origem e de raio n, $n \in \mathbb{N}$. Assim,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_n} |u|^{2^*} dx = 0.$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_n} |u|^{2^*} dx < (\varepsilon/C)^{2^*}$ para todo $n \geq n_0$. Então para $x \in \mathbb{R}^N$ com $|x| > n_0 + 2$, temos $B_2(x) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{n_0}$ e

$$\int_{B_2(x)} |u|^{2^*} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_{n_0}} |u|^{2^*} dx < (\varepsilon/C)^{2^*}.$$

Por (1.11) obtemos

$$|u(x)| \leq C\|u\|_{L^{2^*}(B_2(x))} < \varepsilon \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}^N \quad \text{com} \quad |x| > n_0 + 2,$$

e isto completa a prova. ■

1.3 Simplicidade do autovalor principal

Nesta seção, mostraremos que λ_1 é um autovalor simples e que é o único autovalor positivo que possui autofunção positiva. Mais precisamente, vamos provar o seguinte resultado:

Proposição 1.4 *Suponha que ϕ é uma autofunção positiva de* (1.1)*, correspondente ao autovalor principal λ_1 e que $u \in \mathcal{D}^{1,2}$ é também uma autofunção positiva de* (1.1) *correspondente a um autovalor $\lambda > 0$. Então $\lambda = \lambda_1$ e $u = c\phi$, para alguma constante $c > 0$.*

Para demonstrarmos esta proposição, vamos inicialmente estabelecer alguns resultados auxiliares.

Lema 1.6 *Suponha que $u \in \mathcal{D}^{1,2}$ é uma solução de* (1.1)*. Então*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \eta} dS = 0.$$

Prova: Já vimos que u é uma solução clássica. Então, multiplicando (1.1) por u e integrando por partes sobre B_R, obtemos

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 dx - \int_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \eta} dS = \lambda \int_{B_R} g u^2 dx.$$

Como $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $gu^2 \in L^1(\mathbb{R}^N)$, segue que $\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} u(\partial u/\partial \eta) dS$ existe e é finito. Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B_R} u \frac{\partial u}{\partial \eta} dS \right|^2 &\leq \left(\int_{\partial B_R} |u||\nabla u| dS \right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1}{R} \int_{\partial B_R} |u|^2 dS \right) \left(R \int_{\partial B_R} |\nabla u|^2 dS \right). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Como $|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, a integral

$$\int_0^\infty \left(\int_{\partial B_R} \left(|\nabla u|^2 + u^{2^*} \right) dS \right) dR$$

converge. Então

$$\lim_{R \to \infty} \int_R^{2R} \left(\int_{\partial B_r} \left(|\nabla u|^2 + u^{2^*} \right) dS \right) dr = 0.$$

Pelo Teorema do Valor Médio, temos

$$\int_R^{2R} \left(\int_{\partial B_r} \left(|\nabla u|^2 + u^{2^*} \right) dS \right) dr = R \int_{\partial B_{R'}} \left(|\nabla u|^2 + u^{2^*} \right) dS,$$

para algum $R' \in [R, 2R]$. Desde que

$$0 \leq \frac{R'}{2} \int_{\partial B_{R'}} \left(|\nabla u|^2 + u^{2^*} \right) dS \leq R \int_{\partial B_{R'}} \left(|\nabla u|^2 + u^{2^*} \right) dS,$$

temos que

$$\lim_{R \to \infty} R' \int_{\partial B_{R'}} \left(|\nabla u|^2 + u^{2^*} \right) dS = 0.$$

Assim, podemos encontrar uma seqüência (R_n) com $R_n \to \infty$ tal que

$$\lim_{n \to \infty} R_n \int_{\partial B_{R_n}} \left(|\nabla u|^2 + u^{2^*} \right) dS = 0$$

e conseqüentemente

$$\lim_{n \to \infty} R_n \int_{\partial B_{R_n}} |\nabla u|^2 dS = 0 = \lim_{n \to \infty} R_n \int_{\partial B_{R_n}} u^{2^*} dS. \tag{1.13}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{R_n} \int_{\partial B_{R_n}} u^2 dS &\leq \frac{1}{R_n} \left(\int_{\partial B_{R_n}} u^{2^*} dS \right)^{\frac{N-2}{N}} \left(\int_{\partial B_{R_n}} dS \right)^{2/N} \\
&\leq K_1 R_n^{-1} (R_n^{N-1})^{2/N} \left(\int_{\partial B_{R_n}} u^{2^*} dS \right)^{\frac{N-2}{N}} \\
&= K_1 \left(R_n \int_{\partial B_{R_n}} u^{2^*} dS \right)^{\frac{N-2}{N}}
\end{aligned}$$

onde $K_1 = (N\alpha(N))^{2/N}$ e $\alpha(N)$ é o volume da bola unitária do $\mathbb{R}^N$. Assim, por (1.13) obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{R_n} \int_{\partial B_{R_n}} u^2 dS = 0.$$

Logo, (1.12) implica que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\partial B_{R_n}} u\frac{\partial u}{\partial \eta}dS = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_{R}} u\frac{\partial u}{\partial \eta}dS = 0.$$

■

Lema 1.7 *Seja $\phi \in \mathcal{D}^{1,2}$ tal que $\phi(x) > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Então para cada $R_0 > 0$ fixo, temos*

$$\int_{R_0}^{\infty}\frac{dr}{H(r)} = \infty \quad \text{onde} \quad H(r) = \int_{\partial B_r}(\phi(x))^2 dS.$$

Prova: Se $\phi \in \mathcal{D}^{1,2}$, temos

$$\begin{aligned}\int_{\partial B_R}\phi^2 dS &\leq \left(\int_{\partial B_R}\phi^{2^*}dS\right)^{(N-2)/N}\left(\int_{\partial B_R}dS\right)^{2/N}\\ &= K_1 R^{\frac{2(N-1)}{N}}\left(\int_{\partial B_R}\phi^{2^*}dS\right)^{(N-2)/N},\end{aligned}$$

onde $K_1 = (N\alpha(N))^{2/N} > 0$. Logo,

$$H(r) \leq K_1 r^{\frac{2(N-1)}{N}}\left(\int_{\partial B_r}\phi^{2^*}dS\right)^{(N-2)/N}.$$

Como $\phi \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, tomando $I(r) = \int_{\partial B_r}\phi^{2^*}dS$, temos

$$\int_0^{\infty} I(r)dr = \int_0^{\infty}\left(\int_{\partial B_r}\phi^{2^*}dS\right)dr = \int_{\mathbb{R}^N}\phi^{2^*}dx < \infty, \tag{1.14}$$

e

$$H(r) \leq K_1 r^{\frac{2(N-1)}{N}}(I(r))^{(N-2)/N}.$$

Assim

$$\frac{1}{H(r)} \geq K_1^{-1} r^{\frac{2(1-N)}{N}}(I(r))^{(2-N)/N}. \tag{1.15}$$

Para $R \geq R_0$ e $\alpha, p, q > 0$ com $1/p + 1/q = 1$, usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}\ln(R) - \ln(R_0) &= \int_{R_0}^{R}\frac{dr}{r} = \int_{R_0}^{R}(I(r))^{\alpha}\frac{1}{r}(I(r))^{-\alpha}dr\\ &\leq \left(\int_{R_0}^{R}(I(r))^{\alpha p}dr\right)^{1/p}\left(\int_{R_0}^{R}r^{-q}(I(r))^{-\alpha q}dr\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha = (N-2)/2(N-1)$, $p = 2(N-1)/(N-2)$ e $q = 2(N-1)/N$, temos $\alpha p = 1$ e $\alpha q = (N-2)/N$ e assim

$$\ln(R) - \ln(R_0) \leq \left(\int_{R_0}^{R}I(r)dr\right)^{1/p}\left(\int_{R_0}^{R}r^{\frac{2(1-N)}{N}}(I(r))^{\frac{2-N}{N}}dr\right)^{1/q}.$$

Sendo $\lim_{R\to\infty}(\ln(R) - \ln(R_0)) = \infty$, temos

$$\left(\int_{R_0}^{\infty} I(r)dr\right)^{1/p} \left(\int_{R_0}^{\infty} r^{\frac{2(1-N)}{N}} (I(r))^{\frac{2-N}{N}} dr\right)^{1/q} = \infty.$$

Desde que $\int_{R_0}^{\infty} I(r)dr < \infty$ devido a (1.14), obtemos

$$\left(\int_{R_0}^{\infty} r^{\frac{2(1-N)}{N}} (I(r))^{\frac{2-N}{N}} dr\right)^{1/q} = \infty,$$

e por (1.15), obtemos

$$\int_{R_0}^{\infty} \frac{dr}{H(r)} = \infty,$$

o que completa a prova. ■

Agora vamos apresentar a demonstração da Proposição 1.4.

Prova da Proposição 1.4: Seja $\phi \in \mathcal{D}^{1,2}$, uma solução positiva de

$$-\Delta\phi = \lambda_1 g\phi \tag{1.16}$$

e $u \in \mathcal{D}^{1,2}$, uma solução positiva de

$$-\Delta u = \lambda g(x)u. \tag{1.17}$$

Multiplicando (1.16) por ϕ e integrando por partes sobre B_R, obtemos

$$\int_{B_R} |\nabla\phi|^2 dx - \int_{\partial B_R} \phi\frac{\partial\phi}{\partial\eta} dS = \lambda_1 \int_{B_R} g\phi^2 dx. \tag{1.18}$$

Fazendo $R \to \infty$ e usando o Lema 1.6, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\phi|^2 dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g\phi^2 dx > 0. \tag{1.19}$$

Agora, multiplicando (1.17) por ϕ^2/u e integrando sobre B_R obtemos

$$-\int_{B_R} \frac{\phi^2}{u}\Delta u dx = \lambda \int_{B_R} g\phi^2 dx.$$

Integrando por partes o primeiro membro desta última igualdade e observando que

$$\nabla(\phi^2/u) = 2(\phi/u)\nabla\phi - (\phi/u)^2\nabla u,$$

obtemos

$$\begin{aligned} -\int_{B_R} \frac{\phi^2}{u}\Delta u dx &= \int_{B_R} \nabla(\phi^2/u)\nabla u dx - \int_{\partial B_R} \frac{\phi^2}{u}\frac{\partial u}{\partial\eta} dS \\ &= 2\int_{B_R} \frac{\phi}{u}\nabla\phi\nabla u dx - \int_{B_R} \frac{\phi^2}{u^2}|\nabla u|^2 dx - \int_{\partial B_R} \frac{\phi^2}{u}\frac{\partial u}{\partial\eta} dS. \end{aligned}$$

Assim,

$$2\int_{B_R}\frac{\phi}{u}\nabla\phi\nabla u dx-\int_{B_R}\frac{\phi^2}{u^2}|\nabla u|^2dx-\int_{\partial B_R}\frac{\phi^2}{u}\frac{\partial u}{\partial\eta}dS=\lambda\int_{B_R}g\phi^2dx. \tag{1.20}$$

Subtraindo (1.20) de (1.18), obtemos

$$\int_{B_R}\left|\nabla\phi-\frac{\phi}{u}\nabla u\right|^2dx-\int_{\partial B_R}\phi\frac{\partial\phi}{\partial\eta}dS+\int_{\partial B_R}\frac{\phi^2}{u}\frac{\partial u}{\partial\eta}dS=(\lambda_1-\lambda)\int_{B_R}g\phi^2dx. \tag{1.21}$$

Fazendo $R\to\infty$ nesta última igualdade, usando (1.19) e o fato de que λ_1 é o menor autovalor positivo de (1.1), obtemos que

$$\lim_{R\to\infty}\left(\int_{B_R}\left|\nabla\phi-\frac{\phi}{u}\nabla u\right|^2dx+\int_{\partial B_R}\frac{\phi^2}{u}\frac{\partial u}{\partial\eta}dS\right)=(\lambda_1-\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}g\phi^2dx\leq 0. \tag{1.22}$$

Afirmamos que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\partial B_R}\frac{\phi^2}{u}\frac{\partial u}{\partial\eta}dS=0. \tag{1.23}$$

Antes de apresentar a prova desta afirmação, vejamos que (1.23) é suficiente para finalizarmos a prova da Proposição 1.4. De fato, segue de (1.22)-(1.23) que

$$0\leq\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla\phi-\frac{\phi}{u}\nabla u\right|^2dx=(\lambda_1-\lambda)\int_{\mathbb{R}^N}g\phi^2dx\leq 0.$$

Isto implica que $\lambda_1=\lambda$ e $\nabla\phi-\phi/u\nabla u=0$. Portanto, $u\nabla\phi-\phi\nabla u=0$. Sendo, $\nabla(\phi/u)=(u\nabla\phi-\phi\nabla u)/u^2$, obtemos $u=c\phi$ para alguma constante positiva c, o que prova a proposição.

Agora, vamos mostrar a afirmação em (1.23). Para isto, sejam

$$\beta(R)=\int_{\partial B_R}\frac{\phi^2}{u}\frac{\partial u}{\partial\eta}dS,\quad q(R)=\int_{B_R}\frac{\phi^2}{u^2}|\nabla u|^2dx\ \text{ e }\ \Theta(R)=\int_{B_R}\left|\nabla\phi-\frac{\phi}{u}\nabla u\right|^2dx.$$

Suponhamos $\lim_{R\to\infty}\beta(R)\neq 0$. Desde que Θ é uma função não decrescente de R, por (1.22) temos dois casos a considerar:

Caso 1. $\lim_{R\to\infty}\beta(R)$ existe e é negativo;

Caso 2. $\lim_{R\to\infty}\beta(R)=-\infty$.

Afirmamos que em ambos os casos, existe $R_0>0$ e $\sigma\in(0,1)$ tais que

$$-\beta(R)\geq\sigma q(R)\quad\forall R\geq R_0. \tag{1.24}$$

Antes de provar esta afirmação, veremos que (1.24) é suficiente para chegar a uma contradição. Pela desigualdade de Hölder, temos

$$-\beta(R)\leq\int_{\partial B_R}\frac{\phi^2}{u}|\nabla u|dS\leq(H(R))^{1/2}\left(\int_{\partial B_R}\frac{\phi^2}{u^2}|\nabla u|^2dS\right)^{1/2}, \tag{1.25}$$

com $H(R)$ definida no Lema 1.7. Observando que

$$q(R) = \int_{B_R} \frac{\phi^2}{u^2} |\nabla u|^2 dx = \int_0^R \left\{ \int_{\partial B_r} \frac{\phi^2}{u^2} |\nabla u|^2 dS \right\} dr,$$

por (1.25) obtemos

$$-\beta(R) \leq (H(R))^{1/2} (q'(R))^{1/2}.$$

Isto, juntamente com (1.24), implica que

$$q'(R) \geq \frac{(\beta(R))^2}{H(R)} \geq \sigma^2 \frac{(q(R))^2}{H(R)}, \quad \forall R \geq R_0.$$

Sendo

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{q(R)}\right) = \frac{-q'(R)}{(q(R))^2},$$

obtemos

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{q(R)}\right) + \frac{\sigma^2}{H(R)} \leq 0, \qquad \forall R \geq R_0.$$

Integrando de R_0 até R, obtemos

$$\frac{1}{q(R)} - \frac{1}{q(R_0)} + \sigma^2 \int_{R_0}^R \frac{dr}{H(r)} \leq 0, \ \forall R \geq R_0$$

o que contraria o Lema 1.7. Portanto, (1.23) é válido, ou seja, $\lim_{R\to\infty} \beta(R) = 0$.

Vejamos agora que, tanto no Caso 1 quanto no Caso 2, a desigualdade (1.24) é válida. Se o Caso 1 ocorrer, segue que $\lim_{R\to\infty} \Theta(R)$ existe e então $(\phi/u)|\nabla u| \in L^2(\mathbb{R}^N)$, mostrando que $\lim_{R\to\infty} q(R)$ existe. Logo, existem $R_1 > 0$ e $\sigma \in (0,1)$ tais que

$$-\beta(R) \geq \sigma q(R), \quad \forall R \geq R_1.$$

Agora, suponhamos que o Caso 2 ocorra. Neste caso, devido a (1.21) devemos ter $\lim_{R\to\infty} \Theta(R) = \infty$ e conseqüentemente $\lim_{R\to\infty} q(R) = \infty$. Por (1.19) $\int_{\mathbb{R}^N} g\phi^2 dx > 0$ e pelo Lema 1.6 $\lim_{R\to\infty} \int_{\partial B_R} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} dS = 0$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $R_2 > 0$ tal que

$$\int_{B_R} g\phi^2 dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_{\partial B_R} \phi \frac{\partial \phi}{\partial \eta} dS < \varepsilon, \quad \forall R \geq R_2.$$

Assim, por (1.21) temos que

$$\Theta(R) \leq -\beta(R) + \varepsilon, \qquad \forall R \geq R_2.$$

Além disso, usando a desigualdade de Young, obtemos para qualquer $\mu > 1$,

$$\nabla \phi \cdot \left(\frac{\phi}{u} \nabla u\right) \leq (\mu |\nabla \phi|) \left(\frac{\phi}{\mu u} |\nabla u|\right) \leq \frac{\mu^2}{2} |\nabla \phi|^2 + \frac{1}{2\mu^2} \frac{\phi^2}{u^2} |\nabla u|^2.$$

Daí

$$\frac{-1}{\mu^2} \frac{\phi^2}{u^2} |\nabla u|^2 \leq -2\nabla \phi \cdot \left(\frac{\phi}{u} \nabla u\right) + \mu^2 |\nabla \phi|^2.$$

Somando $(\phi^2/u^2)|\nabla u|^2$ em ambos os membros desta última desigualdade e integrando sobre B_R, temos

$$\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)\int_{B_R}\frac{\phi^2}{u^2}|\nabla u|^2dx \leq \int_{B_R}|\nabla\phi-\frac{\phi}{u}\nabla u|^2dx+(\mu^2-1)\int_{B_R}|\nabla\phi|^2dx$$

e assim temos

$$\left(1-\frac{1}{\mu^2}\right)q(R)\leq\Theta(R)+(\mu^2-1)\int_{B_R}|\nabla\phi|^2dx\leq-\beta(R)+\varepsilon+(\mu^2-1)\int_{B_R}|\nabla\phi|^2dx$$

para todo $R\geq R_2$. Tomando ε pequeno, podemos escolher $\mu>1$ suficientemente próximo de 1 tal que

$$-\beta(R)\geq\sigma q(R),\quad \forall R\geq R_2$$

onde $\sigma=(1-1/\mu^2)\in(0,1)$ e, portanto, (1.24) ainda é satisfeita. Isto completa a prova da proposição. ■

Finalmente, a demonstração do **Teorema 1.1** é conseqüência dos resultados acima, mais precisamente, das Proposições 1.2, 1.3 e 1.4. ■

Capítulo 2

Bifurcação para uma equação elíptica semilinear em $\mathbb{R}^N$

2.1 Introdução e resultados principais

Neste capítulo vamos discutir a existência de soluções para o problema

$$-\Delta u = \lambda g(x) f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.1}$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0, \quad 0 < u < 1, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{2.2}$$

com $N = 3, 4, 5$. Os resultados deste capítulo são devido a Brown e Stavrakakis, veja [10]. Vamos assumir as seguintes hipóteses sobre as funções f e g:

(g) $g \in L^{N/2}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é uma função suave tal que $g(x_0) > 0$, para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$.

(f) $f : [0, 1] \to \mathbb{R}^+$ é uma função suave tal que $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) < 0$, e $f(u) > 0$ para todo $0 < u < 1$.

Observe que a condição **(g)** é exatamente a que foi imposta sobre a função g no Capítulo 1. Agora, além disso assumiremos que g satisfaz a condição

($\mathbf{g}^-$) existe $R_0 > 0$ tal que $g(x) < 0$ sempre que $|x| > R_0$.

Definição 2.1 *Uma solução fraca de* (2.1) *é um par* $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V} \backslash \{0\}$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g f(u) \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathbb{V}. \tag{2.3}$$

Tal solução é dita clássica se u *é de classe* C^2.

Vamos admitir que o domínio de definição de f pode ser estendido para todo $\mathbb{R}$, de tal maneira que $f(u) < 0$ sempre que $u < 0$ ou $u > 1$ e f, f' e f'' sejam uniformemente limitadas em $\mathbb{R}$. Assumiremos isto mas provaremos a existência de soluções u com $0 \leq u \leq 1$.

Para obtermos resultados de bifurcação para o problema (2.1), é necessário primeiro estudar os autovalores do problema linear correspondente:

$$
\begin{aligned}
-\Delta u &= \lambda g(x) f'(0) u, \quad x \in \mathbb{R}^N \\
&\lim_{|x|\to+\infty} u(x) = 0.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Para simplificar notação, mas sem perda de generalidade, vamos admitir que $f'(0) = 1$. Então a linearização de (2.1), que corresponde a (2.4), é exatamente o problema (1.1). Assim, pelo Teorema 1.1 o problema (2.4) tem um autovalor simples e isolado $\lambda_1 > 0$.

O principal resultado deste capítulo é:

Teorema 2.1 *Suponha que $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para algum $p \in (1, N/2)$ e satisfaz as condições ($\boldsymbol{g}$) e ($\boldsymbol{g}^-$). Então existe um ramo $\mathcal{C}^+ \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{V}$ de soluções do problema* (2.1)-(2.2) *bifurcando a partir de $(\lambda_1, 0)$ tal que:*

(i) *Se $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$, então $\lambda > 0$ e $0 < u(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$;*

(ii) $(\lambda_1, \infty] \subset \{\lambda : (\lambda, u) \in \mathcal{C}^+ \;\; \text{para algum } u \in \mathbb{V}\}$.

Em particular, o problema (2.1)-(2.2) *tem uma solução não trivial $u \in \mathbb{V}$ sempre que $\lambda > \lambda_1$, onde λ_1 é o autovalor principal do problema* (2.4).

Consideremos o operador não-linear $T : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ definido por

$$
(T(\lambda, u), \phi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \phi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g f(u) \phi dx, \tag{2.5}
$$

onde (,) denota o produto interno em $\mathbb{V} = \mathcal{D}^{1,2}$. Para garantir a existência de soluções para o problema (2.1) é suficiente encontrar um ponto de bifurcação para a equação

$$
T(\lambda, u) = 0. \tag{2.6}
$$

Lema 2.1 *O operador T está bem definido por* (2.5).

Prova: Fixado $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}$, defina o funcional linear $F : \mathbb{V} \to \mathbb{R}$ por

$$
F(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g f(u) \varphi dx.
$$

Sendo f' uniformemente limitada em $\mathbb{R}$, existe $M > 0$ tal que $|f'(t)| \leq M$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Sendo $f(0) = 0$, pelo Teorema do Valor Médio, segue que $|f(u)| \leq M|u|$ e conseqüentemente $f(u) \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$. Daí, usando a desigualdade de Hölder e a imersão $\mathcal{D}^{1,2} \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$
\begin{aligned}
|F(\varphi)| &\leq \|\nabla u\|_{L^2} \|\nabla \varphi\|_{L^2} + |\lambda| \|g\|_{L^{N/2}} \|f(u)\|_{L^{2^*}} \|\varphi\|_{L^{2^*}} \\
&\leq \|u\|_{\mathbb{V}} \|\varphi\|_{\mathbb{V}} + K|\lambda| \|g\|_{L^{N/2}} \|f(u)\|_{L^{2^*}} \|\varphi\|_{\mathbb{V}} \\
&\leq C_1 \left(\|u\|_{\mathbb{V}} + |\lambda| \|g\|_{L^{N/2}} \|f(u)\|_{L^{2^*}} \right) \|\varphi\|_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}
$$

Assim, F é limitado e pelo Teorema de Representação de Riesz, existe um único elemento v em $\mathbb{V}$, tal que $(v, \varphi) = F(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathbb{V}$. Pela definição de T temos $T(\lambda, u) = v$ e portanto T está bem definido. ■

Com o objetivo de mostrarmos que $(\lambda_1, 0)$ é um ponto de bifurcação local para (2.6), vamos iniciar com

Lema 2.2 *O operador T satisfaz as hipóteses do Teorema de Bifurcação Local (veja Teorema 32).*

Prova: **i)** Sendo $f(0) = 0$, pela definição de T temos $T(\lambda, 0) = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Além disso, temos que $T \in C^1(\mathbb{R} \times \mathbb{V}, \mathbb{V})$ com derivadas de Fréchet $T_u : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$, $T_\lambda : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathbb{V}$ e $T_{\lambda u} : \mathbb{R} \times \mathbb{V} \to \mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{V})$ contínuas dadas por

$$(T_u(\lambda, u)\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi\nabla\psi dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} gf'(u)\varphi\psi dx$$

$$(T_\lambda(\lambda, u), \varphi) = -\int_{\mathbb{R}^N} gf(u)\varphi dx$$

$$(T_{\lambda u}(\lambda, u)\varphi, \psi) = -\int_{\mathbb{R}^N} gf'(u)\varphi\psi dx$$

para todo $\varphi,\ \psi \in \mathbb{V}$, onde $(\,,)$ denota o produto interno de $\mathbb{V}$.

ii) Consideremos o operador linear $T_u(\lambda_1, 0)$, onde λ_1 é o autovalor principal de (2.4). Usando a desigualdade de Hölder, a imersão $\mathbb{V} \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e o fato de que $f'(0) = 1$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|T_u(\lambda_1, 0)\varphi\|_{\mathbb{V}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi\nabla(T_u(\lambda_1, 0)\varphi)dx - \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi(T_u(\lambda_1, 0)\varphi)dx \\
&\leq \|\nabla\varphi\|_{L^2}\|\nabla(T_u(\lambda_1, 0)\varphi)\|_{L^2} + \lambda_1\|g\|_{L^{N/2}}\|\varphi\|_{L^{2^*}}\|T_u(\lambda_1, 0)\varphi\|_{L^{2^*}} \\
&\leq \|\varphi\|_{\mathbb{V}}\|(T_u(\lambda_1, 0)\varphi)\|_{\mathbb{V}} + K^2\lambda_1\|g\|_{L^{N/2}}\|\varphi\|_{\mathbb{V}}\|T_u(\lambda_1, 0)\varphi\|_{\mathbb{V}}.
\end{aligned}$$

Deste modo,

$$\|T_u(\lambda_1, 0)\varphi\|_{\mathbb{V}} \leq (1 + K^2\lambda_1\|g\|_{L^{N/2}})\|\varphi\|_{\mathbb{V}}, \quad \forall\varphi \in \mathbb{V},$$

e $T_u(\lambda_1, 0)$ é um operador limitado. Além disso, $T_u(\lambda_1, 0)$ é autoadjunto pois

$$(T_u(\lambda_1, 0)\varphi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^N} \nabla\varphi\nabla\psi dx - \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi\psi dx = (T_u(\lambda_1, 0)\psi, \varphi), \tag{2.7}$$

para todo $\varphi, \psi \in \mathbb{V}$. Vemos por (2.7) que $T_u(\lambda_1, 0)\varphi = 0$ se, e somente se, $\varphi \in \mathbb{V}$ é uma solução de (2.4) associada ao autovalor λ_1. Desde que λ_1 é um autovalor simples, segue que $N(T_u(\lambda_1, 0)) = [\phi]$, onde ϕ é a autofunção principal de (2.4) associada a λ_1. Temos ainda $T_u(\lambda_1, 0) = (I - \lambda_1 L)$, onde L é o operador compacto definido no Capítulo 1. Usando a Alternativa de Fredholm para $(I - \lambda_1 L)$, temos que $R(T_u(\lambda_1, 0))$ é fechada e vale a seguinte igualdade $R(T_u(\lambda_1, 0)) = [\phi]^\perp$, isto é, $\psi \in R(T_u(\lambda_1, 0))$ se, e somente se, $(\psi, \phi) = 0$. Logo,

$$\dim N(T_u(\lambda_1, 0)) = \operatorname{codim} R(T_u(\lambda_1, 0)) = 1.$$

Conseqüentemente, $T_u(\lambda_1, 0)$ é um operador de Fredholm de índice zero, de acordo com a Definição 4.

iii) Por (1.19) sabemos que $\int_{\mathbb{R}^N} g\phi^2 dx > 0$. Assim, obtemos

$$(T_{\lambda u}(\lambda_1, 0)\phi, \phi) = -\int_{\mathbb{R}^N} g\phi^2 dx \ < \ 0.$$

e $T_{\lambda u}(\lambda_1,0)\phi \notin R(T_u(\lambda_1,0))$. ■

Desde que T satisfaz todas as hipóteses do Teorema de Bifurcação Local, o seguinte resultado é válido.

Proposição 2.2 *Existe $\varepsilon_0 > 0$ e funções contínuas $\eta : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ e $\psi : (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to [\phi]^\perp$ tais que $\eta(0) = \lambda_1$, $\psi(0) = 0$ e toda solução não trivial de $T(\lambda, u) = 0$ em uma pequena vizinhança de $(\lambda_1, 0)$ é da forma $(\lambda_\varepsilon, u_\varepsilon) = (\eta(\varepsilon), \varepsilon\phi + \varepsilon\psi(\varepsilon))$.*

A fim de que uma solução u de $T(\lambda, u) = 0$, seja também uma solução de (2.1)-(2.2), é necessário garantir que $0 < u(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e que $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$. Para isto precisamos estabelecer a regularidade da solução fraca do problema (2.1).

Lema 2.3 *Toda solução fraca do problema* (2.1) *é clássica.*

Prova: Se u é uma solução fraca de (2.1), então para toda bola $B \subset \mathbb{R}^N$ temos que u é uma solução fraca da equação

$$-\Delta u = c(x)(1 + |u|) \text{ em } B,$$

com $c(x) = \lambda g(x) f(u)/(1+|u|)$. Desde que $f(u) \le M|u|$, temos que $c \in L^{N/2}_{loc}(B)$. Usando o Teorema 22 obtemos que $u \in L^q_{loc}(B)$ para todo $q < \infty$. Usando o Teorema de Calderón-Zygmund (veja Teorema B2 em [29]) obtemos que $u \in W^{2,q}_{loc}(B)$. Escolhendo $q > N$ e usando a imersão $W^{2,q}_{loc}(B) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(B)$ obtemos que $u \in C^{1,\alpha}(B)$. Conseqüentemente, a função $h(x) = \lambda g(x) f(u(x))$ é de classe C^α. Se w é o potencial Newtoniano de f, então $w \in C^2(B)$ e $-\Delta w = f$ em B (veja Lema 4.2 em [20]). Agora, considerando $v = u - w$ temos $\Delta v = 0$ em B e pelo Lema de Weyl (veja Teorema 24) temos que $v \in C^2(B)$. Portanto, $u \in C^2(B)$. Desde que isto é válido para toda bola $B \subset \mathbb{R}^N$ concluímos que $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$. ■

Como na demonstração da Proposição 1.3, tomando $q(x) = \lambda g(x) f(u(x))/u(x)$ vemos que para todo $u \in \mathbb{V}$, solução de (2.1), tem-se $\lim_{|x|\to\infty} u(x) = 0$ e a desigualdade (1.11) é válida. Dessa forma, temos

$$|u_\varepsilon(x)| \le C\|u_\varepsilon\|_{L^{2^*}(B_2(x))} \le C_1\|u_\varepsilon\|_{\mathbb{V}} \tag{2.8}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$, onde C e C_1 são constantes positivas que não dependem de ε. Desde que $\|u_\varepsilon\|_{\mathbb{V}} \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$, podemos tomar ε suficientemente pequeno tal que $|u_\varepsilon(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Parece mais difícil estabelecer a positividade das soluções, para isto vamos admitir que g satisfaz a condição ($\mathbf{g}^-$).

Proposição 2.3 *Suponha que g satisfaz a condição ($\boldsymbol{g}^-$). Então existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $u_\varepsilon(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ sempre que $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.*

Prova: Por simplicidade usaremos ψ_ε para indicar $\psi(\varepsilon)$. Desde que $u_\varepsilon = \varepsilon\phi + \varepsilon\psi_\varepsilon$ é uma solução clássica de (2.1) com $\lambda = \eta(\varepsilon)$, temos

$$-\Delta u_\varepsilon = \eta(\varepsilon) g f(u_\varepsilon), \quad \text{em } \mathbb{R}^N,$$

ou seja,

$$-\varepsilon\Delta\phi - \varepsilon\Delta\psi_\varepsilon = \eta(\varepsilon) g f(\varepsilon\phi + \varepsilon\psi_\varepsilon).$$

Assim, usando o fato de que ϕ é uma autofunção de (2.4) associada a λ_1, obtemos

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \eta(\varepsilon) g \frac{f(\varepsilon\phi + \varepsilon\psi_\varepsilon)}{\varepsilon} - \lambda_1 g\phi. \tag{2.9}$$

Sendo $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, pela fórmula de Taylor com resto de Lagrange obtemos

$$f(u_\varepsilon) = u_\varepsilon + \frac{1}{2} f''(\xi(\varepsilon, x))(u_\varepsilon)^2,$$

para algum $\xi(\varepsilon, x)$ entre 0 e $u_\varepsilon(x)$, ou seja,

$$f(\varepsilon\phi + \varepsilon\psi_\varepsilon) = \varepsilon\phi + \varepsilon\psi_\varepsilon + \frac{1}{2} f''(\xi(\varepsilon, x))(u_\varepsilon)(\varepsilon\phi + \varepsilon\psi_\varepsilon).$$

Dividindo esta última equação por ε temos

$$\frac{f(\varepsilon\phi + \varepsilon\psi_\varepsilon)}{\varepsilon} = \phi + \psi_\varepsilon + \frac{1}{2} f''(\xi(\varepsilon, x)) u_\varepsilon(\phi + \psi_\varepsilon). \tag{2.10}$$

De (2.9) e (2.10) obtemos

$$-\Delta\psi_\varepsilon = \eta(\varepsilon) g \left(\phi + \psi_\varepsilon + \frac{1}{2} f''(\xi(\varepsilon, x)) u_\varepsilon(\phi + \psi_\varepsilon)\right) - \lambda_1 g\phi.$$

Assim,

$$-\Delta\psi_\varepsilon - q(x)\psi_\varepsilon = (\eta(\varepsilon) - \lambda_1) g\phi + \frac{1}{2}\eta(\varepsilon) g\phi f''(\xi(\varepsilon, x)) u_\varepsilon,$$

onde $q(x) = \eta(\varepsilon) g(x)[1 + (1/2) f''(\xi(\varepsilon, x)) u_\varepsilon(x)]$. Sendo g, f e u_ε funções suaves, q é também uma função suave. Como para ε suficientemente pequeno temos $|u_\varepsilon(x)| < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, e f'' é uniformemente limitada em $\mathbb{R}$, segue que $|q(x)| \leq M'|\eta(\varepsilon)||g(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e alguma constante M'. Desse modo, já que g é uma função limitada, temos $\|q\|_\infty \leq M'|\eta(\varepsilon)|\|g\|_\infty = C_\varepsilon$ e q é limitada. Tomando

$$h(x) = (\eta(\varepsilon) - \lambda_1) g(x)\phi(x) + (1/2)\eta(\varepsilon) g(x)\phi(x) f''(\xi(\varepsilon, x)) u_\varepsilon(x),$$

vemos que h é uma função suave. Além disso, usando novamente o fato de que f'' é uniformemente limitada e $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos que $h \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^{2^*}} &\leq |\eta(\varepsilon) - \lambda_1| \|g\phi\|_{L^{2^*}} + \tfrac{1}{2}|\eta(\varepsilon)| \|g\phi f''(\xi(\varepsilon, x)) u_\varepsilon\|_{L^{2^*}} \\
&\leq |\eta(\varepsilon) - \lambda_1| \|g\|_\infty \|\phi\|_{L^{2^*}} + c|\eta(\varepsilon)| \|g\phi u_\varepsilon\|_{L^{2^*}} \\
&\leq K\left(|\eta(\varepsilon) - \lambda_1| \|g\|_\infty \|\phi\|_{\mathbb{V}} + c|\eta(\varepsilon)| \|g\|_\infty \|\phi\|_\infty \|u_\varepsilon\|_{\mathbb{V}}\right) \\
&\leq c'\|g\|_\infty \left(|\eta(\varepsilon) - \lambda_1| \|\phi\|_{\mathbb{V}} + |\eta(\varepsilon)| \|\phi\|_\infty \|u_\varepsilon\|_{\mathbb{V}}\right)
\end{aligned}$$

onde K é a constante de imersão e c, c' são constantes positivas independentes de ε. Assim, ψ_ε é uma solução em $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ do problema

$$-\Delta u(x) - q(x)u(x) = h(x).$$

Observe que se $N=3,4,5$ e $s=4N/(N-2)$, então $s>N$. Dessa forma, pelo Teorema 23, com $p=s/2=2^*$ e $R=R_0$ (R_0 da condição ($\mathbf{g}^-$)), existe $C>0$ (independente de ε) tal que

$$\begin{aligned}\sup_{|x|\leq R_0}|\psi_\varepsilon(x)| &\leq C\{R_0^{-N/p}\|\psi_\varepsilon\|_{L^p(B_{2R_0})}+R_0^{2\delta}\|h\|_{L^{s/2}}\}\\ &\leq C'\left\{\|\psi_\varepsilon\|_{\mathbb{V}}+\|g\|_\infty\left(|\eta(\varepsilon)-\lambda_1|\|\phi\|_{\mathbb{V}}+|\eta(\varepsilon)|\|\phi\|_\infty\|u_\varepsilon\|_{\mathbb{V}}\right)\right\}\end{aligned}$$

para algum $C'>0$. Observe que pela definição das funções ψ e η, o lado direito desta última desigualdade tende a zero quando ε tende a zero. Assim, podemos fazer $\psi_\varepsilon(x)$ tão pequeno quanto queiramos em B_{R_0}. Sendo ϕ suave, limitada e $\phi(x)>0$ em $\overline{B}_{R_0}$, existe $y\in\overline{B}_{R_0}$ tal que $\phi(y)=\min_{x\in B_{R_0}}\phi(x)=\alpha>0$. Dessa forma, podemos escolher $\varepsilon_1>0$ suficientemente pequeno tal que $|\psi_\varepsilon|<\alpha$ em B_{R_0} e $\eta(\varepsilon)>0$ para $0<\varepsilon<\varepsilon_1$. Desse modo, $\phi(x)+\psi_\varepsilon(x)>\phi(x)-\alpha\geq 0$ e $u_\varepsilon(x)>0$ para todo $x\in B_{R_0}$ e $0<\varepsilon<\varepsilon_1$.

Agora suponha que $u_\varepsilon(x_0)<0$ para algum $x_0\in\mathbb{R}^N$. Como $\lim_{|x|\to\infty}u_\varepsilon(x)=0$, segue que existe $x_1\in\mathbb{R}^N$, $|x_1|>R_0$, tal que u_ε atinge um mínimo negativo em x_1. Mas então, já que $g(x_1)<0$, $f(u_\varepsilon(x_1))<0$ e $\eta(\varepsilon)>0$, temos

$$-\Delta u_\varepsilon(x_1)=\eta(\varepsilon)g(x_1)f(u_\varepsilon(x_1))>0,$$

o que é impossível pois sendo x_1 um ponto de mínimo de u_ε devíamos ter $\Delta u_\varepsilon(x_1)\geq 0$. Portanto, $u_\varepsilon(x)\geq 0$ para todo $x\in\mathbb{R}^N\backslash B_{R_0}$.

Suponha agora que $u_\varepsilon(x_0)=0$ para algum $x_0\in\mathbb{R}^N\backslash B_{R_0}$ e seja B uma bola centrada em x_0 tal que $B\cap B_{R_0}\neq\emptyset$. Tomando $c(x)=\lambda g(x)f(u_\varepsilon(x))/u_\varepsilon(x)$ temos c limitada e

$$\begin{cases}-\Delta u_\varepsilon-cu_\varepsilon &= 0 \quad \text{em} \quad B,\\ \qquad\qquad u_\varepsilon &\geq 0 \quad \text{sobre} \quad \partial B.\end{cases}$$

Assim, podemos escolher $C>0$ tal que $(C-c(x))\geq 0$ em B. Então

$$-\Delta u_\varepsilon+(C-c(x))u_\varepsilon=Cu_\varepsilon\geq 0 \;\text{ em } B;\quad u_\varepsilon\geq 0 \;\text{ em }\; \partial B.$$

Pelo Princípio do Máximo, Teorema 21, $u_\varepsilon\equiv 0$ em B, o que contraria a escolha de B. Logo devemos ter $u_\varepsilon>0$ em $\mathbb{R}^N$, para todo $0<\varepsilon<\varepsilon_1$. ■

2.2 Prova do Teorema 2.1:

Agora discutiremos a natureza global do ramo de soluções bifurcando a partir de $(\lambda_1,0)$. Para isto, note que podemos escrever o operador T como $T(\lambda,u)=u-\lambda S(u)$, onde

$$(S(u),\phi)=\int_{\mathbb{R}^N}gf(u)\phi dx,\quad \forall\phi\in\mathbb{V}.$$

Desde que $f(0)=0$ e $f'(0)=1$, pela fórmula de Taylor temos

$$f(u)=u+r(u),\;\text{ onde }\; r(u)=o(|u|).$$

Logo,

$$S(u)=Lu+\mathcal{H}(u),$$

onde L denota o operador linear definido no Capítulo 1, isto é,

$$(Lu, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} gu\varphi dx, \quad \forall u, \varphi \in \mathbb{V},$$

e $\mathcal{H}(u) = o(\|u\|_{\mathbb{V}})$ quando $\|u\|_{\mathbb{V}} \to 0$. Seja $H(\lambda, u) = \lambda\mathcal{H}(u)$. Então, o problema (2.6) é equivalente ao problema

$$0 = T(\lambda, u) = u - \lambda Lu - H(\lambda, u), \tag{2.11}$$

onde $H(\lambda, u) = o(\|u\|_{\mathbb{V}})$ quando $\|u\|_{\mathbb{V}} \to 0$ e λ em um intervalo limitado.

Veremos agora que T satisfaz as hipóteses do Teorema de Bifurcação Global.

Lema 2.4 *O operador T satisfaz as hipóteses do Teorema* 33.

Prova: Usando o fato de que f é uma função lipschitziana, podemos provar modificando a prova do Lema 1.4 que S é um operador compacto e conseqüentemente, H também o é. Além disso, sabemos pelo Teorema 1.1 que λ_1^{-1} é um autovalor de L e, pela Proposição 1.4, λ_1^{-1} tem multiplicidade algébrica igual a 1. ■

Assim, podemos aplicar Teorema de Bifurcação Global, veja Teorema 33, e obtemos

Proposição 2.4 *Existe um ramo $\mathcal{C}$ de soluções não nulas de* (2.1) *bifurcando a partir de* $(\lambda_1, 0)$, *o qual ou é ilimitado ou contém um ponto* $(\lambda, 0)$, *onde $\lambda \neq \lambda_1$ e λ é um valor característico de L, ou seja, λ é um autovalor de* (2.4).

Além disso, $\mathcal{C}$ possui um subconjunto conexo $\mathcal{C}^+ \subset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{V}$, tal que $\mathcal{C}^+$ ou é ilimitado, ou contém um ponto $(\lambda, 0)$, onde $\lambda \neq \lambda_1$ é um autovalor de (2.4). Próximo do ponto de bifurcação $(\lambda_1, 0)$, $\mathcal{C}^+$ consiste da curva $\varepsilon \to (\eta(\varepsilon), u_\varepsilon)$ com $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$.

No que segue, investigaremos a natureza das soluções em $\mathcal{C}^+$. Primeiro vamos mostrar que $\mathcal{C}^+$ é limitado inferiormente em λ.

Lema 2.5 *Existe $\lambda_* > 0$ tal que $\lambda > \lambda_*$ sempre que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$.*

Prova: Seja $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ uma solução de (2.1), ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \nabla u \nabla \varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} gf(u)\varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathbb{V}.$$

Tomando $\varphi = u$, usando o fato de que $|f(u)| \leq Mu$, $\lambda > 0$ e a imersão $\mathbb{V} \hookrightarrow L^{2^*}$, obtemos

$$\|u\|_{\mathbb{V}}^2 \;\leq\; \lambda M \|g\|_{L^{N/2}} \|u\|_{L^{2^*}}^2 \leq \lambda M K^2 \|g\|_{L^{N/2}} \|u\|_{\mathbb{V}}^2 \,.$$

Logo, tomando $\lambda_* = (MK^2\|g\|_{L^{N/2}})^{-1}$, temos que $\lambda \geq \lambda_*$ sempre que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$. ■

Agora vamos provar que as soluções que estão próximas em $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$ também estão próximas em $\mathbb{R} \times L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Como $\mathbb{V}$ não está imerso em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, isto não é óbvio.

Lema 2.6 *Seja u_λ uma solução de* (2.1) *associada a λ. Então existem constantes positivas C_1 e C_2 tais que*

$$|u_\lambda(x) - u_\mu(x)| \leq C_1|\lambda - \mu| + C_2\|u_\lambda - u_\mu\|_{\mathbb{V}}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^N$$

sempre que μ está próximo de λ e $u_\mu \in \mathbb{V}$ é uma solução de (2.1) *associada a μ.*

Prova: Sendo u_λ e u_μ soluções de (2.1), temos

$$-\Delta(u_\lambda - u_\mu) = g(\lambda f(u_\lambda) - \mu f(u_\mu)).$$

Agora, pelo Teorema 23 com $q \equiv 0$, $h = g(\lambda f(u_\lambda) - \mu f(u_\mu))$ e $p = s/2 = 2^*$ (assim $s = 4N/(N-2) > N$ para $N = 3, 4, 5$), existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{y \in B_1(x)} |u_\lambda(y) - u_\mu(y)| \le C\{\|u_\lambda - u_\mu\|_{L^{2^*}(B_2(x))} + \|g(\lambda f(u_\lambda) - \mu f(u_\mu))\|_{L^{2^*}}\},$$

para todo $x \in \mathbb{R}^N$. Assim, usando o fato de que $g \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $|f(u)| \le M|u|$ e a imersão $\mathbb{V} \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}
|u_\lambda(x) - u_\mu(x)| &\le C\{\|u_\lambda - u_\mu\|_{L^{2^*}(B_2(x))} + \|g(\lambda f(u_\lambda) - \mu f(u_\mu))\|_{L^{2^*}}\} \\
&\le CK\|u_\lambda - u_\mu\|_{\mathbb{V}} + C\|g\|_\infty\{\|(\lambda-\mu) f(u_\lambda)\|_{L^{2^*}} + \|\mu(f(u_\lambda) - f(u_\mu))\|_{L^{2^*}}\} \\
&\le CK\|u_\lambda - u_\mu\|_{\mathbb{V}} + CMK|\lambda - \mu|\|g\|_\infty\|u_\lambda\|_{\mathbb{V}} + CMK|\mu|\|g\|_\infty\|u_\lambda - u_\mu\|_{\mathbb{V}} \\
&\le CMK\|g\|_\infty\|u_\lambda\|_{\mathbb{V}}|\lambda - \mu| + CK(1 + \alpha M\|g\|_\infty)\|u_\lambda - u_\mu\|_{\mathbb{V}},
\end{aligned}$$

onde $\alpha = \sup|\mu|$ nesta vizinhança de λ. Logo, tomando $C_1 = CMK\|g\|_\infty\|u_\lambda\|_{\mathbb{V}}$ e $C_2 = CK(1 + \alpha M\|g\|_\infty)$, temos o desejado. ■

Para mostrarmos que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ é de fato, uma solução do problema (2.1)-(2.2), precisamos do seguinte resultado

Proposição 2.5 *Suponha que g satisfaz a condição ($\boldsymbol{g}^-$). Então $0 < u(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ sempre que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$.*

Prova: Mostraremos inicialmente que $u > 0$ sempre que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$. Pela Proposição 2.3, $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ quando $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ está próximo de $(\lambda_1, 0)$. Além disso, pelo Lema 2.6, pontos que estão próximos em $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$ também estão próximos em $\mathbb{R} \times L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Suponha que existe $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ com $u(x_0) < 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Desde que $\mathcal{C}^+$ é conexo, pelo Teorema da Alfândega segue que existe $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C}^+$ tal que $u_0(x) \ge 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $u_0(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e, em qualquer vizinhança de (λ_0, u_0) podemos encontrar um ponto $(\widehat{\lambda}, \widehat{u}) \in \mathcal{C}^+$ com $\widehat{u}(x) < 0$ para algum $x \in \mathbb{R}^N$. Suponha $u_0 \not\equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$ e seja B denotando uma bola aberta contendo o ponto x_0 tal que u_0 não é nula em B. Usando o princípio do máximo com os mesmos argumentos usados na Proposição 2.3 concluímos que $u_0 \equiv 0$ sobre B, contrariando sua escolha. Logo $u_0 \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$. Assim, podemos construir uma seqüência $(\lambda_n, u_n) \subseteq \mathcal{C}^+$ tal que $u_n \to 0$, $\lambda_n \to \lambda_0$ e $u_n(x) > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}^N$. Seja $v_n = u_n/\|u_n\|_{\mathbb{V}}$. Já que (λ_n, u_n) é uma solução de (2.1), devemos ter $T(\lambda_n, u_n) = 0$, ou seja,

$$u_n = \lambda_n L(u_n) + H(\lambda_n, u_n),$$

e assim,

$$v_n = \lambda_n L(v_n) + \frac{H(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|_{\mathbb{V}}}. \tag{2.12}$$

Como L é um operador compacto e (v_n) é limitada, existe uma subseqüência de (v_n) (a qual denotaremos ainda por (v_n)) tal que (Lv_n) é convergente. Desde que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H(\lambda_n, u_n)}{\|u_n\|_{\mathbb{V}}} = 0,$$

devido a (2.12) temos que (v_n) é convergente e $v_0 = \lim_{n\to\infty} v_n = \lambda_0 \lim_{n\to\infty} L(v_n)$. Mas,

$$\lim_{n\to\infty} L(v_n) = L(\lim_{n\to\infty} v_n) \;=\; L(v_0),$$

logo $v_0 = \lambda_0 L(v_0)$. Assim, como vimos no Capítulo 1, v_0 é uma solução da equação

$$-\Delta(u) = \lambda_0 g(x) u \;\text{ em }\; \mathbb{R}^N.$$

Já que $v_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $v_0 \geq 0$. Pelo Princípio do Máximo, Teorema 21, segue que $v_0 > 0$ ou $v_0 \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$. Mas $v_0 \equiv 0$ é impossível já que $\|v_0\|_{\mathbb{V}} = 1$, então $v_0 > 0$. Pela Proposição 1.4, λ_1 é o único autovalor positivo correspondente à uma autofunção positiva, logo, $\lambda_1 = \lambda_0$. Assim, temos $(\lambda_0, u_0) = (\lambda_1, 0)$ e isso contradiz o fato de que toda vizinhança de (λ_0, u_0) contém uma solução $(\widehat{\lambda}, \widehat{u}) \in \mathcal{C}^+$ com $\widehat{u}(x) < 0$ para algum $x \in \mathbb{R}^N$. Então $u(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ sempre que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$.

Afirmamos agora que $u < 1$ sempre que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$. De fato, suponha que existe $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ com $u(x_1) > 1$ para algum $x_1 \in \mathbb{R}^N$. Então existe $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C}^+$ tal que $u_0(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ e $u_0(x_0) = 1$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Se $v_0 = 1 - u_0$, então $v_o(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$, $v_0(x_0) = 0$ e sendo (λ_0, u_0) solução de (2.1) temos $-\Delta(1 - v_0(x)) = \lambda_0 g(x) f(1 - v_0(x))$, logo

$$-\Delta v_0(x) = \lambda_0 \widehat{g}(x) \widehat{f}(v_0(x))$$

onde $\widehat{g}(x) = -g(x)$ e $\widehat{f}(v) = f(1 - v)$. Novamente o princípio do máximo mostra que $v_0 \equiv 0$ e então $u_0 \equiv 1$ sobre $\mathbb{R}^N$, o que é impossível já que $u_0 \in \mathbb{V}$. Portanto devemos ter $u(x) < 1$ para todo $x \in \mathbb{R}^N$ sempre que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$ e a prova está completa. ■

O resultado seguinte é conseqüência de um argumento muito semelhante ao usado na primeira parte da prova da proposição acima.

Proposição 2.6 *$\mathcal{C}^+$ não contém pontos da forma $(\lambda, 0)$, onde $\lambda \neq \lambda_1$.*

Prova: Seja $(\lambda, 0) \in \mathcal{C}^+$. Pela primeira parte da prova da Proposição 2.5, obtemos $\lambda = \lambda_1$. ■

Portanto $\mathcal{C}^+$ é ilimitado em $\mathbb{R} \times \mathbb{V}$ devido à Proposição 2.4. A próxima proposição mostra que $\mathcal{C}^+$ não pode ser ilimitado em um valor finito de λ.

Proposição 2.7 *Suponha que g satisfaz a condição $(\boldsymbol{g}^-)$ e $g \in L^p(\mathbb{R}^N)$, onde $p < N/2$. Então existe uma função contínua $k : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ tal que $\|u\|_{\mathbb{V}} \leq k(\lambda)$ sempre que $(\lambda, u) \in \mathcal{C}^+$.*

Prova: Seja $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{V}$ uma solução de (2.1). Como no Lema 2.5 obtemos,

$$\|u\|_{\mathbb{V}}^2 = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g f(u) u dx \leq \lambda M \int_{\mathbb{R}^N} |g| u^2 dx.$$

Seja p' o expoente conjugado de p, isto é, tal que $1/p + 1/p' = 1$. Desde que $p < N/2$ temos $1/p' = 1 - 1/p < 1 - 2/N = (N-2)/N$ e $p' > N/(N-2)$. Então podemos escolher $0 < \beta < 2$ tal que $\beta p' = 2^*$. Usando o fato de que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\|u\|_{\mathbb{V}}^2 \;\; \leq \;\; \lambda M \int_{\mathbb{R}^N} |g| u^{2-\beta} u^\beta dx \leq \lambda M \|u\|_\infty^{2-\beta} \int_{\mathbb{R}^N} |g| u^\beta dx.$$

Usando agora a desigualdade de Hölder e o fato de que $|u| < 1$ e $\beta p' = 2^*$, obtemos

$$\|u\|_{\mathbb{V}}^2 \;\; \leq \;\; \lambda M \|g\|_{L^p} \|u\|_{L^{2^*}}^{2^*/p'} \leq \lambda M K^\beta \|g\|_{L^p} \|u\|_{\mathbb{V}}^\beta,$$

portanto,

$$\|u\|_{\mathbb{V}} \leq \left(\lambda M K^\beta \|g\|_{L^p}\right)^s,$$

onde $s = (2-\beta)^{-1}$. Tomando $k(\lambda) = \left(\lambda M K^\beta \|g\|_{L^p}\right)^s$ obtemos a prova da proposição. ■

Como conseqüência das Proposições 2.4, 2.5, 2.6 e 2.7 temos a prova do **Teorema 2.1**.

Capítulo 3

Problema de autovalor com peso indefinido envolvendo o operador p-laplaciano

3.1 Introdução e resultados principais

Neste capítulo vamos estabelecer a existência de um autovalor principal para uma classe de problemas quasilineares em $\mathbb{R}^N$. Mais precisamente, vamos estudar o seguinte problema

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u, \; x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.1}$$

$$\lim_{|x| \to +\infty} u(x) = 0, \quad u > 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

onde

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

é o operador p-laplaciano, $1 < p < N$, λ é um parâmetro real e a função peso g satisfaz a seguinte hipótese

($\mathcal{G}$) g é uma função suave (pelo menos $C^{0,\gamma}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ para algum $\gamma \in (0,1)$), tal que $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $|\Omega^+| > 0$, onde

$$\Omega^+ := \{x \in \mathbb{R}^N \, : \, g(x) > 0\}.$$

Também, para diferenciar o caso quando g muda de sinal do caso em que isto não ocorre, dizemos que g satisfaz:

($\mathcal{G}^+$) se g satisfaz ($\mathcal{G}$) e $g \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$,

($\mathcal{G}^-$) se g satisfaz ($\mathcal{G}$) e $|\Omega^-| > 0$, onde

$$\Omega^- := \{x \in \mathbb{R}^N \, : \, g(x) < 0\}.$$

Os resultados deste capítulo são devidos a Fleckinger, Manásevich, Stavrakakis e de Thélin, artigo publicado em [18] e Allegretto e Huang, artigo publicado em [3].

Definição 3.1 *Dizemos que o par* $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)\backslash\{0\}$ *é uma solução fraca (ou simplesmente solução) de* (3.1) *se*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla\varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{p-2}u\varphi dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N).$$

Neste caso, dizemos que u *é uma autofunção associada ao autovalor* λ. *O espaço formado pelas autofunções associadas a* λ *é dito o autoespaço associado a* λ. λ *é dito um autovalor principal de* (3.1) *se existe uma autofunção associada a* λ *que é estritamente positiva em* $\mathbb{R}^N$ *e* λ *é um autovalor simples se o autoespaço associado a* λ *tem dimensão 1.*

Para este problema provaremos a existência de soluções fracas e mostraremos que estas soluções pertencem a $C^{1,\alpha}(B_r)$ para todo $r > 0$, onde $\alpha = \alpha(r) \in (0, 1)$. Vamos provar a existência, unicidade e simplicidade de um autovalor principal positivo, quando g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$ e de dois autovalores principais de sinais opostos, quando g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$. No Capítulo 1 estudamos o caso semilinear e usamos a teoria dos operadores compactos para garantir a existência de um autovalor principal positivo e simples. Neste capítulo, obteremos resultados semelhantes, mas usaremos outras técnicas pois a técnica do Capítulo 1 não se aplica a este caso por se tratar de um problema não linear. Usaremos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, para garantir a existência de soluções e de autovalores principais, bem como sua caracterização. Além disso, usaremos uma Identidade de Picone para provar a unicidade e simplicidade destes autovalores principais.

O principal resultado deste capítulo, é um resultado do tipo Krein-Rutman, mais precisamente temos

Teorema 3.1 (Krein-Rutman) *Seja* g *satisfazendo* $(\mathcal{G}^+)$ *ou* $(\mathcal{G}^-)$. *Então o problema* $(3.1) - (3.2)$ *tem uma solução de classe* $C^{1,\alpha}(B_r)$ *para qualquer* $r > 0$, *onde* $\alpha = \alpha(r) \in (0, 1)$. *Além disso,*

i) *Se* g *satisfaz a condição* $(\mathcal{G}^+)$ *então a equação* (3.1) *admite um único autovalor principal positivo,* λ_1, *e este é simples e isolado.*

ii) *Se* g *satisfaz* $(\mathcal{G}^-)$ *então a equação* (3.1) *admite dois autovalores principais de sinais opostos,* λ_1^+ *e* λ_1^-, *sendo ambos autovalores simples e isolados.*

Apresentaremos a prova deste resultado em etapas, como segue:

- Na seção 3.2 provaremos a existência de um autovalor principal;
- Na seção 3.3 provaremos a simplicidade e unicidade do autovalor principal;
- Finalmente, na seção 3.4 mostraremos que o autovalor principal é isolado.

3.2 Existência de um autovalor principal

Nesta seção, provaremos a existência de um autovalor principal positivo para o problema (3.1). O ambiente natural para estudar este tipo de problema é o espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ que, para simplificar a notação, iremos denotar por $\mathcal{D}^{1,p}$.

Inicialmente, vamos estabelecer alguns resultados preliminares que serão fundamentais para a demonstração do Teorema 3.1.

Lema 3.1 *Suponha que* $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$*. Então existe* $\alpha > 0$ *tal que*

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |g||u|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx, \tag{3.3}$$

para todo $u \in \mathcal{D}^{1,p}$*.*

Prova: Pela imersão contínua $\mathcal{D}^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}$, juntamente com a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |g||u|^p dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g|^{N/p}\right)^{p/N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\right)^{(N-p)/N} \\ &\leq K^p \|g\|_{L^{N/p}} \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}}. \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = (K^p \|g\|_{L^{N/p}})^{-1}$, temos $\alpha > 0$ e

$$\alpha \int_{\mathbb{R}^N} |g||u|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx,$$

o que completa a demonstração. ■

O nosso objetivo agora, é usar o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange (veja Teorema 20) para obter um resultado de existência. Para isto, vamos considerar os funcionais $A, B : \mathcal{D}^{1,p} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidos por:

$$A(u) = \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}} \tag{3.4}$$

e

$$B(u) = \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx. \tag{3.5}$$

Pela Proposição 4.4 (veja Apêndice), A e B são de classe C^1 com derivadas de Fréchet contínuas dadas por

$$(A'(u), v) = p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx,$$

$$(B'(u), v) = p \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{p-2} uv dx,$$

e A é fracamente semicontínuo inferiormente. Além disso, o funcional B satisfaz

Lema 3.2 *O funcional* B *é fracamente seqüencialmente contínuo, ou seja, se* (u_n) *é uma seqüência em* $\mathcal{D}^{1,p}$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u$*, então* $B(u_n) \to B(u)$*. Além disso, se* $B'(u) = 0$*, então* $B(u) = 0$*.*

Prova: Seja (r_k) uma seqüência de números reais positivos tais que $r_k \to \infty$ e (u_n) uma seqüência em $\mathcal{D}^{1,p}$ tal que $u_n \rightharpoonup u$ em $\mathcal{D}^{1,p}$. Usando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned} |B(u_n) - B(u)| &\leq \left| \int_{B_{r_k}} g\left(|u_n|^p - |u|^p\right) dx \right| \\ &+ \|g\|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N \setminus B_{r_k})} \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{r_k}} \left| |u_n|^p - |u|^p \right|^{\frac{N}{N-p}} dx \right)^{(N-p)/N}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u$, (u_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}$ e portanto em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Então existe uma constante positiva C tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_k}} \left||u_n|^p - |u|^p\right|^{N/(N-p)} dx\right)^{(N-p)/N} \leq 2\left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u_n|^{p^*} + |u|^{p^*}\right) dx\right)^{(N-p)/N} \leq C,$$

para todo k. Desde que $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_k}} |g|^{N/p} dx = 0.$$

Então para cada $\varepsilon > 0$, podemos escolher k_0 suficientemente grande tal que

$$\|g\|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N\setminus B_{r_k})} \leq \varepsilon/2C, \qquad \forall k \geq k_0.$$

Assim, para todo $k \geq k_0$, temos

$$\|g\|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N\setminus B_{r_k})} \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_{r_k}} \left||u_n|^p - |u|^p\right|^{N/(N-p)} dx\right)^{(N-p)/N} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.7}$$

Por outro lado, já que o operador restrição de $\mathcal{D}^{1,p}$ para $\mathcal{D}^{1,p}(B_{r_{k_0}})$ é contínuo, veja Proposição 17, e a imersão $\mathcal{D}^{1,p}(B_{r_k}) \hookrightarrow L^p(B_{r_k})$ é compacta, temos $u_n \to u$ em $L^p(B_{r_{k_0}})$. Seja $h : B_{r_{k_0}} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definido por $h(x,s) = g(x)|s|^p$. Temos que h é uma função de Carathéodory e $|h(x,s)| \leq \|g\|_\infty |s|^p$ para todo $x \in B_{r_{k_0}}$ e $s \in \mathbb{R}$. Assim, pelo Teorema 13, o operador de Nemytskii $N_h : L^p(B_{r_{k_0}}) \to L^1(B_{r_{k_0}})$ está bem definido e é contínuo. Logo,

$$\begin{aligned} \left|\int_{B_{r_{k_0}}} g\left(|u_n|^p - |u|^p\right) dx\right| &= \left|\int_{B_{r_{k_0}}} \left(N_h(u_n) - N_h(u)\right) dx\right| \\ &\leq \|N_h(u_n) - N_h(u)\|_{L^1(B_{r_{k_0}})} \to 0. \end{aligned}$$

Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_{B_{r_{k_0}}} g\left(|u_n|^p - |u|^p\right) dx\right| \leq \varepsilon/2, \quad \forall n \geq n_0. \tag{3.8}$$

Portanto, tomando $k = k_0$ em (3.6), por (3.7) e (3.8) obtemos,

$$|B(u_n) - B(u)| \leq \varepsilon, \qquad \forall n \geq n_0.$$

Como ε é arbitrário, isto prova a primeira parte do lema. Suponhamos agora $B'(u) = 0$. Então,

$$(B'(u), \varphi) = p \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{p-2}u\varphi dx = 0, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,p}.$$

Em particular, para $\varphi = u$ obtemos

$$B(u) = \frac{1}{p}(B'(u), u) = \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx = 0,$$

o que conclui a prova. ■

O próximo lema nos dá informações sobre a imagem do funcional B.

Lema 3.3 *Se g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$ então $R(B) = \mathbb{R}^+$. Se g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$ então $R(B) = \mathbb{R}$.*

Prova: Se g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$, $g \geq 0$ em $\mathbb{R}^N$, então $B(u) \geq 0$ para todo $u \in \mathcal{D}^{1,p}$. Vamos inicialmente mostrar que existe $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}$ tal que $B(u_0) = 1$. Para isto, seja $\varphi_0 \in \mathcal{D}^{1,p}$ tal que $B(\varphi_0) > 0$. Note que tal função existe pelo fato de que g satisfaz $(\mathcal{G})$ (basta considerar, φ_0 tal que $supp(\varphi_0) \subset \Omega_+$). Considerando $u_0 = \varphi_0/\mu$, onde $\mu = (B(\varphi_0))^{1/p}$ temos

$$B(u_0) = \int_{\mathbb{R}^N} g|u_0|^p dx = \frac{1}{\mu^p} \int_{\mathbb{R}^N} g|\varphi_0|^p dx = \frac{B(\varphi_0)}{B(\varphi_0)} = 1.$$

Assim, dado $R \geq 0$ basta tomar $u_R = R^{1/p} u_0$ e obtemos

$$B(u_R) = \int_{\mathbb{R}^N} g|u_R|^p dx = R \int_{\mathbb{R}^N} g|u_0|^p dx = RB(u_0) = R.$$

O caso em que g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$ é análogo. ∎

Agora defina, para $R \in \mathbb{R}$,

$$S_R = \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,p} : B(u) = R \right\}. \tag{3.9}$$

Para usarmos o Teorema dos Multiplicadores de Lagrange, inicialmente mostraremos que o funcional A atinge o ínfimo sobre o conjunto S_R.

Lema 3.4 *Se g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$ então o ínfimo sobre o conjunto $\{A(u) : u \in S_R\}$ é atingido para cada $R \geq 0$. Se g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$ então este ínfimo é atingido, para cada $R \in \mathbb{R}$. Além disso, este mínimo é positivo para todo $R \neq 0$ e qualquer seqüência minimizante (u_n) possui uma subseqüência que converge fracamente em $\mathcal{D}^{1,p}$ para algum u, o qual realiza este ínfimo.*

Prova: Fixe $R \in \mathbb{R}$. Se g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$ consideremos $R \geq 0$ e se g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$ podemos tomar qualquer R, que pelo Lema 3.3 teremos $S_R \neq \emptyset$. Sejam $I_R = \inf \{A(u) : u \in S_R\}$ e (u_n) uma seqüência minimizante, ou seja, (u_n) em S_R tal que

$$A(u_n) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \to I_R.$$

Dessa forma, (u_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}$. Desde que $\mathcal{D}^{1,p}$ é um espaço de Banach reflexivo, existe uma subseqüência, a qual será ainda denotada por (u_n) tal que $u_n \rightharpoonup u_R$ em $\mathcal{D}^{1,p}$. Sendo o funcional A fracamente semicontínuo inferiormente, Proposição 4.4, temos

$$A(u_R) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_R|^p dx \leq \liminf \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p = I_R. \tag{3.10}$$

Além disso, pelo Lema 3.2, B é fracamente sequencialmente contínuo, então

$$B(u_n) \to B(u_R) \quad \text{quando} \ \ n \to \infty.$$

Assim, $B(u_R) = R$ e $u_R \in S_R$. Pela desigualdade (3.10) obtemos

$$A(u_R) = I_R = \inf \{A(u) : u \in S_R\}$$

e o ínfimo é atingido, como afirmamos. Observe que pela definição de S_R, se $R \neq 0$ então $u_R \neq 0$ e conseqüentemente $A(u_R) > 0$. ∎

Nesta próxima proposição, provaremos a existência de autovalores não nulos para (3.1).

Proposição 3.2 *(i) Se g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$, então a equação (3.1) admite um primeiro autovalor positivo (menor autovalor positivo) dado por*

$$\lambda_1 = \inf_{B(u)=1} \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}} \ . \tag{3.11}$$

(ii) Se g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$, então o problema (3.1) admtite dois primeiros autovalores de sinais opostos dados por

$$\lambda_1^+ = \inf_{B(u)=1} \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}} \ , \tag{3.12}$$

$$\lambda_1^- = -\inf_{B(u)=-1} \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}} \ . \tag{3.13}$$

Em ambos os casos as autofunções associadas u_1 (respectivamente u_1^+, u_1^-) pertencem a $\mathcal{D}^{1,p}$.

Prova: Usaremos o Teorema 20 com $F = B$, $J = A$ e $S = S_1$, S_1 como definido acima com $R = 1$. Pela Proposição 4.4 sabemos que A e B são de classe C^1. Pelo Lema 3.2, se $B'(u) = 0$ então $B(u) = 0$ e dessa forma $u \notin S_R$ para $R \neq 0$. Finalmente, o Lema 3.4 mostra que o ínfimo $\inf \{A(u) : u \in S_R\}$ é atingido . Logo os funcionais A e B satisfazem as hipóteses do Teorema 20.

Se g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$, usando o Lema 3.4 com $R = 1$, obtemos $u_1 \in S_1 \subset \mathcal{D}^{1,p}$ tal que

$$A(u_1) = \inf_{u \in S_1} A(u).$$

Pelo Teorema 20, existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tal que

$$A'(u_1) = \lambda_1 B'(u_1),$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^{p-2} \nabla u_1 \nabla \varphi dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g|u_1|^{p-2} u_1 \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,p}.$$

Dessa forma u_1 é uma solução do problema (3.1) associada ao autovalor λ_1. Além disso, para $\varphi = u_1$ temos

$$A(u_1) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^p dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g|u_1|^p dx = \lambda_1 B(u_1) = \lambda_1,$$

logo, $\lambda_1 > 0$ e ainda

$$\lambda_1 = \inf_{u \in S_1} A(u) = \inf_{B(u)=1} \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}}.$$

Vejamos que λ_1 é o primeiro autovalor de (3.1). Seja $\beta > 0$ um autovalor de (3.1) e w uma autofunção associada, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^{p-2} \nabla w \nabla \varphi dx = \beta \int_{\mathbb{R}^N} g|w|^{p-2} w \varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,p}.$$

Tomando $\varphi = w$ obtemos

$$A(w) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p dx = \beta \int_{\mathbb{R}^N} g|w|^p dx = \beta B(w).$$

Essa última igualdade implica $B(w) > 0$. Assim, a função $v := w/(B(w))^{1/p}$ é tal que $B(v) = 1$ e $A(v) = \beta$. Portanto,

$$\lambda_1 = \inf_{B(u)=1} A(u) \leq A(v) = \beta.$$

Agora, se g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$, podemos tomar $u_1^+ = u_1$ e $\lambda_1^+ = \lambda_1$. Para calcular o autovalor λ_1^-, seja $u_1^- \in S_{-1}$ tal que

$$A(u_1^-) = \inf_{u\ \in S_{-1}} A(u).$$

Pelo Teorema 20, existe $\lambda_1^- \in \mathbb{R}$ tal que $A'(u_1^-) = \lambda_1^- B'(u_1^-)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1^-|^{p-2}\nabla u_1^- \nabla\varphi dx = \lambda_1^- \int_{\mathbb{R}^N} g|u_1^-|^{p-2}u_1^-\varphi dx, \quad \forall\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}.$$

Em particular, para $\varphi = u_1^-$ temos

$$A(u_1^-) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1^-|^p dx = \lambda_1^- \int_{\mathbb{R}^N} g|u_1^-|^p dx = \lambda_1^- B(u_1^-) = -\lambda_1^-.$$

Então, $\lambda_1^- < 0$ e temos o desejado,

$$\lambda_1^+ = A(u_1^+) = \inf_{B(u)=1} \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}}$$

e

$$\lambda_1^- = -A(u_1^-) = -\inf_{B(u)=-1} \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}}\ .$$

Análogo ao caso em que g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$, verifica-se que não existe autovalor do problema (3.1) no intervalo $(\lambda_1^-, \lambda_1^+)$. Isto conclui a prova da proposição. ∎

No que segue, vamos obter a regularidade $C^{1,\alpha}_{loc}$ bem como o comportamento assintótico das soluções de (3.1).

Proposição 3.3 *Seja $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}^{1,p}\backslash\{0\}$ uma solução de (3.1). Então $u \in L^\sigma(\mathbb{R}^N)$ para todo $\sigma \in [p^*, +\infty]$.*

Prova: Sejam $\gamma = \frac{N}{N-p}$, $\sigma_n = p\gamma^n$ e $s_n = (\gamma^n - 1)p$. Provaremos por indução que $u \in L^{\sigma_n}(\mathbb{R}^N)$, para todo $n \geq 1$. Para $n = 1$ temos $\sigma_1 = p^*$ e graças a imersão de $\mathcal{D}^{1,p}$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, $u \in L^{\sigma_1}(\mathbb{R}^N)$. Suponha que $u \in L^{\sigma_n}(\mathbb{R}^N)$ para algum n fixo e provaremos que $u \in L^{\sigma_{n+1}}(\mathbb{R}^N)$. Considere $T_k(u) = max(-k, min(k, u))$ para $k > 0$, $w = |T_k(u)|^{s_n}T_k(u)$ e $v = |T_k(u)|^{\gamma^n - 1}T_k(u)$. Já que $v \in \mathcal{D}^{1,p}$, por (5) obtemos

$$\begin{aligned}
\||T_k(u)|^{\gamma^n}\|^p_{\gamma p} &\leq K^p\|\nabla\{|T_k(u)|^{\gamma^n-1}T_k(u)\}\|^p_p \\
&= K^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\{|T_k(u)|^{\gamma^n-1}T_k(u)\}|^p dx \\
&= K^p \int_{\mathbb{R}^N} \gamma^{np}|T_k(u)|^{(\gamma^n-1)p}|\nabla T_k(u)|^p dx \\
&= K^p\gamma^{np} \int_{\mathbb{R}^N} |T_k(u)|^{s_n}|\nabla T_k(u)|^{p-2}|\nabla T_k(u)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Desde que $\nabla T_k(u) = 0$ q.t.p se $u > k$, temos $|\nabla T_k(u)| \leq |\nabla u|$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Assim,

$$\||T_k(u)|^{\gamma^n}\|_{\gamma p}^p \leq K^p \gamma^{np} \int_{\mathbb{R}^N} |T_k(u)|^{s_n} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla T_k(u) dx. \tag{3.14}$$

Sendo $\nabla w = \nabla\{|T_k(u)|^{s_n} T_k(u)\} = (s_n + 1)|T_k(u)|^{s_n} \nabla T_k(u)$, de (3.14) obtemos

$$\begin{aligned} \||T_k(u)|^{\gamma^n}\|_{\gamma p}^p &\leq K^p \gamma^{np} (s_n + 1)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla \{|T_k(u)|^{s_n} T_k(u)\} dx \\ &= K^p \gamma^{np} (s_n + 1)^{-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w dx. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Desde que $w \in \mathcal{D}^{1,p}$, multiplicando (3.1) por w temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla w dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g |u|^{p-2} u w dx. \tag{3.16}$$

Observando que $s_n + 1 > \gamma^n$ e $|w| \leq |u|^{s_n+1}$, devido a (3.15) e a (3.16), obtemos

$$\begin{aligned} \||T_k(u)|^{\gamma^n}\|_{\gamma p}^p &\leq K^p \gamma^{n(p-1)} \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g |u|^{p-2} u w dx \\ &\leq K^p \gamma^{n(p-1)} |\lambda| \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} |w| dx \\ &\leq K_0 \gamma^{n(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p-1} |u|^{s_n+1} dx \\ &= K_0 \gamma^{n(p-1)} \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\sigma_n} dx \\ &= K_0 \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n}, \end{aligned}$$

onde $K_0 = K^p |\lambda| \|g\|_\infty$. Assim,

$$\|T_k(u)\|_{L^{\sigma_{n+1}}}^{\sigma_{n+1}} = \int_{\mathbb{R}^N} |T_k(u)|^{\sigma_{n+1}} dx \leq \left(K_0 \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n}\right)^\gamma.$$

Como por hipótese $u \in L^{\sigma_n}(\mathbb{R}^N)$, temos que $T_k(u) \in L^{\sigma_{n+1}}(\mathbb{R}^N)$ para todo $k > 0$. Além disso, já que $T_k(u)(x) \to u(x)$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ quando $k \to \infty$, pelo Lema de Fatou obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{\sigma_{n+1}} dx \leq \left(K_0 \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n}\right)^\gamma.$$

Portanto $u \in L^{\sigma_{n+1}}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\|u\|_{L^{\sigma_{n+1}}}^{\sigma_{n+1}} \leq \left(K_0 \gamma^{n(p-1)} \|u\|_{\sigma_n}^{\sigma_n}\right)^\gamma. \tag{3.17}$$

Agora usaremos a desigualdade (3.17) para provar que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$. Observe que:
para $n = 1$,

$$\|u\|_{L^{\sigma_2}}^{\sigma_2} \leq K_0^\gamma \gamma^{n(p-1)\gamma} \|u\|_{L^{\sigma_1}}^{\gamma \sigma_1};$$

para $n=2$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{\sigma_3}}^{\sigma_3} &\leq K_0^{\gamma}\gamma^{2(p-1)\gamma}\|u\|_{L^{\sigma_2}}^{\gamma\sigma_2}\\ &\leq K_0^{\gamma}\gamma^{2(p-1)\gamma}\left(K_0^{\gamma}\gamma^{n(p-1)\gamma}\|u\|_{L^{\sigma_1}}^{\gamma\sigma_1}\right)^{\gamma}\\ &= K_0^{\gamma+\gamma^2}\gamma^{(p-1)(2\gamma+\gamma^2)}\|u\|_{L^{\sigma_1}}^{\gamma^2\sigma_1};\end{aligned}$$

para $n=3$,

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^{\sigma_4}}^{\sigma_4} &\leq K_0^{\gamma}\gamma^{3(p-1)\gamma}\|u\|_{L^{\sigma_3}}^{\gamma\sigma_3}\\ &\leq K_0^{\gamma}\gamma^{3(p-1)\gamma}\left(K_0^{\gamma+\gamma^2}\gamma^{(p-1)(2\gamma+\gamma^2)}\|u\|_{L^{\sigma_1}}^{\gamma^2\sigma_1}\right)^{\gamma}\\ &= K_0^{\gamma+\gamma^2+\gamma^3}\gamma^{(p-1)(3\gamma+2\gamma^2+\gamma^3)}\|u\|_{L^{\sigma_1}}^{\gamma^3\sigma_1},\end{aligned}$$

e assim, por recorrência, concluímos que

$$\|u\|_{L^{\sigma_{n+1}}}^{\sigma_{n+1}} \leq K_0^{\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^n}\gamma^{(p-1)(n\gamma+(n-1)\gamma^2+\ldots+\gamma^n)}\|u\|_{L^{\sigma_1}}^{\gamma^n\sigma_1} \quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.18}$$

Sejam $\alpha_n=\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^n$ e $\beta_n=(p-1)(n\gamma+(n-1)\gamma^2+\ldots+\gamma^n)$. Afirmamos que existe o limite das seqüências $(\alpha_n/\sigma_{n+1}),(\beta_n/\sigma_{n+1})$ e (γ^n/σ_{n+1}) quando $n\to\infty$. De fato, temos que

$$\frac{\alpha_n}{\sigma_{n+1}}=\frac{\gamma+\gamma^2+\ldots+\gamma^n}{p\gamma^{n+1}}=\frac{1}{p}\left[\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n+\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1}+\ldots+\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right],$$

e sendo $\gamma>1$, isto implica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha_n}{\sigma_{n+1}}=\frac{1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n=\alpha_1<\infty.$$

Temos ainda,

$$\frac{\beta_n}{\sigma_{n+1}} = \frac{p-1}{p}\left[n\left(\frac{1}{\gamma}\right)^n+(n-1)\left(\frac{1}{\gamma}\right)^{n-1}+\ldots+\left(\frac{1}{\gamma}\right)\right].$$

Aplicando o Teste da Razão e lembrando novamente que $\gamma>1$, obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\beta_n}{\sigma_{n+1}}=\frac{p-1}{p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\gamma^n}=\beta_1<\infty.$$

Para a última seqüência temos

$$\frac{\gamma^n}{\sigma_{n+1}}=\frac{\gamma^n}{p\gamma^{n+1}}=\frac{1}{p\gamma}=\frac{1}{p^*},\quad \forall n\in\mathbb{N}.$$

Conseqüentemente, por (3.18) segue que existe $C'>0$ tal que

$$\|u\|_{L^{\sigma_{n+1}}}\leq C',\quad \forall n\in\mathbb{N}. \tag{3.19}$$

Assim, desde que $\sigma_n \to \infty$ quando $n \to \infty$, para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$ obtemos

$$|u(x)| \leq \|u\|_{L^\infty(B_1(x))} = \lim_{n \to +\infty} \|u\|_{L^{\sigma_n}(B_1(x))} \leq C'.$$

Portanto, $\|u\|_\infty \leq C'$. Uma vez que $u \in L^{\sigma_1}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, obtemos por interpolação que $u \in L^\sigma(\mathbb{R}^N)$ para todo $\sigma \in [\sigma_1, \infty]$. ∎

Como conseqüência da proposição anterior e de um resultado de regularização de Tolksdorf, temos

Corolário 3.1 *Para qualquer $r > 0$, as soluções de* (3.1) *pertencem a* $C^{1,\alpha}(B_r)$, *para algum* $\alpha = \alpha(r) \in (0,1)$.

Prova: Pela Proposição 3.3, $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e isto implica que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N) \cap W^{1,p}(B_R(0))$ qualquer $R > 0$. Portanto, pelo Teorema 1 em [30], temos que para qualquer $r > 0$, $u \in C^{1,\alpha}(B_r)$ para $\alpha = \alpha(r) \in (0,1)$. ∎

Lema 3.5 *Seja $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\}$ uma solução fraca de (3.1), com u diferenciável. Então, para cada $R > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$, temos*

$$\|u\|_{L^\infty(B_R(x))} \leq C R^{-N/p} \left(\|u\|_{L^p(B_{2R}(x))} \right)$$

onde $C = C(p, N, R, \lambda, \|g\|_{L^{p/N-1}})$.

Prova: Este resultado é uma conseqüência do Teorema 1 em [27]. ∎

Proposição 3.4 *Seja $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times \mathcal{D}^{1,p} \backslash \{0\}$ uma solução de (3.1). Então*

$$\lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0.$$

Prova: Pelo Corolário 3.1, u é uma função diferenciável. Assim, pelo Lema 3.5, para qualquer bola $B_r(x)$ de raio r e centrada em qualquer $x \in \mathbb{R}^N$ e alguma constante $C = C(p, N, \lambda, \|g\|_{L^{N/(p-1)}})$, a solução $u \in \mathcal{D}^{1,p}$ do problema (3.1) satisfaz a estimativa seguinte

$$\sup_{y \in B_r(x)} |u(y)| \leq C \|u\|_{L^p(B_{2r}(x))}.$$

Então,

$$\sup_{y \in B_1(x)} |u(y)| \quad \leq \quad C_1 \|u\|_{L^{p^*}(B_2(x))}. \tag{3.20}$$

Desde que $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, temos

$$\lim_{r \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(0)} |u|^{p^*} dx = 0.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $r_0(\varepsilon) > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_r(0)} |u|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*}} < \frac{\varepsilon}{C_1}, \qquad \forall r \geq r_0. \tag{3.21}$$

Então, tomando $x \in \mathbb{R}^N$ tal que $|x| > r_0 + 2$, de modo que $B_2(x) \subset \mathbb{R}^N \backslash B_{r_0}(0)$, por (3.20) e (3.21) obtemos

$$|u(x)| \leq \sup_{y \in B_1(x)} |u(y)| < \varepsilon.$$

Portanto $u(x) \to 0$ quando $|x| \to \infty$. ■

Agora vamos estudar o sinal das autofunções correspondentes aos primeiros autovalores.

Lema 3.6 (Desigualdade de Harnack) *Seja $u \geq 0$ uma solução fraca de (3.1). Então, para cada $R > 0$ e $x \in \mathbb{R}^N$ temos*

$$\sup_{x \in B_R} u(x) \leq C \inf_{x \in B_R} u(x),$$

onde $C = C(p, N, R, \lambda, \|g\|_{L^{N/(p-1)}})$.

Prova: Este resultado é conseqüência da Desigualdade de Harnack em [27]. ■

Lema 3.7 *Seja (λ_0, u_0), uma solução da equação (3.1), com $u_0 \geq 0$ não nula. Então $u_0 > 0$ em $\mathbb{R}^N$.*

Prova: Nesta demonstração usaremos a desigualdade de Harnack. Pelo Corolário 3.1, u_0 é uma função diferenciável. Suponhamos que $u_0(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Seja $R > 0$ e $B_R(x_0)$ uma bola aberta em $\mathbb{R}^N$ centrada em x_0. Então, pela desigualdade de Harnack, existe $C = C(p, N, \varepsilon, \lambda, R, \|g\|_{L^{N/(p-1)}})$, $C > 0$, tal que

$$\sup_{x \in B_R} u_0(x) \leq C(\inf_{x \in B_R} u_0(x)).$$

Assim, $u_0 \equiv 0$ em $B_R(x_0)$. Observando que o conjunto

$$U_0 = \{x \in \mathbb{R}^N : u_0(x) = 0\}$$

é aberto e fechado em $\mathbb{R}^N$ que é conexo, devemos ter $U_0 = \mathbb{R}^N$. Assim, $u \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N$, contrariando nossa hipótese. Portanto $u > 0$ em $\mathbb{R}^N$. ■

Proposição 3.5 *(i) Suponha que g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$ ou $(\mathcal{G}^-)$. Então, existe uma autofunção que é estritamente positiva em $\mathbb{R}^N$.*
(ii) Considere g satisfazendo $(\mathcal{G}^+)$ (respectivamente $(\mathcal{G}^-)$). Então todas as autofunções associadas a λ_1 (respectivamente λ_1^+, λ_1^-) são de sinal constante, i.e. λ_1 (respectivamente λ_1^+, λ_1^-) é um autovalor principal.

Prova: **(i)** Observando que $A(|u|) = A(u)$ e $B(|u|) = B(u)$, se u_λ atinge o ínfimo em (3.11), (3.12) ou (3.13), então $|u_\lambda|$ também o atinge. Dessa forma, podemos considerar $u_\lambda \geq 0$. Assim, pelo Lema 3.7 obtemos que $u_\lambda > 0$.

(ii) Suponha que g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$ e seja ϕ uma autofunção correspondente a λ_1. Sejam

$\phi_+ \geq 0$, $\phi_- \leq 0$ denotando respectivamente as partes positiva e negativa de ϕ. Sabemos que $\phi = \phi_+ + \phi_-$. Então $\phi_+, \phi_- \in \mathcal{D}^{1,p}$ e

$$A(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_+|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_-|^p dx = A(\phi_+) + A(\phi_-)$$

$$B(\phi) = \int_{\mathbb{R}^N} g|\phi|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} g|\phi_+|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} g|\phi_-|^p dx = B(\phi_+) + B(\phi_-).$$

Observando que

$$\frac{1}{\lambda_1} = \frac{B(\phi)}{A(\phi)} \leq \max\left\{\frac{B(\phi_+)}{A(\phi_+)}, \frac{B(\phi_-)}{A(\phi_-)}\right\},$$

e supondo que $B(\phi_+)/A(\phi_+)$ corresponde ao máximo (o outro caso é análogo), temos

$$\lambda_1 B(\phi_+) \geq A(\phi_+). \tag{3.22}$$

Como estamos supondo $\phi^+ \not\equiv 0$, esta última desigualdade implica $B(\phi^+) > 0$. Definindo $v_+ = \phi_+/\mu$, onde $\mu = B(\phi_+)^{1/p}$, obtemos

$$B(v_+) = \int_{\mathbb{R}^N} g|v_+|^p dx = \frac{1}{\mu^p}\int_{\mathbb{R}^N} g|\phi_+|^p dx = \frac{B(\phi_+)}{B(\phi_+)} = 1$$

e

$$A(v_+) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_+|^p dx = \frac{1}{\mu^p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \phi_+|^p dx = \frac{A(\phi_+)}{B(\phi_+)}.$$

Assim, usando a desigualdade (3.22), obtemos

$$\lambda_1 = \lambda_1 B(v_+) = \lambda_1 \frac{B(\phi_+)}{B(\phi_+)} \geq \frac{A(\phi_+)}{B(\phi_+)} = A(v_+).$$

Como $\lambda_1 = \inf_{B(u)=1} A(u)$, devemos ter $\lambda_1 = A(v_+)$. Então, pelo Teorema 20, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v^+|^{p-2}\nabla v^+ \nabla\varphi dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g|v^+|^{p-2}v^+\varphi dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,p}.$$

Tomando $\varphi = v^+$ temos $\lambda = \lambda_1$ e assim, v_+ é uma autofunção associada a λ_1. Sendo $v_+ \geq 0$, podemos aplicar novamente o Lema 3.7 para obtermos $v_+ > 0$. Logo, $\phi^+ > 0$ e conseqüentemente temos $\phi > 0$ em $\mathbb{R}^N$. No caso em que g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$ a prova segue o mesmo raciocínio. ■

3.3 Simplicidade do autovalor principal

Agora provaremos a unicidade e simplicidade dos autovalores principais de (3.1), para este fim, usaremos a identidade de Picone. O principal resultado desta seção é:

Proposição 3.6 *Seja g satisfazendo $(\mathcal{G}^+)$(respectivamente$(\mathcal{G}^-)$). Então:*

i) *O autoespaço correspondente ao autovalor principal λ_1 (respectivamente λ_1^+, λ_1^-) tem dimensão 1.*

ii) λ_1 *(respectivamente* λ_1^+, λ_1^-*) é o único autovalor de* (3.1) *que admite autofunções positivas.*

Para a demonstração desta proposição precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Lema 3.8 (Identidade de Picone) *Sejam* $v > 0$ *e* $u \geq 0$ *em* $\mathbb{R}^N$ *funções diferenciáveis. Denote por*

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\left(\frac{u}{v}\right)^p |\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla u, \\ R(u,v) &= |\nabla u|^p - \nabla\left(\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}\right)|\nabla v|^{p-2}\nabla v. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Então

$$L(u,v) = R(u,v). \tag{3.24}$$

Além disso, $L(u,v) \geq 0$ *e* $L(u,v) = 0$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$ *se, e somente se,* $\nabla(u/v) = 0$ *q.t.p em* $\mathbb{R}^N$*, ou seja,* $u = Cv$ *em* $\mathbb{R}^N$ *para alguma constante* C.

Prova: Inicialmente provaremos (3.24). Para isto, observe que

$$\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right)_{x_i} = \frac{pu^{p-1}u_{x_i}v^{p-1} - (p-1)u^p v^{p-2}v_{x_i}}{v^{2(p-1)}}, \qquad i = 1, \ldots, N.$$

Assim,

$$\nabla\left(\frac{u^p}{v^{p-1}}\right) = p\left(\frac{u}{v}\right)^{p-1}\nabla u - (p-1)\left(\frac{u}{v}\right)^p \nabla v.$$

Substituindo este termo na definição de $R(u,v)$ obtemos (3.24). Agora observe que, usando a desigualdade de Young, $ab \leq a^p/p + b^{p'}/p'$ onde p' é o expoente conjugado de p, ou seja, $p' = p/(p-1)$, temos

$$\begin{aligned} \nabla u \nabla v |\nabla v|^{p-2}\left(\frac{u}{v}\right)^{p-1} &\leq |\nabla u||\nabla v|^{p-1}\left(\frac{u}{v}\right)^{p-1} \\ &\leq \frac{|\nabla u|^p}{p} + \frac{p-1}{p}|\nabla v|^p\left(\frac{u}{v}\right)^p. \end{aligned} \tag{3.25}$$

Portanto, $L(u,v) \geq 0$. Agora, se $L(u,v)(x_0) = 0$ e $u(x_0) \neq 0$ afirmamos que

$$|\nabla u| = (u/v)|\nabla v| \quad \text{e} \quad v\nabla u = u\nabla v \;\; \text{em} \;\; x_0. \tag{3.26}$$

Se $L(u,v)(x_0) = 0$, por (3.25) temos

$$p\left(\frac{u}{v}\right)^{p-1}|\nabla u||\nabla v|^{p-1} = |\nabla u|^p + (p-1)\left(\frac{u}{v}\right)^p|\nabla v|^p \;\; \text{em} \;\; x_0, \tag{3.27}$$

ou seja,

$$p|\nabla u|\,|(u/v)\nabla v|^{p-1} = |\nabla u|^p + (p-1)\,|(u/v)\nabla v|^p \quad \text{em} \;\; x_0.$$

Escrevendo $a = |\nabla u(x_0)|$ e $b = |(u(x_0)/v(x_0))\nabla v(x_0)|$, temos

$$pab^{p-1} = a^p + (p-1)b^p. \tag{3.28}$$

Observe que se $a = 0$, por (3.27) temos $|\nabla v(x_0)| = 0$ já que $u(x_0) \neq 0$ e assim, (3.26) é satisfeito. Se $a \neq 0$, dividindo (3.28) por a^p e tomando $t = b/a$, obtemos

$$pt^{p-1} - (p-1)t^p = 1.$$

Veremos que a única solução desta equação é $t = 1$. Para isto é suficiente verificar que $t = 1$ é o único ponto de máximo da função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(t) = pt^{p-1} - (p-1)t^p$. Derivando f obtemos $f'(t) = p(p-1)t^{p-2} - p(p-1)t^{p-1}$ e assim, $f'(t) = 0$ implica $p(p-1)t^{p-2}(1-t) = 0$. Daí $t = 0$ ou $t = 1$. Como $f(0) = 0$, temos o desejado. Assim, $t = 1$ implica $b = a$, isto é,

$$|\nabla u| = (u/v)|\nabla v|. \tag{3.29}$$

Usando ainda (3.25) temos

$$\nabla u \nabla v |\nabla v|^{p-2} \left(\frac{u}{v}\right)^{p-1} = |\nabla u||\nabla v|^{p-1} \left(\frac{u}{v}\right)^{p-1}. \tag{3.30}$$

Então, de (3.29) e (3.30), obtemos

$$\nabla u \nabla v |\nabla u|^{p-2} \left(\frac{u}{v}\right) = |\nabla u|^p .$$

Assim, $|\nabla u|^2 = (u/v)\nabla u \nabla v \leq |\nabla u||(u/v)\nabla v| = |\nabla u|^2$ e conseqüentemente

$$(u/v)\nabla u \nabla v = |\nabla u||(u/v)\nabla v|.$$

Porém esta igualdade só ocorre quando $(u/v)\nabla v = k\nabla u$, para alguma constante k. Novamente por (3.29), obtemos $k = \pm 1$. Se $k = -1$ teríamos

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\left(\frac{u}{v}\right)^p |\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla u, \\ &= |\nabla u|^p + (p-1)|\nabla u|^p + p|\nabla u|^p \\ &= 2p|\nabla u|^p \; > 0 \;\text{ em }\; x_0, \end{aligned}$$

já que estamos supondo $\nabla u(x_0) \neq 0$, contrariando o fato de que $L(u,v)(x_0) = 0$. Portanto devemos ter $k = 1$ e assim,

$$v(x_0)\nabla u(x_0) = u(x_0)\nabla v(x_0).$$

Deste modo, para $a \neq 0$ esta última equação e (3.29) provam (3.26). Logo, se $L(u,v) = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$ então, desde que $\nabla(u/v) = (v\nabla u - u\nabla v)/(v^2)$, temos $\nabla(u/v) = 0$ q.t.p sobre o conjunto $O = \{x \in \mathbb{R}^N : u(x) \neq 0\}$. Além disso, temos $\nabla u = 0$ q.t.p sobre $\mathbb{R}^N \backslash O$ (veja [20]), e assim, $\nabla(u/v) = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N \backslash O$. Portanto $\nabla(u/v) = 0$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$. Conseqüentemente, (u/v) é constante, ou seja, existe $C > 0$ tal que $u = Cv$ em $\mathbb{R}^N$.

Reciprocamente, sendo $\nabla(u/v) = v\nabla u - u\nabla v$, se $\nabla(u/v) = 0$ temos $\nabla u = (u/v)\nabla v$. Assim,

$$\begin{aligned} L(u,v) &= |\nabla u|^p + (p-1)\left(\frac{u}{v}\right)^p |\nabla v|^p - p\frac{u^{p-1}}{v^{p-1}}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla u \\ &= |\nabla u|^p + (p-1)|\nabla u|^p - p|\nabla u|^p = 0, \end{aligned}$$

o que completa a demonstração. $\blacksquare$

Agora vamos demonstrar o principal resultado desta seção.

Prova da Proposição 3.6: Consideremos o caso em que g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$. Seja u_1 a autofunção principal de (3.1) associada a λ_1. Já sabemos que $u_1 > 0$ em $\mathbb{R}^N$. Desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^{p-2}\nabla u_1 \nabla\varphi dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g(u_1)^{p-1}\varphi dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,p},$$

tomando $\varphi = u_1$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^p dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g u_1^p dx > 0. \tag{3.31}$$

Suponhamos também que $v \in \mathcal{D}^{1,p}$ é uma autofunção positiva de (3.1) correspondente a um autovalor $\lambda > 0$. Neste caso, $\lambda \geq \lambda_1$ já que λ_1 é o menor autovalor positivo.
Afirmação: $\lambda = \lambda_1$ e $v = cu_1$.
De fato, sendo v uma autofunção do problema (3.1), $v \in C^1(\mathbb{R}^N)$. Então, pelo Lema 3.8, para todo $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ $\varphi \geq 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\mathbb{R}^N} L(\varphi, v) = \int_{\mathbb{R}^N} R(\varphi, v) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^p dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v \nabla\left(\frac{\varphi^p}{v^{p-1}}\right) dx \qquad (3.32) \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi|^p dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g\varphi^p dx. \end{aligned}$$

Assim, dado $u \in \mathcal{D}^{1,p}$, $u \geq 0$, seja (φ_n) uma seqüência de funções não negativas em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\varphi_n \to u$ em $\mathcal{D}^{1,p}$. Então, devido à continuidade dos funcionais A e B, a desigualdade (3.32) é válida para u. Em particular, para $u = u_1$ por (3.31) obtemos

$$\lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g|u_1|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^p dx \geq \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g|u_1|^p dx,$$

e conseqüentemente, $\lambda_1 \geq \lambda$. Portanto $\lambda_1 = \lambda$. Usando (3.31) e a continuidade dos funcionais A e B, concluímos de (3.32) que $L(u_1, v) = 0$. Pelo Lema 3.8, obtemos $v = cu_1$ para algum $c > 0$.

Concluímos assim, que λ_1 é o único autovalor positivo que admite autofunções positivas e que o autoespaço associado a λ_1 é gerado por u_1.

No caso em que g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$ a demonstração segue o mesmo raciocínio. $\blacksquare$

Para concluir a demonstração do Teorema 3.1, nos resta verificar que os autovalores principais do problema (3.1) são isolados.

3.4 λ_1 (respect. λ_1^+, λ_1^-) é um autovalor isolado

Lema 3.9 *O operador $B' : \mathcal{D}^{1,p} \to \mathcal{D}^{-1,p^*}$ dado por*

$$(B'(u), \varphi) = p \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{p-2}u\varphi dx,$$

é compacto.

Prova: Seja (u_n) uma seqüência em $\mathcal{D}^{1,p}$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ para algum $u_0 \in \mathcal{D}^{1,p}$. Mostraremos que $B'(u_n) \to B'(u_0)$ em $\mathcal{D}^{-1,p^*}$. Temos

$$\begin{aligned}\|B'(u_n) - B'(u_0)\|_{\mathcal{D}^{-1,p^*}} &= \sup_{\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \leq 1} |(B'(u_n) - B'(u_0), v)| \\ &= \sup_{\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \leq 1} p \left| \int_{\mathbb{R}^N} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0) v dx \right|.\end{aligned}$$

Dividindo esta integral em integrais sobre B_R e $\mathbb{R}^N \backslash B_R$, $R > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}\|B'(u_n) - B'(u_0)\|_{\mathcal{D}^{-1,p^*}} \leq & \sup_{\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \leq 1} p \left| \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0) v dx \right| + \\ & + \sup_{\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \leq 1} p \left| \int_{B_R} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0) v dx \right|. \qquad (3.33)\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar essas duas integrais. Usando a desigualdade de Hölder, para a primeira integral temos

$$\begin{aligned}\left| \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} g \left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0 \right) v dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |g|^{1/p'} \left(|u_n|^{p-1} + |u_0|^{p-1} \right) |g|^{1/p} |v| dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |g| \left(|u_n|^{p-1} + |u_0|^{p-1} \right)^{p'} dx \right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} |g||v|^p dx \right)^{1/p}.\end{aligned}$$

Usando novamente a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} g \left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0 \right) v dx \right| \leq \\ &\leq \|g\|^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(|u_n|^{p-1} + |u_0|^{p-1} \right)^{\frac{Np'}{N-p}} dx \right)^{\frac{N-p}{Np'}} \|g\|^{1/p} \|v\|_{L^{p^*}},\end{aligned}$$

onde a norma de g está sendo tomada em $L^{N/p}(\mathbb{R}^N \backslash B_R)$. Usando agora a imersão de Sobolev obtemos

$$\begin{aligned}&\left| \int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} g \left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0 \right) v dx \right| \leq \\ &\leq K \|g\|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N \backslash B_R)} \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(|u_n|^{p-1} + |u_0|^{p-1} \right)^{\frac{Np'}{N-p}} dx \right)^{\frac{N-p}{Np'}} \|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}}. \qquad (3.34)\end{aligned}$$

Sabendo que $(N-p)/Np' = (p-1)/p^* < 1$ e $(a+b)^t \leq a^t + b^t$ para $a, b \geq 0$ e $0 < t < 1$, obtemos

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(|u_n|^{p-1} + |u_0|^{p-1} \right)^{\frac{Np'}{N-p}} dx \right)^{\frac{N-p}{Np'}} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N \backslash B_R} \left(|u_n|^{p^*} + |u_0|^{p^*} \right) dx \right)^{\frac{p-1}{p^*}} \\ &= \left(\|u_n\|_{L^{p^*}}^{p^*} + \|u_0\|_{L^{p^*}}^{p^*} \right)^{\frac{p-1}{p^*}}. \qquad (3.35)\end{aligned}$$

Desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ em $\mathcal{D}^{1,p}$, (u_n) é uma seqüência limitada em $\mathcal{D}^{1,p}$ e conseqüentemente em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Então existe $C > 0$ tal que

$$pK\left(\|u_n\|_{L^{p^*}}^{p^*} + \|u_0\|_{L^{p^*}}^{p^*}\right)^{(p-1)/p^*} \leq C, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.36}$$

Portanto, de (3.34), (3.35) e (3.36), obtemos

$$p\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} g\left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0\right) v dx\right| \leq C\|g\|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)}\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Além disso, já que $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} |g|^{N/p} dx = 0.$$

Então, dado $\varepsilon > 0$ podemos escolher R_0 suficientemente grande tal que

$$\|g\|_{L^{N/p}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)} \leq \frac{\varepsilon}{2C}, \qquad \forall R \geq R_0.$$

Assim,

$$p\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} g\left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0\right) v dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}}, \qquad \forall R \geq R_0. \tag{3.37}$$

Agora vamos estimar a segunda integral. Pela Proposição 17, o operador restrição de $\mathcal{D}^{1,p}$ para $\mathcal{D}^{1,p}(B_{R_0})$ é linear e contínuo e sabemos que a imersão $\mathcal{D}^{1,p}(B_{R_0}) \hookrightarrow L^p(B_{R_0})$ é linear e compacta. Assim, temos que $u_n \to u_0$ em $L^p(B_{R_0})$. Definindo $h : B_{R_0} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h(x,s) = pg(x)|s|^{p-2}s$, h é uma função de Carathéodory e $|h(x,s)| \leq p\|g\|_\infty |s|^{p-1}$. Assim, pelo Teorema 13, o operador de Nemytskii $N_h : L^p(B_{R_0}) \to L^{p'}(B_{R_0})$ está bem definido e é contínuo. Logo, desde que

$$\begin{aligned}
p\left|\int_{B_{R_0}} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0) v dx\right| &\leq \int_{B_{R_0}} \left|pg(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0)\right| |v| dx \\
&\leq \left(\int_{B_{R_0}} \left|pg(x)|u_n|^{p-2}u_n - pg|u_0|^{p-2}u_0\right|^{p'} dx\right)^{1/p'} \left(\int_{B_{R_0}} |v|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq C'\|N_h(u_n) - N_h(u_0)\|_{L^{p'}(B_{R_0})}\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}}\ ,
\end{aligned}$$

existe $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que

$$p\left|\int_{B_{R_0}} g(|u_n|^{p-2}u_n - |u_0|^{p-2}u_0) v dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}}\ , \qquad \forall n \geq n_0. \tag{3.38}$$

Portanto, de (3.33), (3.37) e (3.38), obtemos

$$\|B'(u_n) - B'(u_0)\|_{\mathcal{D}^{-1,p^*}} \leq \varepsilon\ , \qquad \forall n \geq n_0 \tag{3.39}$$

e assim, B' é um operador compacto. ■

Proposição 3.7 *O autovalor* λ_1 *(respectivamente* λ_1^+, λ_1^-*) é isolado.*

Prova: Mostraremos que λ_1 é isolado (a prova de que λ_1^+ e λ_1^- são isolados é análoga). Seja $\lambda_0 > 0$ e u_0 uma solução de (3.1) com λ_0 pertencendo a alguma vizinhança fixa de λ_1. Denote por $\Omega_0^- = \{x \in \mathbb{R}^N; u_0(x) < 0\}$. Escolhendo $\varphi = u_0^-$ em

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^{p-2} \nabla u_0 \nabla \varphi dx = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} g|u_0|^{p-2} u_0 \varphi dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,p},$$

onde u_0^- é a parte negativa de u_0, e observando que $\nabla u_0^+ \nabla u_0^- = 0 = u_0^+ u_0^-$, onde u_0^+ é a parte positiva de u_0, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0^-|^p dx = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} g|u_0^-|^p dx = \lambda_0 \int_{\Omega_0^-} g|u_0^-|^p dx.$$

Além disso, como $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, usando a desigualdade de Hölder e a imersão de Sobolev, obtemos

$$\begin{aligned} \|u_0^-\|_{\mathcal{D}^{1,p}}^p &\leq \lambda_0 \left(\int_{\Omega_0^-} |g|^{N/p} dx \right)^{p/N} \|u_0^-\|_{L^{p^*}}^p dx \\ &\leq C \left(\int_{\Omega_0^-} |g|^{N/p} dx \right)^{p/N} \|u_0^-\|_{\mathcal{D}^{1,p}}^p, \end{aligned}$$

já que λ_0 pertence a uma vizinhança fixa de λ_1. Conseqüentemente,

$$\int_{\Omega_0^-} |g|^{N/p} dx \geq c > 0, \tag{3.40}$$

(independentemente de λ_0 e u_0). Desde que $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$, podemos escolher R_0 suficientemente grande tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} |g|^{N/p} dx \leq \frac{c}{2}, \qquad \forall R \geq R_0.$$

Note que R_0 não depende de u_0 nem de λ_0. Assim, segue de (3.40) que

$$\begin{aligned} 0 < c &\leq \int_{\Omega_0^- \cap B_R} |g|^{N/p} dx + \int_{\Omega_0^- \cap B_R^c} |g|^{N/p} dx \\ &\leq \int_{\Omega_0^- \cap B_R} |g|^{N/p} dx + \int_{B_R^c} |g|^{N/p} dx \\ &\leq \|g\|_\infty^{N/p} |\Omega_0^- \cap B_R| + \frac{c}{2}, \qquad \forall R \geq R_0. \end{aligned}$$

Logo, tomando $c' = c/2\|g\|_\infty^{N/p}$ (c' não depende de λ_0 nem de u_0) obtemos

$$|\Omega_0^- \cap B_R| \geq c' > 0, \qquad \forall R \geq R_0. \tag{3.41}$$

Suponha agora que exista (λ_n, u_n), uma seqüência de soluções de (3.1), com $\lambda_n \to \lambda_1$. Escrevendo

$$\Omega_n^- = \{x \in \mathbb{R}^N : u_n(x) < 0\},$$

vemos que a desigualdade (3.41) permanece válida para Ω_n^- já que c' não depende de λ e nem de u para λ numa vizinhança fixa de λ_1, ou seja,

$$|\Omega_n^- \cap B_R| \geq c' > 0, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, R \geq R_0. \tag{3.42}$$

Sendo λ_1 o menor autovalor positivo temos $\lambda_n > \lambda_1$ e sem perda de generalidade podemos admitir que $\|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = 1$ e $u_n \rightharpoonup \widetilde{u}$ em $\mathcal{D}^{1,p}$. Então, desde que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \nabla\varphi dx = \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} g|u_n|^{p-2}u_n\varphi dx, \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}^{1,p} \tag{3.43}$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m \nabla\phi dx = \lambda_m \int_{\mathbb{R}^N} g|u_m|^{p-2}u_m\phi dx, \qquad \forall\phi \in \mathcal{D}^{1,p} \tag{3.44}$$

tomando $\varphi = \phi = u_n - u_m$ e subtraindo (3.44) de (3.43) obtemos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\right)\nabla(u_n - u_m)dx\right| \leq \\ \leq \lambda_n \left|\int_{\mathbb{R}^N} g\left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_m|^{p-2}u_m\right)(u_n - u_m)dx\right| + \\ + \left|(\lambda_n - \lambda_m)\int_{\mathbb{R}^N} g|u_m|^{p-2}u_m(u_n - u_m)dx\right|.\end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m\right)\nabla(u_n - u_m)dx\right| \leq \\ \leq \lambda_n \left|\int_{\mathbb{R}^N} g\left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_m|^{p-2}u_m\right)(u_n - u_m)dx\right| + \\ + |\lambda_n - \lambda_m|\|g\|_{L^{N/p}}\|u_m\|_{L^{p^*}}^{p-1}\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}}dx.\end{aligned}$$

Pela compacidade do operador B' e pela limitação de (λ_n), deduzimos que

$$\lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} g\left(|u_n|^{p-2}u_n - |u_m|^{p-2}u_m\right)(u_n - u_m)dx \to 0, \quad \text{quando } \ m, n \to \infty. \tag{3.45}$$

Além disso, sendo (λ_n) uma seqüência de Cauchy e (u_n) limitada em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, concluímos que

$$|\lambda_n - \lambda_m|\|g\|_{L^{N/p}}\|u_m\|_{L^{p^*}}^{p-1}\|u_n - u_m\|_{L^{p^*}}dx \to 0, \quad \text{quando } \ m, n \to \infty. \tag{3.46}$$

Assim, por (3.45) e (3.46) temos que,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m-\right)\nabla(u_n - u_m)dx \to 0, \text{ se } m, n \to \infty. \tag{3.47}$$

Pela Proposição 4.3, temos

$$|\nabla u_n - \nabla u_m|^p \leq c_p[(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m)(\nabla u_n - \nabla u_m)]^{s/2}(|\nabla u_n|^p + |\nabla u_m|^p)^{1-s/2},$$

onde $s = p$ se $p \in (1,2)$, ou $s = 2$ se $p \geq 2$ e c_p é uma constante que depende de p. Assim, integrando em $\mathbb{R}^N$ e aplicando a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n - \nabla u_m|^p \leq c_p \left[\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_m|^{p-2}\nabla u_m)(\nabla u_n - \nabla u_m) \right]^{s/2} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_m|^p \right)^{1-s/2}. \tag{3.48}$$

Como $u_n \rightharpoonup \widetilde{u}$, (u_n) é limitada em $\mathcal{D}^{1,p}$. Então, por (3.47) e (3.48) concluímos que (u_n) é uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{D}^{1,p}$, logo, convergente. Pela unicidade do limite, temos $u_n \to \widetilde{u}$ em $\mathcal{D}^{1,p}$. Sendo A' e B' aplicações contínuas, tomando o limite com $n \to \infty$ em (3.43), obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \widetilde{u}|^{p-2}\nabla \widetilde{u} \nabla \varphi dx = \lambda_1 \int_{\mathbb{R}^N} g|\widetilde{u}|^{p-2}\widetilde{u}\varphi dx, \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}^{1,p}.$$

Como $\|\widetilde{u}\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = 1$, $\widetilde{u} \neq 0$ é uma autofunção associada a λ_1. Sendo λ_1 um autovalor simples devemos ter $\widetilde{u} = \pm u_1$, onde u_1 é a autofunção principal associada a λ_1 com $\|u_1\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = 1$. Vamos assumir que $u_n \to u_1 > 0$ em $\mathcal{D}^{1,p}$.

Fixemos $R \geq R_0$. Desde que $\mathcal{D}^{1,p}(B_R)$ está imerso compactamente em $L^p(B_R)$, temos que $u_n \to u_1$ em $L^p(B_R)$. Pelo Teorema 9 existe uma subseqüência, ainda denotada por (u_n), tal que

$$u_n(x) \to u_1(x) \text{ q.t.p em } B_R.$$

Assim, pelo Teorema de Egorov, Teorema 10, $u_n \to u_1$ quase uniformemente em B_R. Sendo $u_1 > 0$, devemos ter $u_n(x) > 0$ para n suficientemente grande, a menos de um subconjunto de B_R de medida arbitrariamente pequena, o que contraria (3.42). Portanto λ_1 é um autovalor isolado. ■

Finalmente, a demonstração do **Teorema 3.1** é conseqüência do Corolário 3.1 e das proposições provadas neste capítulo. ■

Capítulo 4

Bifurcação para uma equação elíptica quasilinear em $\mathbb{R}^N$

4.1 Introdução e resultados principais

Neste capítulo vamos considerar o seguinte problema elíptico quasilinear

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u + f(\lambda, x, u), \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.1}$$

onde $1 < p < N$, λ é um parâmetro real, f e g podem mudar de sinal e satisfazem algumas propriedades. Os resultados deste capítulo são devidos a Drábek e Huang e foram publicados em [16].

Vamos assumir que f satisfaz as seguintes hipóteses:

($\mathbf{f}_1$) f é uma função de Carathéodory, i.e., $f(\cdot, x, \cdot)$ é contínua q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e $f(\lambda, \cdot, u)$ é mensurável para todo $(\lambda, u) \in \mathbb{R}^2$;

($\mathbf{f}_2$) $|f(\lambda, x, u)| \leq c(\lambda)(\sigma(x) + \rho(x)|u|^{\gamma})$ q.t.p em $\mathbb{R}^N$, $u \in \mathbb{R}$, onde $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ é uma função contínua e limitada sobre subconjuntos limitados de $\mathbb{R}$, $p - 1 < \gamma < p^* - 1$, $0 \leq \rho \in L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N)$ com $\gamma_1 = p^*/(p^* - \gamma - 1)$, $0 \leq \sigma \in L^{N/p}(w^{N/p}, \mathbb{R}^N)$, onde $L^{N/p}(w^{N/p}, \mathbb{R}^N)$ é o espaço com peso $L^{N/p}(\mathbb{R}^N)$ com a função peso $w^{N/p}$, e ou

   (i) $\sigma \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N)$, $(p^*)' = Np/(Np - (N - p))$, ou

   (ii) $\sigma \in L^{p'}(w^{1/(1-p)}, \mathbb{R}^N)$;

($\mathbf{f}_3$) o seguinte limite é válido

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(\lambda, x, u)}{w(x)|u|^{p-2}u} = 0,$$

   uniformemente q.t.p em $\mathbb{R}^N$ e λ em um intervalo limitado.

Como vimos no Capítulo 3, sob certas condições sobre a função peso g, o problema de autovalor

$$-\Delta_p u = \lambda g(x)|u|^{p-2}u, \quad x \in \mathbb{R}^N, \tag{4.2}$$

possui um autovalor principal positivo λ_1 com autofunção positiva u_1. Visto que os possíveis pontos de bifurcação para o problema (4.1) são os pontos da forma $(\lambda, 0)$, onde

λ é uma autovalor de (3.1), vamos estudar o problema de bifurcação quando λ está próximo de λ_1.

Desde que o problema (4.1) envolve o operador p-laplaciano, iremos usar uma noção de grau topológico para operadores demicontínuos para provar que $(\lambda_1, 0)$ é um ponto de bifurcação para (4.1).

Para isto vamos introduzir algumas hipóteses e notações. Vamos supor que a função peso g satisfaz a condição $(\mathcal{G})$ definida no Capítulo 3. Escrevemos $g = g_1 - g_2$ onde $g_1, g_2 \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ são funções não negativas. Neste trabalho iremos considerar $g_1 = \max\{g, 0\}$, $g_2 = \max\{-g, 0\}$. Defina,

$$\omega(x) = \frac{1}{(1+|x|)^p}, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

$$w(x) = \max\{g_2(x), \omega(x)\} > 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N.$$

Notemos aqui, que a função ω é exatamente a função peso na seguinte desigualdade de Hardy (veja Apêndice, Proposição 4.5)

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{(1+|x|)^p} dx \leq \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.$$

Definamos W como sendo o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ com respeito à norma definida por

$$\|u\|_W = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} w(x)|\, u|^p dx\right)^{1/p},$$

e seja W^* seu dual. De acordo com a Proposição 4.6 no Apêndice, W é um espaço de Banach uniformemente convexo.

Lema 4.1 *As normas $\|\cdot\|_W$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{1,p}}$ são equivalentes em $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Logo $W = \mathcal{D}^{1,p}$.*

Prova: Sendo w uma função positiva, temos

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \leq \|u\|_W \quad \forall u \in C_c^\infty.$$

Por outro lado, definimos $\Omega_1 := \{x \in \mathbb{R}^N; g_2(x) < \omega(x)\}$, $\Omega_2 := \{x \in \mathbb{R}^N; \omega(x) < g_2(x)\}$ e $\Omega_3 := \{x \in \mathbb{R}^N; \omega(x) = g_2(x)\}$. Assim, podemos escrever

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(x)|u|^p dx = \int_{\Omega_1} \omega(x)|u|^p dx + \int_{\Omega_2} g_2(x)|u|^p dx + \int_{\Omega_3} g_2(x)|u|^p dx.$$

Usando as desigualdades de Hardy, Hölder e a imersão $\mathcal{D}^{1,p} \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} w(x)|u|^p dx \leq \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}} + 2\|g_2\|^{L^{N/p}} \|u\|^p_{L^{p^*}} \leq C\|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}}.$$

Portanto $\|u\|_W \leq C'\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}}$, e assim as normas são equivalentes. ■

Definimos os operadores $J, G, F(\lambda, \cdot) : W \to W^*$ como segue

$$(J(u), v)_W = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx,$$

$$(G(u),v)_W = \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{p-2}uvdx,$$

$$(F(\lambda,u),v)_W = \int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda,x,u)vdx,$$

para $u,v \in W$. No que segue vamos estabelecer algumas propriedades destes operadores.

Lema 4.2 *Os operadores J,G,F estão bem definidos, G e J são $(p-1)$-homogêneos, J é contínuo, G é compacto e F satisfaz*

$$\lim_{\|u\|_W \to 0} \frac{\|F(\lambda,u)\|_{W^*}}{\|u\|_W^{p-1}} = 0, \tag{4.3}$$

uniformemente para λ em um subconjunto limitado de $\mathbb{R}$.

Prova: Claramente $J(u)$, $G(u)$ e $F(\lambda,u)$ são operadores lineares, para todo $u \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ fixados. Observando que $J = (1/p)A'$ e $G = (1/p)B'$, onde A e B são dados por (3.4) e (3.5), respectivamente, obtemos que G,J estão bem definidos, J é contínuo e G é compacto, mais especificamente, $G(u_n) \to G(u_0)$ sempre que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W. Além disso, por definição, para $u,v \in W$ e $\lambda \in (0,\infty)$, temos

$$(J(\lambda u),v)_W = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(\lambda u)|^{p-2}\nabla(\lambda u)\nabla v dx = \lambda^{p-1}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v dx,$$

ou seja,

$$J(\lambda u) = \lambda^{p-1}J(u), \quad \forall u \in W.$$

Portanto, J é $(p-1)$-homogêneo. De maneira análoga, vemos que o operador G também é $(p-1)$-homogêneo. Para o operador F, por $(\mathbf{f}_2)$ temos

$$|(F(\lambda,u),v)_W| \le \int_{\mathbb{R}^N} |f(\lambda,x,u)||v|dx \le c(\lambda)\left(\int_{\mathbb{R}^N} \sigma|v|dx + \int_{\mathbb{R}^N} \rho|u|^{\gamma}|v|dx\right). \tag{4.4}$$

Por (i)-(ii) em $(\mathbf{f}_2)$, juntamente com a desigualdade de Hölder e a imersão $W \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ obtemos que, ou

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sigma|v|dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} \sigma^{(p^*)'}dx\right)^{1/(p^*)'}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*}dx\right)^{1/p^*} < \infty \tag{4.5}$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}^N}\sigma|v|dx = \int_{\mathbb{R}^N} w^{-1/p}\sigma w^{1/p}|v|dx \le \left(\int_{\mathbb{R}^N} w^{1/(1-p)}\sigma^{p'}dx\right)^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^N} w|v|^p dx\right)^{1/p} < \infty. \tag{4.6}$$

De qualquer modo, de (4.5) e (4.6) existe $c_1 = c_1(\sigma)$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \sigma|v|dx \le c_1\|v\|_W, \quad \forall v \in W. \tag{4.7}$$

A condição ($\mathbf{f}_2$) juntamente com a desigualdade de Hölder implica ainda que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} \rho |u|^\gamma |v| dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx \right)^{\gamma/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho^{p^*/(p^*-\gamma)} |v|^{p^*/(p^*-\gamma)} dx \right)^{(p^*-\gamma)/p^*} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx \right)^{\gamma/p^*} \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho^{\gamma_1} dx \right)^{\frac{p^*-(\gamma+1)}{p^*-\gamma}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} dx \right)^{\frac{1}{p^*-\gamma}} \right]^{\frac{p^*-\gamma}{p^*}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx \right)^{\gamma/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \rho^{\gamma_1} dx \right)^{1/\gamma_1} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*} dx \right)^{1/p^*} \\
&\leq K^{1+\gamma} \|\rho\|_{L^{\gamma_1}} \|u\|_W^\gamma \|v\|_W < \infty. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

Assim, $F(\lambda, u)$ é limitado para cada $u \in W$, pois de (4.4), (4.7) e (4.8) temos

$$|(F(\lambda, u), v)_W| \leq C_3(\lambda, u) \|v\|_W, \quad \forall v \in W.$$

Portanto, F está bem definido. Além disso, observe que

$$\begin{aligned}
\lim_{\|u\|_W \to 0} \frac{\|F(\lambda, u)\|_{W^*}}{\|u\|_W^{p-1}} &= \lim_{\|u\|_W \to 0} \sup_{\|v\|_W \leq 1} \frac{1}{\|u\|^{p-1}} \left| \int_{\mathbb{R}^N} f(\lambda, x, u) v dx \right| \\
&\leq \lim_{\|u\|_W \to 0} \sup_{\|v\|_W \leq 1} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(\lambda, x, u)}{w|u|^{p-1}} |\widetilde{u}|^{p-1} |v| w dx
\end{aligned} \qquad (4.9)$$

onde $\widetilde{u} = u/\|u\|_W$. Vamos agora estimar esta última integral. Primeiro defina, para $\delta > 0$,

$$\Omega_\delta(u) = \{x \in \mathbb{R}^N : w(x)|u(x)|^{p-1} \geq \delta\}.$$

Afirmamos que $|\Omega_\delta(u)| \to 0$ quando $\|u\|_W \to 0$. Suponhamos por absurdo que $\|u\|_W \to 0$ e $|\Omega_\delta(u)| \geq c_2 > 0$. Para $R > 0$, defina $\Omega_R = \Omega_\delta(u) \cap B_R(0)$. Então $|\Omega_R| \geq c_2/2$ para R suficientemente grande. Assim, usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$\begin{aligned}
0 < \delta |\Omega_R| &\leq \int_{\Omega_R} w(x) |u(x)|^{p-1} dx = \int_{\Omega_R} w(x)^{1/p'} |u(x)|^{p-1} w(x)^{1/p} dx \\
&\leq \left(\int_{\Omega_R} w(x) |u(x)|^p dx \right)^{1/p'} \left(\int_{\Omega_R} w(x) dx \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\int_{\Omega_R} w(x) dx \right)^{1/p} \|u\|_W^{p-1}.
\end{aligned}$$

Desde que g_2, $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos que $w \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e assim,

$$0 < \delta |\Omega_R| \leq c_3 |\Omega_R|^{1/p} \|u\|_W^{p-1}.$$

Conseqüentemente,

$$0 < \delta \left(\frac{c_2}{2} \right)^{1/p'} \leq \delta |\Omega_R|^{1/p'} \leq c_3 \|u\|_W^{p-1},$$

contrariando o fato de que $\|u\|_W \to 0$. Isto prova nossa afirmação. Agora, fixado $\varepsilon > 0$, por $(\mathbf{f}_3)$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|f(\lambda,x,u)|}{w(x)|u|^{p-1}} \leq \varepsilon,$$

uniformemente para $w(x)|\,u|^{p-1} < \delta$. Em $\mathbb{R}^N \backslash \Omega_\delta(u)$ temos $w|u|^{p-1} < \delta$. Logo,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\delta(u)} \frac{|f(\lambda,x,u)|}{w|u|^{p-1}}|\widetilde{u}|^{p-1}|v|wdx &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N\backslash\Omega_\delta(u)} |\widetilde{u}|^{p-1}|v|wdx \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} w^{1/p'}|\widetilde{u}|^{p-1}w^{1/p}|v|dx \\
&\leq \varepsilon \left(\int_{\mathbb{R}^N} w|\widetilde{u}|^p dx\right)^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^N} w|v|^p dx\right)^{1/p} \\
&\leq \varepsilon\|\widetilde{u}\|_W^{p-1}\|v\|_W = \varepsilon\|v\|_W. \qquad (4.10)
\end{aligned}$$

Por $(\mathbf{f}_2)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_\delta(u)} \frac{|f(\lambda,x,u)|}{w|u|^{p-1}}|\widetilde{u}|^{p-1}|v|wdx &\leq c(\lambda)\int_{\Omega_\delta(u)} \frac{\sigma(x)}{w|u|^{p-1}}|\widetilde{u}|^{p-1}|v|wdx \\
&+ \frac{c(\lambda)}{\|u\|_W^{p-1}}\int_{\Omega_\delta(u)} \rho(x)|u|^{\gamma}|v|dx \\
&:= c(\lambda)(I_1 + I_2).
\end{aligned}$$

Desde que $w(x)|u|^{p-1} \geq \delta$ em $\Omega_\delta(u)$, temos

$$I_1 \leq \frac{1}{\delta}\int_{\Omega_\delta(u)} \sigma(x)|\widetilde{u}|^{p-1}|v|wdx.$$

Usando a desigualdade de Hölder e a imersão $W \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, obtemos

$$\begin{aligned}
I_1 &\leq \frac{1}{\delta}\left(\int_{\Omega_\delta(u)} |\widetilde{u}|^{p^*}dx\right)^{(p-1)/p^*}\left(\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma|v|w)^{p^*/(p^*-(p-1))}dx\right)^{(p^*-(p-1))/p^*} \\
&\leq \frac{1}{\delta}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\widetilde{u}|^{p^*}dx\right)^{\frac{p-1}{p^*}}\left[\left(\int_{\Omega_\delta(u)}(\sigma w)^{\frac{p^*}{p^*-p}}dx\right)^{\frac{p^*-p}{p^*-(p-1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|v|^{p^*}dx\right)^{\frac{1}{p^*-(p-1)}}\right]^{\frac{p^*-(p-1)}{p^*}} \\
&= \frac{1}{\delta}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\widetilde{u}|^{p^*}dx\right)^{(p-1)/p^*}\left(\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma w)^{p^*/(p^*-p)}dx\right)^{(p^*-p)/p^*}\left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^{p^*}dx\right)^{1/p^*} \\
&\leq c_4\left(\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma w)^{N/p}dx\right)^{p/N}\|\widetilde{u}\|_W^{p-1}\|v\|_W. \\
&= c_4\left(\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma w)^{N/p}dx\right)^{p/N}\|v\|_W. \qquad (4.11)
\end{aligned}$$

Usando o fato de que $\sigma \in L^{N/p}(w^{N/p}, \mathbb{R}^N)$ e $|\Omega_\delta(u)| \to 0$ quando $\|u\|_W \to 0$, pelo Teorema 7, temos que

$$\left(\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma w)^{N/p} dx\right)^{p/N} \to 0, \quad \text{quando} \quad \|u\|_W \to 0. \tag{4.12}$$

Para estimar I_2, observe que pela desigualdade (4.8),

$$I_2 \leq K^{1+\gamma} \|\rho\|_{L^{\gamma_1}} \|u\|_W^{\gamma-(p-1)} \|v\|_W. \tag{4.13}$$

Assim, por (4.10), (4.11) e (4.13) obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|f(\lambda, x, u)|}{w|u|^{p-1}} |\widetilde{u}|^{p-1}|v|w dx \leq \left[\varepsilon + c_5 \left(\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma w)^{N/p} dx\right)^{p/N} + c(\lambda, \rho)\|u\|_W^{\gamma-p+1}\right] \|v\|_W.$$

Conseqüentemente, por (4.9) e (4.12)

$$\lim_{\|u\|_W \to 0} \frac{\|F(\lambda, u)\|_{W^*}}{\|u\|_W^{p-1}} \leq \lim_{\|u\|_W \to 0} \left[\varepsilon + c_5 \left(\int_{\Omega_\delta(u)} (\sigma w)^{N/p} dx\right)^{p/N} + c(\lambda, \rho)\|u\|_W^{\gamma-p+1}\right] = 0,$$

já que ε é arbitrário e $\gamma > p - 1$. Isto completa a demonstração do lema. ■

Lema 4.3 *O operador $F(\lambda, \cdot)$ é compacto.*

Prova: Suponha que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W. Mostraremos que $F(\lambda, u_n) \to F(\lambda, u_0)$ em W^*. Observe que

$$\begin{aligned}
\|F(\lambda, u_n) - F(\lambda, u_0)\|_{W^*} &= \sup_{\|v\|_W \leq 1} |(F(\lambda, u_n) - F(\lambda, u_0), v)| \\
&= \sup_{\|v\|_W \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N} (f(\lambda, x, u_n) - f(\lambda, x, u_0)) v dx \right| \\
&\leq \sup_{\|v\|_W \leq 1} \left| \int_{B_R} (f(\lambda, x, u_n) - f(\lambda, x, u_0)) v dx \right| \\
&+ \sup_{\|v\|_W \leq 1} \left| \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} (f(\lambda, x, u_n) - f(\lambda, x, u_0)) v dx \right|. \qquad (4.14)
\end{aligned}$$

Agora, vamos estimar a integral sobre $\mathbb{R}^N \setminus B_R$. Por $(\mathbf{f}_2)$ temos

$$\begin{aligned}
\left| \int (f(\lambda, x, u_n) - f(\lambda, x, u_0)) v dx \right| &\leq \int (|f(\lambda, x, u_n)| + |f(\lambda, x, u_0)|)|v| dx \qquad (4.15) \\
&\leq 2c(\lambda) \int \sigma |v| dx + c(\lambda) \int \rho(|u_n|^\gamma + |u_0|^\gamma)|v| dx,
\end{aligned}$$

onde as integrais estão sendo tomadas em $\mathbb{R}^N \setminus B_R$. Por (4.5) temos

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \sigma |v| dx \leq K \left(\int_{\mathbb{R}^N \setminus B_R} \sigma^{(p^*)'}\right)^{1/(p^*)'} \|v\|_W,$$

ou

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \sigma|v|dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} w^{1/(1-p)}\sigma^{p'}dx\right)^{1/p'} \|v\|_W,$$

dependendo se σ satisfaz (i) ou (ii) em $(\mathbf{f}_2)$. Assim, fixado $\varepsilon > 0$ existe $R_1 > 0$ tal que

$$2c(\lambda)\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \sigma|v|dx \leq \frac{\varepsilon}{4}\|v\|_W, \quad \forall R \geq R_1. \tag{4.16}$$

Por (4.8) obtemos

$$\int \rho(|u_n|^\gamma + |u_0|^\gamma)|v|dx \leq K^{1+\gamma}\|\rho\|_{L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N\setminus B_R)}(\|u_n\|_W^\gamma + \|u_0\|_W^\gamma)\|v\|_W.$$

Desde que $\rho \in L^{\gamma_1}(\mathbb{R}^N)$ e (u_n) é uma seqüência limitada em W, existe $R_2 > 0$ tal que

$$c(\lambda)\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} \rho(|u_n|^\gamma + |u_0|^\gamma)|v|dx \leq \frac{\varepsilon}{4}\|v\|_W, \quad \forall R \geq R_2. \tag{4.17}$$

Tomando $R_0 = \max\{R_1, R_2\}$, por (4.15), (4.16) e (4.17) temos

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} (f(\lambda,x,u_n) - f(\lambda,x,u_0))v\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_W, \quad \forall R \geq R_0. \tag{4.18}$$

Agora vamos estimar a integral em B_{R_0}. Desde que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W, temos que $u_n \to u_0$ em $L^p(B_{R_0})$. Pelas condições $(\mathbf{f}_1)$ e $(\mathbf{f}_2)$, o operador de Nemytskii N_f está bem definido de $L^p(B_{R_0})$ em $L^{p'}(B_{R_0})$ e é contínuo. Assim,

$$\|f(\lambda,x,u_n) - f(\lambda,x,u_0)\|_{L^{p'}(B_{R_0})} \to 0, \quad \text{quando} \quad n \to \infty. \tag{4.19}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a Observação 1, temos

$$\begin{aligned}\left|\int_{B_{R_0}} (f(\lambda,x,u_n) - f(\lambda,x,u_0))v\right| &\leq \|f(\lambda,x,u_n) - f(\lambda,x,u_0)\|_{L^{p'}(B_{R_0})}\|v\|_{L^p(B_{R_0})} \\ &\leq C\|f(\lambda,x,u_n) - f(\lambda,x,u_0)\|_{L^{p'}(B_{R_0})}\|v\|_W.\end{aligned}$$

Por (4.19) existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int_{B_{R_0}} (f(\lambda,x,u_n) - f(\lambda,x,u_0))v\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}\|v\|_W, \quad \forall n \geq n_0. \tag{4.20}$$

Com (4.14), (4.18) e (4.20) concluímos a prova. ■

Definição 4.1 *Dizemos que o par* $(\lambda, u) \in \mathbb{R} \times W$ *é uma solução fraca (ou simplesmente solução) do problema* (4.1) *se*

$$J(u) - \lambda G(u) - F(\lambda, u) = 0 \quad em \quad W^*. \tag{4.21}$$

Como vimos no Capítulo 3, se g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$ então o problema de autovalor (4.2) tem um par de autovalor e autofunção principal (λ_1, u_1), com $\lambda_1 > 0$ sendo um autovalor simples e isolado e $u_1 > 0$. Se g satisfaz $(\mathcal{G}^-)$, então o problema (4.2) tem dois pares de autovalores e autofunções principais (λ_1^+, u_1^+), (λ_1^-, u_1^-) com $\lambda_1^- < 0 < \lambda_1^+$ autovalores simples e isolados e $0 < u_1^-, u_1^+ \in W$. Além disso, vimos que toda autofunção associada a um autovalor $\lambda_0 \in (0,\infty)\backslash\{\lambda_1^+\}$ muda de sinal em $\mathbb{R}^N$. Análogo para $\lambda_0 \in (-\infty, 0)\backslash\{\lambda_1^-\}$ se λ_1^- existir.

Consideremos o operador $A_\lambda : W \to W^*$ definido por

$$A_\lambda = J - \lambda G - F(\lambda, \cdot).$$

Assim, mostrar a existência de soluções fracas para o problema (4.1) é equivalente a encontrar soluções para a equação

$$A_\lambda(u) = 0. \tag{4.22}$$

Vamos verificar que a noção de grau "Deg", definida nos resultados preliminares, está bem definida para o operador A_λ, com $X = W$. Para isto, precisaremos estabelecer alguns resultados auxiliares.

Lema 4.4 *O operador $J : W \to W^*$ satisfaz a condição $\alpha(W)$.*

Prova: Assuma que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W e

$$\limsup_{n\to\infty} (J(u_n), u_n - u_0) \le 0.$$

Desde que $\lim_{n\to\infty}(J(u_0), u_n - u_0) = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &\ge \limsup_{n\to\infty} (J(u_n) - J(u_0), u_n - u_0) \\ &= \limsup_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right) \nabla(u_n - u_0). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Se $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$, pela desigualdade de Hölder obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^{p-2}u - |v|^{p-2}v\right)(u-v)dx = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|u|^p + |v|^p - |u|^{p-2}uv - |v|^{p-2}vu\right)dx \ge$$

$$\ge \int_{\mathbb{R}^N} (|u|^p + |v|^p)\,dx - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx\right)^{1/p} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx\right)^{1/p'} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{1/p}$$

$$= \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{1/p'} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx\right)^{1/p'}\right]\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx\right)^{1/p} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |v|^p dx\right)^{1/p}\right] \ge 0.$$

Assim, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u_0|^{p-2}\nabla u_0\right)\nabla(u_n - u_0)dx \ge$$
$$\ge \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx\right)^{1/p'} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx\right)^{1/p'}\right]\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx\right)^{1/p} - \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx\right)^{1/p}\right] \ge 0.$$

Isto juntamente com (4.23), implica na convergência

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_0|^p dx.$$

Dessa forma, $u_n \rightharpoonup u_0$ e $\|u_n\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \to \|u_0\|_{\mathcal{D}^{1,p}}$. Sendo $\mathcal{D}^{1,p}$ um espaço de Banach uniformemente convexo, pelo Teorema 4 temos que $u_n \to u_0$ em $\mathcal{D}^{1,p}$. Devido à equivalência das normas, $u_n \to u_0$ em W. Portanto, J satisfaz a condição $\alpha(W)$ e o lema está provado. ■

Lema 4.5 *O operador $A_\lambda : W \to W^*$ satisfaz a condição $\alpha(W)$.*

Prova: Seja (u_n) em W tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W e

$$\limsup_{n\to\infty} (A_\lambda(u_n), u_n - u_0) \leq 0,$$

ou seja,

$$\limsup_{n\to\infty} (J(u_n) - \lambda G(u_n) - F(\lambda, u_n), u_n - u_0) \leq 0.$$

Pelos Lemas 4.2 e 4.3, sabemos que $G(u_n) \to G(u_0)$ e $F(\lambda, u_n) \to F(\lambda, u_0)$. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} (G(u_n), u_n - u_0) = 0 = \lim_{n\to\infty} (F(\lambda, u_n), u_n - u_0).$$

Conseqüentemente,

$$\limsup_{n\to\infty} (J(u_n), u_n - u_0) \leq 0.$$

Pelo Lema 4.4 obtemos que $u_n \to u_0$ em W. ■

Agora observemos que sendo A_λ um operador contínuo é também demicontínuo. Além disso, desde que J, G e $F(\lambda, \cdot)$ são operadores limitados, A_λ é limitado para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, ou seja, aplica conjuntos limitados de W em conjuntos limitados em W^*. Assim, segue dos Lemas 4.4 e 4.5 que

$$\mathrm{Deg}(A_\lambda, D, 0),$$

onde $D \subset W$ é aberto, limitado e tal que $A_\lambda(u) \neq 0$ para qualquer $u \in \partial D$, está bem definido para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$.

4.2 Bifurcação a partir de λ_1

Definição 4.2 *Seja $E = \mathbb{R} \times W$ munido com a norma*

$$\|(\lambda, u)\|_E = \left(|\lambda|^2 + \|u\|_W^2\right)^{1/2}, \quad (\lambda, u) \in E. \tag{4.24}$$

Dizemos que

$$\mathcal{C} = \{(\lambda, u) \in E : (\lambda, u) \text{é solução de } (4.1), u \neq 0\}$$

é um ramo de soluções não triviais de (4.1) *se é um conjunto conexo com respeito à topologia induzida pela norma* (4.24). *Dizemos que $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times W$ é um ponto de bifurcação de* (4.1) *(no sentido de Rabinowitz) se existe um ramo de soluções não triviais de* (4.1), *$\mathcal{C}$, tal que $(\lambda_0, 0) \in \overline{\mathcal{C}}$ e $\mathcal{C}$ ou é ilimitado em E ou existe um autovalor $\widehat{\lambda} \neq \lambda_0$, tal que $(\widehat{\lambda}, 0) \in \overline{\mathcal{C}}$.*

Para mostrarmos que $(\lambda_1, 0)$ é um ponto de bifurcação de (4.1), vamos primeiramente estabelecer o seguinte resultado.

Lema 4.6 *Suponha que não existe um subconjunto de* $\overline{\mathcal{C}} \cup \{(\lambda_1, 0)\}$, *conexo e fechado, ao qual* $(\lambda_1, 0)$ *pertença e satisfaça:*

(i) *seja ilimitado em* E, *ou*

(ii) *contenha um ponto* $(\widehat{\lambda}, 0) \neq (\lambda_1, 0)$, *onde* $\widehat{\lambda}$ *é um autovalor de* (4.2).

Então existe um conjunto aberto e limitado $\mathcal{O} \subset E$ *tal que* $(\lambda_1, 0) \in \mathcal{O}$, $\partial\mathcal{O} \cap \overline{\mathcal{C}} = \emptyset$ *e* $\mathcal{O}$ *não contém soluções triviais exceto as que pertencem a* $\mathcal{B}_\varepsilon(\lambda_1, 0)$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *onde* ε_0 *é a distância de* λ_1 *ao conjunto* $\{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda$ *é autovalor de* $(4.2)\} \backslash \{\lambda_1\}$.

Prova: Sendo λ_1 isolado, $\varepsilon_0 > 0$. Denotemos por $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ a componente conexa de $(\lambda_1, 0)$ em $\overline{\mathcal{C}} \cup \{(\lambda_1, 0)\}$. Por (i), temos que $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ é limitado. Afirmamos que $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ é um conjunto compacto. Com efeito, seja (λ_n, u_n) uma seqüência em $\mathcal{C}_{\lambda_1}$, passando a uma subseqüência se necessário, podemos assumir que $\lambda_n \to \lambda_0$ e $u_n \rightharpoonup u_0$. Pela definição de $\overline{\mathcal{C}}$ temos

$$A_{\lambda_n}(u_n) = J(u_n) - \lambda_n G(u_n) - F(\lambda_n, u_n) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Conseqüentemente,

$$(J(u_n), u_n - u_0) = \lambda_n (G(u_n), u_n - u_0) - (F(\lambda_n, u_n), u_n - u_0) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Segue dos Lemas 4.2 e 4.3, que $G(u_n) \to G(u_0)$ e $F(\lambda_n, u_n) \to F(\lambda_0, u_0)$ em W^*. Logo, $\lim_{n\to\infty}(G(u_n), u_n - u_0) = \lim_{n\to\infty}(F(\lambda_n, u_n), u_n - u_0) = 0$ e assim,

$$\lim_{n\to\infty} (J(u_n), u_n - u_0) = 0.$$

Agora, usando o Lema 4.4 obtemos que, $u_n \to u_0$ em W. Sendo $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ um conjunto fechado, $(\lambda_0, u_0) \in \mathcal{C}_{\lambda_1}$ e portanto $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ é compacto.

Por (ii), $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ não contém pontos da forma $(\widetilde{\lambda}, 0)$ onde $\widetilde{\lambda}$ é um autovalor de (4.2). Observe que se λ_0 não é um autovalor de (4.2), então $(\lambda_0, 0)$ é uma solução isolada de (4.22) (isolada no sentido de que não existe uma seqüência de soluções não triviais que converge para $(\lambda_0, 0)$). De fato, suponha que existe uma seqüência (λ_n, u_n) em $\mathbb{R} \times (W \setminus \{0\})$ tal que $\lambda_n \to \lambda_0$, $\|u_n\|_W \to 0$ e $A_{\lambda_n}(u_n) = 0$. Fazendo $v_n = u_n/\|u_n\|_W$, a menos de subseqüência, podemos assumir que $v_n \rightharpoonup v_0$ para algum $v_0 \in W$. Assim, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2} \nabla v_n \nabla \varphi dx - \lambda_n \int_{\mathbb{R}^N} g|v_n|^{p-2} v_n \varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\lambda_n, x, u_n)\varphi}{\|u_n\|_W^{p-1}} dx = 0, \quad \forall \varphi \in W. \tag{4.25}$$

Conseqüentemente,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla v_m|^{p-2}\nabla v_m\right) \nabla\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} g\left(\lambda_n |v_n|^{p-2} v_n - \lambda_m |v_m|^{p-2} v_m\right) \varphi dx +$$

$$- \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\lambda_n, x, u_n)\varphi}{\|u_n\|_W^{p-1}} dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(\lambda_m, x, u_m)\varphi}{\|u_m\|_W^{p-1}} dx = 0, \qquad \forall \varphi \in W.$$

Fazendo $\varphi = v_n - v_m$, usando (4.3), a compacidade do operador G, a Proposição 4.3 e o fato de que (v_n) é limitada e $\lambda_n \to \lambda_0$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n - \nabla v_m|^p dx \leq C_p \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n - |\nabla v_m|^{p-2}\nabla v_m\right) \nabla(v_n - v_m)dx \to 0$$

quando $m, n \to \infty$. Logo, (v_n) é uma seqüência de Cauchy em W e conseqüentemente, $v_n \to v_0$. Fazendo $n \to \infty$ em (4.25) e usando novamente (4.3) e a continuidade dos operadores J e G obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_0|^{p-2}\nabla v_0 \nabla\varphi = \lambda_0 \int_{\mathbb{R}^N} g|v_0|^{p-2}v_0\varphi, \quad \forall\varphi \in W. \tag{4.26}$$

Desde que $\|v_n\|_W = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $\|v_0\|_W = 1$. Isto contraria o fato de que λ_0 não é autovalor de (4.2). Portanto, para $\gamma < \varepsilon_0$ suficientemente pequeno, existe uma γ-vizinhança U_γ de $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ que não contém soluções $(\lambda, 0)$ de (4.22) para $|\lambda - \lambda_1| > \gamma$.

Seja $K = \overline{U}_\gamma \cap \overline{\mathcal{C}}$. Desde que $\overline{\mathcal{C}}$ é localmente compacto em E (repetindo a prova de que $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ é compacto, vemos que todo subconjunto limitado de $\overline{\mathcal{C}}$ é compacto), K é um espaço métrico compacto com a topologia induzida por E e por construção

$$\mathcal{C}_{\lambda_1} \cap \partial U_\gamma = \emptyset.$$

Sendo $\mathcal{C}_{\lambda_1}$ a componente conexa de $(\lambda_1, 0)$, não pode existir um subconjunto conexo e fechado ligando os fechados disjuntos $A = \mathcal{C}_{\lambda_1}$ e $B = \partial U_\gamma \cap \overline{\mathcal{C}}$. Dessa forma, pelo Lema 34 existem $K_1,\ K_2 \subset K$ compactos disjuntos tais que $A \subset K_1$, $B \subset K_2$ e $K = K_1 \cup K_2$. Se $K_2 = \emptyset$ teríamos $B = \partial U_\gamma \cap \overline{\mathcal{C}} = \emptyset$ e assim, podemos tomar $\mathcal{O} = U_\gamma$. Se $K_2 \neq \emptyset$, podemos tomar $\mathcal{O}$ como sendo uma β-vizinhança de K_1 em E, onde β é menor que a distância entre K_1 e K_2. Por construção temos $\partial\mathcal{O} \cap \overline{\mathcal{C}} = \emptyset$ e isto completa a prova do lema. ■

Agora podemos estabelecer o principal resultado deste capítulo.

Teorema 4.1 *Assuma f satisfazendo* $(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_3)$ *e g satisfazendo a condição* $(\mathcal{G}^+)$. *Então* $(\lambda_1, 0)$ *é um ponto de bifurcação de* (4.1)*, onde $\lambda_1 > 0$ é o autovalor principal do problema de autovalor* (4.2).

Prova: Considere o operador

$$\widetilde{A}_\lambda(u) = J(u) - \lambda G(u) = (1/p)A'(u) - (\lambda/p)B'(u).$$

A demonstração deste teorema consiste de três passos, como segue

- No passo 1, provaremos que

$$\mathrm{Ind}(\widetilde{A}_\lambda, 0) = 1, \quad \lambda \in (0, \lambda_1),$$

$$\mathrm{Ind}(\widetilde{A}_\lambda, 0) = -1, \quad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta).$$

- No passo 2 mostraremos que as aplicações $\widetilde{A}_\lambda$ e A_λ são homotópicas sobre B_r para $r > 0$ suficientemente pequeno e $\lambda \in (0, \lambda_1 + \delta)\backslash\{\lambda_1\}$.

- O passo 3 é uma variação da prova do Teorema de Bifurcação Global de Rabinowitz (veja [25], Teorema 1.3). Supondo que $(\lambda_1, 0)$ não é um ponto de bifurcação de (4.1), teremos uma contradição com os resultados obtidos nos passos anteriores.

Passo 1. Desde que g satisfaz $(\mathcal{G}^+)$, temos $\int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx \geq 0$ para qualquer $u \in W$. Se $\int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx = 0$, então

$$(\widetilde{A}_\lambda(u), u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx > 0, \qquad \forall u \in W \backslash \{0\}.$$

Se $\int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx > 0$, pela caracterização variacional de λ_1 temos

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx}{\int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx}.$$

Assim, para $\lambda \in (0, \lambda_1)$ e $u \in W \backslash \{0\}$ temos

$$(\widetilde{A}_\lambda(u), u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^N} g|u|^p dx \geq \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_1}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx > 0. \tag{4.27}$$

Portanto o grau

$$\mathrm{Deg}(\widetilde{A}_\lambda, B_r(0), 0) \tag{4.28}$$

está bem definido para qualquer $\lambda \in (0, \lambda_1)$ e $r > 0$ e ainda, pelo Teorema 29 obtemos

$$\mathrm{Deg}(\widetilde{A}_\lambda, B_r(0), 0) = 1, \quad \forall r > 0, \quad \lambda \in (0, \lambda_1).$$

Conseqüentemente,

$$\mathrm{Ind}(\widetilde{A}_\lambda, 0) = 1, \quad \lambda \in (0, \lambda_1). \tag{4.29}$$

Desde que λ_1 é um autovalor isolado, existe $\delta > 0$ tal que o intervalo $(\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ não contém nenhum autovalor do problema (4.2). Então

$$(\widetilde{A}_\lambda(u), u) \neq 0, \quad \forall u \in W \backslash \{0\}, \qquad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta), \tag{4.30}$$

e o grau (4.28) está bem definido também para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$. Afirmamos que

$$\mathrm{Ind}(\widetilde{A}_\lambda, 0) = -1 \qquad \text{para} \quad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta).$$

De fato, fixemos $R > 0$ e consideremos uma função de classe C^1, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{para } t \leq R, \\ \frac{2\delta}{\lambda_1}(t - 2R), & \text{para } t \geq 3R, \end{cases}$$

ψ positiva e estritamente convexa em $(R, 3R)$. Definamos o funcional $\Psi_\lambda : W \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi_\lambda(u) = \frac{1}{p}(J(u), u) - \frac{\lambda}{p}(G(u), u) + \psi(\frac{1}{p}(J(u), u)),$$

ou seja,

$$\Psi_\lambda(u) = \frac{1}{p}A(u) - \frac{\lambda}{p}B(u) + \psi(\frac{1}{p}A(u)).$$

Observe que Ψ_λ é continuamente Fréchet diferenciável, já que A, B e ψ o são. Além disso,

$$(\Psi_\lambda'(u), \varphi) = \frac{1}{p}(A'(u), \varphi) - \frac{\lambda}{p}(B'(u), \varphi) + \frac{1}{p}\psi'(\frac{1}{p}A(u))(A'(u), \varphi).$$

Assim, $u_0 \in W$ é um ponto crítico de Ψ_λ se, e somente se,

$$(A'(u_0), \varphi) = \frac{\lambda}{1 + \psi'\left((1/p)A(u_0)\right)}(B'(u_0), \varphi), \qquad \forall \varphi \in W.$$

Neste caso, $u_0 = 0$ ou u_0 é uma autofunção do problema (4.2) associada ao autovalor $\lambda/(1 + \psi'\left((1/p)A(u_0)\right))$. Sendo ψ uma função não decrescente, temos $\psi'(t) \geq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo,

$$0 < \frac{\lambda}{1 + \psi'\left((1/p)A(u_0)\right)} \leq \lambda < \lambda_1 + \delta.$$

Como λ_1 é o único autovalor de (4.2) neste intervalo, se $u_0 \neq 0$ devemos ter

$$\frac{\lambda}{(1 + \psi'\left((1/p)A(u_0)\right))} = \lambda_1.$$

Pela simplicidade de λ_1, temos $u_0 = tu_1$ para algun $t \in \mathbb{R}$, onde $u_1 > 0$ é a autofunção principal. Como $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, temos $\lambda/\lambda_1 - 1 \neq 0$ e também $\lambda/\lambda_1 - 1 \neq 2\delta/\lambda_1$. Assim, desde que

$$\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1 = \psi'(\frac{1}{p}A(u_0)), \tag{4.31}$$

obtemos $(1/p)A(u_0) \in (R, 3R)$. Concluímos daí que u_0 é um ponto crítico de Ψ_λ se, e somente se, é um múltiplo de u_1, $(1/p)A(u_0) \in (R, 3R)$ e (4.31) é válido.

Sendo ψ estritamente convexa em $(R, 3R)$, temos ψ' injetiva neste intervalo. Então existe um único $t \in (R, 3R)$ tal que $\psi'(t) = \lambda/\lambda_1 - 1$. Assim, tomando t_0 tal que $t = (1/p)|t_0|^p A(u_1)$, temos que $u_0 = \pm t_0 u_1$ é um ponto crítico de Ψ_λ. Portanto, para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, Ψ_λ possui exatamente três pontos críticos , $-t_0u_1, 0$ e t_0u_1, os quais são isolados.

Afirmamos que o funcional Ψ_λ é fracamente semicontínuo inferiormente. De fato, assuma que $u_n \rightharpoonup u_0$ em W. Pela Proposição 4.4, o funcional A é fracamente semicontínuo inferiormente e pelo Lema 3.2, $B(u_n) \to B(u_0)$. Desde que ψ é não decrescente, temos $\psi(\liminf t_n) \leq \liminf \psi(t_n)$, (t_n) em $\mathbb{R}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\liminf_{n\to\infty}(\Psi_\lambda(u_n)) &= \liminf_{n\to\infty}\left(\frac{1}{p}A(u_n) - \frac{\lambda}{p}B(u_n) + \psi(\frac{1}{p}A(u_n))\right) \\
&\geq \frac{1}{p}A(u_0) - \frac{\lambda}{p}B(u_0) + \psi(\frac{1}{p}A(u_0)) \\
&= \Psi_\lambda(u_0).
\end{aligned}$$

Agora observe que Ψ_λ é coercivo, isto é,

$$\lim_{\|u\|_W\to\infty} \Psi_\lambda(u) = \infty.$$

Com efeito, já vimos que as normas em $\|\cdot\|_W$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{D}^{1,p}}$ são equivalentes. Assim, se $\|u\|_W \to \infty$ então $A(u) = \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}} \to \infty$. Pela caracterização variacional de λ_1, obtemos

$$A(u) - \lambda_1 B(u) \geq 0, \qquad \forall u \in W,$$

ou seja,

$$B(u) \leq \frac{A(u)}{\lambda_1}, \quad \forall u \in W.$$

Então podemos estimar Ψ_λ. Lembrando que $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$, temos

$$\begin{aligned} \Psi_\lambda(u) &= \frac{1}{p}A(u) - \frac{\lambda_1}{p}B(u) + \frac{\lambda_1 - \lambda}{p}B(u) + \psi(\frac{1}{p}A(u)) \\ &\geq \frac{\lambda_1 - \lambda}{p}B(u) + \psi(\frac{1}{p}A(u)) \\ &\geq \frac{\lambda_1 - \lambda}{p\lambda_1}A(u) + \psi(\frac{1}{p}A(u)) \\ &\geq -\frac{\delta}{p\lambda_1}A(u) + \psi(\frac{1}{p}A(u)). \end{aligned}$$

Se $(1/p)A(u) > 3R$, então pela definição de ψ obtemos

$$\Psi_\lambda(u) \geq -\frac{\delta}{p\lambda_1}A(u) + \frac{2\delta}{\lambda_1}\left(\frac{1}{p}A(u) - 2R\right) = \frac{\delta}{\lambda_1}A(u) - \frac{4\delta R}{\lambda_1} .$$

Portanto, $\lim_{\|u\|_W \to \infty} \Psi_\lambda(u) = \infty$ e Ψ_λ é coercivo. Pelo Teorema 5, Ψ_λ atinge o ínfimo em W. Pela definição de ψ, escolhendo $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno tal que

$$\big((|t|^{p-1}/p)A(u_1)\big) \leq R,$$

obtemos

$$\Psi_\lambda(tu_1) = \frac{|t|^{p-1}}{p}\left(A(u_1) - \lambda B(u_1)\right) < \frac{|t|^{p-1}}{p}\left(A(u_1) - \lambda_1 B(u_1)\right) = 0.$$

Sendo $\Psi_\lambda(0) = 0$, o mínimo não é atingido no ponto zero. Já que Ψ_λ é par, o mínimo é atingido exatamente em $-t_0u_1$ e t_0u_1. Pelo Teorema 31, obtemos

$$\mathrm{Ind}(\Psi'_\lambda, -t_0u_1) = \mathrm{Ind}(\Psi'_\lambda, t_0u_1) = 1, \qquad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta). \tag{4.32}$$

Usando ainda a caracterização variacional de λ_1 e as definições de ψ, A' e B', para $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta)$ obtemos

$$\begin{aligned} (\Psi'_\lambda(u), u) &= A(u) - \lambda B(u) + \psi'(\frac{1}{p}A(u))A(u) \\ &= A(u) - \lambda_1 B(u) + (\lambda_1 - \lambda)B(u) + \psi'(\frac{1}{p}A(u))A(u) \\ &\geq (\lambda_1 - \lambda)B(u) + \psi'(\frac{1}{p}A(u))A(u) \\ &\geq \frac{(\lambda_1 - \lambda)}{\lambda_1}A(u) + \psi'(\frac{1}{p}A(u))A(u) \\ &\geq -\frac{\delta}{\lambda_1}A(u) + \psi'(\frac{1}{p}A(u))A(u). \end{aligned}$$

Se $(1/p)A(u) > 3R$, então

$$(\Psi'_\lambda(u), u) \geq -\frac{\delta}{\lambda_1}A(u) + \frac{2\delta}{\lambda_1}A(u) = \frac{\delta}{\lambda_1}A(u) \quad \to \infty \quad \text{quando} \quad \|u\|_W \to \infty.$$

Portanto, $(\Psi'_\lambda(u), u) > 0$ para $u \in W$ com $\|u\|_W = k$, $k > 0$ suficientemente grande. Assim, o Teorema 29 implica que

$$\mathrm{Deg}(\Psi'_\lambda, B_k(0), 0) = 1. \tag{4.33}$$

Escolhendo k suficientemente grande, de forma que $\pm t_0 u_1 \in B_k$, temos, pelo Teorema 30

$$\mathrm{Deg}(\Psi'_\lambda, B_k, 0) = \mathrm{Ind}(\Psi'_\lambda, -t_0 u_1) + \mathrm{Ind}(\Psi'_\lambda, 0) + \mathrm{Ind}(\Psi'_\lambda, t_0 u_1).$$

Assim, por (4.32) e (4.33) obtemos

$$\mathrm{Ind}(\Psi'_\lambda, 0) = -1, \qquad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta). \tag{4.34}$$

Além disso, pela definição de ψ, para $u \in B_r \subset W$ com $r > 0$ suficientemente pequeno, temos $\psi((1/p)A(u)) = 0$. Daí $\psi'((1/p)A(u)) = 0$ para todo $u \in B_r$. conseqüentemente,

$$(\Psi'_\lambda(u), \varphi) = \frac{1}{p}(A'(u), \varphi) - \frac{\lambda}{p}(B'(u), \varphi) = (\widetilde{A}_\lambda(u), \varphi)\ , \quad \forall \varphi \in W, \ \ u \in B_r.$$

Logo,

$$\mathrm{Ind}(\Psi'_\lambda, 0) = \mathrm{Ind}(\widetilde{A}_\lambda, 0). \tag{4.35}$$

Então, de (4.34) e (4.35) obtemos

$$\mathrm{Ind}(\widetilde{A}_\lambda, 0) = -1, \qquad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta), \tag{4.36}$$

como afirmamos. Assim, (4.29) e (4.36) concluem o passo 1.

Passo 2. Mostraremos que as aplicações $\widetilde{A}_\lambda$ e A_λ são homotópicas sobre $B_r(0)$ (veja Definição 15), para r pequeno e $\lambda \in (0, \lambda_1 + \delta)\backslash\{\lambda_1\}$. Observe que os operadores $\widetilde{A}_\lambda$ e A_λ são de classe $A_0(B_r, \partial B_r)$, já que são contínuos, limitados e satisfazem a condição $\alpha(W)$. Afirmamos que, $A_\lambda u \neq 0$ e $\widetilde{A}_\lambda u \neq 0$ para todo $u \in \partial B_r(0)$ e r suficientemente pequeno. Por (4.27) e (4.30) temos

$$(\widetilde{A}_\lambda u, u) \neq 0 \quad \forall u \in W\backslash\{0\} \ \text{ e } \ \lambda \in (0, \lambda_1 + \delta)\backslash\{\lambda_1\}.$$

Agora suponha que existe uma seqüência (u_n) em W tal que $\|u_n\|_W \to 0$ e $A_\lambda(u_n) = 0$. Fazendo $v_n = u_n/\|u_n\|_w$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v_n|^{p-2}\nabla v_n \nabla\varphi - \lambda\int_{\mathbb{R}^N} g|v_n|^{p-2}v_n\varphi - \int_{\mathbb{R}^N}\frac{f(\lambda, x, u_n)\varphi}{\|u_n\|_W^{p-1}} = 0, \quad \forall \varphi \in W. \tag{4.37}$$

Seguindo o mesmo argumento usado na prova do Lema 4.6, obtemos facilmente uma contradição. Portanto, existe $r(\lambda) > 0$ tal que $A_\lambda(u) \neq 0$ para todo $u \in \partial B_r$, $r \leq r(\lambda)$.

Agora defina $H_\lambda : [0,1] \times B_r(0) \to W^*$ por

$$H(t, u) = tA_\lambda(u) + (1-t)\widetilde{A}_\lambda(u) = J(u) - \lambda G(u) - tF(\lambda, u), \tag{4.38}$$

onde $r \leq r(\lambda)$. A família $H(t,\cdot)$ satisfaz a condição $\alpha_0^{(t)}(\partial B_r)$. De fato, sejam (t_n) em $[0,1]$ e (u_n) em (∂B_r) seqüências tais que

$$u_n \rightharpoonup u_0 \ \text{ e } \ \lim_{n\to\infty}(H_\lambda(t_n, u_n), u_n - u_0) = 0.$$

Desde que $G(u_n) \to G(u_0)$, $F(\lambda, u_n) \to F(\lambda, u_0)$ e (t_n) é limitada, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty} (H_\lambda(t_n, u_n), u_n - u_0) \\ &= \lim_{n\to\infty} [(J(u_n), u_n - u_0) - (G(u_n), u_n - u_0) - t_n(F(\lambda, u_n), u_n - u_0)] \\ &= \lim_{n\to\infty} (J(u_n), u_n - u_0). \end{aligned}$$

Pelo Lema 4.4, concluímos que $u_n \to u_0$ em W.

Afirmamos agora que $H_\lambda(t, \cdot)$ satisfaz as condições (a'), (b') da Definição 15. Com efeito, $H_\lambda(t, u) \neq 0$ para todo $u \in \partial B_r(0)$ com $r \leq r(\lambda)$ e $t \in [0, 1]$, $H_\lambda(0, \cdot) = \widetilde{A}_\lambda$ e $H_\lambda(1, \cdot) = A_\lambda$, de modo que (a') é satisfeito. Para mostrarmos que (b') também é satisfeito, é suficiente observar que para quaisquer seqüências (t_n) em $[0, 1]$, (u_n) em ∂B_r, tal que $t_n \to t_0$ e $u_n \to u_0$ em W, a seqüência $H_\lambda(t_n, u_n)$ converge para $H_\lambda(t_0, u_0)$, graças à continuidade dos operadores J, G e F.

Assim, as aplicações $\widetilde{A}_\lambda$ e A_λ são homotópicas e pelo Teorema 27, obtemos

$$\mathrm{Deg}(A_\lambda, \overline{B}_r, 0) = \mathrm{Deg}(\widetilde{A}_\lambda, \overline{B}_r, 0), \quad \forall r \leq r(\lambda). \tag{4.39}$$

Portanto, por (4.29), (4.36) e (4.39) obtemos

$$\begin{aligned} \mathrm{Ind}(A_\lambda, 0) = 1, &\qquad \lambda \in (0, \lambda_1) \\ \mathrm{Ind}(A_\lambda, 0) = -1, &\qquad \lambda \in (\lambda_1, \lambda_1 + \delta). \end{aligned} \tag{4.40}$$

Passo 3. Afirmamos que λ_1 é um ponto de bifurcação. De fato, suponha por absurdo que esta afirmação seja falsa. Neste caso, tomemos $\mathcal{O}$ e γ dados pelo Lema 4.6. Defina o conjunto

$$\mathcal{O}_\lambda := \{u \in W \ : \ (\lambda, u) \in \mathcal{O}\}.$$

Para $0 < |\lambda - \lambda_1| \leq \gamma$, $(\lambda, 0)$ é uma solução isolada de (4.22) já que λ não é um autovalor de (4.2). Desta forma, existe um $\rho(\lambda) > 0$ tal que $(\lambda, 0)$ é a única solução de (4.22) em $\{\lambda\} \times \overline{B}_{\rho(\lambda)}(0)$, onde $B_{\rho(\lambda)}(0) \subset W$. Assim, temos $A_\lambda(u) \neq 0$ para todo $u \in \partial(B_{\rho(\lambda)}(0))$. Além disso, $A_\lambda(u) \neq 0$ para todo $u \in \partial\mathcal{O}_\lambda$, já que se $u \in \partial\mathcal{O}_\lambda$ então $(\lambda, u) \in \partial\mathcal{O}$ e pelo Lema 4.6 temos $\partial\mathcal{O} \cap \overline{\mathcal{C}} = \emptyset$. Logo, $A_\lambda(u) \neq 0$ para todo $u \in \partial(\mathcal{O}_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}(0))$. Seja $\rho(\lambda) = \rho(\lambda_1 + \gamma)$ para $\lambda > \lambda_1 + \gamma$ e $\rho(\lambda) = \rho(\lambda_1 - \gamma)$ para $\lambda < \lambda_1 - \gamma$. Escolhendo $\rho(\lambda_1 + \gamma)$ e $\rho(\lambda_1 - \gamma)$ suficientemente pequenos, podemos assumir que $\overline{B}_{\rho(\lambda)}(0) \cap \overline{\mathcal{O}}_\lambda = \emptyset$ se $|\lambda - \lambda_1| > \gamma$. Neste caso temos $\mathcal{O}_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}(0) = \mathcal{O}_\lambda$. Sendo $\partial\mathcal{O} \cap \overline{\mathcal{C}} = \emptyset$, temos $A_\lambda(u) \neq 0$ para todo $u \in \partial(\mathcal{O}_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}(0)) = \partial\mathcal{O}_\lambda$. Assim, obtemos

$$A_\lambda(u) \neq 0 \ \text{ para todo } \ u \in \partial(\mathcal{O}_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}(0)), \quad \lambda \neq \lambda_1,$$

conseqüentemente, o grau $\mathrm{Deg}(A_\lambda, \mathcal{O}_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}(0)), 0)$ está bem definido. Afirmamos que

$$\mathrm{Deg}(A_\lambda, \mathcal{O}_\lambda - \overline{B}_{\rho(\lambda)}(0)), 0) = 0, \quad \lambda \neq \lambda_1. \tag{4.41}$$

Seja $\lambda > \lambda_1$. Desde que $\mathcal{O}$ é limitado, podemos escolher λ^* suficientemente grande tal que $(\mu, u) \in \mathcal{O}$ implica que $\mu < \lambda^*$. Seja

$$\rho = \inf\{\rho(\theta); \lambda \leq \theta \leq \lambda^*\}.$$

Claramente $\rho > 0$. Então $\mathcal{U} = \mathcal{O} - \big([\lambda, \lambda^*] \times \overline{B}_\rho(0)\big)$ é um conjunto aberto limitado em $[\lambda, \lambda^*] \times W$ e $A_\theta(u) \neq 0$ para todo $(\theta, u) \in \partial\mathcal{U}$ (em $[\lambda, \lambda^*] \times W$). Logo,

$$\mathrm{Deg}(A(\cdot,\cdot), \mathcal{U}, 0)$$

ou seja,

$$\mathrm{Deg}(A_\theta, \mathcal{O}_\theta - \overline{B}_\rho, 0)$$

está bem definido para $\lambda \leq \theta \leq \lambda^*$. Tomando $H(t,u) = A_{t\lambda+(1-t)\lambda^*}(u)$, vemos que H é uma homotopia admissível entre A_λ e A_{λ^*} logo,

$$\mathrm{Deg}(A_\theta, \mathcal{O}_\theta - \overline{B}_\rho, 0) = \mathit{constante}, \quad \lambda \leq \theta \leq \lambda^*. \tag{4.42}$$

Desde que, pela escolha de λ^*, $\mathcal{O}_{\lambda^*} - \overline{B}_\rho = \emptyset$, obtemos

$$\mathrm{Deg}(A^*_\lambda, \mathcal{O}^*_\lambda - \overline{B}_\rho, 0) = 0. \tag{4.43}$$

Assim, as equações (4.42) e (4.43) implicam

$$\mathrm{Deg}(A_\lambda, \mathcal{O}_\lambda - \overline{B}_\rho, 0) = 0. \tag{4.44}$$

Desde que A_λ não tem zeros em $\{\lambda\} \times (\overline{B}_{\rho(\lambda)} - B_\rho)$, a equação (4.44) e a aditividade do grau implicam em (4.41) para $\lambda > \lambda_1$. Para $\lambda < \lambda_1$, argumentos similares são usados e assim, (4.41) é válido.

Usando ainda a invariância homotópica do grau, obtemos

$$\mathrm{Deg}(A_\lambda, \mathcal{O}_\lambda, 0) = \mathit{constante}, \quad |\lambda - \lambda_1| < \varepsilon. \tag{4.45}$$

Considere $\lambda_1 - \varepsilon < \underline{\lambda} < \lambda_1 < \overline{\lambda} < \lambda_1 + \varepsilon$. Pela aditividade do grau e o fato de que $(\lambda, 0)$ é uma solução isolada de $A_\lambda(u) = 0$ se λ não é autovalor de (3.1), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Deg}(A_{\underline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\underline{\lambda}}, 0) &= \mathrm{Deg}(A_{\underline{\lambda}}, B_{\rho(\underline{\lambda})}, 0) + \mathrm{Deg}(A_{\underline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\underline{\lambda}} - \overline{B}_{\rho(\underline{\lambda})}, 0), \\
&= \mathrm{Ind}(A_{\underline{\lambda}}, 0) + \mathrm{Deg}(A_{\underline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\underline{\lambda}} - \overline{B}_{\rho(\underline{\lambda})}, 0) \\
\mathrm{Deg}(A_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}}, 0) &= \mathrm{Deg}(A_{\overline{\lambda}}, B_{\rho(\overline{\lambda})}, 0) + \mathrm{Deg}(A_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}} - \overline{B}_{\rho(\overline{\lambda})}, 0) \\
&= \mathrm{Ind}(A_{\overline{\lambda}}, 0) + \mathrm{Deg}(A_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}} - \overline{B}_{\rho(\overline{\lambda})}, 0).
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Combinando as equações (4.41) e (4.46) obtemos

$$\begin{aligned}
\mathrm{Deg}(A_{\underline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\underline{\lambda}}, 0) &= \mathrm{Ind}(A_{\underline{\lambda}}, 0), \\
\mathrm{Deg}(A_{\overline{\lambda}}, \mathcal{O}_{\overline{\lambda}}, 0) &= \mathrm{Ind}(A_{\overline{\lambda}}, 0).
\end{aligned}$$

Assim, por (4.45)

$$\mathrm{Ind}(A_{\underline{\lambda}}, 0) = \mathrm{Ind}(A_{\overline{\lambda}}, 0). \tag{4.47}$$

Entretanto, por (4.40) temos

$$\mathrm{Ind}(A_{\underline{\lambda}}, 0) = 1 = -\mathrm{Ind}(A_{\overline{\lambda}}, 0). \tag{4.48}$$

Assim, temos uma contradição e portanto $(\lambda_1, 0)$ é um ponto de bifurcação para a equação (4.22), ou seja, para o problema (4.1), como queríamos demonstrar. $\blacksquare$

Teorema 4.2 *Assuma f satisfazendo* $(\mathrm{f}_1)-(\mathrm{f}_3)$ *e g satisfazendo a condição* $(\mathcal{G}^-)$. *Então a conclusão do Teorema 4.1 permanece válida para o autovalor principal λ_1^+. Além disso, o autovalor principal $\lambda_1^- < 0$ do problema de autovalor* (3.1) *é um ponto de bifurcação de* (4.1).

Prova: A demonstração segue os mesmos passos do Teorema 4.1. ■

Apêndice: resultados complementares

Neste apêndice demonstraremos alguns resultados usados no decorrer deste trabalho. Para provarmos o primeiro resultado precisaremos de alguns lemas.

Lema 4.7 *Sejam $p \in [1, +\infty)$ e $a, b \in [0, +\infty)$. Então,*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p). \tag{4.49}$$

Prova: Se $a = 0$, (4.49) é óbvio. Caso contrário, (4.49) pode ser escrito na forma $(1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p)$ onde $0 \leq x = b/a$. Agora, considerando a função $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $f(x) = (1+x)^p/(1+x^p)$, temos que

$$f(0) = 1 = \lim_{x \to +\infty} f(x), \quad \text{e} \ \ f(x) > 1, \ \text{se} \ 0 < x < \infty.$$

Portanto, f atinge um máximo em seu único ponto crítico, $x = 1$. Como $f(1) = 2^{p-1}$, obtemos $(1+x)^p \leq 2^{p-1}(1+x^p)$, o que prova o lema. ∎

Lema 4.8 **i)** *Se $p \in [2, +\infty)$, existe $\beta > 0$ tal que*

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2}, \quad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^N.$$

ii) *Se $p \in (1, 2]$, existe $\bar{\beta} > 0$ tal que*

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| \leq \bar{\beta}|z-y|^{p-1}, \quad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^N.$$

Prova: **i)** Consideremos $f : [0,1] \to \mathbb{R}^N$ definida por

$$f(t) = |y + t(z-y)|^{p-2}(y + t(z-y)).$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$||z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y| = |f(1) - f(0)| = \left| \int_0^1 f'(t)dt \right| \leq \int_0^1 |f'(t)|dt.$$

Agora, observe que,

$$|f'(t)| \leq (p-2)|y + t(z-y)|^{p-2}|z-y| + |y + t(z-y)|^{p-2}|z-y|.$$

Para todo $t \in [0,1]$ temos

$$|y + t(z-y)| \leq |y| + t|z-y| \leq |y| + |z-y| \leq |y| + |z| + |y| \leq 2(|z|+|y|).$$

Conseqüentemente,

$$\begin{aligned}
||z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y| &\le (p-1)|z-y|\int_0^1 |y+t(z-y)|^{p-2}\,dt\\
&\le (p-1)|z-y|\int_0^1 [2(|z|+|y|)]^{p-2}\,dt\\
&= 2^{p-2}(p-1)|z-y|(|z|+|y|)^{p-2},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$||z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y|\le \beta|z-y|(|z|+|y|)^{p-2},$$

com $\beta=2^{p-2}(p-1)$.

ii) O caso $p=2$ é imediato. Para $p\in(1,2)$ notemos inicialmente, que

$$\begin{aligned}
\big||z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y\big|^2 &= \left(|z|^{p-1}\right)+\left(|y|^{p-1}\right)-2|z|^{p-2}|y|^{p-2}\langle z,y\rangle\\
&= ||z|^{p-1}-|y|^{p-1}|^2+2|z|^{p-2}|y|^{p-2}|z||y|-2|z|^{p-2}|y|^{p-2}\langle z,y\rangle\\
&= ||z|^{p-1}-|y|^{p-1}|^2+2|z|^{p-2}|y|^{p-2}(|z||y|-\langle z,y\rangle),
\end{aligned}$$

para todo $z,y\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$. Seja $r\in(0,\infty)$. Tomemos $C_r=1$ se $r\in(0,1]$ e $C_r=2^{1-r}$ se $r>1$. Afirmamos que

$$a^r+b^r\ge C_r(a+b)^r,\quad \forall\, a,b\in[0,\infty). \tag{4.50}$$

Com efeito, para $r>1$, pelo Lema 4.7 temos $(a+b)^r\le 2^{r-1}(a^r+b^r)=C_r(a^r+b^r)$. Para $r\in(0,1]$, a função $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=(x+b)^t-x^t-b^t$ com $t\in(0,1)$ e $b\in[0,\infty)$ satisfaz $f(0)=0$ e $f'(x)\le 0\ \forall\, x\in[0,\infty)$, pois, supondo $f'(x)>0$ obtemos a contradição $b<0$. Logo, $a^r+b^r\ge(a+b)^r$, o que prova a afirmação. Com esta afirmação provaremos que para $r<1$ vale a seguinte desigualdade

$$\big||\bar a|^r-|\bar b|^r\big|\le|\bar a-\bar b|^r\quad \forall\,\bar a,\bar b\in\mathbb{R}^N. \tag{4.51}$$

De fato, por (4.50) temos $|\bar a-\bar b|^r+|\bar b|^r\ge\left(|\bar a-\bar b|+|\bar b|\right)^r\ge|\bar a|^r$ o que implica que $|\bar a-\bar b|^r\ge|\bar a|^r-|\bar b|^r$. Analogamente, $|\bar a-\bar b|^r+|\bar a|^r\ge\left(|\bar a-\bar b|+|\bar a|\right)^r\ge|\bar b|^r$ implica $|\bar a-\bar b|^r\ge|\bar b|^r-|\bar a|^r$. Assim, $\big||\bar a|^r-|\bar b|^r\big|\le|\bar a-\bar b|^r$ e (4.51) é válido. Agora vamos provar que **ii)** é válida. Se $y=0$ ou $z=0$, é trivial. Podemos, então, supor $y,z\ne0$. Utilizando (4.51) com $r=p-1$, $\bar a=z$, $\bar b=y$, obtemos

$$\begin{aligned}
\big||z|^{p-2}z-|y|^{p-2}y\big|^2 &= \big||z|^{p-1}-|y|^{p-1}\big|^2+2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1-\frac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\right)\\
&\le |z-y|^{2(p-1)}+2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1-\frac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\right)\\
&= |z-y|^{2(p-1)}+2|z|^{p-1}|y|^{p-1}\left(1-\frac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\right)^{p-1}\left(1-\frac{\langle z,y\rangle}{|z||y|}\right)^{2-p}\\
&\le |z-y|^{2(p-1)}+2\left(|z||y|-zy\right)^{p-1}2^{2-p}\\
&\le |z-y|^{2(p-1)}+2\frac{1}{2^{p-1}}|z-y|^{2(p-1)}2^{2-p}\\
&= \left(1+2^{2(2-p)}\right)\left(|z-y|^{p-1}\right)^2
\end{aligned}$$

que implica em **ii)** com $\bar{\beta} = \left(1 + 2^{2(2-p)}\right)^{1/2}$. Deve ser notado que na penúltima desigualdade utilizamos $-1 \leq \langle z, y\rangle/(|z||y|) \leq 1$, e na última, usamos o fato de que $(|z| - |y|)^2 \geq 0$, ou seja, $|z-y|^2/2 \geq |z||y| - \langle z, y\rangle$. ■

Proposição 4.3 **i)** *Se $p \in (1, 2]$, então vale:*

$$(|z| + |y|)^{2-p} \langle |z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y\rangle \geq |z-y|^2, \qquad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^N.$$

ii) *Se $p \in [2, +\infty)$ então vale:*

$$\langle |z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y\rangle \geq C_p|z-y|^p, \qquad \forall\, y, z \in \mathbb{R}^N,$$

onde $C_p = \min\{2^{-1-p}, 5^{2-p}\}$.

Prova: O caso $p = 2$ é imediato. Igualmente simples, quando $z = 0$ ou $y = 0$. Podemos então supor $p \neq 2$ e $z, y \neq 0$. Denotemos

$$r_p(y, z) = \langle |z|^{p-2}z - |y|^{p-2}y, z - y\rangle$$

e, por simetria, podemos tomar $|z| \geq |y| > 0$. Escrevamos $y = \beta z + \gamma w$, onde $w \neq 0$ é um vetor ortogonal a z e $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Daí,

$$\langle y, z\rangle = \beta\langle z, z\rangle + \gamma\langle w, z\rangle = \beta|z|^2,$$

donde

$$|\beta| \leq \frac{|y|}{|z|} \leq 1. \tag{4.52}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} r_p(y, z) &= |z|^p - |z|^{p-2}\langle y, z\rangle - |y|^{p-2}\langle y, z\rangle + |y|^p \\ &= |z|^p + |y|^p - \beta\left(|z|^{p-2} + |y|^{p-2}\right)|z|^2. \end{aligned} \tag{4.53}$$

i) Dessa última igualdade, temos

$$\begin{aligned} r_p(y, z) &= |z|^p - |y|^{p-2}|z|^2 - \beta|z|^p + \beta|y|^{p-2}|z|^2 + |y|^{p-2}|z|^2 - 2\beta|y|^{p-2}|z|^2 + |y|^p \\ &= |z|^p - |y|^{p-2}|z|^2 - \beta|z|^p + \beta|y|^{p-2}|z|^2 + |y|^{p-2}|z|^2 - 2|y|^{p-2}\langle y, z\rangle + |y|^p \\ &= |z|^p - |y|^{p-2}|z|^2 - \beta|z|^p + \beta|y|^{p-2}|z|^2 + |y|^{p-2}\langle z-y, z-y\rangle \\ &= (1-\beta)\left(|z|^{p-2} - |y|^{p-2}\right)|z|^2 + |y|^{p-2}|z-y|^2. \end{aligned} \tag{4.54}$$

Agora, usando (4.52), temos

$$r_p(y, z) \geq |y|^{p-2}|z-y|^2 \geq \frac{|z-y|^2}{(|z| + |y|)^{2-p}}.$$

Daí resulta a desigualdade desejada.

ii) Dado $\beta \leq 0$, a igualdade (4.53) e a desigualdade (4.50) implicam

$$r_p(y, z) \geq |z|^p + |y|^p \geq 2^{1-p}(|z| + |y|)^p \geq 2^{1-p}|z-y|^p \geq K(p)|z-y|^p.$$

Para $\beta \in (0, 1/4)$, usando (4.53) e $|y| \leq |z|$, temos

$$\begin{aligned} r_p(y,z) &\geq |z|^p + |y|^p - \beta\left(|z|^{p-2} + |z|^{p-2}\right)|z|^2 = |z|^p + |y|^p - 2\beta|z|^p \\ &\geq (1-2\beta)|z|^p \geq \frac{1}{2}|z|^p = \frac{1}{4}(|z|^p + |z|^p) \geq \frac{1}{4}(|z|^p + |y|^p) \\ &\geq \frac{1}{4}2^{1-p}(|z|^p + |y|^p) \geq 2^{-1-p}|z-y|^p \geq K(p)|z-y|^p. \end{aligned}$$

Finalmente, para $\beta \in [1/4, 1]$ em (4.54), temos evidentemente

$$r_p(y,z) \geq |y|^{p-2}|z-y|^2.$$

Desde que

$$\frac{|z-y|}{|y|} \leq \frac{|z|+|y|}{|y|} = \frac{|z|}{|y|} + 1 \overset{(4.52)}{\leq} \frac{1}{\beta} + 1 \leq 5,$$

concluímos que

$$\begin{aligned} r_p(y,z) &\geq |y|^{p-2}|z-y|^2 = |y|^{p-2}|z-y|^{2-p}|z-y|^p = \left(\frac{|z-y|}{|y|}\right)^{2-p}|z-y|^p \\ &\geq 5^{2-p}|z-y|^p \geq K(p)|z-y|^p, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. ■

Proposição 4.4 *Os funcionais $A, B : \mathcal{D}^{1,p} \longrightarrow \mathbb{R}$, definidos por*

$$A(u) = \|u\|^p_{\mathcal{D}^{1,p}}\ ,$$

$$B(u) = \int_{\mathbb{R}^N} g(x)|u|^p dx$$

são de classe C^1 e A é fracamente semicontínuo inferiormente.

Prova: Vejamos primeiramente que A é de classe C^1 .
i) *Existência da derivada de Gateaux de A.*
Sejam u e $\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Defina $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = |\nabla u + t\nabla\varphi|^p$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (0,t)$ tal que $f(t) - f(0) = f'(t_0)t$. Podemos escrever $t_0 = \varepsilon t$, onde $\varepsilon \in (0,1)$. Temos,

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^N (u_{x_i} + t\varphi_{x_i})^2\right)^{\frac{p}{2}} = p|\nabla u + t\nabla\varphi|^{p-2}(\nabla u + t\nabla\varphi, \nabla\varphi),$$

assim

$$\begin{aligned} \frac{||\nabla u + t\nabla\varphi|^p - |\nabla u|^p|}{|t|} &= p\ |\nabla u + \varepsilon t\nabla\varphi|^{p-2}|(\nabla u + \varepsilon t\nabla\varphi, \nabla\varphi)| \\ &\leq p\ (|\nabla u| + |\nabla\varphi|)^{p-2}(|\nabla u| + |\nabla\varphi|)|\nabla\varphi| \\ &= p\ (|\nabla u| + |\nabla\varphi|)^{p-1}|\nabla\varphi|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos, para $1/p + 1/p' = 1$, $p' = p/(p-1)$,

$$
\begin{aligned}
p\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u| + |\nabla\varphi|)^{p-1}|\nabla\varphi|dx \;&\leq\; p\left(\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u| + |\nabla\varphi|)^p dx\right)^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla\varphi|^p dx\right)^{1/p} \\
&< \;\infty.
\end{aligned}
$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$
\begin{aligned}
\lim_{t\to 0}\frac{A(u+t\varphi) - A(u)}{t} \;&=\; \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|\nabla u + t\nabla\varphi|^p - |\nabla u|^p}{t}dx \\
&=\; \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N} p|\nabla u + \varepsilon t\nabla\varphi|^{p-2}(\nabla u + \varepsilon t\nabla\varphi, \nabla\varphi)dx \\
&=\; p\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{p-2}(\nabla u, \nabla\varphi)dx.
\end{aligned}
$$

Escrevendo $A_u'(\varphi) = \lim_{t\to 0}\dfrac{A(u+t\varphi) - A(u)}{t}$, temos $A_u' : \mathcal{D}^{1,p} \longrightarrow \mathbb{R}$ linear e limitado já que

$$
|A_u'(\varphi)| \leq p\ \|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}}^{p/q}\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = C_u\|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \quad \forall\ \varphi \in \mathcal{D}^{1,p},
$$

onde C_u é uma constante que depende de u. Assim, A é Gateaux-Diferenciável.

Agora consideremos o espaço produto $\mathcal{X} = \prod_{i=1}^N L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ munido da norma

$$
[f]_{\mathcal{X}} = \left(\sum_{i=1}^N \|f_i\|_{L^{p'}}^{p'}\right)^{1/p'} \qquad \text{para} \quad f = (f_1, \dots, f_N) \in \mathcal{X}.
$$

Definamos $h = (h_1, \dots, h^N) : \mathcal{D}^{1,p} \to \mathcal{X}$ por $h(u) = |\nabla u|^{p-2}\nabla u$, para $u \in \mathcal{D}^{1,p}$. Esta função está bem definida e é limitada, isto é, aplica conjuntos limitados de $\mathcal{D}^{1,p}$ em conjuntos limitados de $\mathcal{X}$. De fato, para $i = 1, \dots, N$, temos

$$
\|h_i(u)\|_{L^{p'}}^{p'} = \int_{\mathbb{R}^N}\left||\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p'} \leq \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^{(p-1)p'} = \int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p = \|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}}^p.
$$

Provemos que h é contínua. Pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, podemos encontrar uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$
[h]_{0,p'}^{p'} \leq C_1\int_{\mathbb{R}}|h|^{p'}, \qquad \forall\, h \in \mathcal{X}.
$$

Seja $p \in (2, \infty)$ e $u, v \in \mathcal{D}^{1,p}$. Pelo Lema 4.8(i), temos

$$
\begin{aligned}
[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}}^{p'} \;&\leq\; C_1\int_{\mathbb{R}^N}|h(u) - h(v)|^{p'} = C_1\int_{\mathbb{R}^N}\left||\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right|^{p'} \\
&\leq\; C_1\beta^{p'}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u - \nabla v|^{p'}\left(|\nabla u| + |\nabla v|\right)^{p'(p-2)}.
\end{aligned}
$$

Como $|\nabla u - \nabla v|^{p'} \in L^{p/p'}(\mathbb{R}^N)$ e $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p'(p-2)} \in L^{p/p'(p-2)}(\mathbb{R}^N)$, pela desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned}
[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}}^{p'} &\leq C_2 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^p \right)^{\frac{p'}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u| + |\nabla v|)^p \right)^{\frac{p'(p-2)}{p}} \\
&\leq C_2 \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p}^{p'} \left(\|\nabla u\|_{L^p} + \|\nabla v\|_{L^p} \right)^{p'(p-2)} \\
&= C_2 \|u - v\|_{\mathcal{D}^{1,p}}^{p'} \left(\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} + \|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \right)^{p'(p-2)},
\end{aligned}$$

implicando

$$[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}} \leq C \|u - v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \left(\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} + \|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \right)^{(p-2)}, \tag{4.55}$$

com $C > 0$ constante independente de u e v.

Se $p \in (1, 2]$ e $u, v \in \mathcal{D}^{1,p}$, então pelo Lema 4.8(ii) segue-se

$$\begin{aligned}
[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}}^{p'} &\leq C_1 \int_{\mathbb{R}^N} |h(u) - h(v)|^{p'} = C_1 \int_{\mathbb{R}^N} \left| |\nabla u|^{p-2} \nabla u - |\nabla v|^{p-2} \nabla v \right|^{p'} \\
&\leq C_1 \bar{\beta}^{p'} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^{p'(p-1)} = C_2' \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u - \nabla v|^p \\
&= C_2' \|u - v\|_{\mathcal{D}^{1,p}}^p.
\end{aligned}$$

Donde

$$[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}} \leq C' \|u - v\|_{1,p}^{p-1}, \tag{4.56}$$

com $C' > 0$ constante independente de u e v. De (4.55) e (4.56) segue a continuidade de h.

ii) *Provemos agora que A é Fréchet diferenciável em $u \in \mathcal{D}^{1,p}$, com*

$$(A'(u), v) = p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dx. \tag{4.57}$$

Utilizando o Teorema de Fubini, obtemos

$$\begin{aligned}
&A(u + v) - A(u) - p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v = \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u + \nabla v|^p - |\nabla u|^p - p |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} |\nabla u + t \nabla v|^p dt - \int_0^1 p |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v dt \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 \left(\frac{d}{dt} |\nabla u + t \nabla v|^p dt - p |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \right) dt\ dx \\
&= \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} \left(p |\nabla u + t \nabla v|^{p-2} (\nabla u + t \nabla v) \nabla v - p |\nabla u|^{p-2} \nabla u \nabla v \right) dx\ dt \\
&= p \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} (h(u + tv) - h(u)) \nabla v\ dx\ dt.
\end{aligned}$$

Agora, pela desigualdade de Hölder e pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned}
\left|A(u+v) - A(u) - p\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla v\right| &\leq p\int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |h(u+tv) - h(u)|\,|\nabla v| dxdt \\
&\leq p\int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(u+tv) - h(u)|^{p'} dx\right)^{\frac{1}{p'}} \|\nabla v\|_{L^p} dt \\
&= p\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \left(\int_0^1 \|h(u+tv) - h(u)\|_{L^{p'}} dt\right) \\
&\leq cp\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \left(\int_0^1 [h(u+tv) - h(u)]_{\mathcal{X}} dt\right),
\end{aligned}$$

com $c > 0$ constante independente de u e v. Logo,

$$\frac{\left|A(u+v) - A(u) - p\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v\right|}{\|v\|_{\mathcal{D}^{1,p}}} \leq cp\int_0^1 [h(u+tv) - h(u)]_{\mathcal{X}} dt.$$

Agora, fazendo $v \to 0$ em $\mathcal{D}^{1,p}$ na última desigualdade, e aplicando o Teorema da Convergência de Lebesgue (pois h é contínua e limitada) concluímos que A e Fréchet diferenciável e que (4.57) é válido.

iii) *Afirmamos agora que* $A' : \mathcal{D}^{1,p} \to \mathcal{D}^{-1,p^*}$ *é contínuo.* De fato, pela continuidade de h, é suficiente mostrarmos que

$$\|A'(u) - A'(v)\|_{\mathcal{D}^{-1,p^*}} \leq C[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}}, \quad \forall u, v \in \mathcal{D}^{1,p} \tag{4.58}$$

com $C > 0$ é uma constante independente de $u, v \in \mathcal{D}^{1,p}$.

Pela desigualdade de Hölder e pela equivalência das normas em $\mathbb{R}^N$, temos

$$\begin{aligned}
|(A'(u) - A'(v), w)| &= p\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla w - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^{p-2}\nabla v\nabla w\right| \\
&\leq p\int_{\mathbb{R}^N} \left|\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right)\right| |\nabla w| \\
&= p\int_{\mathbb{R}^N} |h(u) - h(v)|\,|\nabla w| \\
&\leq p\left(\int_{\mathbb{R}^N} |h(u) - h(v)|^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla w|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq pC\left(\sum_{i=1}^N \|h_i(u) - h_i(v)\|_{L^{p'}}^{p'}\right)^{\frac{1}{p'}} \|\nabla w\|_{L^p} \\
&= pC\,[h(u) - h(v)]_{\mathcal{X}}\,\|w\|_{\mathcal{D}^{1,p}}, \qquad \forall u, v, w \in \mathcal{D}^{1,p},
\end{aligned}$$

provando assim (4.58), ou seja, A é contínuo. Portanto A é de classe C^1.

iv) *O funcional A é fracamente semicontínuo inferiormente.*
Sendo A contínuo, pelo Teorema 6, é suficiente provar que A é um funcional convexo. Para isto, definamos $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = pt^{p-1}$ e $F : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ por

$$F(t) = \int_0^t \varphi(\tau)d\tau.$$

É claro que $A(u) = F(\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}})$ para todo $u \in \mathcal{D}^{1,p}$. Logo, para provar a convexidade de A é suficiente mostrar que F é uma função convexa. Para isto, seja $z = \alpha s + (1-\alpha)t$, onde $0 \leq s < t$ e $\alpha \in [0,1]$. Como φ é monótona, temos, pelo teorema da média para integrais, que

$$F(t) - F(z) \geq (t-z)\varphi(z),$$
$$F(z) - F(s) \leq (z-s)\varphi(z).$$

Multiplicando a primeira desigualdade por $(1-\alpha)$, a segunda por $(-\alpha)$ e somando, obtemos

$$\alpha F(s) + (1-\alpha)F(t) - F(z) \geq 0.$$

Ou seja,

$$F(z) \leq \alpha F(s) + (1-\alpha)F(t).$$

Assim, F é convexa e conseqüentemente, A também o é, como queríamos demonstrar.

Agora provaremos que B é um funcional de classe C^1. Para isto é suficiente mostrarmos a existência e a continuidade da derivada de Gateaux de B (veja [32]).

i)*Existência da derivada de Gateaux do funcional B.*
Sejam u e $\varphi \in \mathcal{D}^{1,p}$. Defina $f : (0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = g|u + t\varphi|^p$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $t_0 \in (0,t)$ tal que $f(t) - f(0) = f'(t_0)t$. Podemos escrever $t_0 = \varepsilon t$ para algum $\varepsilon \in (0,1)$. Temos $f'(t) = p\ g|u + t\varphi|^{p-2}(u + t\varphi)\varphi$. Daí

$$\begin{aligned} \frac{|g(|u+t\varphi|^p - |u|^p)|}{|t|} &= \left|p\ g|u + \varepsilon t\varphi|^{p-2}(u + t\varepsilon\varphi)\varphi\right| \\ &\leq p\ |g|(|u| + |\varphi|)^{p-1}|\varphi|. \end{aligned}$$

Como $(p-1)\alpha = p^*$, onde $\alpha = Np/(N-p)(p-1)$, e $(|u| + |\varphi|) \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ temos que $(|u| + |\varphi|)^{p-1} \in L^{\alpha}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, $g \in L^{N/p}(\mathbb{R}^N), \varphi \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e

$$\frac{(N-p)(p-1)}{Np} + \frac{N-p}{Np} + \frac{p}{N} = \frac{Np - N - p^2 + p + N - p + p^2}{Np} = \frac{Np}{Np} = 1.$$

Assim, obtemos pela desigualdade de Hölder generalizada,

$$p\int_{\mathbb{R}^N} |g|(|u| + |\varphi|)^{p-1}|\varphi|dx \leq p\ \|g\|_{L^{N/p}}\|(|u| + |\varphi|)^{p-1}\|_{L^\alpha}\|\varphi\|_{L^{p^*}}.$$

Então usando o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0}\frac{B(u+t\varphi) - B(u)}{t} &= \lim_{t\to 0}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{g(|u+t\varphi|^p - |u|^p)}{t}dx \\ &= \lim_{t\to 0}\ p\int_{\mathbb{R}^N} g|u + \varepsilon t\varphi|^{p-2}(u + t\varepsilon\varphi)\varphi dx \\ &= p\int_{\mathbb{R}^N} g|u|^{p-2}u\varphi dx \end{aligned}$$

Escrevendo $B'_u(\varphi) = \lim_{t\to 0} \frac{B(u+t\varphi)-B(u)}{t}$, temos que $B'_u : \mathcal{D}^{1,p} \longrightarrow \mathbb{R}$ é linear e limitado, pois

$$|B'_u(\varphi)| \leq \|g\|_{L^{N/p}} \|u\|_{L^{p^*}}^{p-1} \|\varphi\|_{L^{p^*}} \leq KC_u \|\varphi\|_{\mathcal{D}^{1,p}} \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}^{1,p},$$

onde K é a constante de imersão e C_u é uma constante que depende de u. Logo B é Gateaux-Diferenciável.

ii) *Continuidade da derivada de Gateaux de B.*

Seja (u_n) uma seqüência em $\mathcal{D}^{1,p}$ tal que $u_n \to u$ em $\mathcal{D}^{1,p}$. Como $\mathcal{D}^{1,p}$ está imerso continuamente em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ temos que $u_n \to u$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Definindo $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $h(x,s) = p|s|^{p-2}s$, temos que h é uma função de Carathéodory e $|h(x,u)| = p\ |u|^{p-1}$. Então pelo Teorema 13, o operador de Nemytskii $N_h : L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^\alpha(\mathbb{R}^N)$ está bem definido e é contínuo. Assim, $h(\cdot, u_n) \to h(\cdot, u)$ em L^α. Daí, usando a desigualdade de Hölder generalizada, obtemos

$$\begin{aligned} |\left(B'_{u_n} - B'_u\right)\varphi| &= \left| p \int_{\mathbb{R}^N} g\left(|u_n|^{p-2}u_n - |u|^{p-2}u\right)\varphi dx \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |g||h(x,u_n) - h(x,u)||\varphi| dx \\ &\leq \|g\|_{L^{N/p}} \|\varphi\|_{L^{p^*}} \|h(\cdot,u_n) - h(\cdot,u)\|_{L^\alpha} \quad \to 0. \end{aligned}$$

Portanto $B' : \mathcal{D}^{1,p} \longrightarrow \mathcal{D}^{-1,p'}$ dado por $B'(u) = B'_u$ é contínuo. Conseqüentemente, B é de classe C^1. ■

Proposição 4.5 (Desigualdade de Hardy) *Para* $1 < p < N$ *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{(1+|x|)^p} dx \leq \left(\frac{p}{N-p}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx, \qquad \forall u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \tag{4.59}$$

Prova: Seja $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi(x) = |u(x)|^p/(1+|x|)^p$. Usando integração por partes obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} x\nabla\varphi(x)dx = \sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i\varphi_{x_i} dx = -\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx.$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi dx = \frac{-1}{N} \int_{\mathbb{R}^N} x\nabla\varphi(x)dx. \tag{4.60}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} -\int_{\mathbb{R}^N} x\nabla\varphi(x)dx &= -\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i\varphi_{x_i} dx \\ &= -p\sum_{i=1}^N \int_{\mathbb{R}^N} x_i \left(\frac{|u|}{1+|x|}\right)^{p-1} \left(\frac{\mathrm{sg}(u)u_{x_i}(1+|x|) - |u|x_i/|x|}{(1+|x|)^2}\right) dx \\ &= -p\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|u|}{1+|x|}\right)^{p-1} \frac{\mathrm{sg}(u)x\nabla u}{1+|x|} dx + p\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{|u|}{1+|x|}\right)^p \frac{|x|}{1+|x|} dx \end{aligned}$$

Conseqüentemente,

$$
\begin{aligned}
-\int_{\mathbb{R}^N} x\nabla\varphi dx &\leq p\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|u|}{1+|x|}\right)^{p-1}\frac{|\nabla u||x|}{1+|x|}dx + p\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|u|}{1+|x|}\right)^{p}\frac{|x|}{1+|x|}dx \\
&\leq p\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|u|}{1+|x|}\right)^{p-1}|\nabla u|dx + p\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|u|}{1+|x|}\right)^{p}dx.
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

De (4.60) e (4.61) obtemos

$$
\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|u|}{(1+|x|)}\right)^{p}dx \leq \frac{p}{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|u|}{(1+|x|)}\right)^{p-1}|\nabla u|dx + \frac{p}{N}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\frac{|u|}{1+|x|}\right)^{p}dx.
$$

Usando a desigualdade de Hölder obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{N-p}{N}\right)\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p}{(1+|x|)^p}dx &\leq \frac{p}{N}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^{p-1}}{(1+|x|)^{p-1}}|\nabla u|dx \\
&\leq \frac{p}{N}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p}{(1+|x|)^p}dx\right)^{1/p'}\left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\left(\frac{N-p}{N}\right)\frac{N}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p}{(1+|x|)^p}dx\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx\right)^{1/p},
$$

o que implica na desigualdade desejada. ∎

Para provarmos a próxima proposição precisaremos estabelecer alguns resultados auxiliares.

Lema 4.9 **i)** *Se $p \in [2,\infty)$, então para cada $z, w \in \mathbb{R}^N$, vale:*

$$
\left|\frac{z+w}{2}\right|^p + \left|\frac{z-w}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|z|^p + |w|^p\right). \tag{4.62}
$$

ii) *Se $p \in (1,2)$, então para cada $z, w \in \mathbb{R}^N$, vale:*

$$
\left|\frac{z+w}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{z-w}{2}\right|^{p'} \leq \left[\frac{1}{2}\left(|z|^p + |w|^p\right)\right]^{1/(p-1)}. \tag{4.63}
$$

Prova: **i)** Afirmamos que, para $1 \leq p < \infty$ e $a, b \geq 0$, vale $(a+b)^p \geq a^p + b^p$. De fato, se $p = 1$ é imediato. No caso $p > 1$, consideremos a função $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = (x+b)^t - x^t - b^t$ com $t \in (1,\infty)$ *e* $b \in [0,\infty)$. Ela satisfaz $f(0) = 0$ e $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in [0,\infty)$, pois, supondo $f'(x) < 0$ obtemos $b < 0$, que é uma a contradição. Logo, f é crescente, o que prova a afirmação.

Usando esta afirmação, a identidade do paralelogramo e o Lema 4.7, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{z+w}{2}\right|^p+\left|\frac{z-w}{2}\right|^p &= \left(\left|\frac{z+w}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}+\left(\left|\frac{z-w}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&\leq \left(\left|\frac{z+w}{2}\right|^2+\left|\frac{z-w}{2}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}} = \left(\frac{1}{2}|z|^2+\frac{1}{2}|w|^2\right)^{\frac{p}{2}} \\
&= \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}}\left(|z|^2+|w|^2\right)^{\frac{p}{2}} \leq \frac{2^{\frac{p}{2}-1}}{2^{\frac{p}{2}}}[(|z|^2)^{\frac{p}{2}}+(|w|^2)^{\frac{p}{2}}] \\
&= \frac{1}{2}(|z|^p+|w|^p),
\end{aligned}
$$

o que prova **i)**.

ii) Veja a prova em Adams [1]. ■

Definição 4.3 *Um espaço de Banach X é dito uniformemente convexo se para cada $\varepsilon \in (0,2]$, existe $\delta(\varepsilon)>0$ tal que se $\|x\|=\|y\|=1$ e $\|x-y\|\geq\varepsilon$ então $\|x+y\|\leq 2(1-\delta)$.*

Proposição 4.6 *W é um espaço de Banach uniformemente convexo.*

Prova: Por definição W é um espaço de Banach. Veremos que é uniformemente convexo. Dividiremos a demonstração em duas partes.

i) Seja $p\in[2,\infty)$ e sejam $u,v\in W$, com $\|u\|_W=\|v\|_W=1$ e $\|u-v\|_W\geq\varepsilon,\quad \varepsilon\in(0,2]$. Sabemos que

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p &= \int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^p+\left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^p\right)dx \\
&\quad +\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^p+\left|\frac{u-v}{2}\right|^p\right)dx.
\end{aligned}
$$

Logo, por (4.62) temos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p+\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p &\leq \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p\,dx+|\nabla v|^p)+\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}w(x)\,(|u|^p+|v|^p)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,(\|u\|_W^p+\|v\|_W^p) \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^p\leq 1-\left\|\frac{u-v}{2}\right\|^p\leq 1-\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p
$$

e W é uniformemente convexo.

ii) Seja $p \in (1,2)$. Notemos que se $u \in W$ então $|\nabla u|^{p'}$, $w^{1/(p-1)}|u|^{p'} \in L^{p-1}(\mathbb{R}^N)$. Sejam $u, v \in W$. Então, $(u+v)/2$, $(u-v)/2 \in W$ e

$$w^{1/(p-1)}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'},\ w^{1/(p-1)}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'},\ \left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^{p'},\ \left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^{p'} \in L^{p-1}(\mathbb{R}^N)$$

com $0 < p-1 < 1$, e pelo Teorema 11, temos

$$\begin{aligned} \left\| w^{\frac{1}{p-1}}\left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right)\right\|_{L^{p-1}} &\geq \left\| w^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} + \\ &+ \left\| w^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} \end{aligned} \tag{4.64}$$

e

$$\begin{aligned} \left\|\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} &\geq \left\|\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} + \\ &+ \left\|\left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} \end{aligned} \tag{4.65}$$

Por definição,

$$\begin{aligned} \left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p'} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} w(x)\left|\frac{u+v}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{p'}{p}} + \\ &+ \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} w(x)\left|\frac{u-v}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{p'}{p}}. \end{aligned}$$

Tomando $q = p'/p = 1/(p-1)$, $a, b \in \mathbb{R}^2$,

$$a = \left(\int_{\mathbb{R}^N} w\left|\frac{u+v}{2}\right|^p, \int_{\mathbb{R}^N} w\left|\frac{u-v}{2}\right|^p\right)$$

e

$$b = \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^p, \int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^p\right),$$

usando a desigualdade de Minkowski para $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_q)$, temos

$$\|a+b\|_q^q \leq (\|a\|_q + \|b\|_q)^q,$$

onde $\|a\|_q = (a_1^q + a_2^q)^{1/q}$. Assim,

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p'} &\leq \\
&\leq \left\{\left[\left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N}\left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\right. \\
&\quad \left. + \left[\left(\int_{\mathbb{R}^N} w\left|\frac{u+v}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p-1}} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} w\left|\frac{u-v}{2}\right|^p dx\right)^{\frac{1}{p-1}}\right]^{p-1}\right\}^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left[\left(\left\|\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} + \left\|\left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}}\right)^{p-1} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left\|w^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}} + \left\|w^{\frac{1}{p-1}}\left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}}
\end{aligned}
$$

Juntando essa última desigualdade a (4.64) e (4.65), obtemos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p'} &\leq \left[\left(\left\|\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}}\right)^{p-1} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\left\|\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^{p'}\right\|_{L^{p-1}}\right)^{p-1}\right]^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left[\int_{\mathbb{R}^N} w\left(\left|\frac{u+v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{u-v}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} dx + \right. \\
&\quad \left. + \int_{\mathbb{R}^N}\left(\left|\frac{\nabla(u+v)}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla(u-v)}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} dx\right]^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Logo, por (4.63) temos

$$
\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|^{p'} &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{w}{2}(|u|^p + |v|^p)dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N}(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p)dx\right)^{\frac{1}{p-1}} \\
&= \left(\frac{1}{2}\|u\|_W^p + \frac{1}{2}\|v\|_W^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.
\end{aligned}
$$

Então, para cada $u, v \in W$ com $\|u\|_W = \|v\|_W = 1$ e $\|u - v\|_W \geq \varepsilon,\ \varepsilon \in (0, 2]$ temos

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_W^{p'} \leq 1 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_W^{p'} \leq 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}$$

e portanto W é uniformemente convexo. ■

Observação 4.1 *Note que, modificando levemente esta última demonstração, mostra-se que o espaço $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, munido da norma*

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{1/p},$$

é também uniformemente convexo.

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] Allegretto, Walter; Huang, Yin Xi *Eigenvalues of the indefinite-weight p-Laplacian in weighted spaces.* Funkcial. Ekvac. 38 (1995), no. 2, 233–242.

[3] Allegretto, Walter; Huang, Yin Xi *A Picone's identity for the p-Laplacian and applications.* Nonlinear Anal. 32 (1998), no. 7, 819–830.

[4] Anane, A., *Etude des Valeurs Propres et la resonance pour l'operador p-Laplacien*, Thése de Doctorat, Universite Libre de Bruxelles, 1987-1988.

[5] Bartle, Robert G., *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, Wiley, New York, 1995.

[6] Ben-Naoum, A. K.; Troestler, C.; Willem, M. *Extrema problems with critical Sobolev exponents on unbounded domains.* Nonlinear Anal. **26** (1996), no. 4, 823–833.

[7] Berestycki, H., *Methodes topologiques et problemes aux limites non lineaires*, Thése de Doctorat, Universite de Paris VI, 1975.

[8] Brezis, H., *Analyse Fonctionelle, Théorie et Applications*, Masson, Paris, 1987.

[9] Brown, K. J., Cosner, C., and Fleckinger, J., *Principal eigenvalues for problems with indefinite-weight functions on* $\mathbb{R}^N$, Proc Amer.Math.Soc. **109** (1990), 147-155.

[10] Brown, K. J., and Stavrakakis, N., *Global Bifurcation Results for a Semilinear Elliptic Equation on all* $\mathbb{R}^N$, Duke Math. J, **85** (1996), 77-94.

[11] Costa, David G., *Tópicos em Análise Não Linear e Aplicações às Equações Diferenciais*, VIII Escola Latino-Americana de Matemática, IMPA, Rio de Janeiro, 1986.

[12] Crandall, Michael G.; Rabinowitz, Paul H. *Bifurcation from simple eigenvalues.* J. Functional Analysis **8** (1971) 321–340.

[13] Deimling, Klaus, *Nonlinear Funcional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[14] de Figueiredo, D. G., *Positive solutions of semilinear elliptic problems*, Escola Latino-Americana de Eq. Diferenciais, Universidade de São Paulo, 1981.

[15] de Figueiredo, D. G., *Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours*, Tata Institute of Fundamental Research Lectures on Mathematics and Physics, 81. Published for the Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[16] Drábek, Pavel; Huang, Yin Xi, *Bifurcation problems for the p-Laplacian in R^N.* Trans. Amer. Math. Soc. **349** (1997), no. 1, 171–188.

[17] Evans, Lawrence C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in mathematics, American Mathematical Society, Volume **19**, 1998.

[18] Fleckinger, J.; Manásevich, R. F.; Stavrakakis, N. M.; de Thélin, F. *Principal eigenvalues for some quasilinear elliptic equations on $\mathbf{R}^N$.* Adv. Differential Equations **2** (1997), no. 6, 981–1003.

[19] Fernandez, Pedro.J., *Medida e Integração*, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro, 2002.

[20] Gilbarg, David; Trudinger, Neil S., *Elliptic partial differential equations of second order.* Reprint of the 1998 edition. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[21] Hellwig, Günter, *Partial differential equations.* An introduction. Second edition. Mathematische Leitfäden. B. G. Teubner, Stuttgart, 1977.

[22] Huang, Yin Xi *On eigenvalue problems of p-Laplacian with Neumann boundary conditions.* Proc. Amer. Math. Soc. 109 (1990), no. 1, 177–184.

[23] Huang, Yin Xi *Eigenvalues of the p-Laplacian in $\mathbf{R}^N$ with indefinite weight.* Comment. Math. Univ. Carolin. 36 (1995), no. 3, 519–527.

[24] Kavian, Otared, *Introduction à la théorie des points critiques*, Springer-Verlag France, Paris, 1993.

[25] Rabinowitz, Paul H. *Some global results for nonlinear eigenvalue problems.* J. Functional Analysis **7** (1971), 487–513.

[26] Senn, Stefan; Hess, Peter *On positive solutions of a linear elliptic eigenvalue problem with Neumann boundary conditions.* Math. Ann. 258 (1981/82), no. 4, 459–470.

[27] Serrin, James *Local behavior of solutions of quasilinear equations.* Acta Math. 111 (1964) 247–302.

[28] Skrypnik, Igor Vladimirovič *Nonlinear elliptic boundary value problems.* With German, French and Russian summaries. Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics], 91. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1986.

[29] Struwe, Michael *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.* Second edition. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)], 34. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[30] Tolksdorf, Peter *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations.* J. Differential Equations 51 (1984), no. 1, 126–150.

[31] Whyburn, Gordon Thomas *Topological analysis.* Princeton Mathematical Series. No. 23 Princeton University Press, Princeton, N. J. (1958).

[32] Willem, M., *Minimax Theorems*, Birkhauser, Boston, Basel, Berlim, (1996).