Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Multiplicidade de Soluções Radiais Positivas para uma Classe de Equações Elípticas em Domínios Simétricos

por

Janete Soares de Carvalho

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Fevereiro/2006
João Pessoa - PB

Existência e Multiplicidade de Soluções Radiais Positivas para uma Classe de Equações Elípticas em Domínios Simétricos

por

Janete Soares de Carvalho

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)

Prof. Dra. Liliane de Almeida Maia - UnB

Prof. Dr. Everaldo Souto de Medeiros - UFPB

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Fevereiro/2006

Dedicatória

A minha família e aos professores Uberlandio Batista Severo e Francisco José de Andrade.

Agradecimentos

- A Deus Criador, essência de minha vida.

- A minha família, pela constante compreensão e carinho.

- Ao meu orientador Professor João Marcos Bezerra do Ó, pela exigência e dedicação.

- Aos professores de graduação e pós-graduação, que contribuíram em muito para minha formação acadêmica. Em especial aos professores Francisco José de Andrade, Uberlandio Batista Severo, Everaldo Souto de Medeiros e Flávia Jerônimo Barbosa.

- Aos colegas de curso e amigos, pela troca de experiências e apoio nos momentos difíceis.

- A CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamente de Pessoal de Nível Superior, pelo apoio financeiro e a Universidade Federal da Paraíba, em particular, a Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, por me possibilitar essa conquista.

Resumo

Neste trabalho, estudaremos a existência e multiplicidade de soluções radiais positivas para equações elípticas em domínios com simetria. Num primeiro momento trabalharemos em domínios anulares, onde estudaremos, além da existência e multiplicidade de soluções, resultados de não-existência de soluções positivas. Em seguida trabalharemos em bolas. Neste caso provaremos a existência de pelo menos três soluções radiais positivas. Finalmente, em domínios exteriores, estudaremos a existência de soluções radiais positivas para um problema elíptico sublinear e a existência de soluções não radiais positivas para o problema não radial correspondente. Para isto, usaremos alguns teoremas clássicos de ponto fixo do tipo expansão/compressão em cones. Em alguns casos, usaremos argumentos da Teoria do Grau e o método de sub e super solução.

Abstract

In this work we will study the existence and multiplicity of positive radial solutions for elliptic equations in domains with symmetry. In a first moment we will work in annular domains, where we will study, besides the existence and multiplicity of solutions, results of non-existence of positive solutions. Next, we will work in balls. In this case we will prove the existence at least three positive radial solutions. Finally, in an exterior domain, we will study the existence of positive radial solutions for a sublinear elliptic problem and the existence of solutions nonradial positive for the corresponding nonradial problem. For this, we will use some classic fixed point theorems of type expansion/compression in cones. In some cases we will use arguments of the Theory of the Degree and the sub and supersolution method.

Notações

Notações Gerais

$B(x,\delta)$	bola aberta de centro x e raio δ
$B[x,\delta]$	bola fechada de centro x e raio δ
$\nabla u = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial u}{\partial x_N}\right)$	gradiente de u
$\Delta u = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$	Laplaciano de u
$\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$	derivada normal exterior
$\overline{\Omega}$	fecho do conjunto Ω
$\partial\Omega$	fronteira de Ω
$\operatorname{sgn} J_\varphi(x)$	sinal da jacobiana de φ aplicada a x
$\varphi'(x) = \frac{d\varphi}{dx}$	derivada de φ em relação a x
$d(b,\phi(x))$	distância de b a $\phi(x)$

Espaços de Funções

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}\,\text{mensurável} : \int_\Omega |u|^p\ dx < \infty\right\},\ 1 \leq p < \infty$$

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\,\text{mensurável} : \text{existe}\ \ C > 0\ \ \text{com}\ \ |u(x)| \leq C\ \ \text{q.t.p sobre}\ \ \Omega\}$$

$C^k(\Omega)$	funções k vezes continuamente diferenciáveis sobre Ω, $k \in \mathbb{N}$
$C(\Omega,\mathbb{R}^n)$	funções contínuas de Ω em $\mathbb{R}^n$
$\mathcal{K}(\overline{\Omega},X)$	operadores compactos de $\overline{\Omega}$ em X

$$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = \left\{u \in C(\overline{\Omega}) : \sup_{x,y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty\right\} \text{ com } 0 < \alpha < 1$$

$W_0^{1,p}(\Omega)$ é o completamento de $C_c^1(\Omega)$, na norma de $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$

$W^{2,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \in W^{1,p}(\Omega)\}$

$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u|^p \, dx \right)^{1/p}$ norma do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$

$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{\alpha=1}^{m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$ norma do espaço de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Sumário

Notações **vii**

Introdução **xi**

1 Resultados Básicos **1**

1.1 O Grau Topológico em Dimensão Finita 1

1.1.1 Definição do Grau em Dimensão Finita 1

1.1.2 Principais Propriedades do Grau 2

1.1.3 Consequências das Propriedades do grau 2

1.2 A Teoria do Grau em Dimensão Infinita 3

1.2.1 Definição do Grau de Leray-Schauder 3

1.2.2 Definição do Grau para Perturbações de Dimensão Finita da Identidade 4

1.2.3 Definição do Grau para Perturbações Compactas da Identidade . . 5

1.2.4 Propriedades Fundamentais do Grau de Leray-Schauder 7

1.2.5 Consequências das Propriedades do Grau 11

1.3 O Índice de Ponto Fixo 14

1.3.1 Propriedades do Índice de Ponto Fixo 16

1.3.2 Aplicações do Índice de Ponto Fixo 17

1.4 Princípios do Máximo 20

1.5 Resultados Preliminares 21

1.6 O Método de Sub e Super Solução 22

2 Equações Elípticas com Multiparâmetros em Domínios Anulares **26**

2.1 Introdução 26

2.2 Resultados Preliminares 29

2.3 Prova do Teorema 2.1 33

2.3.1 A Primeira Solução Positiva para o Problema $(P_{a,b,1})$ 33

2.3.2 A Segunda Solução Positiva para o Problema $(P_{a,b,1})$ 38

2.4 Prova do Teorema 2.2 46

2.5 Aplicações 49

3 Três Soluções Radiais Positivas para Equações Elípticas na Bola **54**

3.1 Introdução 54

3.2 Resultados Preliminares 55

3.3 Prova dos Resultados Principais 67

3.3.1 Prova do Teorema 3.1 67

3.3.2 Prova do Teorema 3.2 68

4 Soluções Positivas para Equações Elípticas em Domínio Exterior 69
4.1 Introdução 69
4.2 Caso Radial 69
4.3 Caso Não-radial 81

Referências Bibliográficas 86

Introdução

Nesta dissertação abordaremos resultados de existência e multiplicidade de soluções radiais positivas para equações elípticas em domínios com simetria. Mais especificamente, trabalharemos em domínios anulares, numa bola e por fim, em domínios exteriores. Para tanto, usaremos alguns teoremas clássicos de ponto fixo do tipo expansão/compressão em cones. Em ambos os casos reduziremos o problema elíptico a uma equação diferencial ordinária correspondente, e associaremos a essa, um operador, de forma que encontrarmos solução para o problema elíptico inicial seja equivalente a encontrar ponto fixo desse operador.

No primeiro capítulo enunciaremos alguns resultados que nos serão úteis para melhor compreensão do trabalho.

No segundo capítulo, cuja abordagem considerada é dada em [15], usaremos resultados de ponto fixo do tipo expansão/compressão em cones, argumentos da Teoria do Grau e o método de sub e super solução para estudarmos existência, multiplicidade e não existência de soluções positivas para uma classe de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com multiparâmetros, da seguinte forma:

$$\begin{cases} -u'' = \lambda g(t, u(t), a, b) & \text{em} \quad (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{$P_{a,b,\lambda}$}$$

onde a, b e λ são parâmetros não negativos e $g \in C([0,1] \times [0,+\infty)^3, [0,+\infty))$ é uma função não-decrescente nas três últimas variáveis.

Associaremos ao Problema $(P_{a,b,\lambda})$ o seguinte operador compacto:

$$(Tu)(t) = \lambda \int_0^1 K(t,\tau) g(\tau, u(\tau), a, b) d\tau, \tag{1}$$

definido no espaço de Banach $X = C([0,1], \mathbb{R})$ munido com a norma usual $\|u\|_\infty := \sup_{t\in[0,1]} |u(t)|$, onde, $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ é a função de Green dada por,

$$K(t,\tau) = \begin{cases} (1-t)\tau & \text{se} \quad \tau < t \\ (1-\tau)t & \text{se} \quad \tau \geq t. \end{cases}$$

Mostraremos que encontrar soluções para o Problema $(P_{a,b,\lambda})$ é equivalente a encontrar pontos fixos para o operador dado em (1).

Os principais resultados desse capítulo podem ser aplicados a várias classes de problemas elípticos, tais como, equações elípticas semilineares em domínios anulares. Mais especificamente, o que motivou esse estudo foram equações da forma,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \hat{f}(|x|, u) & \text{em} \quad r_1 < |x| < r_2, \\ u(x) = a & \text{sobre} \quad |x| = r_1, \\ u(x) = b & \text{sobre} \quad |x| = r_2, \end{cases} \tag{2}$$

onde a, b e λ são parâmetros não negativos, $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $0 < r_1 < r_2$. O primeiro resultado, ver Teorema 2.1, pode ser aplicado, se considerarmos por exemplo, $\hat{f}(|x|, u) = c(|x|)f(u)$, onde $c : [r_1, r_2] \to [0, +\infty)$ é uma função contínua, não negativa, não trivial e a não linearidade f é uma função contínua superlinear tanto no zero como no infinito. Um simples modelo é dado por $f(u) = u^p$ com $p > 1$. C. Bandle e L. A. Peletier [2] estudaram o caso $f(u) = u^{(N+2)/(N-2)}$, $c \equiv 1$ e $a = 0$, esse resultado foi estendido por M. G. Lee e S. S. Lin [22] a não linearidades f convexas e superlineares tanto no zero como no infinito, utilizaram para tanto, o Método de Shooting. D. D. Hai, utilizando argumentos da Teoria do Grau e o método de sub e super solução, estendeu e complementou os resultados de [2] e [22] a não linearidades contínuas e localmente lipschitziana. (Ver [3], Teorema 3.7). A equação $(P_{a,b,\lambda})$ não necessariamente é autônoma e não consideramos aqui, qualquer hipótese de continuidade localmente Lipschitz ou convexidade sobre a não linearidade f, obtendo dessa forma, um aperfeiçoamento para o nosso resultado de multiplicidade. Um tipo de resultado ainda não encontrado na literatura é dado pelo Teorema 2.2, onde obtemos a existência de três soluções positivas para o Problema (2). Uma aplicação para o segundo resultado principal, é dada por exemplo, quando $f(u) = u^p/(1 + u^q)$ com $\max\{1, q\} < p < q + 1$.

Para obtermos estimativas do tipo expansão/compressão em cones, nos será essencial uma propriedade elementar para funções côncavas, não negativas no espaço das funções $C([0, 1], \mathbb{R})$, segundo a qual, para todo $\alpha, \beta \in (0, 1)$, obtemos que,

$$\inf_{t \in [\alpha, \beta]} u(t) \geq \alpha(1 - \beta)\|u\|_\infty. \tag{3}$$

Organizaremos o terceiro capítulo com base em [16]. Neste, assim como no capítulo anterior, utilizaremos os mesmos resultados de ponto fixo, a fim de estudarmos a existência e multiplicidade de soluções radiais positivas para uma classe de problemas elípticos de segunda ordem, da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda K(|x|)f(u), u > 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \hfill u = a & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde Ω é a bola de raio R_0 centrada na origem, λ, a são parâmetros positivos, $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $f \in C([0, +\infty), [0, +\infty))$ é uma função crescente e $K \in C([0, R_0], [0, +\infty))$ não é identicamente nula em qualquer subintervalo de $[0, R_0]$. Notemos que no caso anterior consideramos um domínio anular e, nesse caso o domínio considerado é uma bola.

O estudo do Problema (4) foi motivado por vários resultados para problemas elípticos em domínio anular com condições de fronteira não-homogênea, que estabeleceram a existência e multiplicidade utilizando teoremas de ponto fixo do tipo expansão/compressão em cones. Dentre esses resultados, podemos citar [2], [3], [17], [22], [35] e ainda [15], através do qual organizaremos o segundo capítulo. Uma diferença substancial entre os capítulos 2 e 3, é que nesse último, substituiremos (3) adequadamente, por outra propriedade que nos forneça estimativas do tipo expansão/compressão em cones, ver Lema 3.2.

Reduziremos o Problema (4) ao seguinte problema de equações ordinárias:

$$\begin{cases} -(r^{N-1}u')' = r^{N-1}\lambda K(r)f(u + a) & \text{em} \quad (0, R_0) \\ \hfill u(R_0) = u'(0) = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Assim, para encontrarmos soluções radiais para o Problema (4), é suficiente encontrarmos soluções para o Problema (5).

Por uma mudança de variável $t = a(r)$, $z(t) = u(r(t))$, onde $a(r) = (r^{2-N} - R_0^{2-N})/(N-2)$. obteremos que (5) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} -z''(t) = \lambda r^{2(N-1)}(t)h(t)f(z(t)+a) \quad \text{em} \quad (0,+\infty) \\ z(0) = z'(+\infty) = 0, \end{cases} \tag{6}$$

onde $h(t) = K(a^{-1}(t))$ é uma função contínua que não é identicamente nula em qualquer subintervalo de $(0,+\infty)$.

Finalmente, associaremos ao Problema (6) o operador $F : C_1 \to X$ dado por,

$$F(z)(t) := \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds, \tag{7}$$

onde X é o espaço das funções contínuas e limitadas $z : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ munido com a norma $\|z\|_\infty = \sup_{t\in[0,+\infty)} |z(t)|$ e $C_1 = \{z \in X : z \geq 0, z \text{ é côncava e } z(0) = 0\}$ define um cone em X. Assim, os pontos fixos do operador F dado em (7) são soluções para o Problema (6) e portanto soluções radiais para o Problema (4).

Com base em [1], no último capítulo, também utilizaremos técnicas de ponto fixo, agora em domínio exterior, onde consideraremos, sem perda de generalidade, o exterior da bola unitária, a fim de estudarmos a existência de pelo menos uma solução radial positiva para um problema elíptico sublinear com valor de fronteira. Usaremos ainda, o resultado de existência do caso anterior e o Teorema de existência de Noussair [9] para mostrar a existência de pelo menos uma solução não radial positiva para o problema não radial correspondente. Diante disso, o capítulo será dividido essencialmente em duas partes, uma trata do caso radial e a outra do caso não radial. No caso radial consideraremos o problema elíptico:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\|x\|, u) \quad \text{para} \quad \|x\| > 1, \\ u = 0 \quad \text{para} \quad \|x\| = 1, \\ u \to 0 \quad \text{quando} \quad \|x\| \to \infty, \end{cases} \tag{8}$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$. Esse problema será reduzido à seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} v''(t) + g(t, v(t)) = 0 \quad \text{para} \quad t \in (0,1) \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{9}$$

onde $g(t, v(t)) = \frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} f((1-t)^{1/(2-N)}, v(t))$.

Obteremos a existência de pelo menos uma solução positiva para o Problema (9) e portanto uma solução radial positiva para o Problema (8), onde a não linearidade g (ou f) é sublinear com respeito a segunda variável tanto no zero como no infinito. Para tanto, associaremos ao Problema (9) o operador $S : C \to E$ dado por:

$$Sv(t) := \int_0^1 K(t,s)g(s, v(s))ds,$$

onde $C = \{v \in E : v(t) \geq 0, t \in [0,1], \inf_{t\in B} v(t) \geq \min\{a, 1-b\}\|v\|_\infty\}$, define um cone em $E = C([0,1])$, espaço das funções contínuas munido com a norma $\|v\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |v(t)|$ e K é a função de Green dada acima. P. Habets e F. Zanolin obtêm em [25] alguns resultados para o Problema (9), usando o método de sub e super solução. Esse problema é uma generalização da equação de Emden-Fowler considerada em [37]. Problemas relacionados são considerados em [19], [24], [28], [33] e ainda [34]. Em [13] encontramos um método similar, porém com outro cone. [32] e [29] trabalham com problemas da forma (8), onde a não linearidade é superlinear.

Na segunda parte, estabeleceremos a existência de pelo menos uma solução não-radial para o seguinte problema não-radial:

$$\left\{\begin{array}{rcl} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} & \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre} & \partial\Omega, \\ u(x) \to 0 & \text{quando} & \|x\| \to \infty, \end{array}\right. \tag{10}$$

onde, Ω é o exterior da bola fechada $B[0,1] \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$. O problema de simetria para (10) foi estudado no caso autônomo em [31], enquanto o resultado de multiplicidade foi obtido em [11] e [27]. Problemas relacionados são considerados em [8] e [10]. Aqui trataremos o caso em que há um decaimento da f quando x tende ao infinito, portanto o caso autônomo não pode ser considerado nessa estrutura.

No decorrer dos capítulos faremos aplicações dos principais resultados.

Capítulo 1

Resultados Básicos

Enunciaremos aqui alguns resultados e, quando necessário, provas que nos serão úteis para melhor compreensão do trabalho. Começaremos com algumas definições e propriedades da Teoria do Grau em Dimensão Finita, que serão necessárias para provar os principais resultados do grau topológico em dimensão infinita que também mencionaremos mais tarde.

1.1 O Grau Topológico em Dimensão Finita

Começaremos este capítulo definindo o grau topológico em dimensão finita, para tanto, consideraremos a abordagem dada em [18]. Donde temos que, a função grau nos dar informações quanto à existência, unicidade ou multiplicidade de soluções de equações da forma $\varphi(x) = b$, onde $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e b é um ponto dado de $\mathbb{R}^n$. Tal função é denotada por d e a cada tripla (φ, Ω, b) associa um número inteiro $d(\varphi, \Omega, b)$, o grau de φ com respeito a Ω e a b, o qual nos dar as informações comentadas acima.

Definiremos o grau para valores regulares de $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Em seguida estenderemos a definição para qualquer valor de $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e por fim, generalizaremos a definição para aplicações $\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

1.1.1 Definição do Grau em Dimensão Finita

Iniciemos definindo o grau para valores regulares.

Definição 1.1 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $b \in \mathbb{R}^n \backslash \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$, onde S_φ é o conjunto dos pontos críticos de φ. Então definimos,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \Sigma_{x \in \varphi^{-1}(b)} sgn J_\varphi(x).$$

O grau acima está bem definido, pois sob as hipóteses da Definição 1.1, usando o Teorema da Função Inversa obtemos que $\varphi^{-1}(b)$ é um conjunto finito.

Modifiquemos a definição inicial de modo a abranger também valores singulares.

Definição 1.2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Definimos, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b^1)$, onde b^1 é um valor regular de φ tal que $|b^1 - b| < \varrho(b, \varphi(\partial\Omega))$ e $d(\varphi, \Omega, b^1)$ é dado pela Definição 1.1, onde $\varrho(b, \varphi(\partial\Omega)) = \inf\{|b - a| : a \in \varphi(\partial\Omega)\}$.*

Generalizemos agora a definição do grau para funções contínuas suficientemente próximas de funções $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Definição 1.3 *Sejam $\phi \in C(\overline{\Omega})$ e $b \in \mathbb{R}^n \backslash \phi(\partial\Omega)$. Então definimos $d(\phi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$, em que $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma função tal que $\|\varphi - \phi\|_\infty < \varrho(b, \phi(\partial\Omega))$ e $d(\varphi, \Omega, b)$ é dado pela Definição 1.2.*

1.1.2 Principais Propriedades do Grau

Citaremos as principais propriedades do grau em dimensão finita, que usaremos para provar posteriormente as propriedades do grau em dimensão infinita. Consideraremos o espaço das funções contínuas $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, denotado por $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, munido com a norma do supremo, $\|\varphi\|_\infty := \sup\{|\varphi(x)| : x \in \overline{\Omega}\}$.

(i) Continuidade em Relação a Função: Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de φ em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que para toda $\psi \in V$,

$$b \notin \psi(\partial\Omega) \quad \text{e} \quad d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b).$$

(ii) Invariância do Grau por Homotopia: Sejam $H \in C(\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ e $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então $d(H(.,t), \Omega, b)$ é constante para $t \in [0,1]$.

(iii) O Grau é Constante em Componentes Conexas de $\mathbb{R}^n \backslash \varphi(\partial\Omega)$: Se b e $\hat{b}$ estão na mesma componente conexa, então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, \hat{b}).$$

(iv) Aditividade: Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são abertos de $\mathbb{R}^n$ tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$ então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

1.1.3 Consequências das Propriedades do grau

(1)

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad b \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega}, \end{cases}$$

onde, I é a aplicação identidade.

(2) Se $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$ então $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.

(3) Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.

(4) Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então $\varphi(\Omega)$ é uma vizinhança de b.

(5) Sejam $K \subset \Omega$ fechado e $b \notin \varphi(K)$ então $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega - K, b)$.

(6) Seja $\{\Omega_i\}_{i \in I}$, uma família de subconjuntos de Ω abertos, limitados e disjuntos tais que $\varphi^{-1}(b) \subset \cup_{i\in I}\Omega_i$. Então o $d(\varphi, \Omega_i, b)$ é nulo, exceto para um número finito de índices $i \in I$ e

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{i\in I} d(\varphi, \Omega_i, b).$$

(7) Sejam φ e ψ pertencentes a $C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ tais que $\psi(x) = \varphi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$. Então, para todo $b \notin \varphi(\partial\Omega) = \psi(\partial\Omega)$, temos que,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b).$$

1.2 A Teoria do Grau em Dimensão Infinita

Esta teoria nos dará todo suporte que precisaremos para definirmos e estudarmos as principais propriedades e aplicações do Índice de Ponto Fixo, ferramenta com a qual trabalharemos posteriormente.

1.2.1 Definição do Grau de Leray-Schauder

Nesta seção consideraremos a definição do Grau de Leray-Schauder, suas propriedades e as principais consequências decorrentes dessas propriedades. Começaremos definindo o grau para perturbações de dimensão finita da identidade, e usando o resultado que próximo de um operador compacto sempre existe um operador de posto finito, estenderemos a definição para perturbações compactas da identidade, que é de fato a definição do grau de Leray-Schauder.

O lema a seguir será útil na definição do grau para perturbações de dimensão finita da identidade.

Lema 1.1 *Sejam $m < n$, R^m um subespaço vetorial do R^n, $\Omega \subset R^n$ aberto e limitado, $\varphi \in C(\Omega, R^m)$, $\phi(x) = x - \varphi(x)$, onde $\phi \in C(\Omega, R^n)$ e $b \in R^m\backslash\phi(\partial\Omega)$. Então:*

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}, \Omega \cap R^m, b). \tag{1.1}$$

Prova. Devemos observar que o grau do lado direito da equação (1.1) está bem definido, assim, verifiquemos que $b \notin \phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}(\partial_{R^m}(\Omega \cap R^m))$. Primeiramente, afirmamos que $\partial_{R^m}(\Omega \cap R^m) \subset \partial\Omega \cap R^m$. Com efeito, seja $x \in \partial_{R^m}(\Omega \cap R^m)$, daí, para todo $r > 0$ temos que,

$$B(x, r) \cap (\Omega \cap R^m) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(x, r) \cap \mathbb{R}^m\backslash\Omega \cap R^m \neq \emptyset,$$

onde, $B(x, r) \subset \mathbb{R}^m$ denota a bola do $\mathbb{R}^m$ de centro x e raio r. Devemos mostrar que $x \in \partial\Omega \cap R^m$; claramente $x \in \mathbb{R}^m$, já que $B(x, r) \subset \mathbb{R}^m$. Agora mostremos que $x \in \partial\Omega$, ou seja,

$$B(x, r) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(x, r) \cap \Omega^c \neq \emptyset.$$

Onde Ω^c denota o complementar de Ω em $\mathbb{R}^n$. Notemos que, $B(x, r) \cap (\Omega \cap R^m) \neq \emptyset$ implica que $B(x, r) \cap \Omega \neq \emptyset$. Resta-nos verificar que $B(x, r) \cap \Omega^c \neq \emptyset$. Suponhamos, por contradição, que $B(x, r) \cap \Omega^c = \emptyset$. Temos que

$$B(x, r) \cap (\Omega \cap \mathbb{R}^m)^c = B(x, r) \cap (\Omega^c \cup \mathbb{R}^{m^c}) \neq \emptyset.$$

Donde segue que,

$$B(x,r)\cap\Omega^c\neq\emptyset \quad \text{ou} \quad B(x,r)\cap\mathbb{R}^{m^c}\neq\emptyset.$$

Como por hipótese $B(x,r)\cap\Omega^c=\emptyset$, então necessariamente $B(x,r)\cap\mathbb{R}^{m^c}\neq\emptyset$, isto é, $B(x,r)$ contém pontos de $\mathbb{R}^{m^c}$, o que é uma contradição, já que $B(x,r)\subset\mathbb{R}^m$. Logo, $\partial_{R^m}(\Omega\cap R^m)\subset\partial\Omega\cap R^m$. Portanto,

$$\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}(\partial_{R^m}(\Omega\cap R^m))\subset\phi(\partial\Omega\cap R^m)\subset\phi(\partial\Omega)\cap\phi(\mathbb{R}^m)\subset\phi(\partial\Omega). \tag{1.2}$$

Usando (1.2) e o fato que $b\notin\phi(\partial\Omega)$ concluímos que $b\notin\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}(\partial_{R^m}(\Omega\cap R^m))$, caso contrário, por (1.2) obtemos que $b\in\phi(\partial\Omega)$, absurdo.

Aplicaremos o caso regular da definição do grau em dimensão finita. Logo, podemos supor sem perda de generalidade que $\varphi\in C^1(\Omega,R^m)$ e que b é valor regular de $\phi\in C(\Omega,R^m)$. Mostremos que essa situação corresponde ao caso regular para $\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}$, ou seja,

- b é valor regular de $\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}$;
- $\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}\in C^1(\Omega\cap R^m,R^m)$.

Com efeito, como $\varphi\in C^1(\Omega,R^m)$ então $\varphi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}\in C^1(\Omega\cap R^m,R^m)$, donde segue que $\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}\in C^1(\Omega\cap R^m,R^m)$.

Por outro lado, como para todo $x\in\Omega\cap R^m$,

$$\phi'(x)=\begin{bmatrix} I_m-(\varphi_{|\overline{\Omega}\cap R^m})'(x) & (...) \\ 0 & I_{n-m}\end{bmatrix}$$

temos que,

$$J_\phi(x)=J_{\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}}(x).$$

Além disso, $x\in\phi^{-1}(b)$ se, e somente se, $\phi(x)=x-\varphi(x)=b$ se, e somente se, $x=\varphi(x)+b\in\mathbb{R}^m$ se, e somente se, $x\in\Omega\cap R^m$ e $x\in(\phi^{-1}_{|\overline{\Omega}\cap R^m}(b))$. Logo, se b é valor regular de ϕ então b é valor regular de $\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}$. Como $\phi^{-1}(b)=(\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m})^{-1}(b)$ e $J_\phi(x)=J_{\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}}(x)$, pela definição do grau temos,

$$\begin{aligned} d(\phi,\Omega,b) &= \Sigma_{x\in\phi^{-1}(b)}sgn(J_\phi(x)) \\ &= \Sigma_{x\in\phi^{-1}_{|\overline{\Omega}\cap R^m}(b)}sgn(J_{\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m}}(x)) \\ &= d(\phi_{|\overline{\Omega}\cap R^m},\Omega\cap R^m,b). \end{aligned}$$

■

1.2.2 Definição do Grau para Perturbações de Dimensão Finita da Identidade

Definiremos o grau para perturbações de dimensão finita da identidade, em seguida estenderemos essa definição para perturbações compactas da identidade.

Seja X um espaço de Banach real de dimensão infinita, $\Omega\subset X$ aberto e limitado de X.

Definição 1.4 *Seja* $T : \Omega \to X$.

(i) *Dizemos que* T *é um operador de posto finito se* $T(\Omega)$ *está contido num subespaço de dimensão finita de* X*;*

(ii) *chamamos* $\phi = I - T : \Omega \to X$ *perturbação de dimensão finita da identidade quando* T *é um operador de posto finito.*

Definição 1.5 *Sejam* $b \in X \backslash \phi(\partial\Omega)$ *e* F *um subespaço de dimensão finita de* X *contendo* $T(\overline{\Omega}) \cup \{b\}$*. Definamos,*

$$d(\phi, \Omega, b) := d(\phi_{|\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Para mostrarmos que a função grau está bem definida, mostraremos que a definição não depende da escolha de F.

Sejam F_1, F_2 como F acima . Logo $T(\overline{\Omega}) \cup \{b\} \subset F_1 \cap F_2$, que é subespaço de F_1 e F_2. Assim podemos aplicar o Lema 1.1, onde obtemos que

$$\begin{aligned} d(\phi_{|\overline{\Omega} \cap F_1}, \Omega \cap F_1, b) &= d(\phi_{|\overline{\Omega} \cap F_1 \cap F_2}, \Omega \cap F_1 \cap F_2, b) \\ &= d(\phi_{|\overline{\Omega} \cap F_2}, \Omega \cap F_2, b). \end{aligned}$$

Logo, o grau não depende da escolha de F, e portanto, está bem definido.

1.2.3 Definição do Grau para Perturbações Compactas da Identidade

No que segue trabalharemos com perturbações compactas da identidade. Seja X um espaço de Banach real de dimensão infinita, $\Omega \subset X$ aberto e limitado de X.

Definição 1.6 *Seja* $T : \overline{\Omega} \to X$.

(i) *Dizemos que* T *é um operador compacto se é contínuo sobre* $\overline{\Omega}$ *e se* $T(\overline{\Omega})$ *é relativamente compacto, ou seja,* $\overline{T(\overline{\Omega})}$ *é compacto;*

(ii) *chamamos* $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to X$ *uma perturbação compacta da identidade quando* T *é um operador compacto.*

O lema a seguir será utilizado para mostrarmos que próximo de um operador compacto podemos conseguir um operador de posto finito.

Lema 1.2 *Seja* $K \subset X$ *compacto. Para todo* $\epsilon > 0$*, existem um subespaço de dimensão finita* F_ϵ *de* X *e uma aplicação* $g_\epsilon \in C(K, F_\epsilon)$ *tais que* $\|x - g_\epsilon(x)\| \leq \epsilon$ *para todo* $x \in K$.

Prova. Como K é compacto, dado $\epsilon > 0$, podemos cobrí-lo com uma quantidade finita de bolas de raio ϵ centradas em elementos de K, mais precisamente, podemos encontrar $y_1, ..., y_p \in K$, tais que $K \subset \cup_{i=1}^{p} B(y_i, \epsilon)$.

Seja F_ϵ o subespaço gerado por $\{y_1, ..., y_p\}$, notemos que, definido dessa forma, F é um subespaço de dimensão finita de X.

Definamos $b_i : K \to \mathbb{R}$ por

$$b_i(x) = \begin{cases} \epsilon - \|x - y_i\| & \text{se} \quad x \in B(y_i, \epsilon) \\ 0 & \text{se} \quad x \notin B(y_i, \epsilon). \end{cases}$$

Donde segue que

- b_i é contínua para todo $x \in K$;
- $\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x) > 0$.

Consideremos $g_\epsilon : K \to F_\epsilon$ dada por,

$$g_\epsilon(x) = \frac{\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x) y_i}{\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x)}.$$

Notemos que g_ϵ é contínua. Além disso,

$$\begin{aligned} \|g_\epsilon(x) - x\| &= \left\| \frac{\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x) y_i}{\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x)} - x \right\| \\ &= \left\| \frac{\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x) y_i - \Sigma_{i=1}^{p} b_i(x) x}{\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x)} \right\| \\ &= \frac{\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x) \|(y_i - x)\|}{\Sigma_{i=1}^{p} b_i(x)} \\ &= \|y_i - x\| < \epsilon. \end{aligned}$$

■

Lema 1.3 *Sejam $T : \overline{\Omega} \to X$ um operador compacto, $\phi = I - T$ uma perturbação compacta da identidade e $b \in X \backslash \phi(\partial\Omega)$. Então,*

(i) *ϕ é uma aplicação fechada, isto é, a imagem por ϕ de um fechado é um fechado;*

(ii) *ϕ é uma aplicação própria, isto é, a imagem inversa por ϕ de um compacto é um compacto;*

(iii) *Seja $r = d(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$. Existe $T_r : \overline{\Omega} \to X$ uma aplicação de posto finito tal que $\|T - T_r\| \leq r/2$.*

Prova. **(i)** Seja $F \subset \overline{\Omega}$ fechado, devemos mostrar que $\phi(F)$ é fechado. Consideremos $(x_n) \subset F$ tal que $\phi(x_n) \to y_0$. Notemos que, $y_0 \in \phi(F)$. De fato, temos que $\phi(x_n) = x_n - T(x_n)$, como T é compacto, a menos de subseqüência $T(x_n) \to z_0$. Logo, como $x_n = \phi(x_n) + T(x_n)$ então (x_n) é convergente, isto é, $x_n \to x_0 \in F$, pois F é fechado, como ϕ é contínua $\phi(x_n) \to \phi(x_0)$, logo $\phi(x_0) = y_0$. Como $\phi(x_0) \in \phi(F)$ então $y_0 \in \phi(F)$. Daí, $\phi(F)$ é fechado. Portanto ϕ é uma aplicação fechada.

(ii) Devemos mostrar que para todo $K \subset X$ compacto, $\phi^{-1}(K)$ é compacto. Seja $(u_n) \subset \phi^{-1}(K)$. Notemos que $(\phi(u_n)) \subset K$, como K é compacto, a menos de subseqüência, $\phi(u_n) \to y_0$. Temos que $\phi(u_n) = u_n - T(u_n)$, como T é compacto, a menos de subseqüência $T(u_n) \to z_0$, assim, como $u_n = \phi(u_n) + T(u_n)$ então (u_n) é convergente, logo $\phi^{-1}(K)$ é compacto para todo $K \subset X$ compacto. Portanto, ϕ é uma aplicação própria.

(iii) Vimos que ϕ é uma aplicação fechada, daí $\phi(\partial\Omega)$ é fechado e portanto, $r = d(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$. Consideremos $K = \overline{T(\overline{\Omega})}$. Como T é um operador compacto, temos que K é compacto. Seja $\epsilon = r/2 > 0$, pelo Lema 1.2, existem um subespaço $F_{r/2}$ de dimensão finita de X e uma aplicação $g_{r/2} \in C(K, F_{r/2})$ tal que $\|x - g_{r/2}(x)\| \leq r/2$ para todo $x \in K$, isto é, $\|T - g_{r/2}(T)\| \leq r/2$ para todo $T \in K$, dessa forma, consideremos $T_r = g_{r/2} \circ T$, temos que a imagem de T_r está contida em um subespaço de dimensão finita de X, donde segue que T_r é uma aplicação de posto finito, além disso, $\|T - T_r\| \leq r/2$. ■

Definição 1.7 *Seja $r = d(b, \phi(\partial\Omega) > 0$, tomemos $\phi_r = I - T_r$, onde $T_r : \overline{\Omega} \to X$ é uma aplicação de posto finito tal que $\|\phi_r - \phi\| = \|T_r - T\| \leq r/2$. Notemos que $d(b, \phi_r(\partial\Omega)) \geq r/2$. Com efeito, seja $x \in \partial\Omega$, temos que*

$$\begin{aligned} r \leq d(b, \phi(x)) &\leq d(b, \phi_r) + d(\phi_r, \phi) \\ &\leq d(b, \phi_r) + \frac{r}{2} \end{aligned}$$

Donde segue que $d(b, \phi_r) \geq r/2 > 0$. Definimos então,

$$d(\phi, \Omega, b) := d(\phi_r, \Omega, b).$$

A definição acima não depende da escolha de ϕ_r. De fato, suponhamos que temos ϕ_{r_i}, $i = 1, 2$, perturbações de dimensão finita da identidade tais que $T_{r_i} \cup \{b\} \subset F_i$, onde F_i é um subespaço de dimensão finita de X e $\|\phi_{r_i}(x) - \phi(x)\| = \|T_{r_i} - T\| \leq r/2$, para todo $x \in \overline{\Omega}$. Seja F um subespaço de dimensão finita de X tal que $F_1 + F_2 \subset F$. Por definição do grau para perturbações de dimensão finita da identidade temos,

$$d(\phi_{r_i}, \Omega, b) = d(\phi_{{r_i}_{|\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b).$$

Seja $\psi : [0, 1] \times \overline{\Omega} \cap F \to X$ dada por,

$$\psi_\theta = \theta \phi_{{r_1}_{|\overline{\Omega} \cap F}} + (1 - \theta)\phi_{{r_2}_{|\overline{\Omega} \cap F}}, \quad \theta \in [0, 1] \quad .$$

Como $\partial_F(\Omega \cap F) \subset \partial\Omega \cap F$ então $d(b, \psi_\theta(\partial_F(\Omega \cap F))) \geq r/2 > 0$, para todo $\theta \in [0, 1]$. Desde que o grau em dimensão finita é invariante por homotopia então,

$$d(\phi_{{r_1}_{|\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b) = d(\phi_{{r_2}_{|\overline{\Omega} \cap F}}, \Omega \cap F, b)$$

Isto é,

$$d(\phi_{r_1}, \Omega, b) = d(\phi_{r_2}, \Omega, b).$$

Portanto, a definição não depende da escolha de ϕ_r.

1.2.4 Propriedades Fundamentais do Grau de Leray-Schauder

As seguintes propriedades do grau de Leray-Schauder, serão necessárias para obtermos soluções de alguns problemas que se seguem, além disso, nos permitirão compreender as propriedades do Índice de Ponto Fixo.

Sejam X um espaço de Banach, $\Omega \subset X$ aberto e limitado, $T : \Omega \to X$ uma aplicação compacta, $\phi = I - T$ uma pertubação compacta da identidade e $b \in X \backslash \phi(\partial\Omega)$. Consideremos o espaço dos operadores compactos $T : \overline{\Omega} \to X$, denotado por $\mathcal{K}(\overline{\Omega}, X)$, munido com a norma do supremo, $\|T\|_\infty := \sup\{|T(x)| : x \in \overline{\Omega}\}$.

Considerando as hipóteses acima temos as seguintes propriedades do grau em dimensão infinita:

(i) Continuidade do Grau por Variação do Operador T.

Existe uma vizinhança U de T no espaço dos operadores compactos $\mathcal{K}(\Omega, X)$ tal que para todo $S \in U$ temos que,

$$b \notin (I - S)(\partial\Omega) \text{ e } \quad d(I - S, \Omega, b) = d(\phi, \Omega, b).$$

De fato, sejam $r = d(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$, $U = \{S \in \mathcal{K}(\Omega, X) : \|S - T\|_{\infty,\overline{\Omega}} < r/2\}$, $\psi = I - S$ e $x \in \partial\Omega$. Temos que:

$$\begin{aligned} r \leq d(b, \phi(x)) &\leq d(b, \psi(x)) + d(\phi(x), \psi(x)) \\ &< d(b, \psi(x)) + \frac{r}{2}. \end{aligned}$$

Donde segue que $d(b, \psi(x)) > r/2 > 0$ para todo $x \in (\partial\Omega)$, e portanto $b \notin \psi(\partial\Omega)$.

Mostremos que,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega, b).$$

Sejam $\phi_1 = I - T_1$ e $\psi_1 = I - T_1$ perturbações de dimensão finita da identidade tais que,

$$\|\phi_1(x) - \phi(x)\| < \frac{r}{4} \quad \text{e} \quad \|\psi_1(x) - \psi(x)\| < \frac{r}{4}, \quad \text{para todo } x \in \overline{\Omega}.$$

Seja F um subespaço de dimensão finita de X tal que $T_1(\overline{\Omega}) \cup S_1(\overline{\Omega}) \cup \{b\} \subset F$. Então,

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi_1, \Omega, b) = d({\phi_1}_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Analogamente

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi_1, \Omega, b) = d({\psi_1}_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Usaremos a propriedade de invariância do grau por homotopia em dimensão finita. Seja $H : [0, 1] \times \overline{\Omega} \cap F \to X$ dada por:

$$H(t, x) := t{\phi_1}_{|\overline{\Omega}\cap F}(x) + (1 - t){\psi_1}_{|\overline{\Omega}\cap F}(x)$$

$t \in [0, 1]$. Mostremos que $b \notin H(t, \partial(\Omega \cap F))$. Sejam $x \in \partial(\Omega \cap F)$ e $t \in [0, 1]$, temos que:

$$\begin{aligned} \|b - H(t, x)\| &\geq \|b - \phi(x)\| - t\|\phi(x) - \phi_1(x)\| \\ &- (1 - t)\|\psi(x) - \psi_1(x)\| - (1 - t)\|\phi(x) - \psi(x)\| \\ &\geq r - t\frac{r}{4} - (1 - t)\frac{r}{4} - (1 - t)\frac{r}{2} \\ &= \frac{r}{4} + t\frac{r}{2} \geq \frac{r}{4} > 0 \end{aligned}$$

Logo $b \notin H(t, \partial(\Omega \cap F))$. Portanto,

$$d({\phi_1}_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b) = d({\psi_1}_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Donde segue que,

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

(ii) Invariância do Grau por Homotopias Compactas.

Seja $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], X)$ dada por,

$$H(x,t) = x - S(x,t),$$

onde $S : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ é compacta. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$ então $d(H(.,t),\Omega,b)$ é constante para todo $t \in [0,1]$.

De fato, temos que $r = d(b, H(\partial\Omega \times [0,1])) > 0$, com efeito, definamos $\tilde{H} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X \times \mathbb{R}$ por:

$$\tilde{H}(x,t) = (x,t) - (S(x,t),t) = (H(x,t),0).$$

Notemos que $\tilde{H}$ é uma perturbação compacta da identidade, logo é uma aplicação fechada, portanto $\tilde{H}(\partial\Omega \times [0,1]) = H(\partial\Omega \times [0,1]) \times \{0\}$ é fechado, donde temos que $r = d(b, H(\partial\Omega \times [0,1])) > 0$.

Consideremos o compacto $\overline{S(\overline{\Omega} \times [0,1])}$. Pelo Lema 1.2 existe $F_{r/2}$ um subespaço de dimenção finita de X, contendo b, e uma aplicação $g_{r/2} \in C(\overline{S(\overline{\Omega} \times [0,1]}, F_{r/2})$ tal que,

$$\|x - g_{r/2}(x)\| \leq r/2, \quad \text{para todo} \quad x \in \overline{S(\overline{\Omega} \times [0,1])}.$$

Seja $H_1(x,t) := x - g_{r/2} \circ S(x,t)$, para todo $t \in [0,1]$. Notemos que a imagem de $g_{r/2}$ está contida em um subespaço de dimensão finita de X, logo $g_{r/2}$ é uma aplicação de posto finito, donde segue que H_1 é uma perturbação de dimensão finita da identidade. Como para todo $t \in [0,1]$, $r \leq d(b, H(\partial\Omega, t))$ temos que,

$$d(H(.,t),\Omega,b) = d(H_1(.,t),\Omega,b).$$

Como H_1 é uma perturbação de dimensão finita da identidade então,

$$d(H_1(.,t),\Omega,b) = d(H_1(.,t)_{|\overline{\Omega} \cap F_{r/2}}, \Omega \cap F_{r/2}, b).$$

Temos que $H_1 : \overline{\Omega} \cap F_{r/2} \to F_{r/2}$ é contínua e $b \notin H_1(\partial\Omega \times [0,1])$, logo pela propriedade de invariância do grau por homotopia em dimensão finita, $d(H_1(.,t)_{|\overline{\Omega} \cap F_{r/2}, \Omega \cap F_{r/2}}, b)$ é constante, donde segue que $d(H(.,t),\Omega,b)$ também é constante para todo $t \in [0,1]$.

(iii) O grau é constante nas componentes conexas de $X \backslash \phi(\partial\Omega)$.

De fato, seja $b \notin \phi(\partial\Omega)$, temos que

$$d(\phi,\Omega,b) = d(\phi - b,\Omega,0). \tag{1.3}$$

Verifiquemos em que condições existe $r \in X$ tal que $\phi - r \in U$, onde U é uma vizinhança de $\phi - b$ no espaço $\mathcal{K}(\overline{\Omega}, X)$. Assim, dado $\epsilon > 0$ devemos ter,

$$\|\phi - r - (\phi - b)\|_\infty < \epsilon.$$

Donde,

$$\|r - b\|_X < \epsilon.$$

Logo, para r suficientemente próximo de b obtemos que $\phi - r \in U$. Daí, usando a propriedade (i) temos que existe uma bola $B(b,\epsilon) \subset X\backslash(\phi - b)(\partial\Omega)$ tal que, para todo $r \in B(b,\epsilon)$,

$$d(\phi - b, \Omega, 0) = d(\phi - r, \Omega, 0).$$

Donde a aplicação,

$$\begin{array}{rcl} X\backslash(\phi - b)(\partial\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ b & \longmapsto & d(\phi - b, \Omega, 0) \end{array}$$

é localmente constante. Ou equivalentemente por (1.3) a aplicação,

$$\begin{array}{rcl} X\backslash(\phi)(\partial\Omega) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ b & \longmapsto & d(\phi, \Omega, b) \end{array}$$

é localmente constante. Logo, é constante nas componentes conexas de $X\backslash\phi(\partial\Omega)$.

(iv) Aditividade.

Se $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1, Ω_2 são subconjuntos de Ω, abertos, limitados, disjuntos e $b \notin \phi(\partial\Omega_i)$, $(i = 1, 2)$. Então:

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega_1, b) + d(\phi, \Omega_2, b).$$

De fato, temos que $b \notin \phi(\partial\Omega_i)$, logo $b \notin \phi(\partial\Omega_1) \cup \phi(\partial\Omega_2) = \phi(\partial\Omega)$, e portanto $r = d(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$.

Consideremos $\psi = I - \widetilde{T}$ uma perturbação de dimensão finita da identidade tal que $\|\phi - \psi\| \leq \frac{r}{2}$. Notemos que $d(b, \psi(\partial\Omega)) > 0$. Pela definição do grau para perturbações compactas da identidade, temos que,

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b)$$

Seja F um subespaço de dimensão finita de X, com $\widetilde{T}(\overline{\Omega}) \cup \{b\} \subset F$, pela definição do grau para perturbações de dimensão finita da identidade, obtemos que

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\psi_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b)$$

Notemos que $\Omega \cap F = (\Omega_1 \cup \Omega_2) \cap F = (\Omega_1 \cap F) \cup (\Omega_2 \cap F)$. Usando a propriedade aditiva do grau em dimensão finita, temos,

$$\begin{array}{rcl} d(\psi_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b) & = & d(\psi_{|(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})\cap F}, (\Omega_1 \cap F) \cup (\Omega_2 \cap F), b) \\ & = & d(\psi_{|(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})\cap F}, \Omega_1 \cap F, b) + d(\psi_{|(\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2})\cap F}, \Omega_2 \cap F, b) \\ & = & d(\psi, \Omega_1, b) + d(\psi, \Omega_2, b) \\ & = & d(\phi, \Omega_1, b) + d(\phi, \Omega_2, b). \end{array}$$

Donde segue que,

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega_1, b) + d(\phi, \Omega_2, b).$$

1.2.5 Consequências das Propriedades do Grau

Agora vejamos algumas consequências das propriedades do grau em dimensão infinita.

Corolário 1.1

$$d(I,\Omega,b) = \begin{cases} 1 & se \quad b \in \Omega \\ 0 & se \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Prova. Para verificarmos que o grau acima está bem definido, basta tomarmos $T : \Omega \to X$ o operador identicamente nulo, temos que T é um operador compacto e $I = I - T := \phi$.

Seja $\psi = I - \widetilde{T}$ uma perturbação de dimensão finita da identidade, onde $\widetilde{T} : \Omega \to X$ é o operador identicamente nulo. Notemos que $\widetilde{T}(\overline{\Omega})$ está contido no subespaço de dimensão finita gerado pelo zero, logo $\widetilde{T}$ é um operador de posto finito. Temos que,

$$d(\phi,\Omega,b) = d(\psi,\Omega,b).$$

Consideremos F o subespaço de dimensão finita de X gerado por b, ou seja, $F = \langle b \rangle$. Observemos que $F \supset \widetilde{T}(\overline{\Omega}) \cup \{b\}$, logo,

$$\begin{aligned} d(I,\Omega,b) &= d(\phi,\Omega,b) \\ &= d(\psi,\Omega,b) \\ &= d(\psi_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b) \\ &= d(I_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b). \end{aligned}$$

Usando resultados do grau em dimensão finita, obtemos,

$$d(I_{|\overline{\Omega}\cap F},\Omega\cap F,b) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad b \in \Omega\cap\langle b\rangle \\ 0 & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega}\cap\langle b\rangle. \end{cases}$$

Portanto,

$$d(I,\Omega,b) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad b \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

■

Corolário 1.2 *Se $b \notin \phi(\overline{\Omega})$ então $d(\phi,\Omega,b) = 0$.*

Prova. Sejam $\alpha = d(b,\phi(\overline{\Omega})) > 0$ e $r = d(b,\phi(\partial\Omega)) > 0$, temos que $\alpha \leq r$. Pelo Lema 1.2, existe $T_\alpha : \overline{\Omega} \to X$ uma aplicação de posto finito tal que $\|T - T_\alpha\| < \frac{\alpha}{2}$.

Sejam $\phi_\alpha \in C(\Omega, X)$ com $\phi_\alpha = I - T_\alpha$ uma perturbação de dimensão finita da identidade e F um subespaço de dimensão finita de X tal que $T_\alpha(\overline{\Omega}) \cup \{b\} \subset F$.

Notemos que $\|\phi(x) - \phi_\alpha(x)\| < \frac{\alpha}{2}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. Assim $b \notin \phi_\alpha(\overline{\Omega})$.

Por definição, temos que,

$$d(\phi,\Omega,b) = d(\phi_\alpha,\Omega,b) = d(\phi_{\alpha_{|\overline{\Omega}\cap F}},\Omega\cap F,b).$$

O resultado segue como conseqüência das propriedades do grau em dimensão finita. ■

Corolário 1.3 *Se $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$ então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\phi(x_0) = b$.*

Prova. Suponhamos, por contradição, que para todo $x \in \Omega$, $\phi(x) \neq b$. Temos que $b \notin \phi(\partial\Omega)$, logo não existe $x \in \partial\Omega$ talque $\phi(x) = b$. Portanto não existe $x \in \overline{\Omega}$, com $\phi(x) = b$, isto é, $b \notin \phi(\overline{\Omega})$, assim, pelo corolário anterior, $d(\phi, \Omega, b) = 0$, absurdo. ∎

Corolário 1.4 *Se $d(\phi, \Omega, b) \neq 0$ então $\phi(\Omega)$ é uma vizinhança de b.*

Prova. De fato, pelo corolário anterior, existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\phi(x_0) = b$. Seja C_b uma componente conexa de b em $X \backslash \phi(\partial\Omega)$, temos que $d(\phi, \Omega, z) = d(\phi, \Omega, b) \neq 0$ para todo $z \in C_b$, donde existe $x' \in \Omega$ tal que $\phi(x') = z$, daí $C_b \subset \phi(\Omega)$, como $X \backslash \phi(\partial\Omega)$ é um aberto, suas componentes conexas são abertos de X. Portanto $\phi(\Omega)$ é uma vizinhança de b. ∎

Corolário 1.5 *Sejam $K \subset \Omega$ fechado e $b \notin \phi(K)$ então $d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega - K, b)$.*

Prova. Consideremos $\tilde{\phi} = I - \widetilde{T}$ uma perturbação de dimensão finita da identidade tal que $\|\phi - \tilde{\phi}\| < \alpha/2$, onde $\alpha = d(b, \phi(K)) > 0$, logo $b \notin \tilde{\phi}(K)$.

Seja F um subespaço de dimensão finita de X tal que $\widetilde{T}(\overline{\Omega}) \cup \{b\} \subset F$.
Pela definição, temos que,

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\tilde{\phi}, \Omega, b) = d(\tilde{\phi}_{|\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

O resultado segue das propriedades do grau em dimensão finita. ∎

Corolário 1.6 *Seja $\{\Omega_i\}_{i \in I}$, uma família de subconjuntos de Ω abertos, limitados e disjuntos tais que $\phi^{-1}(b) \subset \cup_{i \in I} \Omega_i$. Então o $d(\phi, \Omega_i, b)$ é nulo, exceto para um número finito de índices $i \in I$ e*

$$d(\phi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} d(\phi, \Omega_i, b). \tag{1.4}$$

Prova. Temos que $\phi^{-1}(b)$ está incluso em Ω, daí $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e portanto $d(\phi, \Omega, b)$ está bem definido.Temos ainda que, $b \notin \phi(\partial\Omega_i)$, pois $\Omega_j \cap \partial\Omega_i = \emptyset$ para todo $i, j \in I$, logo $d(\phi, \Omega_i, b)$ também está bem definido, para todo $i \in I$.

Devemos mostrar que o somatório em (1.4) faz sentido. Sabemos que ϕ é uma aplicação própria, logo $\phi^{-1}(b)$ é um compacto. Além disso, $\phi^{-1}(b) \subset \cup_{i \in I} \Omega_i$, donde podemos extrair uma subcobertura finita, isto é, $\phi^{-1}(b) \subset \cup_{i \in I_0} \Omega_i$, $I_0 \subset I$ com um número finito de índices i, logo o somatório faz sentido.

Temos que para todo $i \in I \backslash I_0$, $b \notin \phi(\partial\overline{\Omega}_i)$, assim,

$$d(\phi, \Omega_i, b) = 0.$$

Afirmamos que,

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \cup_{i \in I_0} \Omega_i, b).$$

De fato, seja $K = \overline{\Omega} - \cup_{i \in I_0} \Omega_i$ fechado contido em $\overline{\Omega}$. Notemos que $b \notin \phi(K)$, logo,

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega - K, b) = d(\phi, \cup_{i \in I_0} \Omega_i, b).$$

Pela propriedade aditiva do grau, temos que,

$$d(\phi, \cup_{i \in I_0} \Omega_i, b) = \sum_{i \in I_0} d(\phi, \Omega_i, b).$$

Donde segue que,

$$d(\phi, \Omega, b) = \sum_{i \in I_0} d(\phi, \Omega_i, b).$$

Portanto,

$$d(\phi, \Omega, b) = \sum_{i \in I} d(\phi, \Omega_i, b).$$

■

Corolário 1.7 *Sejam $\psi = I - S$ e $\phi = I - T$ perturbações compactas da identidade tais que $\psi(x) = \phi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$. Então,*

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega, b).$$

Prova. Definamos $H : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ por $H(x,t) = t\phi(x) + (1-t)\psi(x)$ para todo $t \in [0,1]$ e $x \in \overline{\Omega}$. Notemos que H é contínua. Além disso, $H(x,t) = x - \xi(x,t)$, onde $\xi(x,t) = tT(x) + (1-t)S(x)$, logo $H(x,t)$ é uma perturbação compacta da identidade.

Como $\phi(x) = \psi(x)$ para todo $x \in \partial\Omega$ então $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, assim, pela invariância do grau por homotopia compacta, obtemos que, $d(H(.,t), \Omega, b)$ é constante para todo $t \in [0,1]$, isto é,

$$d(\psi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega, b).$$

■

Corolário 1.8 *Não existe $\phi \in C(B(0,1), \partial B(0,1))$, $\phi = I - T$, onde $T : B(0,1) \to X$ é compacta, tal que $\phi_{|\partial B(0,1)} = I_{|\partial B(0,1)}$.*

Prova. Temos que $I = \psi = I - \widetilde{T}$, onde $\widetilde{T}$ é o operador compacto identicamente nulo. Suponhamos, por contradição, que $\phi_{|\partial B(0,1)} = \psi_{|\partial B(0,1)} = I_{|\partial B(0,1)}$. Pelo corolário anterior,

$$d(\phi, B(0,1), 0) = d(\psi, B(0,1), 0) = d(I, B(0,1), 0) = 1 \neq 0.$$

Logo, existe $x_0 \in B(0,1)$ tal que $\phi(x_0) = 0$, contradição, pois, $\phi : B(0,1) \to \partial B(0,1)$, assim, $\|\phi(x)\| = 1$, para todo $x \in B(0,1)$. ■

Corolário 1.9 *Seja F um subespaço fechado de X contendo o ponto b e $T(\overline{\Omega})$. Então,*

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi_{|\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Prova. Como F é um subespaço fechado que contém $T(\overline{\Omega})$ então $K = \overline{T(\overline{\Omega})}$ é um compacto de F. Assim, pelo Lema 1.2, existem $F_{r/2}$ um subespaço de dimensão finita de F e uma aplicação $g_{r/2} \in C(K, F_{r/2})$ tal que $\|x - g_{r/2}(x)\| \leq r/2$ para todo $x \in K$, onde $r = d(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$. Se $\phi_r = I - g_{r/2} \circ T$ então $\|\phi - \phi_r\|_\infty \leq r/2$. Seja

$r' = d(b, \phi_{|\overline{\Omega}\cap F}\partial_F(\Omega \cap F)) \geq r > 0$. Como $\|\phi_{|\overline{\Omega}\cap F} - \phi_{r_{|\overline{\Omega}\cap F}}\|_\infty \leq \|\phi - \phi_r\|_\infty \leq r/2 \leq r'/2$. Então,

$$\begin{aligned} d(\phi_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b) &= d(\phi_{r_{|\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, b) \\ &= d(\phi_r, \Omega, b) \\ &= d(\phi, \Omega, b). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi_{|\overline{\Omega}\cap F}, \Omega \cap F, b).$$

■

1.3 O Índice de Ponto Fixo

O Índice de um Ponto Fixo, como o próprio nome sugere, é uma ferramenta que tem como uma de suas principais aplicações encontrar pontos fixos de operadores compactos definidos e assumindo valores em cones. Essa ferramenta nos será de fundamental importância, pois recorreremos a técnicas de ponto fixo a fim de encontrarmos soluções para os problemas que aqui serão estudados, mais precisamente, os resultados que serão utilizados são aplicações do Índice de Ponto Fixo.

Seja C um subconjunto fechado e convexo de um espaço de Banach X, e $W \subset C$ relativamente aberto em C, isto é, $W = O \cap C$ para algum subconjunto aberto O de X. Consideremos $\phi : \overline{W} \to C$ uma aplicação compacta tal que $\phi(x) \neq x$ para $x \in \overline{W} \backslash W$. Associado com cada aplicação ϕ, definimos um inteiro $i_C(\phi, W)$, chamado o índice de ponto fixo de ϕ, como segue. Pelo Teorema de Dugundji [14], a aplicação ϕ tem uma extensão compacta $\tilde{\phi} : \overline{O} \to C$. Então definimos:

$$i_C(\phi, W) = d(I - \tilde{\phi}, O, 0). \tag{1.5}$$

Vejamos que $i_C(\phi, W)$ está bem definido. Para tanto, basta verificar os três fatos a seguir:

(a) $\tilde{\phi}(x) \neq x$ para todo $x \in \partial O$;

(b) o grau no lado direito de (1.5), independe da extensão particular $\tilde{\phi}$;

(c) também não depende do conjunto particular aberto O.

Mostremos cada item:

(a) Temos que $W = O \cap C$, assim $\overline{W} \subset \overline{C} = C$, pois C é fechado, daí, afirmamos que $\overline{W} \backslash W \subset \partial O$, com efeito, seja $x \in \overline{W} \backslash W$, logo $x \in \overline{W}$ donde $x \in C$ e $x \notin W$, isto é, $x \notin O$ ou $x \notin C$, como $x \in C$ então $x \notin O$, assim, $B(x, r)$, $r > 0$, contém pelo menos $x \notin O$, donde $B(x, r) \cap O^c \neq \emptyset$. Por outro lado, se $x \in \overline{W}$ então, próximos de x, existem pontos de W que convergem a x, logo $B(x, r)$ contém pontos de W, e portanto, pontos de O, pois $W = O \cap C$, assim, $B(x, r) \cap O \neq \emptyset$. Desta forma, $x \in \partial O$, e portanto, $\overline{W} \backslash W \subset \partial O$.

Devemos analisar dois casos:

- Se $x \in \partial O$ e $x \in \overline{W}\backslash W$, notemos que $\tilde{\phi}(x) = \phi(x)$ para todo $x \in \overline{W}$. Além disso, $\phi(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{W}\backslash W$, assim $\tilde{\phi}(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{W}\backslash W$.

- Agora, se $x \in \partial O$ e $x \notin \overline{W}\backslash W$, temos que $x \notin C$. De fato, como $x \notin \overline{W}\backslash W$ então $x \in W$ ou $x \notin \overline{W}$. Temos que $x \in \partial O$, como O é aberto então $x \notin O$, dessa forma, $x \notin W$. Logo, devemos ter $x \notin \overline{W}$ donde $x \notin W$, ou seja, $x \notin C$, já que $x \notin O$.

  Por outro lado, $\tilde{\phi} : \overline{O} \to C$, donde $\tilde{\phi}(x) \in C$ e, como $x \notin C$ segue que $\tilde{\phi}(x) \neq x$.

  Portanto $\tilde{\phi}(x) \neq x$ para todo $x \in \partial O$;

(b) Sejam $\tilde{\phi}_1 : \overline{O} \to C$ e $\tilde{\phi}_2 : \overline{O} \to C$ duas extensões compactas de $\phi : \overline{W} \to C$. Devemos mostrar que $d(I - \tilde{\phi}_1, O, 0) = d(I - \tilde{\phi}_2, O, 0)$.

Consideremos a aplicação $H_t(x) : x - t\tilde{\phi}_1(x) - (1-t)\tilde{\phi}_2(x)$, onde $x \in \overline{O}$ e $t \in [0,1]$. Observemos que $H_t : \overline{O} \to C$ é uma perturbação compacta da identidade para $t \in [0,1]$, pois $S_t : \overline{O} \to C$, dada por $S_t(x) = t\tilde{\phi}_1(x) + (1-t)\tilde{\phi}_2(x)$, é compacta para todo $t \in [0,1]$. Além disso, S_t é também uma extensão de ϕ a $\overline{O}$. Logo, pelo item **(a)**, $S_t(x) \neq x \; \forall x \in \partial O$ e $t \in [0,1]$. Portanto, $0 \notin H_t(\partial O) \; \forall t \in [0,1]$. Assim, pela propriedade de invariância por homotopia, segue que $d(H_t(.), O, 0)$ é constante, para todo $t \in [0,1]$, isto é,

$$d(I - \tilde{\phi}_1, O, 0) = d(I - \tilde{\phi}_2, O, 0).$$

(c) Sejam O_1, O_2 subconjuntos abertos de X tais que $O_1 \cap C = W = O_2 \cap C$ e $\tilde{\phi}_1 : \overline{O}_1 \to C$, $\tilde{\phi}_2 : \overline{O}_2 \to C$ extensões de $\phi : \overline{W} \to C$ a $\overline{O}_1$ e $\overline{O}_2$, respectivamente.

Devemos mostrar que,

$$d(I - \tilde{\phi}_1, O_1, 0) = d(I - \tilde{\phi}_2, O_2, 0).$$

Observemos que $O_1 \cap O_2$ é aberto, $W = O_1 \cap O_2 \cap C$ e $\tilde{\phi}_1$, $\tilde{\phi}_2$ podem ser vistas como extensões de ϕ a $O_1 \cap O_2$. Além disso, $\partial(O_1 \cap O_2) \subset \partial O_1 \cup \partial O_2$. Portanto, pelo item **(b)**, temos que

$$d(I - \tilde{\phi}_1, O_1 \cap O_2, 0) = d(I - \tilde{\phi}_2, O_1 \cap O_2, 0).$$

Observemos que, se $x \in \overline{O}_1 \backslash (O_1 \cap O_2)$ então $\tilde{\phi}(x) \neq x$.

De fato, temos que $x \in \overline{O}_1$ e $x \notin O_1 \cap O_2$. Como $x \in \overline{O}_1$ então $x \in O_1$ ou $x \in \partial O_1$ e neste último caso, notemos que, $\tilde{\phi}(x) \neq x$.

Suponhamos agora que $x \in O_1$, como $x \notin O_1 \cap O_2$ então $x \notin O_2$, donde segue que $x \notin C$. Com efeito, seja $x \in C$, logo, como $x \in O_1$ então $x \in W = O_1 \cap C$, mas, por outro lado, $W = O_2 \cap C$ donde $x \in O_2$, o que é uma contradição. Logo $x \notin C$ e desde que $\tilde{\phi}(x) \in C$ então $\tilde{\phi}(x) \neq x$. Assim, pela propriedade de excisão, obtemos:

$$d(I - \tilde{\phi}_1, O_1, 0) = d(I - \tilde{\phi}_1, O_1 \cap O_2, 0).$$

De maneira análoga,

$$d(I - \tilde{\phi}_2, O_2, 0) = d(I - \tilde{\phi}_2, O_1 \cap O_2, 0).$$

Portanto,

$$d(I - \tilde{\phi}_1, O_1, 0) = d(I - \tilde{\phi}_2, O_2, 0).$$

1.3.1 Propriedades do Índice de Ponto Fixo

As propriedades usuais do Grau de Leray-Schauder são transferidas naturalmente ao índice de ponto fixo. Portanto, temos as seguintes propriedades do índice $i_C(\phi, W)$:

(i) Normalização: Seja $\phi : \overline{W} \to W$ uma aplicação constante, isto é, $\phi(x) = a$ para todo $x \in \overline{W}$ e algum $a \in W$ fixado. Então $i_C(\phi, W) = 1$.

De fato, temos que $i_C(\phi, W) = d(I - \tilde{\phi}, O, 0)$, onde $\tilde{\phi} : \overline{O} \to C$ é uma extensão compacta de ϕ e O é um subconjunto aberto de X tal que $O \cap C = W$.
Consideremos a extensão compacta $\tilde{\phi} : \overline{O} \to C$ dada por $\tilde{\phi}(x) = a$, para todo $x \in \overline{O}$. Por definição,

$$i_C(\phi, W) = d(I - \tilde{\phi}, O, 0) = d(I - a, O, 0).$$

Como $a \in W = O \cap C$ então $a \in O$, sendo O aberto, obtemos que $a \notin \partial O = I(\partial O)$. Logo,

$$d(I - a, O, 0) = d(I, O, a) = 1, \text{ e daí } i_C(\phi, W) = 1.$$

(ii) Aditividade: Sejam W_1, W_2 dois subconjuntos de W, disjuntos e relativamente abertos. Seja $\phi : \overline{W} \to C$ uma aplicação compacta tal que $\phi(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{W} \backslash (W_1 \cup W_2)$. Então $i_C(\phi, W) = i_C(\phi, W_1) + i_C(\phi, W_2)$.

Com efeito, por definição $i_C(\phi, W) = d(I - \tilde{\phi}, O, 0)$, onde $W = O \cap C$ e $\tilde{\phi} : \overline{O} :\to C$ é uma extensão compacta de ϕ.
Sejam $W_1 = A_1 \cap W$ e $W_2 = A_2 \cap W$, onde A_1, A_2 são abertos. Como $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, podemos supor $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Temos que $W_1 = A_1 \cap O \cap C$ e $W_2 = A_2 \cap O \cap C$, donde W_1 e W_2 são relativamente abertos em C. Além disso, $O_1 = A_1 \cap O$, $O_2 = A_2 \cap O$ são abertos, disjuntos e $O_1 \cup O_2 \subset O$.
Temos que, se $x \in \overline{O} \backslash (O_1 \cup O_2)$ então $x \in \partial O$ ou $x \notin C$ ou $x \in \overline{W} \backslash W_1 \cup W_2$, de forma que, em ambos os casos $\tilde{\phi}(x) \neq x$. Logo, pela propriedade de aditividade do grau, obtemos:

$$d(I - \tilde{\phi}, O, 0) = d(I - \tilde{\phi}, O_1, 0) + d(I - \tilde{\phi}, O_2, 0) = i_C(\phi, W_1) + i_C(\phi, W_2).$$

donde,

$$i_C(\phi, W) = i_C(\phi, W_1) + i_C(\phi, W_2).$$

(iii) Invariância por Homotopia: Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo compacto e $h : I \times \overline{W} \to C$ uma aplicação compacta tal que $h(t, x) \neq x$ para todo $x \in \overline{W} \backslash W$ e para todo $t \in I$. Então $i_C(h(t, .), W)$ é constante, para todo $t \in I$.

De fato, Sejam $t \in I$, $h(t, .) : \overline{W} \to C$ e $\tilde{h}(t, .) : \overline{O} \to C$ uma extensão compacta de $h(t, .)$.
Por definição:

$$i_C(h(t, .), W) = d(I - \tilde{h}(t, .), O, 0).$$

Vimos que $\tilde{h}(t, x) \neq x \ \forall x \in \partial O$. Daí, pela propriedade de invariância por homotopia do grau, obtemos que $d(I - \tilde{h}(t, .), O, 0)$ é constante para todo $t \in I$. Portanto, $i_C(h(t, .), W)$ é constante para todo $t \in I$.
(iv) Excisão: Sejam $V \subset W$ relativamente aberto e $\phi : \overline{W} \to C$ uma aplicação compacta tal que $\phi(x) \neq x$ para $x \in \overline{W} \backslash V$. Então,

$$i_C(\phi, W) = i_C(\phi, V).$$

Afirmação 1 *Seja* $\phi : \overline{W} \to C$ *uma aplicação compacta tal que* $\phi(x) \neq x$ $\forall x \in \overline{W} \backslash W$. *Então* $i_C(\phi, \emptyset) = 0$.

De fato, sejam $W_1 = W$ e $W_2 = \emptyset$ em (ii) então temos que,

$$i_C(\phi, W) = i_C(\phi, W_1) + i_C(\phi, W_2) = i_C(\phi, W) + i_C(\phi, \emptyset),$$

daí, $i_C(\phi, \emptyset) = 0$.

Consideremos $W_1 = V$ e $W_2 = \emptyset$ em (ii). Temos que $\phi(x) \neq x$ para todo $x \in \overline{W} \backslash V$, ou seja, para todo $x \in \overline{W} \backslash W_1 \cup W_2$. Logo,

$$i_C(\phi, W) = i_C(\phi, W_1) + i_C(\phi, W_2) = i_C(\phi, V) + i_C(\phi, \emptyset) = i_C(\phi, V).$$

(v) Propriedade da Solução: Se $i_C(\phi, W) \neq 0$ então existe $x \in W$ tal que $\phi(x) = x$.

De fato, por definição $i_C(\phi, W) = d(I - \tilde{\phi}, O, 0)$, logo, $d(I - \tilde{\phi}, O, 0) \neq 0$ assim, como conseqüência das propriedades do grau, existe $x \in O$ tal que $x - \tilde{\phi}(x) = 0$, donde $\tilde{\phi}(x) = x$. Como $\tilde{\phi}(x) \in C$ então $x \in C$, daí $x \in O \cap C = W$. Mas, $\tilde{\phi}\,|_W = \phi$, logo, $x = \tilde{\phi}(x) = \phi(x)$. Portanto, existe $x \in W$ tal que $\phi(x) = x$.

1.3.2 Aplicações do Índice de Ponto Fixo

Aplicaremos os fatos anteriores para o caso em que C é um cone. Relembremos que um cone C, em um espaço de Banach X, é um subconjunto fechado de X tal que:

(a) Se $x, y \in C$ e $\alpha, \beta \geq 0$ então $\alpha x + \beta y \in C$.
Como conseqüência, $0 \in C$, pois basta tomarmos $\alpha = \beta = 0$.

(b) Se $x \in C$ e $x \neq 0$ então $-x \notin C$.

Um cone induz uma ordem parcial em X, definida como segue: $x \leq y$ se, e somente se, $y - x \in C$. De fato, $x \leq x$ para todo $x \in C$, pois $x - x = 0 \in C$; Suponhamos agora que $x \leq y$ e $y \leq x$, logo $y - x \in C$ e $x - y \in C$. Temos que $y - x = -(x - y) \in C$ se, e somente se, $x - y = 0$ se, e somente se, $x = y$; Finalmente, se $x \leq y$ e $y \leq z$ então $y - x \in C$ e $z - y \in C$. Daí, $z - x = y - x + z - y \in C$, e portanto, $x \leq z$.

Os lemas que seguem serão utilizados para provar o resultado principal, que garante a existência de pontos fixos dos operadores associados aos problemas que aqui serão estudados.

Lema 1.4 *Seja* Ω *um subconjunto aberto e limitado de* X *tal que* $0 \in \Omega$ *e* $\phi : C \cap \overline{\Omega} \to C$ *é um operador completamente contínuo. Suponhamos que*

$$\phi(x) \neq \mu x, \text{ para todo } x \in C \cap \partial\Omega \text{ e } \mu \geq 1. \tag{1.6}$$

Então, $i_C(\phi, C \cap \Omega) = 1$.

Prova. Consideremos a aplicação $h : [0,1] \times C \cap \overline{\Omega} \to C$ dada por $h(t,x) = t\phi(x)$. Como ϕ é um operador completamente contínuo, então h é uma aplicação completamente contínua. Afirmamos que $h(t,x) \neq x$ para todo $x \in C \cap \partial\Omega$ e para todo $t \in [0,1]$. De fato, suponhamos, por contradição, que $h(t,x) = x$ nas mesmas condições acima. Daí, $t\phi(x) = x$, para todo $x \in C \cap \partial\Omega$ e para todo $t \in [0,1]$. Em particular, $\phi(x) = x$ para todo $x \in C \cap \partial\Omega$, o que é uma contradição por (1.6). Logo, usando a propriedade de invariância por homotopia do Índice de Ponto Fixo, obtemos que $i_C(h(t,.), C \cap \Omega)$ é constante para todo $t \in [0,1]$, ou seja, $i_C(\phi, C\cap\Omega) = i_C(0, C\cap\Omega)$. Mas, pela propriedade de normalização de Índice de Ponto Fixo, temos que $i_C(0, C \cap \Omega) = 1$. Donde segue que $i_C(\phi, C \cap \Omega) = 1$. ∎

Lema 1.5 *Consideremos $\phi : C \cap \overline{\Omega} \to C$ e $\psi : C \cap \partial\Omega \to C$ operadores completamente contínuos. Suponhamos que*

(a) $\inf_{x\in C\cap\partial\Omega} \|\psi(x)\| > 0$*; e*

(b) $x - \phi(x) \neq t\psi(x)$ *para todo* $x \in C \cap \partial\Omega$ *e* $t \geq 0$.

Então $i_C(\phi, C \cap \Omega) = 0$.

Prova. Pelo Teorema de Dugundji [14], podemos estender ψ para um operador completamente contínuo de $C\cap\overline{\Omega}$ em C tal que $\psi(C\cap\overline{\Omega}) \subset \overline{co}\psi(C\cap\partial\Omega)$, onde $\overline{co}\psi(C\cap\partial\Omega)$ denota o fecho convexo de $\psi(C \cap \partial\Omega)$. Seja $F = \psi(C \cap \partial\Omega)$, então $\overline{co}\psi(C \cap \partial\Omega) = \overline{oc}F = \overline{M}$, onde

$$M = \left\{ y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i : y_i \in F, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1; n = 1, 2, 3, ... \right\}.$$

Afirmamos que

$$\inf_{y\in\overline{M}} \|y\| > 0. \tag{1.7}$$

Denotemos por E_0 o conjunto de todas as combinações lineares dos vetores de F. Notemos que $C \cap \partial\Omega \subset \partial\Omega$. Como Ω é um subconjunto limitado de E, então $\partial\Omega$ também é limitada e, portanto, $C \cap \partial\Omega$ é um subconjunto limitado. Daí, como ψ é um operador completamente contínuo, $F = \psi(C \cap \partial\Omega)$ é relativamente compacto, donde segue que E_0 é separável. Notemos, ainda, que $C_0 = C \cap E_0$ define um cone em E_0. Com efeito, dados $\alpha, \beta \geq 0$ e $y_1, y_2 \in C_0$ temos que $\alpha y_1 + \beta y_2$ ainda é uma combinação linear de vetores de F e, portanto, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in E_0$. Por outro lado, como C é um cone em E então, por definição de cone, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in C$. Logo, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in C \cap E_0 = C_0$. Além disso, se $y_1 \in C_0$ e $y_1 \neq 0$, então $y_1 \in C$, donde segue que $-y_1 \notin C$ e daí $-y_1 \notin C \cap E_0 = C_0$. Portanto C_0 define um cone em E_0. Mostremos agora que F e $\overline{co}F$ estão contidos em C_0. Seja $y \in F = \psi(C \cap \partial\Omega) \subset C$, daí $y \in C$. Evidentemente, se $y \in F$, $y \in E_0$. Logo, $y \in C \cap E_0 = C_0$. Donde $F \subset C_0$. Consideremos agora, $y \in \overline{co}F$. Assim, $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ com $y_i \in F$ e $\lambda_i \geq 0$. Por definição, notemos que y é uma combinação linear de vetores de F, daí $y \in E_0$. Além disso, se $y_i \in F$, $y_i \in C$, e como $\lambda_i \geq 0$ para todo $i = 1, ..., n$, obtemos que $y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i \in C$, usando o fato que C define um cone em E. Logo, $y \in C \cap E_0 = C_0$. Portanto, provamos que F, $\overline{co}F \subset C_0$. Como E_0 é separável, pelo Teorema 1.4.1 [7], existe $f_0 \in E_0^*$ tal que $f_0(y) > 0$, para todo $y \in C_0$ com $y \neq 0$, onde E_0^* denota o conjunto de todos os funcionais lineares e limitados de E_0. Notemos que

$$\inf_{y\in F} f_0(y) = \sigma > 0. \tag{1.8}$$

De fato, suponhamos, por contradição, que $\sigma = 0$. Pela definição de σ, existe uma seqüência $\{y_k\} \subset F$ tal que $f_0(y_k) \to \sigma = 0$. Usando o fato que F é relativamente compacto, existe uma subseqüência $\{y_{k_i}\}$ de $\{y_k\}$ tal que $y_{k_i} \to y_0 \in F \subset C_0$, ou seja, $y_{k_i} \to y_0 \in C_0$. Assim, como $f_0 \in E_0^*$, $f_0(y_{k_i}) \to f_0(y_0)$, e como $f_0(y_k) \to \sigma = 0$, obtemos que, $f_0(y_0) = 0$. Logo, existe $y_0 \in C_0$ tal que $f_0(y_0) = 0$, e pelo Teorema 1.4.1 [7], concluímos que $y_0 = 0$, daí $y_{k_i} \to 0$, donde $\|y_{k_i}\| \to 0$, o que é uma contradição pela hipótese (a). Portanto, $\inf_{y \in F} f_0(y) = \sigma > 0$. Donde segue que, para todo $y = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i \in M$ com $y_i \in F$, $\lambda_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, usando ainda a linearidade de f_0,

$$f_0(y) = f_0\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_0(y_i) \geq \sum_{i=1}^n \lambda_i \inf_{y_i \in F} f_0(y_i) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \sigma = \sigma.$$

Ou seja,

$$f_0(y) \geq \sigma, \text{ para todo } y \in \overline{M}. \tag{1.9}$$

Como F é relativamente compacto, $\overline{co}F = \overline{M}$ é compacto e, portanto, existe $z_0 \in \overline{M}$ tal que

$$\inf_{y \in \overline{M}} \|y\| = \|z_0\|. \tag{1.10}$$

Como $z_0 \in \overline{M}$, por (1.9), $f_0(z_0) \geq \sigma$. Assim, temos $z_0 \in \overline{M} \subset C_0$, ou seja, $z_0 \in C_0$ tal que $f_0(z_0) > 0$ o que implica que $z_0 \neq 0$. Segue, portanto, que $\inf_{y \in \overline{M}} \|y\| = \|z_0\| > 0$, provamos, dessa forma, nossa afirmação em (1.7). Como $\psi(C \cap \overline{\Omega}) \subset \overline{co}\psi(C \cap \partial\Omega)$, por (1.7) obtemos

$$\inf_{x \in C \cap \overline{\Omega}} \|\psi(x)\| = a > 0. \tag{1.11}$$

Afirmamos, agora, que

$$i_C(\phi, C \cap \Omega) = 0.$$

De fato, suponhamos por contradição que $i_C(\phi, C \cap \Omega) \neq 0$. Definamos $H(t, x) = \phi(x) + t\psi(x)$. Por (b), temos que $H(t, x) \neq x$, para todo $x \in C \cap \partial\Omega$ e $t \geq 0$. Assim, usando a propriedade de invariância por homotopia do Índice de Ponto Fixo, obtemos

$$i_C(\phi + t\psi, C \cap \Omega) = i_C(\phi, C \cap \Omega) \neq 0, \text{ para todo } t > 0.$$

Em particular, consideremos $t_0 > (b+c)/a$, onde $b = \sup_{x \in C \cap \overline{\Omega}} \|x\|$ e $c = \sup_{x \in C \cap \overline{\Omega}} \|\phi(x)\|$. Daí, $i_C(\phi + t_0\psi, C \cap \Omega) \neq 0$. Dessa forma, pela propriedade de solução do Índice de Ponto Fixo, existe $x_0 \in C \cap \Omega$ tal que $\phi(x_0) + t_0\psi(x_0) = x_0$. Donde segue que

$$t_0 = \|x_0 - \phi(x_0)\| / \|\psi(x_0)\| \leq (\|x_0\| + \|\phi(x_0)\|)/\|\psi(x_0)\| \leq (b + c)/a.$$

Ou seja, $t_0 \leq (b + c)/a$, o que é uma contradição. Portanto, $i_C(\phi, C \cap \Omega) = 0$. ■

Lema 1.6 *Seja $\phi : C \cap \overline{\Omega} \to C$ uma aplicação completamente contínua. Suponhamos,*

(i) $\inf_{x \in C \cap \partial\Omega} \|\phi(x)\| > 0$;

(ii) $\phi(x) \neq \mu x$ *para todo* $x \in C \cap \partial\Omega$ *e* $0 < \mu \leq 1$.

Então $i_C(\phi, C \cap \Omega) = 0$.

Prova. Consideremos $\psi = \phi$ no Lema 1.5; daí, obtemos por (i), a condição (a) do Lema 1.5. Afirmamos que a condição (b) também é satisfeita. Com efeito, suponhamos, por contradição, que existam $x_0 \in C \cap \partial\Omega$ e $t_0 \geq 0$ tais que $x_0 - \phi(x_0) = t_0\phi(x_0)$. Se considerarmos $\mu_0 = (1+t_0)^{-1}$, teremos que $0 < \mu_0 \leq 1$. Além disso, $\phi(x_0) = \mu_0 x_0$, o que é uma contradição por (ii). Como as condições do Lema 1.5 são satisfeitas, segue que $i_C(\phi, C \cap \Omega) = 0$. ∎

A fim de utilizar, nesse trabalho, técnicas de ponto fixo, consideraremos o seguinte Teorema de Ponto Fixo do Tipo Expansão/Compressão em Cones:

Teorema 1.1 *Sejam Ω_1 e Ω_2 subconjuntos abertos e limitados de X tais que $0 \in \Omega_1$ e $\overline{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. Consideremos $\phi : C \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1) \to C$ um operador completamente contínuo. Suponhamos que*

1. *$\|\phi(x)\| < \|x\|$, para todo $x \in C \cap \partial\Omega_1$ e $\|\phi(x)\| > \|x\|$, para todo $x \in C \cap \partial\Omega_2$; ou*

2. *$\|\phi(x)\| > \|x\|$, para todo $x \in C \cap \partial\Omega_1$ e $\|\phi(x)\| < \|x\|$, para todo $x \in C \cap \partial\Omega_2$.*

Então, ϕ tem pelo menos um ponto fixo em $C \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

Prova. Suponhamos que a hipótese *1* seja satisfeita. Provaremos o teorema apenas nessas condições, já que, supondo *2*, obteremos a prova de maneira análoga. Notemos que $\phi(x) \neq \mu x$ para todo $x \in C \cap \partial\Omega_1$, e $\mu \geq 1$. Pois, caso contrário, se existem $x_0 \in C \cap \partial\Omega_1$ e $\mu_0 > 1$ tais que $\phi(x_0) = \mu_0 x_0$, temos que $\|\phi(x_0)\| = \mu_0\|x_0\| > \|x_0\|$, o que é uma contradição por *1*. Segue do Lema 1.4 que $i_C(\phi, C \cap \Omega_1) = 1$. Por outro lado, afirmamos que $\phi(x) \neq \mu x$ para todo $x \in C \cap \partial\Omega_2$ e $0 < \mu \leq 1$. Caso contrário, se existem $x_1 \in C \cap \partial\Omega_2$ e $0 < \mu_1 < 1$ tais que $\phi(x_1) = \mu_1 x_1$ então $\|\phi(x_1)\| = \mu_1\|x_1\| < \|x_1\|$, o que é uma contradição por *1*. Além disso, ainda por *1*, temos que $\|\phi(x)\| > \|x\|$, para todo $x \in C \cap \partial\Omega_2$. Donde segue que $\inf_{x \in C \cap \partial\Omega_2} \|\phi(x)\| > \inf_{x \in C \cap \partial\Omega_2} \|x\| > 0$, já que $x \in C \cap \partial\Omega_2$ e $0 \in \Omega_2$, que é um subconjunto aberto de X. Daí, pelo Lema 1.6, $i_C(\phi, C \cap \Omega_2) = 0$. Como $i_C(\phi, C \cap \Omega_1) = 1$ e $i_C(\phi, C \cap \Omega_2) = 0$, pela propriedade de aditividade de Índice de Ponto Fixo,

$$i_C(\phi, C \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)) = i_C(\phi, C \cap \Omega_2) - i_C(\phi, C \cap \Omega_1) = -1 \neq 0.$$

Portanto, pela propriedade de solução do Índice de Ponto Fixo, ϕ tem pelo menos um ponto fixo em $C \cap \overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1$. ∎

1.4 Princípios do Máximo

Nesta seção introduziremos resultados de princípios do máximo para equações diferenciais parciais elípticas, que nos serão úteis, entre outras coisas, para obtermos a positividade de soluções. Consideraremos a abordagem dada em [20], assim, sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado e L um operador elíptico dado por:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i u_{x_i} + cu,$$

onde os coeficientes a_{ij}, b_i e c são contínuos, L é um operador unifomemente elíptico, ou seja, existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta|\xi|^2,$$

para quase todo $x \in \Omega$ e todo $\xi \in \mathbb{R}^n$. Além disso, a_{ij} é simétrica, isto é, $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, ..., n)$. Consideremos os seguintes teoremas:

Teorema 1.2 ([20], Princípio do Máximo Fraco) *Suponhamos $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \equiv 0$ em Ω.*

(i) *Se $Lu \leq 0$ em Ω então $\max_{\overline{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u$.*

(ii) *Se $Lu \geq 0$ em Ω então $\min_{\overline{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u$.*

Teorema 1.3 ([20], Princípio do Máximo Forte) *Suponhamos $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $c \equiv 0$ em Ω. Suponhamos ainda, Ω conexo, aberto e limitado.*

(i) *Se $Lu \leq 0$ em Ω e u atinge o máximo sobre o $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω.*

(ii) *Similarmente, se $Lu \geq 0$ em Ω e u atinge o mínimo sobre o $\overline{\Omega}$ em um ponto interior, então u é constante em Ω.*

Teorema 1.4 ([20], Lema de Hopf Refinado) *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto, $u \in C^2(\overline{\Omega})$, e $c \in L^\infty(\Omega)$. Suponhamos que,*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu \geq 0 & em \quad \Omega, \\ u \geq 0 & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Suponhamos também $u \neq 0$.

(i) *Se $x^0 \in \partial\Omega$, $u(x^0) = 0$ e Ω satisfaz a condição de bola interior em x^0, então*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x^0) < 0.$$

(ii) *Além disso, $u > 0$ em Ω.*

1.5 Resultados Preliminares

Nesta seção citaremos resultados importantes que serão utilizados no desenvolvimento do trabalho.

Teorema 1.5 ([26], Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue) *Seja (f_n) uma seqüência de funções integráveis que convergem quase sempre para uma função mensurável de valor real f. Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo n, então f é integrável e,*

$$\int f d\mu = \lim \int f_n d\mu.$$

Teorema 1.6 ([12], Agmon-Douglis-Nirenberg) *Suponhamos que Ω é de classe C^2 com a $\partial\Omega$ limitada. Seja $1 < p < \infty$. Então para todo $f \in L^p(\Omega)$, existe uma única $u \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ solução da equação:*

$$-\Delta u + u = f \ \text{ em } \Omega.$$

Além disso, se Ω é de classe C^{m+2} e se $f \in W^{m,p}(\Omega)$ (m inteiro ≥ 1), então

$$u \in W^{m+2,p}(\Omega) \quad e \quad \|u\|_{W^{m+2,p}} \leq C\|f\|_{W^{m,p}}.$$

Teorema 1.7 ([23], Estimativas de Schauder) *Seja $u \in C^{2,\alpha}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então $f \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ e $\|u\|_{C^{2,\alpha}} \leq k\|f\|_{C^{0,\alpha}}$.

Teorema 1.8 ([6], Teorema 6.14) *Sejam Ω um domínio limitado de classe $C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $c \geq 0$. Então o problema*

$$\begin{cases} -\Delta u + cu = f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

tem uma única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.9 ([20], Critério de Compacidade de Ascoli-Arzelá) *Suponhamos que $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ é uma seqüência de funções de valores reais definidas em $\mathbb{R}^n$, tal que,*

$$\|f_k(x)\| \leq M \ (k = 1, ..., x \in \mathbb{R}^n)$$

para alguma constante M, e $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ são uniformemente equicontínuas. Então existem uma subseqüência $(f_{k_j})_{j=1}^{\infty} \subseteq (f_k)_{k=1}^{\infty}$ e uma função contínua f, tais que

$$f_{k_j} \to f \ \text{ uniformemente sobre subconjuntos compactos do } \mathbb{R}^n.$$

1.6 O Método de Sub e Super Solução

Esse método será utilizado para obtermos soluções de problemas que aqui serão estudados. Consideraremos a abordagem dada em [4]. Lembremos primeiramente o que vêm a ser uma sub e uma super solução.

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x,u) + f & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.12}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto e limitado, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma função dada e $g \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Definição 1.8 *Dizemos que $\underline{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma sub solução de (1.12) se,*

$$\begin{cases} -\Delta \underline{u} \leq g(x,\underline{u}) + f & \text{em} \quad \Omega, \\ \underline{u} \leq 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.13}$$

Definição 1.9 *Dizemos que $\bar{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma super solução de (1.12) se,*

$$\begin{cases} -\Delta \bar{u} \geq g(x, \bar{u}) + f & em \quad \Omega, \\ \bar{u} \geq 0 & sobre \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

O próximo teorema trata de um resultado de existência de solução, que será utilizado diversas vezes do decorrer do trabalho.

Teorema 1.10 ([4], Teorema 2.1) *Suponhamos que o Problema (1.12) tenha uma sub solução $\underline{u}$ e uma super solução $\bar{u}$, com $\underline{u} \leq \bar{u}$. Então o Problema (1.12) tem soluções $U, V \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que $\underline{u} \leq U \leq V \leq \bar{u}$. Além disso, qualquer solução de (1.12) com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ é tal que $U \leq u \leq V$ (isto não afirma que $U \neq V$).*

Prova. Definamos $k := \max\{|g_s(x,s)| : x \in \overline{\Omega}, \underline{u}(x) \leq s \leq \bar{u}(x)\}$, onde, $g_s(x,s)$ é a derivada parcial de g em relação a segunda variável, isto é, $g_s(x,s) = (\partial g/\partial s)(x,s)$. Devemos mostrar que k está bem definido. Com efeito, consideremos

$$W = \{(x,s) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} : \underline{u}(x) \leq s \leq \bar{u}(x)\},$$

mostremos que W é compacto. Como $\underline{u}, \bar{u} \in C^2(\overline{\Omega})$ então existem m, M tais que $m \leq \underline{u}(x) \leq s \leq \bar{u}(x) \leq M$, logo $W \subset \overline{\Omega} \times [m, M]$ e portanto é limitado. Seja (x_n, s_n) uma seqüência em W. Como $\overline{\Omega}$ é compacto, a menos de subseqüência $x_n \to x_0$. Além disso, temos que $m \leq \underline{u}(x_n) \leq s_n \leq \bar{u}(x_n) \leq M$, assim, usando a continuidade das funções $\underline{u}, \bar{u}$, obtemos que, $m \leq \underline{u}(x_0) \leq s_0 \leq \bar{u}(x_0) \leq M$, donde $s_n \to s_0$, logo W é fechado. Concluímos portanto, que W é compacto, e como $g \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ então, faz sentido falarmos no máximo de $g_s(x,s)$ em W. Logo k está bem definido.

Pelo Teorema 1.8, temos que para cada $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, existe um único $w \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tal que:

$$\begin{cases} -\Delta w + kw = g(x,u) + ku + f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ w = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

Isto define uma aplicação $T : C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ dada por $Tu_1 = w_1$. Afirmamos que T é uma aplicação monótona, no sentido que,

$$\text{se} \quad u_1(x) \leq u_2(x) \quad \text{então} \quad Tu_1(x) \leq Tu_2(x). \tag{1.16}$$

De fato, sejam $u_1, u_2 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ tais que $u_1(x) \leq u_2(x)$, reescrevendo a equação (1.15) para $u = u_1$ e $u = u_2$ obtemos,

$$\begin{cases} -\Delta w_1 + kw_1 = g(x,u_1) + ku_1 + f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ w_1 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.17}$$

e

$$\begin{cases} -\Delta w_2 + kw_2 = g(x,u_2) + ku_2 + f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ w_2 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.18}$$

Subtraindo (1.18) de (1.17) temos que,

$$\begin{cases} (-\Delta + k)(w_1 - w_2) = g(x,u_1) - g(x,u_2) + k(u_1 - u_2) & \text{em} \quad \Omega, \\ w_1 - w_2 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que $g \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, logo, aplicando o Teorema do Valor Médio obtemos que,

$$g(x, u_1(x)) - g(x, u_2(x)) = g_s(x, \tilde{u}(x))[u_1(x) - u_2(x)]$$

onde, $u_1(x) \le \tilde{u}(x) \le u_2(x)$. Pela definição de k temos que, $|g_s(x, \tilde{u}(x))| \le k$, logo $g_s(x, \tilde{u}(x)) + k \ge 0$. Além disso, $u_1(x) - u_2(x) \le 0$. Assim,

$$\begin{cases} (-\Delta + k)(w_1 - w_2) = (g_s(x, \tilde{u}(x)) + k)\,(u_1 - u_2) \le 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \hfill w_1 - w_2 = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 1.2),

$$\max_{\overline{\Omega}} w_1 - w_2 = \max_{\partial\Omega} w_1 - w_2 = 0,$$

donde $w_1 - w_2 \le 0$ em Ω, ou seja, $Tu_1(x) \le Tu_2(x)$.

Procedendo por iteração, definamos,

$$u_n = Tu_{n-1}, \ u_0 = \underline{u}; \ v_n = Tv_{n-1}, \ v_0 = \bar{u}.$$

Afirmamos que $\underline{u} = u_0 \le u_1 \le u_2 \le \cdots \le v_2 \le v_1 \le v_0 = \bar{u}$ em Ω. Para mostrarmos a monoticidade das seqüências (u_n) e (v_n) usaremos o método de indução. Mostremos primeiramente que $\underline{u} = u_0 \le u_1$. Temos que,

$$\begin{aligned} (-\Delta + k)(\underline{u} - u_1) &= (-\Delta + k)(\underline{u}) - (-\Delta + k)(Tu_0) \\ &= (-\Delta + k)(\underline{u}) - [g(x, u_0) + ku_0 + f(x)] \\ &= (-\Delta + k)(\underline{u}) - [g(x, \underline{u}) + k\underline{u} + f(x)] \\ &= -\Delta\underline{u} + k\underline{u} - g(x, \underline{u}) - k\underline{u} - f(x) \\ &= -\Delta\underline{u} - [g(x, \underline{u}) + f(x)]\,. \end{aligned}$$

Como $\underline{u}$ é subsolução então,

$$\begin{cases} (-\Delta + k)(\underline{u} - u_1) = -\Delta\underline{u} - [g(x, \underline{u}) + f(x)] \le 0 & \text{em} \quad \Omega, \\ \hfill \underline{u} - u_1 = \underline{u} \le 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Assim, pelo Princípio do Máximo Fraco,

$$\max_{\overline{\Omega}} \underline{u} - u_1 = \max_{\partial\Omega} \underline{u} - u_1 \le 0.$$

Ou seja, $\underline{u} \le u_1$ em Ω. De maneira análoga obtém-se $v_1 \le v_0 = \bar{u}$ em Ω. Suponhamos agora que,

$$\underline{u} = u_0 \le u_1 \le \cdots \le u_{n-1} \le u_n \le \cdots \le v_n \le v_{n-1} \le \cdots \le v_1 \le v_0 = \bar{u}.$$

Devemos mostrar que $u_n \le u_{n+1} \le \bar{u}$ e $\underline{u} \le v_{n+1} \le v_n$. Temos que, $u_{n-1} \le u_n$, usando a monoticidade do operador T obtemos que, $Tu_{n-1} \le Tu_n$, pela definição da seqüência concluímos que $u_n \le u_{n+1}$. Além disso, $u_n \le v_0$ donde $Tu_n \le Tv_0$, ou seja, $u_{n+1} \le v_1 \le v_0 = \bar{u}$, logo $u_n \le u_{n+1} \le \bar{u}$. De maneira análoga obtemos que, $\underline{u} \le v_{n+1} \le v_n$. Mostremos que $u_n \le v_n$ para todo n, com efeito, notemos que $u_0 \le v_0$, donde $Tu_0 \le Tv_0$, ou seja, $u_1 \le v_1$, procedendo dessa forma, por iteração obtemos que,

$u_n \leq v_n$ para todo n. Provamos assim, a afirmação e portanto (u_n) e (v_n) são seqüências monótonas limitadas de números reais, logo são convergentes. Dessa forma, existem U, V tais que,

$$u_n \to U \quad \text{e} \quad v_n \to V \quad \text{pontualmente}. \tag{1.19}$$

Como (u_n) e (v_n) são seqüências de funções limitadas por funções integráveis e convergem pontualmente para U, V respectivamente, segue pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (cf. Teorema 1.5), que U, V estão em $L^p(\Omega)$ e a convergência em (1.19) ocorre em $L^p(\Omega)$ para qualquer $p \geq 1$. Mostremos que (u_n) é uma seqüência de Cauchy em $W^{2,p}(\Omega)$, para tanto usaremos estimativas a priori para soluções de equações elípticas lineares em espaços de Sobolev $W^{2,p}(\Omega)$, mais especificamente usaremos o Teorema 1.6. Temos que,

$$\begin{cases} (-\Delta + k)(u_n - u_m) = g(x, u_{n-1}) - g(x, u_{m-1}) + k(u_{n-1} - u_{m-1}) & \text{em} \quad \Omega, \\ u_n - u_m = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Notemos que, o lado direito da equação está em $L^p(\Omega)$, logo, pelo Teorema 1.6 existe uma única solução $(u_n - u_m) \in W^{2,p}(\Omega)$ do problema acima, além disso,

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p}} \leq C \left\{ \|g(x, u_{n-1}) - g(x, u_{m-1})\|_{L^p} + \|u_{n-1} - u_{m-1}\|_{L^p} \right\},$$

onde C é uma constante que independe de n e m.

Temos que, (u_n) é uma seqüência de Cauchy em L^p, logo $\|u_{n-1} - u_{m-1}\|_{L^p} \to 0$ se $n, m \to \infty$. Por outro lado, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\begin{aligned} \int_\Omega |g(x, u_{n-1}) - g(x, u_{m-1})|^p dx &= \int_\Omega |g_s(x, \tilde{u})|^p |u_{n-1} - u_{m-1}|^p \\ &\leq k \int_\Omega |u_{n-1} - u_{m-1}|^p \to 0 \text{ quando } m, n \to \infty. \end{aligned}$$

Logo, (u_n) é uma seqüência de Cauchy em $W^{2,p}(\Omega)$, que é completo, e portanto (u_n) é convergente nesse espaço. Procedendo de maneira análoga com a seqüência (v_n), concluímos que a convergência em (1.19) ocorre em $W^{2,p}(\Omega)$. Pelo Teorema de Imersão de Sobolev, se $p > N$ temos que $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ continuamente, com $\alpha = 1 - Np^{-1}$, donde U, V estão em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e a convergência em (1.19) ocorre em $C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Usando estimativas de Schauder para soluções de equações elípticas lineares, mais precisamente pelo Teorema 1.7, concluímos que (u_n) e (v_n) são seqüências de Cauchy em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, que é completo, logo $U, V \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e a convergência em (1.19) ocorre na norma de $C^{2,\alpha}(\bar{\Omega})$. Temos que,

$$\begin{cases} -\Delta u_n + k u_n = g(x, u_{n-1}) + k u_{n-1} + f(x) & \text{em} \quad \Omega, \\ u_n = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.20}$$

Tomando o limite em (1.20) concluímos que U é solução do Problema (1.12). De maneira análoga temos que V também é solução do Problema (1.12). Além disso, como $\underline{u} \leq u_n \leq v_n \leq \bar{u}$ para todo n então $\underline{u} \leq U \leq V \leq \bar{u}$.

Mostremos agora que qualquer solução u do Problema (1.12) com $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ é tal que $U \leq u \leq V$. De fato, se u é solução do Problema (1.12), temos que u é a única solução do Problema (1.15) então, $Tu = u$. Assim, usando a monoticidade do operador T temos que, se $\underline{u} \leq u \leq \bar{u}$ então $T\underline{u} \leq Tu \leq T\bar{u}$, ou seja, $Tu_0 \leq u \leq Tv_0$, donde $u_1 \leq u \leq v_1$, por iteração obtemos que, $\underline{u} \leq u_1 \leq \cdots \leq u_n \leq \cdots \leq u \leq \cdots \leq v_n \leq \cdots \leq v_1 \leq \bar{u}$, donde segue que, $u_n \leq u \leq v_n$, logo, tomando o limite em n, obtemos que, $U \leq u \leq V$. ∎

Capítulo 2

Equações Elípticas com Multiparâmetros em Domínios Anulares

2.1 Introdução

Neste capítulo usaremos alguns teoremas clássicos de ponto fixo do tipo expansão/compressão em cones, mais precisamente, usaremos o Teorema 1.1, argumentos da Teoria do Grau e o método de sub e super solução para estudarmos existência, multiplicidade e não existência de soluções positivas para uma classe de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com multiparâmetros, da seguinte forma:

$$\begin{cases} -u'' = \lambda g(t, u(t), a, b) & \text{em} \quad (0,1), \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \tag{$P_{a,b,\lambda}$}$$

onde a, b e λ são parâmetros não negativos e $g \in C([0,1] \times [0,+\infty)^3, [0,+\infty))$ é uma função não-decrescente nas três últimas variáveis.

Os principais resultados desse capítulo podem ser aplicados a várias classes de problemas elípticos, tais como, equações elípticas semilineares em domínios anulares. Mais especificamente, o que motivou esse estudo foram equações da forma,

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda \hat{f}(|x|, u) & \text{em} \quad r_1 < |x| < r_2, \\ u(x) = a & \text{sobre} \quad |x| = r_1, \\ u(x) = b & \text{sobre} \quad |x| = r_2, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde a, b, λ são parâmetros não negativos e $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

Trabalharemos com dois resultados; um trata do caso quando g é superlinear no infinito e o outro considera g sublinear no infinito. Em ambos os casos, o comportamento da função g no zero pode mudar, de acordo com os parâmetros a, b considerados.

Consideremos as seguintes hipóteses sobre a não linearidade $g(t, u(t), a, b)$:

(g_0) $g \in C([0,1] \times [0,+\infty)^3, [0,+\infty))$ é uma função não-decrescente nas três últimas variáveis. Assim, se $(u_1, a_1, b_1) \leq (u_2, a_2, b_2)$, isto é, se $u_1 \leq u_2$, $a_1 \leq a_2$ e $b_1 \leq b_2$ então $g(t, u_1, a_1, b_1) \leq g(t, u_2, a_2, b_2)$. Além disso, existem constantes $0 < \delta_0 < \epsilon_0 < 1$ tais que, para todo $t \in [\delta_0, \epsilon_0]$, temos $g(t, 0, a, b) > 0$ quando a e b não se anulam simultaneamente, isto é, quando $a + b > 0$.

(g_1) Existem constantes $0 < \delta_1 < \epsilon_1 < 1$ tais que, para todo $(a, b) \in [0, +\infty)^2 \backslash \{(0, 0)\}$,

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(t, u, a, b)}{u} = +\infty,$$

uniformemente em $t \in [\delta_1, \epsilon_1]$.

(g_2)

$$\lim_{|(u,a,b)| \to 0} \frac{g(t, u, a, b)}{|(u, a, b)|} = 0,$$

uniformemente em $t \in [0, 1]$. Onde, $|(x_1, x_2, x_3)| = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

(g_3) Existem constantes $0 < \delta_2 < \epsilon_2 < 1$ tais que,

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{g(t, u, 0, 0)}{u} = +\infty,$$

uniformemente em $t \in [\delta_2, \epsilon_2]$.

(g_4) Existem constantes $0 < \delta_3 < \epsilon_3 < 1$ tais que,

$$\lim_{|(a,b)| \to +\infty} g(t, 0, a, b) = +\infty,$$

uniformemente em $t \in [\delta_3, \epsilon_3]$.

(g_5) Para todo $(a, b) \in [0, +\infty)^2$, temos que,

$$\lim_{u \to +\infty} \frac{g(t, u, a, b)}{u} = 0,$$

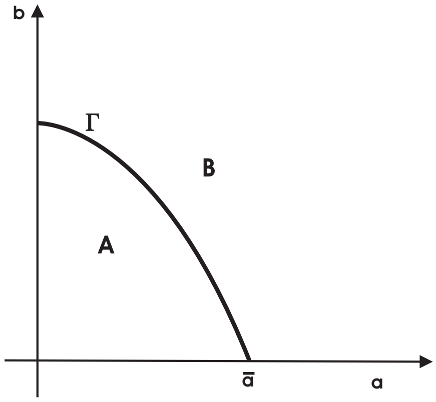
uniformemente em $t \in [0, 1]$.

(g_6) Existem constantes $R > 0$ e $0 < \delta_4 < \epsilon_4 < 1$ tais que,

$$g(t, u, 0, 0) > 0,$$

para todo $0 < u < R$ e $t \in [\delta_4, \epsilon_4]$.

Vejamos o primeiro resultado que trata da existência, multiplicidade e, também, não existência de soluções positivas para o Problema $(P_{a,b\,,\lambda})$. Provaremos a existência de uma curva contínua Γ, que divide o quadrante positivo do plano (a, b) em dois conjuntos disjuntos, digamos A e B. Mostraremos que o problema $(P_{a,b\,,1})$ tem pelo menos duas soluções positivas em A; pelo menos uma solução positiva na fronteira de A e não tem solução positiva em B. Ver figura abaixo:



Teorema 2.1 *Consideremos $g(t,u,a,b)$ satisfazendo as hipóteses (g_0)-(g_4) e suponhamos $\lambda = 1$. Então existem $\bar{a} > 0$ e uma função contínua não crescente $\Gamma : [0,\bar{a}] \to [0,+\infty)$ de forma que, para todo $a \in [0,\bar{a}]$, temos que:*

(i) *O Problema $(P_{a,b,1})$ tem pelo menos uma solução positiva se $0 \leq b \leq \Gamma(a)$;*

(ii) *o Problema $(P_{a,b,1})$ não tem solução se $b > \Gamma(a)$;*

(iii) *o Problema $(P_{a,b,1})$ tem uma segunda solução positiva se $0 < b < \Gamma(a)$.*

Notemos que, esse resultado considera o caso em que $\lambda = 1$, a função g é localmente superlinear no infinito e, seu comportamento no zero pode mudar, de acordo com os parâmetros a, b considerados. Uma aplicação para o Teorema 2.1 é dada por exemplo, se tivermos no Problema (2.1) $\hat{f}(|x|,u) = c(|x|)f(u)$, onde $c : [r_1, r_2] \to [0,+\infty)$ é uma função contínua, não negativa, não trivial e a não linearidade f é uma função contínua superlinear tanto no zero como no infinito. Um simples modelo é dado por $f(u) = u^p$ com $p > 1$.

Consideremos agora, o segundo resultado principal desse capítulo. Mostraremos que o problema $(P_{a,b,\lambda})$ tem pelo menos uma solução positiva para todo $a, b, \lambda > 0$. Além disso, mostraremos que existe $\rho > 0$ tal que $(P_{a,b,\lambda})$ tem pelo menos três soluções positivas, para todo $0 < |(a,b)| < \rho$ e λ suficientemente grande.

Teorema 2.2 *Consideremos a função $g(t,u,a,b)$ satisfazendo as hipóteses (g_0) até (g_2), e ainda, as hipóteses (g_5) e (g_6). Então:*

(i) *O Problema $(P_{a,b,\lambda})$ tem pelo menos uma solução positiva para todo $a, b, \lambda > 0$;*

(ii) *existe uma constante positiva ρ suficientemente pequena tal que, para todo $0 < |(a,b)| < \rho$ o Problema $(P_{a,b,\lambda})$ tem pelo menos três soluções positivas para λ suficientemente grande.*

Observemos que, neste caso, a função g tem crescimento sublinear no infinito, e seu comportamento no zero pode mudar, de acordo com os parâmetros a, b considerados. Uma aplicação para o Teorema 2.2 é dada, por exemplo, quando $f(u) = u^p/(1+u^q)$ com $\max\{1,q\} < p < q+1$.

Mais adiante nas aplicações, veremos exemplos de não linearidades $g(t,u,a,b)$ satisfazendo as hipóteses dos Teoremas 2.1 e 2.2.

2.2 Resultados Preliminares

Nesta seção provaremos alguns resultados que serão importantes nas provas dos Teoremas 2.1 e 2.2.

O lema que segue, nos será útil na definição de um operador associado ao Problema $(P_{a,b},_\lambda)$, cujos pontos fixos são soluções desse problema.

Lema 2.1 *A função u é uma solução do Problema $(P_{a,b},_\lambda)$ se, e somente se, para todo $t \in [0,1]$, u satisfaz,*

$$u(t) = \lambda(1-t)\int_0^t \tau g(\tau, u(\tau), a, b)d\tau + \lambda t \int_t^1 (1-\tau)g(\tau, u(\tau), a, b)d\tau.$$

Prova. Seja u uma solução do Problema $(P_{a,b},_\lambda)$. Consideremos o problema homogêneo correspondente a $(P_{a,b},_\lambda)$, dado por:

$$-u''(t) = 0 \quad \text{em} \quad (0,1)\ . \tag{2.2}$$

Notemos que, $u_1(t) = 1$ e $u_2(t) = t$ são soluções particulares, linearmente independentes da equação (2.2). Assim,

$$c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t),$$

constitui uma solução geral para (2.2), onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias.

Pelo método de variação de parâmetros (cf. [7], capítulo 3), temos que,

$$u(t) = u_1(t)\int_0^t \frac{u_2(\tau)\lambda g(\tau, u(\tau)a, b)}{W(u_1,u_2)(\tau)}d\tau - u_2(t)\int_0^t \frac{u_1(\tau)\lambda g(\tau, u(\tau)a, b)}{W(u_1,u_2)(\tau)}d\tau.$$

Onde,

$$W(u_1,u_2)(\tau) = \begin{vmatrix} u_1(\tau) & u_2(\tau) \\ u_1'(\tau) & u_2'(\tau) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \tau \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Assim,

$$u(t) = \int_0^t \tau\lambda g(\tau, u(\tau), a, b)d\tau - t\int_0^t \lambda g(\tau, u(\tau), a, b)d\tau.$$

Isto é,

$$u(t) = -\int_0^t \lambda(t-\tau)g(\tau, u(\tau)a, b)d\tau,$$

onde, $u(t)$ é uma solução particular para o Problema $(P_{a,b},_\lambda)$. Dessa forma, uma solução geral para $(P_{a,b},_\lambda)$ é dada por:

$$u(t) = c_1 + c_2 t - \lambda\int_0^t (t-\tau)g(\tau, u(\tau)a, b)d\tau. \tag{2.3}$$

Usando a solução geral de (2.2), a solução geral de $(P_{a,b},_\lambda)$ e, o fato que u solução de $(P_{a,b},_\lambda)$ implica $u(0) = u(1) = 0$, obtemos que,

$$c_1 = 0 \quad \text{e} \quad c_2 = \lambda\int_0^1 (1-\tau)g(\tau, u(\tau)a, b)d\tau.$$

Logo, substituindo c_1 e c_2 em (2.3), obtemos que,

$$\begin{aligned}
u(t) &= \lambda t\int_0^1(1-\tau)g(\tau,u(\tau)a,b)d\tau-\lambda\int_0^t(t-\tau)g(\tau,u(\tau)a,b)d\tau\\
&= \lambda t\int_0^t(1-\tau)g(\tau,u(\tau)a,b)d\tau+\lambda t\int_t^1(1-\tau)g(\tau,u(\tau)a,b)d\tau\\
&- \lambda\int_0^t(t-\tau)g(\tau,u(\tau)a,b)d\tau\\
&= \lambda\int_0^t[t(1-\tau)-(t-\tau)]g(\tau,u(\tau)a,b)d\tau+\lambda t\int_t^1(1-\tau)g(\tau,u(\tau)a,b)d\tau\\
&= \lambda(1-t)\int_0^t\tau g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau+\lambda t\int_t^1(1-\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau,
\end{aligned}$$

como queríamos verificar.

Suponhamos agora, que a função u satisfaz,

$$u(t)=\lambda(1-t)\int_0^t\tau g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau+\lambda t\int_t^1(1-\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau,$$

para todo $t\in[0,1]$. É imediato verificar que u é uma solução do Problema $(P_{a,b}\,,_\lambda)$. Com efeito, pelo Teorema Fundamental do Cálculo obtemos que,

$$u'(t)=-\lambda\int_0^t\tau g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau+\lambda\int_t^1(1-\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau.$$

De maneira análoga, obtemos que,

$$-u''(t)=\lambda g(t,u(t),a,b).$$

Além disso, $u(0)=u(1)=0$. Logo, u é uma solução do Problema $(P_{a,b}\,,_\lambda)$. ■

Notemos que, se considerarmos a função de Green $K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$, dada por,

$$K(t,\tau)=\begin{cases}(1-t)\tau & \text{se} \quad \tau<t,\\ (1-\tau)t & \text{se} \quad \tau\geq t,\end{cases}$$

obtemos que, se u é uma solução do Problema $(P_{a,b}\,,_\lambda)$ então,

$$u(t)=\lambda\int_0^1K(t,\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau.$$

Pelo Lema 2.1, concluímos que encontrar soluções para o Problema $(P_{a,b}\,,_\lambda)$ é o mesmo que encontrar pontos fixos para o operador,

$$(Tu)(t)=\lambda\int_0^1K(t,\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau. \tag{2.4}$$

definido no espaço de Banach $X=C([0,1],\mathbb{R})$ munido com a norma usual $\|u\|_\infty:=\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|$.

Consideremos C o cone definido por

$$C = \{u \in C[0,1] : u \text{ é côncava e } \ u(0) = u(1) = 0\}.$$

É fácil ver que C, de fato, define um cone.

O lema seguinte é importante para obtermos estimativas do tipo expansão/compressão.

Lema 2.2 *Se $u \in C$ e $\alpha, \beta \in (0,1)$ com $\alpha < \beta$. Então,*

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t) \geq \alpha(1-\beta)\|u\|_\infty.$$

Prova. Seja $u \in C$, consideraremos os seguintes casos:

Caso 1: $\alpha < \beta \leq t_m$, onde t_m é ponto de máximo da função u no intervalo $[0,1]$.

Temos que a função u é côncava, logo, $\inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t)$ é $u(\alpha)$ ou $u(\beta)$. Como $\alpha < \beta$ e, no intervalo (α, t_m) a função u é crescente então $u(\alpha) < u(\beta)$. Portanto, podemos assumir $u(\alpha) = \inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t)$. Temos que $0 < \alpha < t_m$. Como u é uma função côncava então,

$$\frac{u(\alpha) - u(0)}{\alpha - 0} \geq \frac{u(t_m) - u(0)}{t_m - 0} \geq \frac{u(\alpha) - u(t_m)}{\alpha - t_m},$$

ou seja,

$$\frac{u(\alpha)}{\alpha} \geq \frac{\|u\|_\infty}{t_m} \geq \frac{u(\alpha) - \|u\|_\infty}{\alpha - t_m}.$$

Temos que, $0 < t_m < 1$, donde segue que, $\alpha/t_m > \alpha$. Além disso,

$$\frac{u(\alpha)}{\alpha} \geq \frac{\|u\|_\infty}{t_m}.$$

Assim,

$$u(\alpha) \geq \frac{\alpha}{t_m}\|u\|_\infty \geq \alpha\|u\|_\infty \geq \alpha(1-\beta)\|u\|_\infty.$$

Logo,

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t) = u(\alpha) \geq \alpha(1-\beta)\|u\|_\infty.$$

Caso 2: $t_m \leq \alpha < \beta$, onde $\inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t) = u(\beta)$.

Temos que $t_m < \beta < 1$, assim, de maneira análoga ao Caso 1, usando o fato que u é uma função côncava obtemos que,

$$\frac{u(\beta) - \|u\|_\infty}{\beta - t_m} \geq \frac{-\|u\|_\infty}{1 - t_m}.$$

Isso implica que,

$$u(\beta) - \|u\|_\infty - t_m u(\beta) + t_m\|u\|_\infty \geq -\beta\|u\|_\infty + t_m\|u\|_\infty.$$

Logo,

$$(1-t_m)u(\beta) - \|u\|_\infty + \|u\|_\infty \geq -\beta\|u\|_\infty + \|u\|_\infty.$$

Donde segue que,

$$u(\beta) \geq \frac{1-\beta}{1-t_m}\|u\|_\infty \geq (1-\beta)\|u\|_\infty \geq \alpha(1-\beta)\|u\|_\infty.$$

Portanto,

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t) = u(\beta) \geq \alpha(1-\beta)\|u\|_\infty.$$

Caso 3: $\alpha < t_m < \beta$.

Se o $\inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t) = u(\alpha)$ procedemos como no Caso 1.

Se o $\inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t) = u(\beta)$ procedemos como no Caso 2.

Portanto, para cada $u \in C$ e $\alpha, \beta \in (0,1)$ com $\alpha < \beta$, temos que,

$$\inf_{t\in[\alpha,\beta]} u(t) \geq \alpha(1-\beta)\|u\|_\infty.$$

■

Lema 2.3 *O operador $T : X \to X$ definido em (2.4) é completamente contínuo e $T(C) \subset C$.*

Prova. Lembremos que um operador $T : X \to X$, onde X é um espaço de Banach, é dito completamente contínuo, se é contínuo e a imagem de qualquer conjunto limitado é relativamente compacta, ou seja, se $M \subseteq X$ tal que M é limitado então $\overline{T(M)}$ é compacto.

Mostraremos que $T(M)$ é equilimitado e equicontínuo e, usaremos o Teorema de Ascoli-Arzelá para concluir que $T(M)$ é relativamente compacto. Por fim, mostraremos que T é contínuo, concluindo dessa forma, a prova do lema.

Seja $M \subset X$ tal que M é limitado, isto é, para todo $u \in M$ temos que $\|u\|_\infty \leq c$. Mostremos que $T(M) \subseteq X$ é equilimitado. Para tanto, devemos mostrar que, existe $N > 0$ tal que $|(Tu)(t)| \leq N$, para todo $t \in [0,1]$ e para todo $u \in M$. Temos que,

$$|(Tu)(t)| = |\lambda \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau| \quad \leq \quad \lambda \int_0^1 |K(t,\tau)|g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau.$$

Lembremos que $\|u\|_\infty \leq c$ para todo $u \in M$. Além disso, as funções $g(t,u(t),a,b)$ e $K(t,\tau)$ são contínuas. Logo, se considerarmos g restrita a $A := [0,1]\times[-c,c]\times\{a\}\times\{b\}$, obtemos que,

$$|(Tu)(t)| \leq \lambda \int_0^1 \max_{(t,\tau)\in[0,1]^2} K(t,\tau) \max_A g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau = \lambda\|K\|_\infty c_1 \int_0^1 d\tau := N,$$

onde, $c_1 = \max_A g(\tau,u(\tau),a,b)$. Donde segue que, $|(Tu)(t)| \leq N$ para todo $t \in [0,1]$ e todo $u \in M$. Portanto, $T(M)$ é equilimitado.

Mostremos agora que $T(M)$ é equicontínuo, nesse caso, devemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que quaisquer que sejam $t_1, t_2 \in [0,1]$ onde $|t_1 - t_2| < \delta$ então $|(Tu)(t_1) - (Tu)(t_2)| < \epsilon$ para todo $u \in M$. Temos que,

$$\begin{aligned}
|(Tu)(t_1) - (Tu)(t_2)| &= |\lambda \int_0^1 (K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau))g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau| \\
&\leq \lambda \int_0^1 |K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)|g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau \\
&\leq \lambda c_1 \int_0^1 |K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)|d\tau.
\end{aligned}$$

Como $K(t,\tau)$ é uniformemente contínua e $|t_1 - t_2| < \delta$ então $|K(t_1,\tau) - K(t_2,\tau)| < \epsilon_1$. Logo,

$$|(Tu)(t_1) - (Tu)(t_2)| < \lambda c_1 \int_0^1 \epsilon_1 d\tau := \epsilon.$$

Obtemos assim que $T(M)$ é equicontínuo.

Como $T(M) \subseteq X$ é equilimitado e equicontínuo, concluímos pelo Teorema de Ascoli-Arzelá que $T(M)$ é relativamente compacto. Resta-nos mostrar que T é contínuo, isto é, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $|u_1(t) - u_2(t)| < \delta$ então $|(Tu_1)(t) - (Tu_2)(t)| < \epsilon$ para todo $t \in [0,1]$. Suponhamos que,

$$|u_1(t) - u_2(t)| < \delta.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}
|(Tu_1)(t) - (Tu_2)(t)| &= |\lambda \int_0^1 K(t,\tau)[g(\tau,u_1(\tau),a,b) - g(\tau,u_2(\tau),a,b)]d\tau| \\
&\leq \lambda \int_0^1 |K(t,\tau)||g(\tau,u_1(\tau),a,b) - g(\tau,u_2(\tau),a,b)|d\tau \\
&\leq \lambda \|K\|_\infty \int_0^1 |g(\tau,u_1(\tau),a,b) - g(\tau,u_2(\tau),a,b)|d\tau.
\end{aligned}$$

Como g é contínua e $|(u_1(t) - u_2(t)| < \delta$ então $|g(t,u_1(t),a,b) - g(t,u_2(t),a,b)| < \epsilon_1$, donde segue que,

$$|(Tu_1)(t) - (Tu_2)(t)| < \lambda \|K\|_\infty \int_0^1 \epsilon_1 d\tau := \epsilon.$$

Logo, T é contínuo, e pelas considerações anteriores concluímos que T é completamente contínuo.

Por fim, mostremos que $T(C) \subset C$. Seja $u \in C$. É claro que, $(Tu) \in C([0,1])$. Além disso, $(Tu)(0) = (Tu)(1) = 0$. Resta-nos verificar que (Tu) é côncava. Pelo Lema 2.1 sabemos que $u(t) = (Tu)(t)$ é de classe C^2 e $-u'' = \lambda g(t,u(t),a,b) \geq 0$, logo (Tu) é côncava, e portanto $T(C) \subset C$.

■

2.3 Prova do Teorema 2.1

Nesta seção combinaremos os resultados de ponto fixo, o método de sub e super solução e argumentos do grau para provar o Teorema 2.1.

2.3.1 A Primeira Solução Positiva para o Problema $(P_{a,b,1})$

O seguinte lema trata de um resultado de existência de solução positiva.

Lema 2.4 *Se $g(t,u,a,b)$ satisfaz (g_0), (g_1) e (g_2), então existem parâmetros positivos a_0 e b_0 tais que o Problema $(P_{a_0,b_0,1})$ tem pelo menos uma solução positiva.*

Prova. Consideremos $u \in C$, com $\|u\|_\infty = R > 0$. Pela hipótese (g_0) temos que g é uma função não decrescente nas três últimas variáveis . Assim, como $\|u\|_\infty = R$, para todo $t \in [0,1]$ temos que,

$$g(t, u(t), a_0, b_0) \leq g(t, R, a_0, b_0).$$

Além disso, considerando a continuidade das funções g e K obtemos que,

$$(Tu)(t) = \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau, u(\tau), a_0, b_0)d\tau \leq \max_{(t,\tau)\in[0,1]^2} K(t,\tau) \max_{\tau\in[0,1]} g(\tau, R, a_0, b_0),$$

para todo $t \in [0,1]$.

Por (g_2) temos que,

$$\lim_{|(u,a_0,b_0)|\to 0} \frac{g(t,u,a_0,b_0)}{|(u,a_0,b_0)|} = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, se $|(u, a_0, b_0)| < \delta$ então $g(t, u, a_0, b_0) \leq \epsilon|(u, a_0, b_0)|$ onde, $|(u, a_0, b_0)| = |u| + |a_0| + |b_0| = u + a_0 + b_0$, já que $u, a_0, b_0 \geq 0$. Consideremos $a_0, b_0 \leq R$ então $u + a_0 + b_0 \leq 3R$. Assim,

$$g(t, R, a_0, b_0) \leq \epsilon(R + a_0 + b_0) \leq 3\epsilon R.$$

Donde segue que,

$$(Tu)(t) \leq \max_{(t,\tau)\in[0,1]^2} K(t,\tau)3\epsilon R.$$

Tomando $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno tal que $3\max_{(t,\tau)\in[0,1]^2} K(t,\tau)\epsilon < 1$, obtemos que, $(Tu)(t) < R = \|u\|_\infty$, para todo $t \in [0,1]$. E portanto,

$$\|Tu\|_\infty < \|u\|_\infty, \quad \text{se} \quad \|u\|_\infty = R. \tag{2.5}$$

Pela hipótese (g_1) temos que,

$$\lim_{u\to 0} \frac{g(t,u,a_0,b_0)}{u} = +\infty,$$

uniformemente em $t \in [\delta_1, \epsilon_1]$. Logo, dado

$$M > 0 \quad \exists\, 0 < r_1 < R \text{ tal que } g(\tau, u, a_0, b_0) \geq Mu \quad \forall(\tau, u) \in [\delta_1, \epsilon_1] \times [0, r_1]. \tag{2.6}$$

Além disso, considerando o Lema 2.2, para todo $u \in C$ temos que,

$$u(t) \geq (1-\epsilon_1)\delta_1\|u\|_\infty \quad \forall t \in [\delta_1, \epsilon_1] \tag{2.7}$$

Logo, usando (2.6) e (2.7), para M suficientemente grande, obtemos que,

$$\begin{aligned}
(Tu)(t) = \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau, u(\tau), a, b)d\tau &\geq \int_{\delta_1}^{\epsilon_1} K(t,\tau)g(\tau, u(\tau), a_0, b_0)d\tau \\
&\geq \int_{\delta_1}^{\epsilon_1} K(t,\tau)Mu(\tau)d\tau \\
&\geq \int_{\delta_1}^{\epsilon_1} K(t,\tau)M(1-\epsilon_1)\delta_1\|u\|_\infty d\tau \\
&= M(1-\epsilon_1)\delta_1\|u\|_\infty \int_{\delta_1}^{\epsilon_1} K(t,\tau)d\tau \\
&> \|u\|_\infty,
\end{aligned}$$

para todo $t \in [0,1]$. Donde segue que,

$$\|Tu\|_\infty > \|u\|_\infty \quad \text{se} \quad \|u\|_\infty = r_1. \tag{2.8}$$

Considerando as estimativas (2.5) e (2.8), podemos aplicar o Teorema 1.1, onde obtemos que T tem um ponto fixo $u \in C$ com $r_1 < \|u\|_\infty < R$.

Devemos mostrar agora que u é positiva, para tanto, usaremos o princípio do máximo. Temos que, $u'' \leq 0$, assim, pelo Princípio do Máximo Fraco (Teorema 1.2), obtemos que $\min_{\overline{\Omega}=[0,1]} u = \min_{\partial\Omega} u = 0$, logo $u \geq 0$. Usando agora, o Princípio do Máximo Forte (Teorema 1.3), temos que, a função u não atinge o mínimo no interior de Ω, e portanto, u é estritamente positiva. ■

O próximo lema nos mostra que o conjunto das soluções positivas de $(P_{a,b,1})$ é limitado.

Lema 2.5 *Se $g(t,u,a,b)$ satisfaz (g_3) e (g_4), então existe $c_0 > 0$ tal que para todo $(a,b) \in [0,+\infty)^2$ com $|(a,b)| > c_0$, o Problema $(P_{a,b,1})$ não tem soluções positivas.*

Prova. Suponhamos, por contradição, que existe uma seqüência (a_n, b_n) com $|(a_n,b_n)| \to +\infty$ tal que, para cada n, o Problema $(P_{a_n,b_n,1})$ possui uma solução positiva $(u_n) \in C$.

Pela hipótese (g_4) temos que existem constantes $0 < \delta_3 < \epsilon_3 < 1$ tais que,

$$\lim_{|(a,b)|\to+\infty} g(t,0,a,b) = +\infty$$

uniformemente em $t \in [\delta_3, \epsilon_3]$. Logo, dado $M > 0$, existe $C_0 > 0$ tal que para todo $(a,b) \in [0,+\infty)^2$ com $|(a,b)| \geq C_0$, temos que, $g(t,0,a,b) \geq M$ para todo $t \in [\delta_3, \epsilon_3]$. Logo, como g é uma função não-decrescente nas três últimas variáveis, se $u \geq 0$ então

$$g(t,u,a,b) \geq M \text{ para todo } t \in [\delta_3, \epsilon_3]. \tag{2.9}$$

Por hipótese, temos que, para cada n, $(u_n) \in C$ é uma solução positiva do Problema $(P_{a_n,b_n,1})$. Logo, u_n é ponto fixo do operador T. Donde segue que,

$$u_n(t) = \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,u_n(\tau),a_n,b_n)d\tau \geq \int_{\delta_3}^{\epsilon_3} K(t,\tau)g(\tau,u_n(\tau),a_n,b_n)d\tau.$$

Para n suficientemente grande, podemos usar (2.9), obtendo, dessa forma, que, $g(t,u_n(t),a_n,b_n) \geq M$ para todo $t \in [\delta_3, \epsilon_3]$. Logo,

$$u_n(t) \geq M \int_{\delta_3}^{\epsilon_3} K(t,\tau)d\tau.$$

Assim,

$$\|u_n\|_\infty \geq M \max_{t\in[0,1]} \int_{\delta_3}^{\epsilon_3} K(t,\tau)d\tau.$$

Como em (2.9), M é uma constante arbitrária, então, podemos escolhê-la suficientemente grande, de tal forma que, $\|u_n\|_\infty \to +\infty$. Donde obtemos que, (u_n) é uma seqüência ilimitada em X.

Considerando a hipótese (g_3), temos que dado $M > 0$ existe $R > 0$ tal que

$$g(t, u, 0, 0) \geq Mu \text{ para todo } t \in [\delta_2, \epsilon_2] \text{ e para todo } u \geq R.$$

Donde concluímos, pela monoticidade da função g, que se $a, b \geq 0$ então,

$$g(t, u, a, b) \geq Mu \text{ para todo } u \geq R. \tag{2.10}$$

Considerando o Lema 2.2, temos que,

$$u_n(t) \geq \delta_2(1 - \epsilon_2)\|u_n\|_\infty.$$

Temos ainda que (u_n) é uma seqüência ilimitada em X, assim, para n suficientemente grande $u_n \geq R$. Logo, por (2.10) temos que,

$$g(t, u_n(t), a_n, b_n) \geq Mu_n.$$

Assim, usando as considerações acima obtemos que,

$$\begin{aligned} u_n(t) \geq \int_{\delta_2}^{\epsilon_2} K(t,\tau)g(\tau, u_n(\tau), a_n, b_n)d\tau \;&\geq\; M\int_{\delta_2}^{\epsilon_2} K(t,\tau)u_n(\tau)d\tau \\ &\geq\; M\delta_2(1-\epsilon_2)\|u_n\|_\infty \int_{\delta_2}^{\epsilon_2} K(t,\tau)d\tau. \end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{u_n(t)}{\|u_n\|_\infty} \geq M(1-\epsilon_2)\delta_2 \int_{\delta_2}^{\epsilon_2} K(t,\tau)d\tau.$$

Ou seja,

$$1 \geq M(1-\epsilon_2)\delta_2 \int_{\delta_2}^{\epsilon_2} K(t,\tau)d\tau.$$

Donde segue que,

$$1 \geq M(1-\epsilon_2)\delta_2 \max_{t\in[0,1]} \int_{\delta_2}^{\epsilon_2} K(t,\tau)d\tau.$$

O que é uma contradição, já que M é uma constante arbitrária e pode ser escolhida suficientemente grande, de forma que a limitação acima não ocorra. Portanto, para todo $(a, b) \in [0, +\infty)^2$, existe $c_0 > 0$ com $|(a, b)| > c_0$ tal que o Problema $(P_{a,b\,,1})$ não tem soluções positivas. ∎

Como conseqüência imediata do Lema 2.5, temos que, o conjunto das soluções do Problema $(P_{a,b\,,1})$ é limitado. Mais precisamente,

Observação 2.1 *Se $g(t, u, a, b)$ satisfaz (g_3) e (g_4), então, pelo Lema 2.5, observamos que existe $k_0 > 0$ independente de (a, b) tal que $\|u\|_\infty < k_0$, para cada $u \in X$, solução positiva do Problema $(P_{a,b\,,1})$.*

Com efeito, suponhamos por contradição, que existe (u_n), uma seqüência de soluções positivas em X tal que $\|u_n\|_\infty \to +\infty$, ou seja, (u_n) é uma seqüência ilimitada em X. Procedendo de maneira análoga à demonstração do Lema 2.5, encontramos, da mesma forma, uma contradição com relação a constante M. Portanto, se $u \in X$ é solução positiva do Problema $(P_{a,b\,,1})$ então existe $k_0 > 0$ independente de (a, b) tal que $\|u\|_\infty < k_0$.

Lema 2.6 *Consideremos $g(t,u,a,b)$ satisfazendo a hipótese (g_0). Consideremos ainda, que o Problema $(P_{a,b,1})$ tem uma solução positiva. Então para todo $(0,0)\leq(c,d)\leq(a,b)$, o Problema $(P_{c,d,1})$ tem uma solução positiva desde que c e d não se anulem simultaneamente, ou seja, $c+d>0$.*

Prova. Seja u a solução positiva do Problema $(P_{a,b,1})$, dado por

$$\begin{cases} -u'' = g(t,u(t),a,b) & \text{em} \quad (0,1), \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

Sabemos pela hipótese (g_0) que g é uma função não decrescente nas três últimas variáveis, logo, se $(c,d)\leq(a,b)$ então $g(t,u(t),c,d)\leq g(t,u(t),a,b)$.

Considerando o Problema $(P_{c,d,1})$, obtemos que,

$$\begin{cases} -u'' = g(t,u(t),c,d) \leq g(t,u(t),a,b) & \text{em} \quad (0,1), \\ u(0)=u(1)=0. \end{cases}$$

Donde segue que, se $u:=\bar{u}$ é a solução positiva do Problema $(P_{a,b,1})$ então $\bar{u}$ é supersolução do Problema $(P_{c,d,1})$. Por outro lado, se $u\equiv 0$ então, por (g_0), $g(t,0,c,d)>0$ desde que $c+d>0$, daí, a função nula $u:=\underline{u}$ é uma subsolução para o Problema $(P_{c,d,1})$. Além disso, $\underline{u}<\bar{u}$. Portanto, pelo Teorema 1.10, o Problema $(P_{c,d,1})$ tem uma solução u' tal que $\underline{u}\leq u'\leq\bar{u}$.

Verifica-se que u' é positiva, usando o princípio do máximo, da mesma forma como no Lema 2.4. ■

Definamos,

$$\bar{a} := \sup\{a>0 : (P_{a,b,1}) \text{ tem uma solução positiva para algum } b>0\}.$$

Pelo Lema 2.4 temos que o conjunto acima é diferente de vazio. Além disso, pelo Lema 2.5 obtemos que, se o Problema $(P_{a,b,1})$ tem solução positiva então $(a,b)\in[0,+\infty)^2$ é tal que $|(a,b)|\leq c_0$, onde $c_0>0$. Logo,

$$0<\bar{a}<+\infty.$$

Mostremos que $\bar{a}$ pertence ao conjunto, isto é, existe $\bar{b}>0$ tal que o Problema $(P_{\bar{a},\bar{b},1})$ tem solução positiva. De fato, como $\bar{a}$ é o supremo então existem seqüências $(a_n),(b_n)$ com a_n convergindo para $\bar{a}$, tais que $(P_{a_n,b_n,1})$ tem solução positiva. Como (b_n) é uma seqüência limitada, a menos de subseqüência, $b_n\to\bar{b}$. Usando o Lema 2.6 podemos considerar a seqüência (b_n) não decrescente, logo seu limite $\bar{b}>0$.

Temos que,

$$\begin{cases} -u_n'' = \lambda g(t,u_n(t),a_n,b_n) & \text{em} \quad (0,1), \\ u_n(0)=u_n(1)=0, \end{cases}$$

onde u_n é solução positiva para o Problema $(P_{a_n,b_n,1})$. Logo,

$$u_n(t)=(Tu_n)(t)=\lambda\int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,u_n(\tau),a_n,b_n)d\tau, \tag{2.11}$$

para todo n.

Pela Observação 2.1, sabemos que, $\|u_n\|_\infty < k_0$ para todo n, assim, a menos de subseqüência $u_n \to u_0$, logo, $Tu_n \to u_0$. Além disso, como T é um operador completamente contínuo então, $Tu_n \to Tu_0$, donde segue que, $Tu_0 = u_0$. Assim, tomando o limite em (2.11) obtemos que,

$$u_0(t) = (Tu_0)(t) = \lambda \int_0^1 K(t,\tau) g(\tau, u_0(\tau), \bar{a}, \bar{b}) d\tau,$$

ou seja, u_0 é solução do Problema $(P_{\bar{a},\bar{b},1})$

Afirmamos que para todo $a \in (0,\bar{a})$ existe $b > 0$ tal que $(P_{a,b,1})$ tem uma solução positiva. De fato, sabemos que, $(P_{\bar{a},\bar{b},1})$ tem uma solução positiva, além disso, para $0 < a < \bar{a}$ temos que $(0,0) \leq (a,\bar{b}) \leq (\bar{a},\bar{b})$, logo pelo Lema 2.6 $(P_{a,\bar{b},1})$ tem uma solução positiva, já que, $a + \bar{b} > 0$. Assim, para todo $a \in (0,\bar{a})$ existe $b > 0$ tal que $(P_{a,b,1})$ tem uma solução positiva. Analogamente obtemos ainda que, $(P_{0,\bar{b},1})$ também tem uma solução positiva. Logo, podemos definir a função,

$$\Gamma : [0,\bar{a}] \to [0,+\infty),$$

dada por,

$$\Gamma(a) := \sup\{b > 0 : (P_{a,b,1}) \text{ tem uma solução positiva }\}.$$

Da mesma forma como no caso anterior, obtemos que o conjunto acima é diferente de vazio e, que o Problema $(P_{a,\Gamma(a),1})$ tem solução positiva. Logo, pela definição da função Γ, temos que o Problema $(P_{a,b,1})$ tem pelo menos uma solução positiva se $0 \leq b < \Gamma(a)$. Além disso, para $b = \Gamma(a)$, $(P_{a,\Gamma(a),1})$ também tem solução positiva. Portanto, o Problema $(P_{a,b,1})$ tem pelo menos uma solução positiva se $0 \leq b \leq \Gamma(a)$.

Notemos que, o Problema $(P_{a,b,1})$ não tem solução positiva quando $b > \Gamma(a)$. De fato, dado b' tal que $(P_{a,b',1})$ tem solução positiva, decorre da definição de Γ, que $b' \leq \Gamma(a)$.

2.3.2 A Segunda Solução Positiva para o Problema $(P_{a,b,1})$

Devemos mostrar agora, que o Problema $(P_{a,b,1})$ tem uma segunda solução positiva se $0 < b < \Gamma(a)$.

Sejam u_1 e $\bar{u}$ as soluções positivas dos Problemas $(P_{a,b,1})$ e $(P_{a,\Gamma(a),1})$ obtidas acima, respectivamente. Sabemos que, ambas as soluções, u_1 e $\bar{u}$, são positivas. Além disso,

$$\begin{cases} -u_1'' = g(t, u_1(t), a, b) \quad \text{em} \quad (0,1), \\ \quad u_1(0) = u_1(1) = 0, \end{cases}$$

e

$$\begin{cases} -\bar{u}'' = g(t, \bar{u}(t), a, \Gamma(a)) \quad \text{em} \quad (0,1), \\ \qquad \bar{u}(0) = \bar{u}(1) = 0. \end{cases}$$

Temos que $b < \Gamma(a)$, logo, pela monoticidade da função g, obtemos,

$$g(t, u_1(t), a, b) \leq g(t, \bar{u}(t), a, \Gamma(a)).$$

Daí,

$$-u_1'' \leq -\bar{u}'',$$

donde,

$$(u_1 - \bar{u})'' \geq 0.$$

Temos ainda que,
$$\begin{cases} u_1(0) - \bar{u}(0) = (u_1 - \bar{u})(0) = 0, \\ u_1(1) - \bar{u}(1) = (u_1 - \bar{u})(1) = 0. \end{cases}$$
Assim,
$$\begin{cases} (u_1 - \bar{u})'' \geq 0 \quad \text{em} \quad (0,1), \\ (u_1 - \bar{u})(0) = (u_1 - \bar{u})(1) = 0. \end{cases}$$
Logo, pelo Princípio do Máximo Fraco,
$$\max_{\overline{\Omega}=[0,1]} u_1 - \bar{u} = \max_{\partial\Omega} u_1 - \bar{u} = 0.$$
Donde segue que,
$$u_1 - \bar{u} \leq \max_{\overline{\Omega}=[0,1]} u_1 - \bar{u} = 0.$$
Ou seja,
$$u_1 \leq \bar{u}.$$
Assim, $0 < u_1 \leq \bar{u}$.

Consideremos o seguinte problema:
$$\begin{cases} -(u_1 - \bar{u})'' \leq 0 \quad \text{em} \quad (0,1), \\ \quad (u_1 - \bar{u}) \leq 0 \quad \text{em} \quad (0,1), \\ (u_1 - \bar{u})(0) = 0, \\ (u_1 - \bar{u})(1) = 0. \end{cases}$$
Assim, pelo Lema de Hopf (Teorema 1.4), temos que,
$$\frac{\partial(u_1 - \bar{u})}{\partial\nu}(0) = -(u_1 - \bar{u})'(0) > 0.$$
Donde segue que, $u_1'(0) < \bar{u}'(0)$. Além disso, $(u_1 - \bar{u}) < 0$, ou seja, $u_1 < \bar{u}$.

Mostremos agora que, $u_1'(0) > 0$. Observemos que,
$$\begin{cases} -u_1'' \geq 0 \quad \text{em} \quad (0,1), \\ \quad u_1 > 0 \quad \text{em} \quad (0,1), \\ u_1(0) = 0. \end{cases}$$
Então, pelo Lema de Hopf,
$$\frac{\partial u_1}{\partial\nu}(0) = -u_1'(0) < 0,$$
ou seja,
$$u_1'(0) > 0.$$
Concluímos, pelas considerações acima que,
$$0 < u_1 < \bar{u}, \text{ e } \quad 0 < u_1'(0) < \bar{u}'(0).$$
De maneira análoga, obtemos que,
$$\bar{u}'(1) < u_1'(1) < 0.$$
Dessa forma, podemos supor que,

$$0 < u_1 < \bar{u}, 0 < u_1'(0) < \bar{u}'(0) \text{ e } \bar{u}'(1) < u_1'(1) < 0.$$

Definamos,

$$X_1 := \{u \in C^1[0,1] : u(0) = u(1) = 0\},$$

munido com a norma,

$$\|u\|_1 := \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty.$$

Notemos que $(X_1, \|.\|_1)$ é um espaço de Banach.

Consideremos,

$$A := \{u \in X_1 : 0 < u < \bar{u},\ 0 < u'(0) < \bar{u}'(0),\ \bar{u}'(1) < u'(1) < 0 \quad e \quad \|u\|_1 < R_1\},$$

onde, R_1 é escolhido de tal forma que, $\|u_1\|_1 < R_1$. Temos que $u_1 \in A$, logo $A \neq \emptyset$. Além disso, A é um subconjunto aberto de X_1. De fato, consideremos $u \in A$. Devemos mostrar que existe $\epsilon > 0$ tal que $B(u, \epsilon) \subset A$.

Como $u \in C^1([0,1])$ e $u'(0) > 0$ então existe η_1 tal que se $t \in [0, \eta_1]$ então $u'(t) > 0$. De maneira análoga, como $u'(1) < 0$ então existe η_2 tal que se $t \in [\eta_2, 1]$ então $u'(t) < 0$. Além disso, podemos considerar,

$$\alpha_1 = \min_{t \in [\eta_1, \eta_2]} u(t);\ \alpha_2 = \min_{t \in [0, \eta_1]} u'(t) \ e\ \alpha_3 = \min_{t \in [\eta_2, 1]} -u'(t).$$

Por outro lado, como $(u - \bar{u}) \in C^1([0,1])$ e $(u - \bar{u})'(0) < 0$ então existe ρ_1 tal que se $t \in [0, \rho_1]$ então $(u - \bar{u})'(t) < 0$. De maneira análoga, como $(u - \bar{u})'(1) > 0$ então existe ρ_2 tal que se $t \in [\rho_2, 1]$ então $(u - \bar{u})'(t) > 0$. Logo, usando o fato que $(u - \bar{u}) \in C^1([0,1])$, podemos definir,

$$\alpha_4 = \min_{t \in [\rho_1, \rho_2]} -(u(t) - \bar{u}(t));\ \alpha_5 = \min_{t \in [0, \rho_1]} -(u'(t) - \bar{u}'(t));\ \alpha_6 = \min_{t \in [\rho_2, 1]} (u'(t) - \bar{u}'(t));$$

Definamos ainda,

$$\alpha_7 = u'(0), \alpha_8 = -u'(1), \alpha_9 = -(u'(0) - \bar{u}'(0)), \alpha_{10} = (u'(1) - \bar{u}'(1)),$$

e

$$\epsilon = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}\}/2.$$

Agora, estamos prontos para mostrar que se $v \in B(u, \epsilon)$ então $v \in A$.

Temos que,

$$\|v - u\|_1 < \epsilon,$$

o que implica,

$$-\epsilon < v'(t) - u'(t) < \epsilon \text{ para todo } t \in [0,1],$$

assim,

$$-\epsilon < v'(0) - u'(0) < \epsilon,$$

donde

$$v'(0) > -\epsilon + u'(0) \geq -u'(0)/2 + u'(0) = u'(0)/2 > 0.$$

De maneira análoga,

$$-\epsilon < v'(1) - u'(1) < \epsilon,$$

donde

$$v'(1) < \epsilon + u'(1) \leq -u'(1)/2 + u'(1) < u'(1)/2 < 0.$$

Mostremos agora que $v(t) > 0$ para todo $t \in (0,1)$. Observemos primeiramente que,

$$-\epsilon < v'(t) - u'(t) < \epsilon \text{ para todo } t.$$

Logo, se $t \in [0, \eta_1]$ então

$$v'(t) > -\epsilon + u'(t) \geq -\alpha_2/2 + \alpha_2 = \alpha_2/2 > 0.$$

Assim,

$$v(t) = v(t) - v(0) = v'(\xi)t > 0, \text{ já que } \xi \in [0, \eta_1].$$

Donde, $v(t) > 0$ se $t \in [0, \eta_1]$.

Agora, seja $t \in [\eta_1, \eta_2]$. Temos que,

$$v(t) > -\epsilon + u(t) \geq -\alpha_1/2 + \alpha_1 = \alpha_1/2 > 0.$$

Donde, $v(t) > 0$ se $t \in [\eta_1, \eta_2]$.

Por fim, consideremos $t \in [\eta_2, 1]$. Daí,

$$v'(t) < \epsilon + u'(t) \leq \alpha_3/2 + u'(t) \leq -u'(t)/2 + u'(t) = u'(t)/2 < 0.$$

Assim,

$$v(t) = -[v(1) - v(t)] = -v'(\theta)(1-t) > 0, \text{ já que } \theta \in [\eta_2, 1].$$

Donde, $v(t) > 0$ se $t \in [\eta_2, 1]$. Finalmente mostremos que,

$$v'(0) < \bar{u}'(0); \ v'(1) > \bar{u}'(1) \text{ e } v(t) < \bar{u}(t), \text{ para todo } t \in (0,1).$$

Temos que,

$$\begin{aligned} v'(0) - \bar{u}'(0) &= v'(0) - u'(0) + u'(0) - \bar{u}'(0) \\ &< \epsilon + (u'(0) - \bar{u}'(0)) \\ &\leq \alpha_9/2 + (u'(0) - \bar{u}'(0)) \\ &= (u'(0) - \bar{u}'(0))/2 < 0. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} v'(1) - \bar{u}'(1) &= v'(1) - u'(1) + u'(1) - \bar{u}'(1) \\ &> -\epsilon + (u'(1) - \bar{u}'(1)) \\ &\geq -\alpha_{10}/2 + (u'(1) - \bar{u}'(1)) \\ &= (u'(1) - \bar{u}'(1))/2 > 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$v'(0) < \bar{u}'(0) \text{ e } v'(1) > \bar{u}'(1).$$

Mostremos que,

$$v'(t) - \bar{u}'(t) < 0 \text{ para todo } t \in [0, \rho_1] \text{ e } v'(t) - \bar{u}'(t) > 0 \text{ para todo } t \in [\rho_2, 1].$$

Seja $t \in [0, \rho_1]$. Temos que,

$$\begin{aligned} v'(t) - \bar{u}'(t) &= v'(t) - u'(t) + u'(t) - \bar{u}'(t) \\ &< \epsilon + (u'(t) - \bar{u}'(t)) \\ &< \alpha_5/2 + (u'(t) - \bar{u}'(t)) = (u'(t) - \bar{u}'(t))/2 < 0. \end{aligned}$$

De maneira análoga, seja $t \in [\rho_2, 1]$. Temos que,

$$\begin{aligned} v'(t) - \bar{u}'(t) &= v'(t) - u'(t) + u'(t) - \bar{u}'(t) \\ &> -\epsilon + (u'(t) - \bar{u}'(t)) \\ &\geq -\alpha_6/2 + (u'(t) - \bar{u}'(t)) = (u'(t) - \bar{u}'(t))/2 > 0. \end{aligned}$$

Mostremos agora que $v(t) < \bar{u}(t)$ para todo t.
Seja $t \in [\rho_1, \rho_2]$. Temos que,

$$\begin{aligned} v(t) - \bar{u}(t) &= v(t) - u(t) + u(t) - \bar{u}(t) \\ &< \epsilon + (u(t) - \bar{u}(t)) \\ &< \alpha_4/2 + (u(t) - \bar{u}(t)) = (u(t) - \bar{u}(t))/2 < 0. \end{aligned}$$

Consideremos agora, $t \in [0, \rho_1]$. Temos que,

$$v(t) - \bar{u}(t) = (v - \bar{u})(t) - (v - \bar{u})(0) = (v - \bar{u})'(\zeta)t < 0, \text{ já que } \zeta \in [0, \rho_1].$$

Seja $t \in [\rho_2, 1]$. Então,

$$v(t) - \bar{u}(t) = -[(v - \bar{u})(1) - (v - \bar{u})(t)] = -(v - \bar{u})'(\chi)(1 - t) < 0, \text{ já que } \chi \in [\rho_2, 1].$$

Logo, $v(t) < \bar{u}(t)$ para todo $t \in (0, 1)$.

Assim, $v \in A$. Portanto, tomando ϵ como acima, concluímos que $B(u, \epsilon) \subset A$, donde A é um conjunto aberto.

Consideremos o operador $S_{(a,b)} : X_1 \to X_1$ dado por,

$$(S_{(a,b)}u)(t) = \int_0^1 K(t, \tau) g(\tau, u(\tau), a, b) d\tau.$$

Notemos que, se u é ponto fixo de $S_{(a,b)}$ então u é solução para o Problema ($P_{a,b}$,$_1$).

Como A é um conjunto aberto então $A \cap \partial A = \emptyset$. Assim, se $\underline{u} \in \partial A$ temos que $\underline{u} \neq u_1 \in A$, donde concluímos que, se existe um ponto fixo de $S_{(a,b)}$ sobre ∂A então obtemos uma segunda solução positiva para o Problema ($P_{a,b}$,$_1$). Caso isso não ocorra, podemos obter ainda, a existência de outra solução positiva, através do seguinte resultado:

Lema 2.7 *Suponhamos que $S_{(a,b)}$ não possui um ponto fixo sobre ∂A. Consideremos $0 < b < \Gamma(a)$. Então,*

(i) $d(I_d - S_{(a,b)}, A, 0) = 1$*;*

(ii) *existe $\bar{R} > R_1$ tal que $d(I_d - S_{(a,b)}, B_{X_1}(0, \bar{R}), 0) = 0$.*

Prova. Definamos a seguinte função:

$$\bar{g}(t,u(t),a,b)=\begin{cases} g(t,\bar{u}(t),a,b) & \text{se} \quad \bar{u}(t)<u(t),\\ g(t,u(t),a,b) & \text{se} \quad 0\leq u(t)\leq \bar{u}(t),\\ 0 & \text{se} \quad u(t)<0.\end{cases}$$

Consideremos ainda, $\bar{S}_{(a,b)}:X_1\to X_1$, dado por,

$$(\bar{S}_{(a,b)}u)(t)=\int_0^1 K(t,\tau)\bar{g}(\tau,u(\tau),a,b)d\tau.$$

Afirmação 2 *O operador $\bar{S}_{(a,b)}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(a) *$\bar{S}_{(a,b)}$ é um operador completamente contínuo;*

(b) *se u é um ponto fixo de $\bar{S}_{(a,b)}$, então $0\leq u\leq \bar{u}$, e assim, u é um ponto fixo de $S_{(a,b)}$;*

(c) *se $u=\lambda\bar{S}_{(a,b)}u$ com $0\leq\lambda\leq 1$ então $\|u\|_1\leq c_3$, onde c_3 não depende de λ e $u\in X_1$.*

Prova.

(a) Ver Lema 2.3.

(b) Mostremos que se u é ponto fixo de $\bar{S}$ então $0\leq u\leq\bar{u}$. De fato, se u é ponto fixo de $\bar{S}$ então,

$$u(t)=\int_0^1 K(t,\tau)\bar{g}(\tau,u(\tau),a,b)d\tau\leq\int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,\bar{u}(\tau),a,b)d\tau=\bar{u}(t).$$

Além disso,

$$u(t)=\bar{S}_{(a,b)}u(t)\geq 0.$$

Logo, se u é ponto fixo de $\bar{S}_{(a,b)}$ então $0\leq u\leq\bar{u}$, e portanto,

$$\bar{g}(t,u(t),a,b)=g(t,u(t),a,b).$$

Donde segue que,

$$u(t)=(\bar{S}_{(a,b)}u)(t)=(S_{(a,b)}u)(t).$$

Assim, u é um ponto fixo de $S_{(a,b)}$.

(c) Temos que,

$$\begin{aligned} u(t)=\lambda\int_0^1 K(t,\tau)\bar{g}(\tau,u(\tau),a,b)d\tau &\leq \lambda\int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,\bar{u}(\tau),a,b)d\tau\\ &\leq \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,\bar{u}(\tau),a,b)d\tau\\ &\leq \sup_{s\in[0,1]} g(s,\bar{u}(s),a,b)\int_0^1 K(t,\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{t\in[0,1]}|u(t)|\leq\sup_{s\in[0,1]} g(s,\bar{u}(s),a,b)\sup_{t\in[0,1]}\int_0^1 K(t,\tau)d\tau.$$

Donde segue que,
$$\|u\|_\infty \leq c_1.$$
De maneira análoga, verifica-se que
$$\|u'\|_\infty \leq c_2.$$
Logo,
$$\|u\|_1 = \|u\|_\infty + \|u'\|_\infty \leq c_1 + c_2 = c_3.$$
Onde c_3 não depende de λ e $u \in X_1$.

■

Usando o item (c) da Afirmação 2, obtemos que existe $R_2 > R_1$ tal que
$$d(I_d - \bar{S}_{(a,b)}, B_{X_1}(0, R_2), 0) = 1. \tag{2.12}$$
Com efeito, seja $R_2 > \max\{R_1, c_3\}$. Se $\|u\|_1 = R_2$ então $\|u\|_1 > c_3$. Logo,
$$u - \lambda \bar{S}_{(a,b)} u \neq 0 \quad \forall u, \quad \text{tal que} \quad \|u\|_1 = R_2.$$
Assim, $I_d - \bar{S}_{(a,b)}$ não tem solução na $\partial B_{X_1}(0, R_2)$.

Definamos, $H : [0,1] \times B_{X_1}[0, R_2] \to X_1$ dada por, $H(\lambda, u) = u - \lambda \bar{S}_{(a,b)} u$. Notemos que, essa aplicação define uma homotopia entre a I_d e $I_d - \bar{S}_{(a,b)}$. Logo, pela propriedade de invariância por homotopia do grau, obtemos que,
$$d(I_d, B_{X_1}(0, R_2), 0) = d(I_d - \bar{S}_{(a,b)}, B_{X_1}(0, R_2), 0).$$
Donde segue que
$$d(I_d - \bar{S}_{(a,b)}, B_{X_1}(0, R_2), 0) = 1.$$
Usando o Princípio do Máximo, verificamos que o operador $\bar{S}_{(a,b)}$ não tem ponto fixo em $\overline{B(0, R_2)} \setminus A$. Além disso, por hipótese, $\bar{S}_{(a,b)}$ não tem ponto fixo sobre a ∂A, pois, caso contrário, teríamos que $S_{(a,b)}$ teria ponto fixo na ∂A, o que é uma contradição. Assim o grau de Leray-Schauder pode ser definido para a equação $I_d - \bar{S}_{(a,b)}(u), \ \ u \in A$. Logo, usando (2.12) e a propriedade de excisão do grau, temos,
$$d(I_d - \bar{S}_{(a,b)}, A, 0) = 1.$$
Afirmamos que, $S_{(a,b)}(u) = \bar{S}_{(a,b)}(u)$ para todo $u \in \partial A$. De fato, se $u \in \partial A$ então existe (u_n), uma seqüência em A tal que $u_n \to u$. Além disso, por hipótese
$$0 < u_n < \bar{u}. \tag{2.13}$$
Assim, tomando o limite em (2.13) obtemos que $0 \leq u \leq \bar{u}$. Isto implica que $\bar{g}(t, u(t), a, b) = g(t, u(t), a, b)$ e portanto, $S_{(a,b)}(u) = \bar{S}_{(a,b)}(u)$. Logo, como propriedade do grau se $S_{(a,b)}(u) = \bar{S}_{(a,b)}(u)$ para todo $u \in \partial A$ então,
$$d(I_d - S_{(a,b)}, A, 0) = d(I_d - \bar{S}_{(a,b)}, A, 0) = 1.$$
Provemos agora o item **(ii)**.

Pelo o Lema 2.2 obtemos que,

$$u(t) \geq \delta_2(1-\epsilon_2)\|u\|_\infty \text{ para todo } t \in [\delta_2, \epsilon_2].$$

Além disso, pela hipótese (g_3) sabemos que, dado $M > 0$, existe $\bar{R} > R_1$ tal que para todo $t \in [\delta_2, \epsilon_2]$ e $a, b \geq 0$,

$$g(t,u,a,b) \geq g(t,u,0,0) \geq Mu, \text{ para todo } u \geq \bar{R}.$$

Logo, usando as considerações acima, obtemos que,

$$\begin{aligned}
(S_{(a,b)}u)(t) &= \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau \\
&\geq \int_{\delta_2}^{\epsilon_2} K(t,\tau)Mud\tau \\
&\geq \int_{\delta_2}^{\epsilon_2} K(t,\tau)M(1-\epsilon_2)\delta_2\|u\|_\infty d\tau \\
&> \|u\|_\infty,
\end{aligned}$$

para todo $u \geq \bar{R}$ e para M suficientemente grande. Logo, se $u \in X_1$ é solução da equação $S_{(a,b)}u$, então $u > \|u\|_\infty$, para todo $u \geq \bar{R}$, o que é um absurdo. Assim, se u é tal que $\|u\|_1 \geq \bar{R}$ então u não é solução de $S_{(a,b)}u$. Donde, $S_{(a,b)}$ não tem ponto fixo sobre $\partial B_{X_1}(0,\bar{R})$. Notemos que, $\bar{R}$ não depende dos parâmetros a, b considerados, já que,

$$g(t,u,a,b) \geq g(t,u,0,0) \geq Mu, \text{ para todo } u \geq \bar{R},$$

quaisquer que sejam os parâmetros não negativos a, b. Obtemos, dessa forma, uma estimativa a priori $\bar{R}$ que pode ser tomado maior que R_1 para soluções da equação,

$$u - S_{(a,b)}u, \quad u \in X_1, \tag{2.14}$$

que não depende dos parâmetros a, b. Donde, $S_{(a,b)}$ não tem ponto fixo sobre $\partial B_{X_1}(0,\bar{R})$.

Pelo Lema 2.5, podemos tomar $(\bar{a},\bar{b})$ suficientemente grande de tal forma que o Problema $(P\bar{a},\bar{b},1)$ não tenha solução positiva. Portanto,

$$d(I_d - S_{(\bar{a},\bar{b})}, B_{X_1}(0,\bar{R}), 0) = 0.$$

Definamos $H : [0,1] \times B_{X_1}[0,\bar{R}] \to X_1$ dada por,

$$H(\lambda,u) = \lambda(I_d - S_{(\bar{a},\bar{b})})u + (1-\lambda)(I_d - S_{(a,b)})u.$$

Notemos que H define uma homotopia entre as funções $I_d - S_{(a,b)}$ e $I_d - S_{(\bar{a},\bar{b})}$. Logo, pela propriedade de invariância por homotopia do grau, temos que,

$$d(I_d - S_{(a,b)}, B_{X_1}(0,\bar{R}), 0) = d(I_d - S_{(\bar{a},\bar{b})}, B_{X_1}(0,\bar{R}), 0).$$

Donde segue que,

$$d(I_d - S_{(a,b)}, B_{X_1}(0,\bar{R}), 0) = 0.$$

■

Usando o Lema 2.7, e a propriedade de excisão do grau topológico, concluímos que,

$$d(I_d - S_{(a,b)}, B_{X_1}(0,\bar{R}) \setminus \bar{A}, 0) = -1.$$

Assim, existe $u \in B_{X_1}(0,\bar{R}) \setminus \bar{A}$ tal que $S_{(a,b)}u = u$. Logo, u é uma segunda solução positiva para o Problema $(P_{a,b,1})$.

2.4 Prova do Teorema 2.2

Nesta seção aplicaremos o Teorema 1.1 para obtermos três soluções positivas de $(P_{a,b},\lambda)$ quando $g(t,u,a,b)$ é sublinear no infinito. Os lemas a seguir nos permitem encontrar estimativas do tipo expansão/compressão que serão essenciais na aplicação dos corolários.

Lema 2.8 *Considerando a hipótese (g_1) temos que dado $(a,b) \in [0,+\infty)^2 \backslash \{(0,0)\}$, existe $R_1 > 0$ suficientemente pequeno tal que para todo $u \in \partial C_{R_1}$,*

$$\|Tu\|_\infty > \|u\|_\infty.$$

Prova. Pela hipótese (g_1) temos que dado $(a,b) \in [0,+\infty)^2 \backslash \{(0,0)\}$, existem constantes $0 < \delta_1 < \epsilon_1 < 1$ tais que

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(t,u,a,b)}{u} = +\infty,$$

uniformemente em $t \in [\delta_1, \epsilon_1]$. Logo, para cada $M > 0$, existe $R_1 > 0$ tal que, para todo $t \in [\delta_1, \epsilon_1]$,

$$g(t,u,a,b) \geq Mu,$$

para cada $u \in [0, R_1]$.

Temos que,

$$(Tu)(t) = \lambda \int_0^1 K(t,\tau) g(\tau, u(\tau), a, b) d\tau.$$

Logo,

$$\| Tu \|_\infty \geq \lambda \int_0^1 K(\frac{1}{2},\tau) g(\tau, u(\tau), a, b) d\tau \quad \geq \quad \lambda \int_{\delta_1}^{\epsilon_1} K(\frac{1}{2},\tau) M u(\tau) d\tau.$$

Usando o Lema 2.2, obtemos que,

$$u(t) \geq \delta_1 (1-\epsilon_1) \|u\|_\infty.$$

Assim, se considerarmos, $(\alpha_1, \beta_1) \subset (\delta_1, \epsilon_1)$, temos que,

$$\|Tu\|_\infty \geq \lambda \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K(\frac{1}{2},\tau) M \delta_1 (1-\epsilon_1) \|u\|_\infty d\tau = \lambda M \delta_1 (1-\epsilon_1) \|u\|_\infty \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K(\frac{1}{2},\tau) d\tau.$$

Se tomarmos $M > 0$ suficientemente grande, de tal forma que,

$$\lambda M \delta_1 (1-\epsilon_1) \int_{\alpha_1}^{\beta_1} K(\frac{1}{2},\tau) d\tau > 1,$$

obtemos que,

$$\|Tu\|_\infty > \|u\|_\infty.$$

■

Lema 2.9 *Consideremos a hipótese (g_5). Dados $(a,b) \in [0,+\infty)^2$ e $R_1 > 0$ existe $R_2 > R_1$ tal que para todo $u \in \partial C_{R_2}$,*

$$\|Tu\|_\infty < \|u\|_\infty.$$

Prova. Pela hipótese (g_5) temos que para todo $(a,b) \in [0,+\infty)^2$,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{g(t,u,a,b)}{u} = 0,$$

uniformemente em $t \in [0,1]$. Assim, dado $\epsilon > 0$ existe $R_2 > R_1$ tal que para todo $u \geq R_2$,

$$g(t,u,a,b) \leq \epsilon u.$$

Temos que,

$$\begin{aligned}(Tu)(t) = \lambda \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau &\leq \lambda \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,\|u\|_\infty,a,b)d\tau \\ &\leq \lambda \int_0^1 K(t,\tau)\epsilon\|u\|_\infty d\tau \\ &= \lambda\epsilon\|u\|_\infty \int_0^1 K(t,\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Se tomarmos $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, de tal forma que,

$$\lambda\epsilon \int_0^1 K(t,\tau)d\tau < 1,$$

então,

$$(Tu)(t) < \|u\|_\infty,$$

para todo $t \in [0,1]$. Logo,

$$\|Tu\|_\infty < \|u\|_\infty.$$

■

Com base nos Lemas 2.8 e 2.9 temos que existem $0 < R_1 < R_2$ tais que,

$$\|Tu\|_\infty > \|u\|_\infty \text{ se } u \in \partial C_{R_1},$$

e,

$$\|Tu\|_\infty < \|u\|_\infty \text{ se } u \in \partial C_{R_2}.$$

Assim, como conseqüência do Teorema 1.1, obtemos que T tem um ponto fixo $u \in C$ com $0 < R_1 < \|u\|_\infty < R_2$. Portanto o Problema $(P_{a,b,\lambda})$ tem pelo menos uma solução positiva para todo $a, b, \lambda > 0$. Provamos, dessa forma, o item **(i)** do Teorema 2.2.

Devemos agora, provar **(ii)**. Pela hipótese (g_2) temos que,

$$\lim_{|(u,a,b)|\to 0} \frac{g(t,u,a,b)}{|(u,a,b)|} = 0.$$

uniformemente em $t \in [0,1]$. Logo, existem constantes positivas suficientemente pequenas ρ e R_3 tais que, para todo $0 < |(a,b)| < \rho$,

$$g(\tau,u(\tau),a,b) \leq \rho(|(u,a,b)|) = \rho(|u| + |a| + |b|).$$

Temos que,

$$(Tu)(t) = \lambda \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau.$$

Considerando $\| \ u \ \|_\infty = R_3$ e $a+b < \rho \leq 2R_3$, obtemos que,

$$\begin{aligned}(Tu)(t) \leq \lambda \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,\|u\|_\infty,a,b)d\tau \ &\leq \ \lambda \int_0^1 K(t,\tau)\rho(\| \ u \ \|_\infty + a+b)d\tau \\ &< \ \lambda \int_0^1 K(t,\tau)\rho 3R_3 d\tau.\end{aligned}$$

Logo,

$$\sup_{t\in[0,1]} (Tu)(t) < \sup_{t\in[0,1]} \lambda \int_0^1 K(t,\tau)\rho 3R_3 d\tau \ = \ 3\lambda\rho\|u\|_\infty \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 K(t,\tau)d\tau.$$

Se considerarmos ρ suficientemente pequeno, de tal forma que,

$$3\lambda\rho \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 K(t,\tau)d\tau < 1,$$

então,

$$\|Tu\|_\infty < \|u\|_\infty,$$

para $u \in \partial C_{R_3}$.

Considerando as hipóteses (g_0) e (g_6), e ainda, o Lema 2.2, temos que para todo $u \in \partial C_R$,

$$\begin{aligned}(Tu)(t) = \lambda \int_0^1 K(t,\tau)g(\tau,u(\tau),a,b)d\tau \ &\geq \ \lambda \int_{\delta_4}^{\epsilon_4} K(t,\tau)g(\tau,\|u\|_\infty(1-\epsilon_4)\delta_4,a,b)d\tau \\ &\geq \ \int_{\delta_4}^{\epsilon_4} K(t,\tau)g(\tau,R(1-\epsilon_4)\delta_4,0,0)d\tau \\ &\geq \ \lambda K_R.\end{aligned}$$

Notemos que K_R é uma constante positiva que depende somente de R. Assim, existe $\lambda_1 > 0$ suficientemente grande tal que para todo $\lambda > \lambda_1$, obtemos que $\lambda K_R > R$. Logo, se tomarmos $\|u\|_\infty = R$, então $T(u)(t) > R = \|u\|_\infty$.
Donde segue que,

$$\|Tu\|_\infty > \|u\|_\infty,$$

para todo $u \in \partial C_R$, e $a, b \geq 0$.

Dessa forma, podemos escolher as constantes R_1, R_2 e R_3 tais que $R_1 < R_3 < R < R_2$, donde, aplicando o Teorema 1.1, obtemos três pontos fixos de T em C, satisfazendo,

$$R_1 < \|u_1\|_\infty < R_3 < \|u_2\|_\infty < R < \|u_3\|_\infty < R_2.$$

Provamos, dessa forma, o item **(ii)** do Teorema 2.2.

2.5 Aplicações

Nesta seção faremos algumas aplicações dos Teoremas 2.1 e 2.2.

Consideremos os seguintes exemplos em domínios anulares, com $N \geq 3$.
Exemplo 1:

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \alpha c_1(|x|) + c_2(|x|)(\beta + u^p)\exp(\zeta u^q) & \text{se} \quad r_1 < |x| < r_2, \\ u(x) & = & 0 & \text{se} \quad |x| = r_1, \\ u(x) & = & 0 & \text{se} \quad |x| = r_2, \end{array} \tag{2.15}$$

onde c_1, c_2 são funções contínuas não negativas, $0 < r_1 < r_2$, $\alpha, \beta \geq 0$; $p > 1$; $q \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$ e $\zeta > 0$. Além disso, suponhamos que existe $t_0 \in (r_1, r_2)$ tal que $c_1(t_0)$ e $c_2(t_0)$ são números reais positivos. Realizando uma mudança de variável $t = a(r)$ com,

$$a(r) = -\frac{A}{r^{N-2}} + B,$$

onde,

$$A = \frac{(r_1 r_2)^{N-2}}{r_2^{N-2} - r_1^{N-2}} \text{ and } B = \frac{{r_2}^{N-2}}{r_2^{N-2} - r_1^{N-2}},$$

obtemos o seguinte problema equivalente,

$$\begin{array}{rcll} -u'' & = & g(t, u(t), a, b) & \text{em} \quad (0,1), \\ u(0) & = & u(1) = 0, & \end{array} \tag{2.16}$$

onde $g(t, u, a, b) = a^p d_1(t) + d_2(t)(b^p + u^p)\exp(\zeta u^q)$, $\alpha = a^p$, $\beta = b^p$ e

$$d_i(t) = (1-N)^2 \frac{A^{2/(N-2)}}{(B-t)^{2(N-1)/(N-2)}} c_i\Big(\big(\frac{A}{B-t}\big)^{1/(N-2)}\Big), \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Não é difícil verificar que (2.16) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1. Donde, podemos concluir que existem $\overline{\alpha} > 0$ e a função $\Gamma : [0, \overline{\alpha}] \to [0, +\infty)$ satisfazendo:

(i) Se $\beta = 0$ ou $\beta = \Gamma(\alpha)$, o Problema (2.16) tem pelo menos uma solução positiva;

(ii) se $0 < \beta < \Gamma(\alpha)$, o Problema (2.16) tem pelo menos duas soluções positivas;

(iii) se $\beta > \Gamma(\alpha)$, o Problema (2.16) não tem solução positiva.

Para verificarmos que o problema (2.16) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1, devemos verificar que $g(t, u(t), a, b)$ satisfaz as hipóteses (g_0) até (g_4).

Mostremos que $g(t, u(t), a, b)$ é não decrescente nas três últimas variáveis. Suponhamos $(t, u_1, a_1, b_1) \leq (t, u_2, a_2, b_2)$, para que $g(t, u_1(t), a_1, b_1) \leq g(t, u_2(t), a_2, b_2)$ devemos ter $d_i(t) \geq 0$ para todo $i = 1, 2$. Com efeito, sabemos que,

$$d_i(t) = (1-N)^2 \frac{A^{2/(N-2)}}{(B-t)^{2(N-1)/(N-2)}} c_i\Big(\big(\frac{A}{B-t}\big)^{1/(N-2)}\Big), \quad \text{para } i = 1, 2.$$

Observemos que,

- Como $N \geq 3$ então $(1-N)^2 > 0$;

- $\frac{A^{2/(N-2)}}{(B-t)^{2(N-1)/(N-2)}} = \left(\frac{A^{1/(N-2)}}{(B-t)^{(N-1)/(N-2)}}\right)^2 > 0$, já que $A > 0$;

- $c_i\left(\left(\frac{A}{B-t}\right)^{1/(N-2)}\right) \geq 0$ para todo $i = 1, 2$.

Logo $d_i(t) \geq 0$, para todo $i = 1, 2$, donde concluímos que g é não decrescente nas três últimas variáveis.

Suponhamos agora que a, b não se anulam simultaneamente. Mostremos que,

$$g(t, 0, a, b) = d_1(t)a^p + d_2(t)b^p > 0.$$

Para tanto, basta verificar que $d_i(t) > 0$ para todo $i = 1, 2$. Notemos que, $d_i(t) > 0$ desde que $c_i\left(\left(\frac{A}{B-t}\right)^{1/(N-2)}\right) > 0$ para todo $i = 1, 2$. Por hipótese, sabemos que existe $t_0 \in (r_1, r_2)$ tal que $c_i(t_0) > 0$. Assim, se tomarmos $t_0 = \left(\frac{A}{B-t}\right)^{1/(N-2)}$, teremos que $c_i\left(\left(\frac{A}{B-t}\right)^{1/(N-2)}\right) > 0$ para todo $i = 1, 2$. Resta-nos verificar que,

$$r_1 < t_0 = \left(\frac{A}{B-t}\right)^{1/(N-2)} < r_2.$$

Mostremos que $r_1 < t_0$. Temos que,

$$t_0 = \left(\frac{A}{B-t}\right)^{1/(N-2)} > \left(\frac{r_1^{(N-2)} r_2^{(N-2)}}{r_2^{(N-2)}}\right)^{\frac{1}{N-2}} = \left(r_1^{(N-2)}\right)^{\frac{1}{N-2}} = r_1.$$

Donde segue que, $r_1 < t_0$. De maneira análoga obtêm-se $t_0 < r_2$. Portanto, $g(t, 0, a, b) > 0$ se $a + b > 0$.

Para que g satisfaça a hipótese (g_1) devemos ter que existem constantes $0 < \delta_1 < \epsilon_1 < 1$ tais que para todo $(a, b) \in [0, +\infty)^2 \backslash \{(0, 0)\}$

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(t, u, a, b)}{u} = +\infty,$$

uniformemente em $t \in [\delta_1, \epsilon_1]$. Temos que,

$$g(t, u, a, b) = a^p d_1(t) + d_2(t)(b^p + u^p) \exp(\zeta u^q).$$

Logo,

$$\lim_{u \to 0} \frac{g(t, u, a, b)}{u} = \lim_{u \to 0} \frac{a^p d_1(t)}{u} + \lim_{u \to 0} \frac{b^p e^{\zeta u^q} d_2(t)}{u} + \lim_{u \to 0} \frac{d_2(t) u^p e^{\zeta u^q}}{u} = +\infty.$$

Verifiquemos a hipótese (g_2). Devemos ter,

$$\lim_{|(u,a,b)| \to 0} \frac{g(t, u, a, b)}{|(u, a, b)|} = \lim_{|(u,a,b)| \to 0} \frac{a^p d_1(t)}{|(u, a, b)|} + \lim_{|(u,a,b)| \to 0} \frac{b^p e^{\zeta u^q} d_2(t)}{|(u, a, b)|} + \lim_{|(u,a,b)| \to 0} \frac{d_2(t) u^p e^{\zeta u^q}}{|(u, a, b)|} = 0,$$

uniformemente em $t \in [0, 1]$. Notemos que,

$$0 \leq \frac{a^p}{u + a + b} \leq \frac{a^p}{a} = a^{p-1} \to 0, \text{ quando } a \to 0, \text{já que } p > 1.$$

Procedendo de maneira análoga com as demais parcelas, obtemos que,

$$\lim_{|(u,a,b)|\to 0} \frac{g(t,u,a,b)}{|(u,a,b)|} = 0.$$

Por (g_3) devemos ter que existem constantes $0 < \delta_2 < \epsilon_2 < 1$ tais que,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{g(t,u,0,0)}{u} = +\infty,$$

uniformemente em $t \in [\delta_2, \epsilon_2]$. Observemos que,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{g(t,u,0,0)}{u} = \lim_{u\to\infty} \frac{d_2(t)u^p e^{\zeta u^q}}{u} = +\infty,$$

já que $d_2(t)e^{\zeta u^q} \geq 0$.

Resta-nos verificar a hipótese (g_4), onde tem-se que existem $0 < \delta_3 < \epsilon_3 < 1$ tais que,

$$\lim_{|(a,b)|\to+\infty} g(t,0,a,b) = +\infty,$$

uniformemente em $t \in [\delta_3, \epsilon_3]$. Temos que,

$$\lim_{|(a,b)|\to+\infty} g(t,0,a,b) = \lim_{|(a,b)|\to+\infty} d_1(t)a^p + d_2(t)b^p = +\infty \text{ já que } p > 1 \text{ e } d_i(t) \geq 0.$$

Assim, concluímos que o Problema (2.16) satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1.

Exemplo 2: Consideremos o problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda\, c(|x|)f(u) & \text{se} \quad r_1 < |x| < r_2, \\ u(x) &=& a & \text{se} \quad |x| = r_1, \\ u(x) &=& b & \text{se} \quad |x| = r_2, \end{array} \tag{2.17}$$

onde a, b são parâmetros não negativos, $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $0 < r_1 < r_2$, $c : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ é uma função contínua e a não linearidade f é uma função contínua não decrescente satisfazendo

(i) $\lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = 0$;

(ii) $\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = +\infty$.

então as conclusões do Teorema 2.1 são válidas. Com efeito, de maneira similar ao exemplo anterior, é possível verificar que o Problema (2.17) é equivalente ao seguinte:

$$\begin{array}{rcll} -u'' &=& g(t,u,a,b) & \text{in} \quad (0,1) \\ u(0) &=& u(1) = 0, & \end{array} \tag{2.18}$$

onde $g(t,u,a,b) = d(t)\, f(u + (1-t)a + tb)$ verifica as hipóteses do Teorema 2.1 com

$$d(t) = (1-N)^2 \frac{A^{2/(N-2)}}{(B-t)^{2(N-1)/(N-2)}} c\Big(\big(\frac{A}{B-t}\big)^{1/(N-2)}\Big).$$

Para verificar que g é não decrescente, basta observar que $d(t) \geq 0$ e que f é não decrescente, de forma que se $(t, u_1, a_1, b_1) \leq (t, u_2, a_2, b_2)$ então $g(t, u_1, a_1, b_1) \leq g(t, u_2, a_2, b_2)$. Por (i), temos que,

$$0 \leq \frac{f(u+(1-t)a+tb)}{u+a+b} \leq \frac{f(u+(1-t)a+tb)}{u} \to 0 \text{ quando } u \to 0.$$

Logo,

$$\lim_{|(u,a,b)|\to 0} \frac{g(t,u,a,b)}{|(u,a,b)|} = \lim_{|(u,a,b)|\to 0} \frac{d(t)\, f(u+(1-t)a+tb)}{|(u,a,b)|} = 0.$$

Além disso, temos que $g(t, u, 0, 0) = d(t)f(u)$, donde segue que,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{g(t,u,0,0)}{u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{d(t)f(u)}{u} = +\infty, \text{ por } (ii)$$

Notemos ainda que,

$$\lim_{|(a,b)|\to+\infty} g(t,0,a,b) = \lim_{|(a,b)|\to+\infty} d(t)f((1-t)a+tb) = +\infty, \text{ já que } f \text{ é não decrescente.}$$

Observemos que o Teorema 2.2 pode ser aplicado ao Problema (2.17) assumindo a hipótese **(i)** acima e além disso assumindo a seguinte hipótese de sublinearidade no infinito:

(iii) $\lim_{u\to+\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$.

Devemos verificar que g satisfaz as hipóteses (g_5) e (g_6). Por (g_5) devemos ter que para todo $(a, b) \in [0, +\infty)^2$,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{g(t,u,a,b)}{u} = 0,$$

uniformemente em $t \in [0, 1]$. Observemos que,

$$\lim_{u\to+\infty} \frac{g(t,u,a,b)}{u} = \lim_{u\to+\infty} \frac{d(t)f(u+(1-t)a+tb)}{u} = 0 \text{ por } (iii).$$

Finalmente, notemos que o Teorema 2.1 pode ser aplicado para estabelecer a existência e multiplicidade de soluções para os seguintes problemas abaixo.

Exemplo 3: Consideremos o problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u &=& \lambda\,(c_1(|x|)u^{p_1}+1)\Phi(c_2(|x|)u^{p_2}) & \text{se} \quad r_1 < |x| < r_2, \\ u(x) &=& a & \text{se} \qquad |x| = r_1, \\ u(x) &=& b & \text{se} \qquad |x| = r_2, \end{array} \tag{2.19}$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $p_1 < 1 < p_2$, $c_i : [r_1, r_2] \to [0, +\infty)$ para $i = 1, 2$ são funções contínuas e não negativas. Além disso, suponhamos que $\Phi : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ é uma função contínua não decrescente satisfazendo,

$$\lim_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = \hat{c}_1 \geq 0 \quad \text{e} \quad \lim_{u\to+\infty} \Phi(u) = \hat{c}_2 > 0.$$

Exemplo 4: Consideremos o problema

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u & = & \lambda \frac{c_1(|x|)u^{p_3}}{1+c_2(|x|)u^{p_4}} & \text{se} \quad r_1 < |x| < r_2, \\ u(x) & = & a & \text{se} \quad\quad |x| = r_1, \\ u(x) & = & b & \text{se} \quad\quad |x| = r_2, \end{array} \tag{2.20}$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $1 < p_3 < 1 + p_4$ e a função $c_i(|x|)$ está como no exemplo acima, verificando em adição que a interceção dos suportes é não vazia.

Observação 2.2 *Notemos que o Problema (2.17) pertence a uma estrutura de equações elípticas autônomas perturbadas por um peso* $c(|x|)$. *Este tipo de problema tem sido considerado por vários autores, quando o peso é não negativo e não trivial em qualquer subintervalo compacto de* $(0,1)$, *dentre eles, podemos citar [21] e [36]. Aqui o peso pode ser nulo em partes do domínio. Os Problemas (2.15), (2.19) e (2.20) correspondem a equações elípticas fortemente não autônomas. Uma outra novidade, é o resultado de multiplicidade de três soluções positivas para equações elípticas semilineares em domínios anulares limitados com condições de fronteira não homogêneas.*

Capítulo 3

Três Soluções Radiais Positivas para Equações Elípticas na Bola

3.1 Introdução

Assim como no capítulo anterior, utilizaremos o Teorema 1.1 a fim de estudarmos a existência e multiplicidade de soluções radiais positivas para uma classe de problemas elípticos de segunda ordem, da seguinte forma:

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda K(|x|)f(u), & u > 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \\ & u = a \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{3.1}$$

onde Ω é a bola de raio R_0 centrada na origem, λ, a são parâmetros positivos, $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$, $f \in C([0,+\infty),[0,+\infty))$ é uma função crescente e $K \in C([0,R_0],[0,+\infty))$ não é identicamente nula em qualquer subintervalo de $[0,R_0]$.

Observemos que no Capítulo 2 trabalhamos em domínio anular, e nesse caso, o domínio considerado é a bola. Consideremos as seguintes hipóteses:
(f_0) $f(u) > 0$, para todo $u > 0$;
(f_1) $\lim_{u\to 0} \frac{f(u)}{u} = 0$;
(f_2) $\lim_{u\to +\infty} \frac{f(u)}{u} = 0$;
(f_3) existem uma função $\varphi = \varphi_a \in C([0,+\infty),[0,+\infty))$, verificando,

$$\int_1^{+\infty} \varphi(\tau)\tau^{-\frac{N}{N-2}} d\tau < +\infty,$$

e constantes positivas $\bar{\alpha}(a)$, $\bar{\tau}(a)$ e $M(a)$ tais que para todo $\tau > \bar{\tau}$ temos,

$$\frac{f(\alpha\tau + a)}{f(\alpha + a)} \leq M\varphi(\tau) \text{ para todo } \alpha \geq \bar{\alpha}. \tag{3.2}$$

A função $f(u) = u^{p_1}/(1 + u^{q_1})$ com $1 < p_1$ e $0 < p_1 - q_1 < \min\{1, 2/(N-2)\}$ é um exemplo de uma não linearidade que satisfaz $(f_0) - (f_3)$.

Vejamos os principais resultados que tratam da existência de solução para o Problema (3.1).

Teorema 3.1 *Consideremos a função $f(u)$ satisfazendo as hipóteses $(f_0) - (f_3)$. Então o Problema* (3.1) *tem pelo menos uma solução radial positiva para todo $a, \lambda > 0$.*

Teorema 3.2 *Assumamos a função $f(u)$ satisfazendo as hipóteses $(f_0)-(f_3)$. Então, existe $\tilde{\delta}>0$ tal que para todo $a\in(0,\tilde{\delta})$ existe um $\tilde{\lambda}(a)>0$ tal que para todo $\lambda>\tilde{\lambda}(a)$, o Problema (3.1) tem pelo menos três soluções radiais positivas.*

As hipóteses dos pricipais resultados são satisfeitas por funções não lineares da forma: $f(u)=(u^{q_2}+1)\varphi(u^{p_2})$ com $1<p_2$, $0<q_2<\min\{1,2/(N-2)\}$ e $\varphi\in C([0,+\infty),[0,+\infty))$ é tal que, $\lim_{u\to 0}\varphi(u)/u\geq 0$ e $\lim_{u\to+\infty}\varphi(u)>0$.

3.2 Resultados Preliminares

Nesta seção estabeleceremos a existência de soluções radiais positivas para o Problema (3.1). Para tanto, obteremos soluções positivas $u=u(r)$ para um problema de equações ordinárias que obteremos da seguinte forma:

Afirmamos que $u(x)=u(r)$ é solução do Problema (3.1) se, e somente se,

$$-u''(r)-u'(r)(N-1)/r=\lambda K(r)f(u(r)),\ \text{(cf. [20], cap. 2).}$$

que é equivalente a,

$$-r^{N-1}u''(r)-r^{N-1}u'(r)(N-1)/r=r^{N-1}\lambda K(r)f(u(r)),$$

ou seja,

$$-(r^{N-1}u')'=r^{N-1}\lambda K(r)f(u(r)).$$

Além disso, $u(R_0)=a$.

Dessa forma, se fizermos $\tilde{u}=u-a$ e ainda renomearmos $\tilde{u}=u$, obtemos que encontrar soluções para o Problema (3.1) é equivalente a encontrarmos soluções para o seguinte problema de equações ordinárias:

$$\begin{cases} -(r^{N-1}u')'=r^{N-1}\lambda K(r)f(u+a) \quad \text{em} \quad (0,R_0) \\ u(R_0)=u'(0)=0. \end{cases} \tag{3.3}$$

Consideremos $a:(0,R_0]\to[0,+\infty)$ dada por $a(r)=(r^{2-N}-R_0^{2-N})/(N-2)$. Por uma mudança de variável $t=a(r)$, $z(t)=u(r(t))$ afirmamos que (3.3) pode ser reescrito como:

$$\begin{cases} -z''(t)=\lambda r^{2(N-1)}(t)h(t)f(z(t)+a) \quad \text{em} \quad (0,+\infty) \\ z(0)=z'(+\infty)=0, \end{cases} \tag{3.4}$$

onde $h(t)=K(a^{-1}(t))$ é uma função contínua que não é identicamente nula em qualquer subintervalo de $(0,+\infty)$. De fato, temos que,

$$t=a(r)=(r^{2-N}-R_0^{2-N})/(N-2).$$

Derivando ambos os lados em relação a t, obtemos que,

$$1=(2-N)/(N-2)r^{1-N}r'(t),$$

donde,

$$r'(t)=-r^{N-1}. \tag{3.5}$$

Temos ainda que,

$$z(t) = u(r(t)).$$

Logo,

$$z'(t) = u'(r(t))r'(t).$$

Usando (3.5) obtemos que,

$$z'(t) = -r^{N-1}u'(r(t)).$$

Daí,

$$\begin{aligned} z''(t) &= -(N-1)r^{N-2}r'(t)u'(r(t)) - r^{N-1}u''(r(t))r'(t) \\ &= -(N-1)r^{N-2}(-r^{N-1})u'(r(t)) + r^{2(N-1)}u''(r(t)) \\ &= (N-1)r^{-1}r^{2(N-1)}u'(r(t)) + r^{2(N-1)}u''(r(t)) \\ &= r^{N-1}\left(r^{N-1}u'\right)'. \end{aligned}$$

Por (3.3) temos que,

$$\left(r^{N-1}u'\right)' = -r^{N-1}\lambda K(r)f(u+a).$$

Logo,

$$-z''(t) = r^{2(N-1)}\lambda K(r)f(u+a) = \lambda r^{2(N-1)}(t)h(t)f(z(t)+a).$$

Vejamos agora as condições de fronteira: se $r = R_0$ então $a(r) = 0$, donde $t = 0$ e portanto $z(0) = u(R_0) = 0$. De maneira análoga, se $t \to +\infty$ então $a(r) \to +\infty$, donde $r \to 0$, assim, como $z'(t) = u'(r(t))r'(t)$, então $z'(+\infty) = u'(0)r'(t) = 0$. Portanto, obtemos (3.4).

Integrando a equação (3.4) duas vezes e usando as condições de fronteira, obtemos uma equação integral da forma abaixo:

$$z(t) = \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds, \tag{3.6}$$

onde $G(\tau) = \left(R_0^{2-N} + (N-2)\tau\right)^{2(1-N)/(N-2)}$. De fato, temos que,

$$-\int_s^{+\infty} z''(\tau)d\tau = \lambda \int_s^{+\infty} r^{2(N-1)}(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau.$$

Logo,

$$-z'(+\infty) + z'(s) = \lambda \int_s^{+\infty} r^{2(N-1)}(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau.$$

Usando a condição de fronteira segue que,

$$z'(s) = \lambda \int_s^{+\infty} r^{2(N-1)}(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau.$$

Integrando mais uma vez obtemos,

$$\int_0^t z'(s) = \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} r^{2(N-1)}(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds.$$

Donde,

$$z(t) - z(0) = \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} r^{2(N-1)}(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds.$$

Usando novamente a condição de fronteira obtemos,

$$z(t) = \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} r^{2(N-1)}(\tau) h(\tau) f(z(\tau) + a) d\tau ds. \tag{3.7}$$

Temos que

$$a(r) = \frac{r^{2-N} - R_0^{2-N}}{(N-2)},$$

ou seja,

$$r^{2-N} = a(r)(N-2) + R_0^{2-N},$$

donde,

$$r^{2-N} = \tau(N-2) + R_0^{2-N},$$

ou equivalentemente,

$$(r^{2-N})^{\frac{2(1-N)}{(N-2)}} = \left[\tau(N-2) + R_0^{2-N}\right]^{\frac{2(1-N)}{(N-2)}},$$

se, e somente se,

$$r^{2(N-1)}(\tau) = \left[R_0^{2-N} + (N-2)\tau\right]^{\frac{2(1-N)}{(N-2)}}.$$

Definamos $G(\tau) := \left[R_0^{2-N} + (N-2)\tau\right]^{\frac{2(1-N)}{(N-2)}} = r^{2(N-1)}(\tau)$. Dessa forma, substituindo $G(\tau)$ em (3.7) obtemos que,

$$z(t) = \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau) h(\tau) f(z(\tau) + a) d\tau ds.$$

Assim, podemos resolver o Problema (3.7) usando técnicas de ponto fixo. Com esse objetivo, utilizaremos o Teorema 1.1.

Denotemos X o espaço das funções contínuas e limitadas $z : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ munido com a norma $\|z\|_\infty = \sup_{t \in [0,+\infty)} |z(t)|$.

Definamos,

$$C_1 = \{z \in X : z \geq 0, z \text{ é côncava e } z(0) = 0\}.$$

É fácil ver que C_1 define um cone em X. Notemos que os elementos de C_1 são funções crescentes.

Consideremos o operador $F : C_1 \to X$ dado por,

$$F(z)(t) := \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau) h(\tau) f(z(\tau) + a) d\tau ds. \tag{3.8}$$

O lema a seguir nos mostra, entre outras coisas, que F está bem definido.

Lema 3.1 *O operador F dado em (3.8) está bem definido. Além disso, $F(C_1) \subset C_1$ e F é um operador completamente contínuo.*

Prova. Mostremos que F está bem definido, para tanto devemos mostrar que,

$$F(z)(t) = \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau) h(\tau) f(z(\tau) + a) d\tau ds < +\infty. \tag{3.9}$$

Temos que z é uma função limitada, logo existe $C_0 > 0$ tal que $\|z\|_\infty \leq C_0$. Como f é contínua, podemos considerar $\max_{s\in[0,\|z\|_\infty]} f(s+a) = M(f,z)$, para z fixada. Assim,

$$F(z)(t) \leq M\lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau)h(\tau)d\tau ds.$$

Além disso, $h(t) = K(a^{-1}(\tau))$, onde K é uma função contínua definida em $[0, R_0]$, sendo portanto limitada, logo podemos substituir $h(\tau)$ por $\|h\|_\infty$. Daí,

$$F(z)(t) \leq M\|h\|_\infty\lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau ds.$$

Segue que, para mostrarmos (3.9) é suficiente mostrarmos que,

$$\int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau ds < +\infty.$$

Notemos que, para todo $s \geq 0$

$$\int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau = \frac{1}{N}G(s)^{N/2(N-1)}.$$

Com efeito,

$$\int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau = \int_s^{+\infty} \left(R_0^{2-N} + (N-2)\tau\right)^{\frac{2(1-N)}{(N-2)}} d\tau.$$

Seja $\eta = R_0^{2-N} + (N-2)\tau$, donde $d\eta = (N-2)d\tau$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_s^{+\infty} \left(R_0^{2-N} + (N-2)\tau\right)^{\frac{2(1-N)}{(N-2)}} d\tau &= \frac{1}{N-2}\int_{R_0^{2-N}+(N-2)s}^{+\infty} \eta^{\frac{2(1-N)}{(N-2)}} d\eta \\ &= \frac{1}{N}\left(R_0^{2-N} + (N-2)s\right)^{-N/(N-2)} \\ &= \frac{1}{N}G(s)^{N/2(N-1)}. \end{aligned}$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau ds &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{N}G(s)^{N/2(N-1)}ds \\ &= \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{N}G(s)^{N/2(N-1)}ds \\ &= \lim_{t\to+\infty} \frac{2(N-1)}{N(3N-2)}\left[G(t)^{\frac{3N-2}{2(N-1)}} - G(0)^{\frac{3N-2}{2(N-1)}}\right]. \end{aligned}$$

Observemos que $\lim_{t\to+\infty} G(t) = 0$, donde segue que,

$$\int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau ds = -\frac{2(N-1)}{N(3N-2)}\left[\left(R_0^{2-N}\right)^{2(1-N)/N-2}\right]^{\frac{3N-2}{2(N-1)}} < +\infty.$$

Portanto, o operador F está bem definido.

Mostremos agora que $F(C_1) \subset C_1$. Seja $z \in C_1$, devemos verificar que $F(z) \in C_1$. É fácil ver que $F(z)(t) \geq 0$ para todo $t \in [0, +\infty)$ e $F(z)(0) = 0$. Resta-nos mostrar que $F(z)(t)$ é uma função crescente e côncava. Observemos que a função $F(z)(t)$ é de classe C^2. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}F(z)(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds \\ &= \lambda \int_t^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau \geq 0.\end{aligned}$$

Donde segue que $F(z)(t)$ é crescente. Além disso,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}F(z)(t) &= \frac{\partial}{\partial t}\lambda \int_t^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau \\ &= -\lambda G(t)h(t)F(z(t)+a) \leq 0.\end{aligned}$$

Donde concluímos que $F(z)(t)$ é côncava. Logo, $F(z) \in C_1$ e portanto $F(C_1) \subset C_1$.

Para provarmos que F é um operador completamente contínuo utilizaremos o critério de compacidade de Arzelá-Ascoli para convergência uniforme (Teorema 1.9). Assim, devemos verificar que $(F(z_n))$ é uma seqüência de funções equilimitadas e equicontínuas. Sejam $(z_n) \in C_1$ tal que $\|z_n\|_\infty \leq c_0$ e $M_1 = \max_{t\in[0,c_0]} f(t+a)$. Assim,

$$\begin{aligned}|F(z_n)(t)| &= \left|\lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z_n(\tau)+a)d\tau ds\right| \\ &\leq \lambda \|h\|_\infty M_1 \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau ds \\ &\leq \lambda \|h\|_\infty M_1 \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau ds < +\infty,\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, c_0]$, logo, $(F(z_n))$ é uma seqüência de funções equilimitadas. Para mostrarmos a equicontinuidade de $(F(z_n))$ basta observarmos que a derivada de $(F(z_n))$ em relação a t é limitada para todo $t \in [0, c_0]$, donde concluímos, pelo Teorema do Valor Médio, que $(F(z_n))$ é equicontínua. De fato,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial}{\partial t}F(z_n)(t)\right| &= \left|\lambda \int_t^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau\right| \\ &\leq \lambda M_1 \|h\|_\infty \int_t^{+\infty} G(\tau)d\tau \\ &\leq \lambda M_1 \|h\|_\infty \int_0^{+\infty} G(\tau)d\tau \\ &= \lambda M_1 \|h\|_\infty 1/NG(0)^{N/2(N-1)} < +\infty,\end{aligned}$$

para todo $t \in [0, c_0]$, donde $(F(z_n))$ é uma seqüência de funções equicontínuas.

Portanto, podemos concluir pelo critério de compacidade de Arzelá-Ascoli para convergência uniforme que a menos de subseqüência $(F(z_n))$ é uniformemente convergente sobre subconjuntos compactos de $[0, +\infty)$. Precisamos verificar a existência de uma subseqüência de $(F(z_n))$ uniformemente convergente sobre $[0, +\infty)$. Sabemos que,

$$\int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G(\tau)d\tau ds < +\infty.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $T = T(\epsilon)$ tal que

$$\int_T^{+\infty} \int_s^{+\infty} G(\tau) d\tau ds < \epsilon.$$

Daí,

$$|F(z_n)(t) - w(t)| < \epsilon \text{ para todo } n \geq n_0 \text{ e para todo } t \in [0, T].$$

Onde $w(t)$ é o limite de $F(z_n)(t)$. Mostremos agora que isso ocorre para todo $t \in (T, +\infty)$. Como X é um espaço de Banach é suficiente mostrarmos que $(F(z_n))$ é uma seqüência de Cauchy. Observemos que, para cada $t \in (T, +\infty)$ fixado,

$$\begin{aligned}
|F(z_n)(t) - F(z_m)(t)| &\leq \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau) h(\tau) \left| f(z_n(\tau) + a) - f(z_m(\tau) + a) \right| d\tau ds \\
&\leq \lambda \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau) h(\tau) \left(|f(z_n(\tau) + a)| + |f(z_m(\tau) + a)| \right) d\tau ds \\
&\leq \lambda \|h\|_\infty 2M_1 \int_0^t \int_s^{+\infty} G(\tau) d\tau ds \\
&\leq \lambda \|h\|_\infty 2M_1 \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} G(\tau) d\tau ds < +\infty.
\end{aligned}$$

Logo, $(F(z_n))$ é uma seqüência de Cauchy em X, donde existe uma subseqüência uniformemente convergente de $(F(z_n))$ para todo $t \in [0, +\infty)$.

Para concluirmos de fato que F é um operador completamente contínuo, resta-nos verificar que F é contínuo. Seja (z_n) uma seqüência em C_1 tal que $\|z_n - z_0\|_\infty \to 0$ quando $n \to \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
|F(z_n)(t) - F(z_0)(t)| &\leq \lambda \|h\|_\infty \int_0^t |\xi_n(s) - \xi_0(s)| ds \\
&\leq \lambda \|h\|_\infty \int_0^{+\infty} |\xi_n(s) - \xi_0(s)| ds,
\end{aligned}$$

onde,

$$\xi_n(s) = \int_s^{+\infty} G(\tau) f(z_n(\tau) + a) d\tau \text{ e } \xi_0(s) = \int_s^{+\infty} G(\tau) f(z_0(\tau) + a) d\tau.$$

Temos que,

$$|z_n(\tau) - z_0(\tau)| \leq \|z_n - z_0\|_\infty \to 0.$$

Logo,

$$\xi_n(s) \to \xi_0(s).$$

Além disso,

$$\begin{aligned}
\xi_n(s) &= \int_s^{+\infty} G(\tau) f(z_n(\tau) + a) d\tau \\
&\leq M_1 \int_s^{+\infty} G(\tau) d\tau \\
&= M_1 \frac{1}{N} G(s)^{N/2(N-1)} \text{ para todo } s \in [0, +\infty).
\end{aligned}$$

Donde segue que,

$$\begin{aligned} |F(z_n)(t)| &\leq \lambda\|h\|_\infty \int_0^t M_1 \frac{1}{N} G(s)^{N/2(N-1)} ds \\ &\leq \lambda\|h\|_\infty \int_0^{+\infty} M_1 \frac{1}{N} G(s)^{N/2(N-1)} ds < +\infty. \end{aligned}$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue (Teorema 1.5), obtemos que,

$$\|F(z_n) - F(z_0)\|_\infty \to 0.$$

Logo, F é contínuo. E portanto, F é um operador completamente contínuo. ∎

Dado $z \in C_1 \backslash \{0\}$, usando o fato que z é crescente temos que existe um único $\tau_1 = \tau_1(z)$ tal que,

$$2z(\tau_1) = \|z\|_\infty.$$

Definamos,

$$\tau^* := \sup\{\tau_1(F(z)) : z \in C_1\},$$

e o cone,

$$C := \{z \in C_1 : 2z(t) \geq \|z\|_\infty, \forall\ t \geq \tau^*\}.$$

O lema a seguir nos mostra que τ^* está bem definido.

Lema 3.2 *τ^* é um número real positivo e C é um cone invariante por F.*

Prova. Mostremos que τ^* é um número real positivo. Com efeito, suponhamos por contradição que $\tau^* = +\infty$. como τ^* é o supremo então existe uma seqüência $z_n \subset C_1 \backslash \{0\}$ tal que $\tau_n = \tau_1(F(z_n))$ é um seqüência de números reais positivos convergindo para $\tau^* = +\infty$, tal seqüência pode ser considerada estritamente crescente, já que o limite é $+\infty$. Por definição de τ_n obtemos que,

$$\int_0^{\tau_n} \int_s^{+\infty} H_n(\tau) d\tau ds = \int_{\tau_n}^{+\infty} \int_s^{+\infty} H_n(\tau) d\tau ds, \tag{3.10}$$

onde $H_n(\tau) = G(\tau)h(\tau)f(z_n(\tau) + a)$. De fato, temos que $\tau_n = \tau_1(F(z_n))$ é tal que,

$$F(z_n)(\tau_n) = \frac{\|Fz_n\|_\infty}{2}.$$

Além disso,

$$\|Fz_n\|_\infty = \lambda \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} H_n(\tau) d\tau ds.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 2\lambda \int_0^{\tau_n} \int_s^{+\infty} H_n(\tau) d\tau ds &= \lambda \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} H_n(\tau) d\tau ds \\ &= \lambda \int_0^{\tau_n} \int_s^{+\infty} H_n(\tau) d\tau ds + \lambda \int_{\tau_n}^{+\infty} \int_s^{+\infty} H_n(\tau) d\tau ds. \end{aligned}$$

Donde segue que,

$$\int_0^{\tau_n}\int_s^{+\infty} H_n(\tau)d\tau ds = \int_{\tau_n}^{+\infty}\int_s^{+\infty} H_n(\tau)d\tau ds.$$

Integrando por partes cada membro da equação (3.10), obtemos que,

$$2\tau_n \int_{\tau_n}^{+\infty} H_n(\tau)d\tau + \int_0^{\tau_n} sH_n(s)ds = \int_{\tau_n}^{+\infty} sH_n(s)ds. \tag{3.11}$$

Com efeito, integremos primeiramente o lado esquerdo de (3.10). Denotemos

$$g(s) := \int_s^{+\infty} H_n(\tau)d\tau.$$

Donde,

$$g'(s)ds = -H_n(s)ds.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{\tau_n}\int_s^{+\infty} H_n(\tau)d\tau ds &= \int_s^{+\infty} H_n(\tau)d\tau . s|_0^{\tau_n} + \int_0^{\tau_n} sH_n(s)ds \\ &= \tau_n \int_{\tau_n}^{+\infty} H_n(\tau)d\tau + \int_0^{\tau_n} sH_n(s)ds.\end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga com o lado direito de (3.10) obtemos que,

$$\int_{\tau_n}^{+\infty}\int_s^{+\infty} H_n(\tau)d\tau ds = -\tau_n \int_{\tau_n}^{+\infty} H_n(\tau)d\tau + \int_{\tau_n}^{+\infty} sH_n(s)ds.$$

Basta observar que nesse caso, usamos o fato que,

$$\lim_{\eta\to+\infty} \eta \int_\eta^{+\infty} H_n(\tau)d\tau = 0.$$

Assim, pelas considerações anteriores obtemos que,

$$\tau_n \int_{\tau_n}^{+\infty} H_n(\tau)d\tau + \int_0^{\tau_n} sH_n(s)ds = -\tau_n \int_{\tau_n}^{+\infty} H_n(\tau)d\tau + \int_{\tau_n}^{+\infty} sH_n(s)ds.$$

Donde segue que,

$$2\tau_n \int_{\tau_n}^{+\infty} H_n(\tau)d\tau + \int_0^{\tau_n} sH_n(s)ds = \int_{\tau_n}^{+\infty} sH_n(s)ds.$$

Como z_n é côncava, segue de (3.11) que,

$$\int_0^{\tau_n} \tau U_n(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau U_n(\tau)d\tau, \tag{3.12}$$

onde $U_n(\tau) = G(\tau)h(\tau)f(\alpha_n\tau + a)$ com $\alpha_n = z_n(\tau_n)/\tau_n$. Com efeito, de (3.11) obtemos que,

$$\int_0^{\tau_n} \tau H_n(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau H_n(\tau)d\tau.$$

Notemos que,
$$\int_0^{\tau_n} \tau U_n(\tau)d\tau = \int_0^{\tau_n} \tau G(\tau)h(\tau)f(\alpha_n\tau + a).$$
Afirmamos que,
$$f(\alpha_n\tau + a) \leq f(z_n(\tau) + a). \tag{3.13}$$
De fato, $f(\alpha_n\tau+a) = f\left((z_n(\tau_n)/\tau_n)\tau + a\right)$. Como f é crescente e $a > 0$, para mostrarmos (3.13) basta verificarmos que
$$\frac{z_n(\tau_n)}{\tau_n}\tau \leq z_n(\tau) \text{ para todo } 0 \leq \tau \leq \tau_n.$$
Ou seja,
$$\frac{z_n(\tau)}{\tau} \geq \frac{z_n(\tau_n)}{\tau_n}.$$
Temos que, $0 \leq \tau \leq \tau_n$, como z_n é côncava então,
$$\frac{z_n(\tau) - z_n(0)}{\tau - 0} \geq \frac{z_n(\tau_n) - z_n(0)}{\tau_n - 0}.$$
Donde segue que,
$$\frac{z_n(\tau)}{\tau} \geq \frac{z_n(\tau_n)}{\tau_n}.$$
Logo,
$$\int_0^{\tau_n} \tau G(\tau)h(\tau)f(\alpha_n\tau + a)d\tau \leq \int_0^{\tau_n} \tau G(\tau)h(\tau)f(z_n(\tau) + a)d\tau$$
Ou seja,
$$\int_0^{\tau_n} \tau U_n(\tau)d\tau \leq \int_0^{\tau_n} \tau H_n(\tau)d\tau.$$
De maneira análoga, usando o fato que $0 \leq \tau_n \leq \tau$, obtemos que,
$$\int_{\tau_n}^{+\infty} \tau H_n(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau U_n(\tau)d\tau.$$
Portanto,
$$\int_0^{\tau_n} \tau U_n(\tau)d\tau \leq \int_0^{\tau_n} \tau H_n(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau H_n(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau U_n(\tau)d\tau.$$
Isto é,
$$\int_0^{\tau_n} \tau U_n(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau U_n(\tau)d\tau.$$
Considerando a expressão (3.12), temos que,
$$\int_1^{\tau_n} \tau U_n(\tau)d\tau \leq \int_0^{\tau_n} \tau U_n(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau U_n(\tau)d\tau. \tag{3.14}$$
Usando (3.14) e o fato que $f(\alpha_n\tau + a) \geq f(\alpha_n + a)$ para todo $\tau \geq 1$, temos que,
$$\int_1^{\tau_n} \tau G(\tau)h(\tau)f(\alpha_n + a)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau G(\tau)h(\tau)f(\alpha_n\tau + a)d\tau.$$

Donde segue que,

$$\int_1^{\tau_n} \tau h(\tau)G(\tau)d\tau \leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau h(\tau)G(\tau)\frac{f(\alpha_n\tau + a)}{f(\alpha_n + a)}d\tau. \tag{3.15}$$

Devemos considerar agora, dois casos:
Caso 1: Existe uma subseqüência (α_{n_k}) de (α_n) tal que $(\alpha_{n_k}) < \bar{\alpha}$ para todo k. Pela hipótese f_3 temos que,

$$\frac{f(\bar{\alpha}\tau + a)}{f(\bar{\alpha} + a)} \leq M\varphi(\tau) \text{ para todo } \bar{\alpha} \geq (\alpha_{n_k}).$$

Usando (3.15) e a hipótese (f_3) obtemos,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\tau_{n_k}} \tau h(\tau)G(\tau)d\tau &\leq \int_{\tau_{n_k}}^{+\infty} \tau h(\tau)G(\tau)\frac{f(\alpha_{n_k}\tau + a)}{f(\alpha_{n_k} + a)}d\tau \\
&\leq \|h\|_\infty \int_{\tau_{n_k}}^{+\infty} \tau G(\tau)\frac{f(\bar{\alpha}\tau + a)}{f(\alpha_{n_k} + a)}d\tau \\
&= \|h\|_\infty \int_{\tau_{n_k}}^{+\infty} \tau G(\tau)\frac{f(\bar{\alpha}\tau + a)}{f(\bar{\alpha} + a)}\frac{f(\bar{\alpha} + a)}{f(\alpha_{n_k} + a)}d\tau \\
&\leq c_1 \int_{\tau_{n_k}}^{+\infty} \tau G(\tau)\varphi(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Caso 2: Consideremos agora, $\alpha_n \geq \bar{\alpha}$ para todo n. Assim, pela hipótese (f_3) obtemos que,

$$\frac{f(\alpha_n\tau + a)}{f(\alpha_n + a)} \leq M\varphi(\tau).$$

Logo, usando (3.15) e a hipótese (f_3) temos que,

$$\begin{aligned}
\int_1^{\tau_n} \tau h(\tau)G(\tau)d\tau &\leq \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau h(\tau)G(\tau)\frac{f(\alpha_n\tau + a)}{f(\alpha_n + a)}d\tau \\
&\leq c_2 \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau G(\tau)\varphi(\tau)d\tau.
\end{aligned}$$

Notemos que $\tau G(\tau) \leq \tau^{-N/N-2}$. Com efeito,

$$\begin{aligned}
\tau G(\tau) &= \tau\left(R_0^{2-N} + (N-2)\tau\right)^{2(1-N)/N-2} \\
&\leq \tau\tau^{2(1-N)/N-2}(N-2)^{2(1-N)/N-2} \\
&\leq \tau\tau^{2(1-N)/N-2} = \tau^{-N/N-2}.
\end{aligned}$$

Assim, em ambos os casos,

$$\int_1^{\tau_n} \tau h(\tau)G(\tau)d\tau \leq c_3 \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau^{-N/N-2}\varphi(\tau)d\tau,$$

onde, $c_3 = \max\{c_1, c_2\}$.

Por (f_3) temos que,

$$\int_1^{+\infty} \varphi(\tau)\tau^{-\frac{N}{N-2}} d\tau < +\infty.$$

Logo,

$$c_3 \int_{\tau_n}^{+\infty} \tau^{-N/N-2}\varphi(\tau)d\tau \to 0 \quad \text{quando } n \to +\infty,$$

o que é impossível, já que, $\int_1^{+\infty} \tau h(\tau)G(\tau)d\tau > 0$, pois $\tau \geq 1$, $h(\tau) \geq 0$ e não é identicamente zero em qualquer subintervalo de $(0, +\infty)$, e ainda, $G(\tau) > 0$ quando $\tau \geq 1$. Portanto, τ^* é um número real positivo.

Devemos mostrar agora, que C é um cone invariante por F. Mostremos primeiramente que C é um cone. Sejam $z_1, z_2 \in C$ e $\alpha, \beta \geq 0$. Temos que, $\alpha z_1 + \beta z_2 \in C_1$, já que C_1 é um cone em X. Além disso,

$$\begin{aligned} 2(\alpha z_1 + \beta z_2)(t) &= 2\alpha z_1(t) + 2\beta z_2(t) \\ &\geq \alpha\|z_1\|_\infty + \beta\|z_2\|_\infty \\ &= \|\alpha z_1\|_\infty + \|\beta z_2\|_\infty \\ &\geq \|\alpha z_1 + \beta z_2\|_\infty. \end{aligned}$$

Temos ainda que, se $z_1 \in C$ então $z_1 \in C_1$, que é um cone, logo, se $z_1 \neq 0$ temos que $-z_1 \notin C_1$, donde $-z_1 \notin C$. Logo, C define um cone. Finalmente, mostremos que C é um cone invariante por F. Seja $z \in C$, devemos verificar que $F(z) \in C$. Como $z \in C$ então $z \in C_1$, donde $F(z) \in C_1$. Além disso, se $F(z) \in C_1 \backslash \{0\}$, sabemos que existe um único $\tau_1 = \tau_1(F(z))$ tal que $2F(z)(\tau_1) = \|Fz\|_\infty$. Como $\tau^* := \sup\{\tau_1(F(z)) : z \in C_1\}$ então $2F(z)(\tau_1) \leq 2F(z)(\tau^*)$. Sabemos ainda que, para todo $t \geq \tau^*$,

$$2F(z)(t) \geq 2F(z)(\tau^*) \geq 2F(z)(\tau_1) = \|Fz\|_\infty.$$

Logo, se $z \in C$ então $F(z) \in C$. Donde C é um cone invariante por F. ■

Os lemas que seguem são resultados de estimativas que nos permitem usar o Teorema 1.1.

Lema 3.3 *Consideremos a hipótese (f_2). Dados $a > 0$ e $\lambda > 0$, existe $R_1 = R_1(a, \lambda)$ suficientemente grande tal que,*

$$\|Fz\|_\infty < \|z\|_\infty \text{ para cada } z \in \partial C_{R_1}.$$

Prova. Pela hipótese (f_2) temos que,

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{s} = 0.$$

Logo, dado $\epsilon > 0$ existe $R_1 > a$ tal que,

$$f(s) \leq \epsilon s, \text{ para cada } s \geq R_1.$$

Assim, para cada $z \in \partial C_{R_1}$, temos que,

$$f(z(t) + a) \leq f(\|z\|_\infty + a) = f(R_1 + a) < f(R_1 + R_1) = f(2R_1) \leq 2\epsilon R_1.$$

Daí,

$$\begin{aligned}\|Fz\|_\infty &= \sup_{t\geq 0}\int_0^t\int_s^{+\infty}\lambda G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds\\ &\leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t\int_s^{+\infty}\lambda G(\tau)\|h\|_\infty 2\epsilon R_1 d\tau ds\\ &= 2\epsilon\|z\|_\infty\|h\|_\infty\int_0^{+\infty}\int_s^{+\infty}\lambda G(\tau)d\tau ds < \|z\|_\infty,\end{aligned}$$

para $\epsilon=\epsilon(\lambda)>0$ suficientemente pequeno. Donde,

$$\|Fz\|_\infty < \|z\|_\infty \text{ para cada } z\in\partial C_{R_1}.$$

■

Lema 3.4 *Consideremos a hipótese* (f_0). *Dados* $R_1, a, \lambda > 0$, *existe* $R_2 = R_2(a,\lambda)$ *com* $0 < R_2 < R_1$ *suficientemente pequeno tal que,*

$$\|Fz\|_\infty > \|z\|_\infty \text{ para cada } z\in\partial C_{R_2}.$$

Prova. Por (f_0) temos que $f(t)>0$ para todo $t>0$. Assim, como $a>0$ então $f(a)>0$, logo, dado $M>0$ existe $R_2\in(0,R_1)$ suficientemente pequeno tal que,

$$f(s+a)\geq f(a)\geq Ms, \text{ para todo } s\in[0,R_2].$$

Donde, para cada $z\in\partial C_{R_2}$,

$$\begin{aligned}\|Fz\|_\infty &= \sup_{t\geq 0}\int_0^t\int_s^{+\infty}\lambda G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds\\ &\geq \int_0^{\tau^*}\int_s^{+\infty}\lambda G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds\\ &\geq \int_0^{\tau^*}\int_{\tau^*}^{+\infty}\lambda G(\tau)h(\tau)Mz(\tau)d\tau ds\\ &= \int_{\tau^*}^{+\infty}\lambda G(\tau)h(\tau)Mz(\tau)d\tau\int_0^{\tau^*}ds\\ &\geq \int_{\tau^*}^{+\infty}\lambda G(\tau)h(\tau)M\frac{\|z\|_\infty}{2}d\tau\tau^*\\ &= \|z\|_\infty\frac{\tau^* M}{2}\int_{\tau^*}^{+\infty}\lambda G(\tau)h(\tau)d\tau.\end{aligned}$$

Escolhamos $M=M(\lambda)>0$ suficientemente grande de tal forma que,

$$\tau^* M\int_{\tau^*}^{+\infty}\lambda G(\tau)h(\tau)d\tau > 2.$$

Assim,

$$\|Fz\|_\infty > \|z\|_\infty \text{ para cada } z\in\partial C_{R_2}.$$

■

Lema 3.5 *Assumamos a hipótese* (f_0). *Então dado* $R_3 > 0$ *existe uma constante* $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}(a) > 0$ *tal que para todo* $\lambda > \bar{\lambda}$ *temos,*

$$\|Fz\|_\infty > \|z\|_\infty \text{ para cada } z \in \partial C_{R_3}.$$

Prova. Para cada $z \in \partial C_{R_3}$, temos que,

$$\begin{aligned}
\|Fz\|_\infty \geq (Fz)(\tau^*) &= \lambda \int_0^{\tau^*} \int_s^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau ds \\
&\geq \lambda \int_{\tau^*}^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau)+a)d\tau \int_0^{\tau^*} ds \\
&\geq \lambda\tau^* \int_{\tau^*}^{+\infty} G(\tau)h(\tau)f(z(\tau^*)+a)d\tau \\
&> \lambda\tau^* f(z(\tau^*)) \int_{\tau^*}^{+\infty} G(\tau)h(\tau)d\tau \\
&= \lambda\tau^* f(\frac{R_3}{2}) \int_{\tau^*}^{+\infty} G(\tau)h(\tau)d\tau,
\end{aligned}$$

já que, $z(\tau^*) = \dfrac{\|z\|_\infty}{2} = \dfrac{R_3}{2}$ para $z \in \partial C_{R_3}$. Assim, tomando $\bar{\lambda} > 0$ tal que,

$$\bar{\lambda}\tau^* f(\frac{R_3}{2}) \int_{\tau^*}^{+\infty} G(\tau)h(\tau)d\tau = R_3.$$

Então, para todo $\lambda > \bar{\lambda}$,

$$\begin{aligned}
\|Fz\|_\infty &> \lambda\tau^* f(\frac{R_3}{2}) \int_{\tau^*}^{+\infty} G(\tau)h(\tau)d\tau \\
&> \bar{\lambda}\tau^* f(\frac{R_3}{2}) \int_{\tau^*}^{+\infty} G(\tau)h(\tau)d\tau = R_3 = \|z\|_\infty.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\|Fz\|_\infty > \|z\|_\infty \text{ para cada } z \in \partial C_{R_3}.$$

■

3.3 Prova dos Resultados Principais

Nesta seção provaremos os principais resultados deste capítulo.

3.3.1 Prova do Teorema 3.1

Considerando os Lemas 3.3 e 3.4 e aplicando o Teorema 1.1, concluímos que o operador F tem um ponto fixo $z \in C$ tal que,

$$R_2 < \|z\|_\infty < R_1.$$

3.3.2 Prova do Teorema 3.2

Consideremos R_3 e $\bar{\lambda}$ como no Lema 3.5. Dado $\lambda > \bar{\lambda}$ tome $\eta = \eta(\lambda) > 0$ tal que,

$$\eta \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} \lambda G(\tau) h(\tau) < 1/2. \tag{3.16}$$

Pela hipótese (f_1) temos que,

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(u)}{u} = 0.$$

Assim, escolhamos $\bar{R} \in (0, R_3)$ tal que,

$$f(t) \leq \eta t, \text{ para todo } t \in (0, \bar{R}). \tag{3.17}$$

Tomemos $R_4 = \bar{R}/2$, assim, usando (3.17), para todo $a \in (0, \bar{R}/2)$ e $z \in \partial C_{R_4}$, temos que,

$$f(z(t)+a) \leq f(R_4 + a) = f(\bar{R}/2 + a) \leq \eta(\bar{R}/2 + a) < \eta(\bar{R}/2 + \bar{R}/2) = \eta \bar{R}.$$

Portanto, usando (3.16) e as considerações acima, obtemos,

$$\begin{aligned} \|Fz\|_\infty &= \sup_{t \geq 0} \int_0^t \int_s^{+\infty} \lambda G(\tau) h(\tau) f(z(\tau)+a) d\tau ds \\ &\leq \eta \bar{R} \int_0^{+\infty} \int_s^{+\infty} \lambda G(\tau) h(\tau) d\tau ds \\ &< \bar{R}/2 = R_4 = \|z\|_\infty. \end{aligned}$$

Donde,

$$\|Fz\|_\infty < \|z\|_\infty \text{ para todo } z \in \partial C_{R_4}.$$

Logo, usando uma combinação dos Lemas 3.3 e 3.4 e escolhendo R_1, R_2 tais que, $0 < R_2 < R_4 < R_3 < R_1$ obtemos pelo Teorema 1.1 que existem três pontos fixos z_1, z_2 e z_3 do operador F em C tais que,

$$R_2 < \|z_1\|_\infty < R_4 < \|z_2\|_\infty < R_3 < \|z_3\|_\infty < R_1.$$

Capítulo 4

Soluções Positivas para Equações Elípticas em Domínio Exterior

4.1 Introdução

Nos Capítulos 2 e 3 utilizamos técnicas de ponto fixo a fim de mostrar a existência de soluções positivas para problemas elípticos em domínios anulares e bolas, respectivamente. Neste capítulo utilizaremos novamente os resultados de ponto fixo para estudarmos a existência de pelo menos uma solução radial positiva para um problema elíptico sublinear com valor de fronteira, nesse caso, trabalharemos em domínio exterior, onde consideraremos, sem perda de generalidade, o exterior da bola unitária. Usaremos ainda, o método de sub e super solução para mostrar a existência de pelo menos uma solução não radial positiva para o problema não radial correspondente. Diante disso, o capítulo será dividido essencialmente em duas partes, uma trata do caso radial e a outra do caso não radial.

4.2 Caso Radial

Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = f(\|x\|, u) & \text{para} \quad \|x\| > 1, \\ u = 0 & \text{para} \quad \|x\| = 1, \\ u \to 0 & \text{quando} \quad \|x\| \to \infty, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde $x \in \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$.

Seja $z : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, se considerarmos a solução radial $u(x) = z(\|x\|)$ podemos substituir $v(t) = z((1-t)^{1/(2-N)})$, reduzindo dessa forma o Problema Elíptico (4.1) à seguinte equação diferencial ordinária:

$$\begin{cases} v''(t) + g(t, v(t)) = 0 & \text{para} \quad t \in (0,1) \\ v(0) = v(1) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

onde $g(t, v(t)) = \frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} f((1-t)^{1/(2-N)}, v(t))$.

Para reduzirmos o Problema (4.1) à equação (4.2), é suficiente prosseguirmos de maneira análoga ao Capítulo 3, quando reduzimos o Problema (3.1) ao Problema de Equação Ordinária (3.3), neste caso, basta observarmos que $\|x\| = r = (1-t)^{1/(2-N)}$.

Novamente, usaremos os resultados de ponto fixo em cones para obtermos a existência de pelo menos uma solução positiva para o Problema (4.2) e portanto uma solução radial positiva para o Problema (4.1).

Primeiramente estabeleceremos um resultado de existência de solução positiva para o seguinte problema

$$\begin{cases} v''(t) + g(t, v(t)) = 0 \quad \text{para} \quad t \in (0,1), \\ v(0) = v(1) = 0, \end{cases} \tag{4.3}$$

onde $g : (0,1) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$.

Seja $E = C([0,1])$ o espaço das funções contínuas munido com a norma $\|v\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |v(t)|$. Definamos:

$$H = \left\{ h \in C((0,1)) : h > 0, \int_0^1 t(1-t)h(t)dt < \infty \right\},$$

Observemos que H contém funções singulares nos extremos do intervalo $(0,1)$, por exemplo as funções $h_1(t) = \dfrac{1}{t}$ e $h_2(t) = \dfrac{1}{t(1-t)}$.

O próximo teorema trata de um resultado de existência de solução positiva para o Problema (4.3).

Teorema 4.1 *Consideremos $g : (0,1) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ uma função contínua e suponhamos que:*
(A_1) Para todo $M > 0$ existe uma função $h_M \in H$ tal que para todo $0 \le v \le M$ e $t \in (0,1)$ temos,

$$0 \le g(t,v) \le h_M(t) \quad e \quad \limsup_{M\to\infty} \frac{\int_0^1 s(1-s)h_M(s)ds}{M} < 1;$$

(A_2) existe um conjunto $A \subset (0,1)$ de medida positiva tal que,

$$\liminf_{v\to 0^+} \frac{g(t,v)}{v} = \infty, \quad \textit{uniformemente para quase todo} \quad t \in A.$$

Então o Problema (4.3) tem pelo menos uma solução positiva.

Prova. Seja $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ a função de Green correspondente ao problema linear homogêneo dada por:

$$K(t,s) = \begin{cases} s(1-t) & \text{se} \quad 0 \le s \le t \\ t(1-s) & \text{se} \quad t \le s \le 1. \end{cases} \tag{4.4}$$

Notemos que se $0 \le s \le t$ então,

$$K(t,s) = s(1-t) \le s(1-s).$$

Por outro lado, se $t \le s \le 1$ então,

$$K(t,s) = t(1-s) \le s(1-s).$$

Diante das considerações acima concluímos que $K(t,s)$ satisfaz a seguinte estimativa:

$$|K(t,s)| \le s(1-s), \quad \text{para todo} \quad t,s \in [0,1]. \tag{4.5}$$

Consideremos $B \subset A \cap (\delta, 1-\delta)$ para algum $\delta > 0$ um conjunto de medida positiva, onde A é o conjunto dado pela hipótese (A_2), assim podemos definir um cone C em E por:

$$C = \left\{ v \in E : v(t) \geq 0, t \in [0,1], \inf_{t \in B} v(t) \geq \min\{a, 1-b\} \|v\|_\infty \right\}, \tag{4.6}$$

onde $a = \inf B$ e $b = \sup B$. Observemos que B é limitado e portanto a e b estão bem definidos. Além disso, é fácil verificar que C define um cone.

Seja $S : C \to E$ o operador definido por:

$$Sv(t) := \int_0^1 K(t,s) g(s, v(s)) ds. \tag{4.7}$$

Pelo Lema 2.1 obtemos que v é solução do Problema (4.3) se, e somente se, $v = Sv$ em (4.7), ou seja, se v é ponto fixo do operador S. Com isso, a fim de encontrarmos soluções para o Problema (4.3) utilizaremos os resultados de ponto fixo dados pelo Teorema 1.1.

Mostremos que S está bem definido. Seja $\|v\|_\infty = M$, donde $0 \leq v(t) \leq M$, assim usando a hipótese (A_1) e a estimativa dada em (4.5), obtemos que,

$$|Sv(t)| \leq \int_0^1 |K(t,s)||g(s,v(s))| ds \leq \int_0^1 s(1-s) h_M(s) ds < \infty.$$

Logo, S está bem definido.

Verifiquemos que $S(C) \subset C$. Por (A_1) se $v(t) \geq 0$ então $g(t, v(t)) \geq 0$, além disso, $K(t,s) \geq 0$, logo $Sv(t) \geq 0$. Mostremos agora que,

$$\inf_{t \in B} Sv(t) \geq \min\{a, 1-b\} \|Sv\|_\infty.$$

Usando as definições de a e b, temos que,

$$\begin{aligned}
\inf_{t \in B} Sv(t) &= \inf_{t \in B} \left(\int_0^t (1-t) s g(s,v(s)) ds + \int_t^1 t(1-s) g(s,v(s)) ds \right) \\
&\geq \inf_{t \in B} \left(\int_0^t (1-b) s g(s,v(s)) ds + \int_t^1 a(1-s) g(s,v(s)) ds \right) \\
&\geq \min\{1-b, a\} \inf_{t \in B} \left(\int_0^t s g(s,v(s)) ds + \int_t^1 (1-s) g(s,v(s)) ds \right).
\end{aligned}$$

Usando agora o fato que $1 \geq s$ implica $1 \geq 1-s \geq 0$, obtemos que,

$$\begin{aligned}
\inf_{t \in B} Sv(t) &\geq \min\{1-b, a\} \inf_{t \in B} \left(\int_0^t s g(s,v(s)) ds + \int_t^1 (1-s) g(s,v(s)) ds \right) \\
&\geq \min\{1-b, a\} \inf_{t \in B} \left(\int_0^t s(1-s) g(s,v(s)) ds + \int_t^1 s(1-s) g(s,v(s)) ds \right) \\
&= \min\{1-b, a\} \int_0^1 s(1-s) g(s,v(s)) ds \\
&= \min\{1-b, a\} \sup_{t \in [0,1]} \left(\int_0^t s(1-s) g(s,v(s)) ds + \int_t^1 s(1-s) g(s,v(s)) ds \right).
\end{aligned}$$

Finalmente, na primeira integral temos $s \leq t$ donde $(1-s) \geq (1-t)$. Por outro lado, na segunda integral $s \geq t$. Logo,

$$\begin{aligned}
\inf_{t\in B} Sv(t) &\geq \min\{1-b, a\} \sup_{t\in[0,1]} \left(\int_0^t s(1-s)g(s,v(s))ds + \int_t^1 s(1-s)g(s,v(s))ds \right) \\
&\geq \min\{1-b, a\} \sup_{t\in[0,1]} \left(\int_0^t s(1-t)g(s,v(s))ds + \int_t^1 t(1-s)g(s,v(s))ds \right) \\
&= \min\{1-b, a\} \sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 K(t,s)g(s,v(s))ds \\
&= \min\{1-b, a\} \|Sv\|_\infty.
\end{aligned}$$

Usando a hipótese (A_1), (4.5) e o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue mostremos que Sv é uma aplicação contínua. Seja (t_n) uma seqüência em $[0,1]$ tal que $t_n \to t_0$, vejamos que,

$$\lim_{n\to\infty} (Sv)(t_n) = (Sv)(t_0).$$

Temos que,

$$|K(t_n, s)||g(s, v(s))| \leq s(1-s)h_M(s).$$

Lembremos que $s(1-s)h_M(s)$ é integrável. Além disso, para s fixado, usando o fato que $G(t,s)$ é uniformemente contínua, obtemos que,

$$K(t_n, s)g(s, v(s)) \to K(t_0, s)g(s, v(s)), \quad \text{para todo} \quad s \in (0,1).$$

Segue, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue que,

$$\lim_{n\to\infty} (Sv)(t_n) = (Sv)(t_0).$$

Donde Sv é uma aplicação contínua.

Para usarmos o Teorema 1.1 devemos mostrar que S é um operador compacto. Diante disso, mostremos primeiramente que S é contínuo. Seja (v_n) uma seqüência de funções em E tal que $v_n \to v_0$ em E. Verifiquemos que $Sv_n \to Sv_0$ em E. Com efeito, de maneira análoga ao que fizemos anteriormente usaremos o Teorema da Convergêcia Dominada de Lebesgue. Sabemos que,

$$|K(t,s)g(s, v_n(s))| \leq s(1-s)h_M(s),$$

onde $\int_0^1 s(1-s)h_M(s)ds < \infty$. Além disso, como g é contínua,

$$s(1-s)g(s, v_n(s)) \to s(1-s)g(s, v_0(s)) \text{ para todo, } s \in (0,1).$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 s(1-s)g(s, v_n(s))ds = \int_0^1 s(1-s)g(s, v_0(s))ds. \tag{4.8}$$

Usando (4.8) obtemos que,

$$\begin{aligned} |Sv_n(t) - Sv_0(t)| &= \left| \int_0^1 K(t,s)\,[g(s,v_n(s)) - g(s,v_0(s))]\,ds \right| \\ &\leq \int_0^1 s(1-s)\,[g(s,v_n(s)) - g(s,v_0(s))]\,ds \\ &< \epsilon, \quad \text{para} \quad n \geq n_0. \end{aligned}$$

Donde segue que $Sv_n \to Sv_0$ em E.

Denotemos por $B[0,M]$ a bola fechada de centro zero e raio M em E. Mostremos que as funções do conjunto $S\,(B[0,M]) = \{Sv : v \in C \ e \ \|v\|_\infty \leq M\}$ são equicontínuas e equilimitadas. Observemos que $K(t,s)$ é lipschitziana. Com efeito, sejam $t,t' \in (0,1)$ tais que $|t'-t| < \delta$. Suponhamos sem perda de generalidade que $t \leq t'$. Temos que,

Se $0 \leq s \leq t \leq t' \leq 1$ então,

$$\begin{aligned} |K(t',s) - K(t,s)| &= |s(1-t') - s(1-t)| \\ &= s|t'-t| \leq |t'-t|. \end{aligned}$$

Se $0 \leq t \leq t' \leq s \leq 1$ então,

$$\begin{aligned} |K(t',s) - K(t,s)| &= |t'(1-s) - t(1-s)| \\ &= |(1-s)(t'-t)| \\ &= (1-s)|t'-t| \leq |t'-t|. \end{aligned}$$

Se $0 \leq t \leq s \leq t' \leq 1$ então,

$$\begin{aligned} |K(t',s) - K(t,s)| &= |s(1-t') - t(1-s)| \\ &= |s - t + s(t-t')| \\ &\leq |s-t| + s|t'-t| \\ &\leq |s-t| + |t'-t| \leq 2|t'-t|. \end{aligned}$$

Assim, em qualquer dos casos,

$$|K(t',s) - K(t,s)| \leq 2|t'-t| < 2\delta < \epsilon,$$

para $\delta = \epsilon/2$ e $t,t' \in (0,1)$. Donde $K(t,s)$ é lipschitziana. Notemos que a função g apresenta singularidades nos extremos do intervalo $[0,1]$, mas para $t,t' \in (\delta, 1-\delta) \subset (0,1)$ g é contínua. Diante disso, analisemos os casos quando t,t' estão próximos do zero ou do um, onde há singularidade da função g. Seja (t_m) uma seqüência em $(0,1)$ tal que $t_m \to 0$. Temos que,

$$Sv(t_m) = \int_0^1 K(t_m,s)g(s,v(s))ds.$$

Notemos que, $|K(t_m,s)g(s,v(s))| \leq s(1-s)h_M(s)$ que é integrável. Além disso,

$$\lim_{m\to\infty} K(t_m,s)g(s,v(s)) = 0, \text{ para todo } s \in [0,1], \text{ já que } \ t_m \to 0 \text{ e } K \text{ é contínua.}$$

Logo, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue $Sv(t_m) \to 0$ quando $t_m \to 0$. Portanto, para t,t' próximos do zero e de maneira análoga para t,t' próximos do um, temos que, $|Sv(t') - Sv(t)| < \epsilon$ se $|t'-t| < \delta$. Assim, para quaisquer $t, t' \in [0,1]$, $t \leq t'$ tal que $|t'-t| < \delta$, temos que,

$$\begin{aligned}
|Sv(t') - Sv(t)| &= \left| \int_0^1 [K(t',s) - K(t,s)] g(s,v(s)) ds \right| \\
&\leq \int_0^1 |K(t',s) - K(t,s)| g(s,v(s)) ds \\
&= \int_0^\delta |k(t',s) - K(t,s)| g(s,v(s)) ds + \int_\delta^{1-\delta} |K(t',s) - K(t,s)| g(s,v(s)) ds \\
&+ \int_{1-\delta}^1 |K(t',s) - K(t,s)| g(s,v(s)) ds \\
&\leq \int_0^\delta |K(t',s) - K(t,s)| g(s,v(s)) ds + 2|t'-t| \int_\delta^{1-\delta} g(s,v(s)) ds \\
&+ \int_{1-\delta}^1 |K(t',s) - K(t,s)| g(s,v(s)) ds \\
&\leq \int_0^\delta |K(t',s) - K(t,s)| g(s,v(s)) ds + M_\delta \\
&+ \int_{1-\delta}^1 |K(t',s) - K(t,s)| g(s,v(s)) ds \to 0.
\end{aligned}$$

Donde concluímos que as funções do conjunto $S(B[0,M])$, são equicontínuas.

Devemos mostrar agora que Sv são equilimitadas. Temos que,

$$\begin{aligned}
|Sv(t)| &\leq \int_0^1 |K(t,s)||g(s,v(s))| ds \\
&\leq \int_0^1 s(1-s) h_M(s) ds < \infty.
\end{aligned}$$

Donde, $|Sv(t)| \leq n_0$ para todo $t \in (0,1)$, ou seja, $\|Sv\|_\infty \leq n_0$ para toda função $v \in B[0,M]$. Logo, Sv são equilimitadas.

Portanto, as funções do conjunto $S\left(B[0,M]\right) = \{Sv : v \in C \ e \ \|v\|_\infty \leq M\}$ satisfazem as hipóteses do Teorema de Arzelá-Ascoli, donde concluímos que esse conjunto é necessariamente compacto em E e como $M > 0$ é arbitrário obtemos a compacidade do operador $S : C \to E$.

Pela hipótese (A_1) temos que,

$$\limsup_{M \to \infty} \frac{\int_0^1 t(1-t) h_M(t) dt}{M} < 1.$$

Logo, podemos escolher $M > 0$ suficientemente grande de forma que,

$$\int_0^1 t(1-t) h_M(t) dt \leq M.$$

Além disso, para todo $0 \leq v \leq M$ e $t \in (0,1)$,

$$0 \leq g(t,v) \leq h_M(t).$$

Então, para todo $v \in C$ tal que $\|v\|_\infty = M$, por (4.5) obtemos que,

$$\begin{aligned} |Sv(t)| &\leq \int_0^1 |K(t,s)||g(s,v(s))|ds \\ &\leq \int_0^1 s(1-s)h_M(s)ds \\ &\leq M = \|v\|_\infty, \text{ para todo } t \in [0,1]. \end{aligned}$$

Consideremos $\Omega_2 := \{v \in E : \|v\|_\infty < M\}$. Assim,

$$\|Sv\|_\infty \leq \|v\|_\infty, \text{ para todo } v \in \partial\Omega_2 \cap C = \{v \in C : \|v\|_\infty = M\}. \tag{4.9}$$

Finalmente escolhamos $\mu > 0$ tal que,

$$\mu \min\{a, 1-b\} \int_B K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) ds \geq 1, \tag{4.10}$$

onde B é dado como na definição do cone C.

Por (A_2), existe $A \subset (0,1)$ de medida positiva tal que,

$$\liminf_{v \to 0^+} \frac{g(t,v)}{v} = \infty, \quad \text{uniformemente para quase todo} \quad t \in A.$$

Daí, dado $\mu > 0$ existe $R < M$ tal que para todo $0 \leq v \leq R$,

$$\inf_{t \in B} g(t,v) \geq \mu v.$$

Seja $\Omega_1 := \{v \in E : \|v\|_\infty < R\}$. Se $v \in C \cap \partial\Omega_1 = \{v \in C : \|v\|_\infty = R\}$ então $0 \leq v \leq R$ para todo $t \in (0,1)$ e portanto,

$$g(t,v(t)) \geq \inf_{t \in B} g(t,v(t)) \geq \mu v(t), \text{ para todo } t \in B. \tag{4.11}$$

Então, usando (4.10), (4.11) e o fato que $v \in C$ temos que,

$$\begin{aligned} Sv\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \int_0^1 K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) g(s,v(s))ds \\ &\geq \int_B K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) g(s,v(s))ds \\ &\geq \int_B K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) \mu v(s)ds \\ &\geq \|v\|_\infty \mu \min\{a, 1-b\} \int_B K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) ds \\ &\geq \|v\|_\infty. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|Sv\|_\infty \geq \|v\|_\infty, \text{ para todo } v \in C \cap \partial\Omega_1. \tag{4.12}$$

Usando as estimativas (4.9) e (4.12), podemos aplicar o Teorema 1.1 para S, obtendo assim um ponto fixo $v_0 \in C \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$.

Afirmamos que v_0 é positiva em $(0,1)$. Com efeito, como $v_0 \in C$ então $v_0(t) \geq 0$ para todo $t \in (0,1)$, além disso, $v_0 \in C \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$ implica que $\|v_0\| \geq R > 0$, logo $v_0(t_0) > 0$ em algum ponto t_0. Suponhamos por absurdo que existe $t' \in (0,1)$ tal que $v_0(t') = 0$. Observemos que $v_0''(t) = -g(t, v_0(t)) \leq 0$ donde v_0 é côncava. Logo, usando a definição de função côncava, para $\lambda \in (0, t_1)$, onde $t_1 > t'$, temos que, $v_0((1-\lambda)0 + \lambda t_1) \geq (1-\lambda)v_0(0) + \lambda v_0(t_1)$, ou seja, $v_0(\lambda t_1) \geq \lambda v_0(t_1) \geq 0$, podemos escolher $\lambda = t'/t_1 > 0$ donde $0 = v_0(t') \geq t'/t_1 v_0(t_1) \geq 0$, isto é, $v_0(t_1) = 0$ para todo $t_1 > t'$. De maneira análoga, obtemos que $v_0(t) = 0$ para todo $0 < t < t'$. Logo, se existe t' tal que $v_0(t') = 0$ então $v_0 \equiv 0$ o que é um absurdo, concluímos portanto que v_0 é estritamente positiva em $(0,1)$. Completando, dessa forma, a prova do Teorema 4.1. ■

Observação 4.1 *Pela prova do Teorema 4.1, notemos que a hipótese* (A_2) *pode ser substituída por:*
(A_2') *Existem um conjunto* $B \subset (0,1)$ *de medida positiva e* $\epsilon > 0$ *tais que, se* $0 < v < \epsilon$ *então,*

$$g(t,v) \geq \mu_B v, \text{ para todo } t \in B,$$

onde,

$$\mu_B := \inf_{C \subset B} \left(\min\{\inf C, 1 - \sup C\} \sup_{t \in (0,1)} \int_C K(t,s)ds \right)^{-1}.$$

Com efeito, lembremos que, (A_2) foi usada para encontrarmos uma estimativa do tipo expansão/compressão, agora devemos usar (A_2') para obtermos a mesma estimativa. Seja $\Omega_1 := \{v \in E : \|v\| < \epsilon\}$, se $v \in C \cap \partial\Omega_1 = \{v \in C : \|v\| = \epsilon\}$ então $0 \leq v \leq \epsilon$ para todo $t \in (0,1)$, e portanto,

$$g(t,v) \geq \mu_B v \text{ para todo } t \in B.$$

Assim, de maneira análoga ao que fizemos na demonstração do Teorema 4.1, obtemos que,

$$\begin{aligned}
Sv\left(\frac{a+b}{2}\right) &= \int_0^1 K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) g(s, v(s))ds \\
&\geq \int_B K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) g(s, v(s))ds \\
&\geq \int_B K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) \mu_B v(s)ds \\
&\geq \|v\|_\infty \mu_B \min\{a, 1-b\} \int_B K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) ds \\
&= \|v\|_\infty \inf_{C \subset B} \left(\min\{\inf C, 1 - \sup C\} \sup_{t \in (0,1)} \int_C K(t,s)ds \right)^{-1} \\
&\quad \times \min\{a, 1-b\} \int_B K\left(\frac{a+b}{2}, s\right) ds \\
&\geq \|v\|_\infty.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|Sv\|_\infty \geq \|v\|_\infty, \text{ para todo } v \in C \cap \partial\Omega_1.$$

E portanto, a hipótese (A_2) pode ser substituída pela hipótese (A_2').

Se considerarmos por exemplo, $B = (0,1)$ e $C = (1/(2\sqrt{3}), 1 - 1/(2\sqrt{3}))$ obtemos que $\mu_B = 24\sqrt{3}$. Com efeito, observemos que

$$q(t) := \int_C K(t,s)ds = (-12t^2 + 12t - 1)/24,$$

donde,

$$\lim_{t\to 0} q(t) = \lim_{t\to 1} q(t) = -1/24.$$

Notemos agora que, $q(t)$ é uma função côncava, que tem como único ponto crítico $t = 1/2$, além disso, $q(1/2) = 1/12$, donde concluímos que $\sup_{t\in(0,1)} q(t) = 1/12$ e portanto,

$$\mu_B := \inf_{C\subset B} \left[\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{12}\right]^{-1} = 24\sqrt{3}.$$

Definamos,

$$K := \{p \in C((1,\infty)) : \int_1^\infty s(1 - s^{2-n})p(s)ds < \infty\}.$$

Como conseqüência imediata do Teorema 4.1 segue o principal resultado para o caso radial, o qual nos garante a existência de pelo menos uma solução radial positiva para o Problema (4.1):

Teorema 4.2 *Seja* $f : (1,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ *uma função contínua satisfazendo:*
(B_1) *Para todo* $M > 0$ *existe uma função* $p_M \in K$ *tal que para todo* $0 \leq u \leq M$ *e* $s > 1$ *temos,*

$$0 \leq f(s,u) \leq p_M(s) \quad e \quad \limsup_{M\to\infty} \frac{\int_1^\infty s(1 - s^{2-n})p_M(s)ds}{M} < 1;$$

(B_2) *existe um conjunto* B *de medida de Lebesgue positiva tal que,*

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{f(s,u)}{u} = \infty, \quad \textit{uniformemente para quase todo} \quad s \in B.$$

Então o problema (4.1) tem pelo menos uma solução positiva.

Prova. Temos que,

$$g(t, v(t)) = \frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} f((1-t)^{1/(2-N)}, v(t)).$$

A partir das hipóteses da função f devemos verificar que g satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1, donde concluímos que o Problema (4.2) tem pelo menos uma solução positiva, que é portanto uma solução radial positiva para o Problema (4.1).

Consideremos $s = \eta(t) = (1-t)^{1/(2-N)}$, notemos que η define uma bijeção de $(0,1)$ em $(1,\infty)$. Temos que $t = 1 - s^{2-N}$ donde $dt = (N-2)s^{1-N}ds$. Logo, por (B_1) para todo $t \in (0,1)$ e para todo $0 \leq u \leq M$ obtemos que,

$$0 \leq f((1-t)^{1/(2-N)}, v(t)) \leq p_M\left((1-t)^{1/(2-N)}\right),$$

donde
$$0 \leq \frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} f((1-t)^{1/(2-N)}, v(t)) \leq h_M(t),$$
onde $h_M(t) = \frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} p_M\left((1-t)^{1/(2-N)}\right)$. Mostremos agora que $h_M \in H$, ou seja, $\int_0^1 t(1-t)h_M(t)dt < \infty$. Como $p_M \in C((1,\infty))$ então $h_M \in C((0,1))$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 t(1-t)h(t)dt &= \int_1^\infty \left(1 - s^{2-N}\right) s^{2-N} \frac{1}{(N-2)^2} s^{2N-2} p_M(s)(N-2)s^{1-N} ds \\
&= \frac{1}{(N-2)} \int_1^\infty s(1-s^{2-N}) p_M(s) ds < \infty.
\end{aligned}$$

Logo, $h_M \in H$ e $0 \leq g(t,u) \leq h_M(t)$ para todo $t \in (0,1)$ e para todo $0 \leq u \leq M$. Além disso,

$$\begin{aligned}
\limsup_{M\to\infty} \frac{\int_0^1 s(1-s)h_M(s)ds}{M} &= \frac{1}{(N-2)} \limsup_{M\to\infty} \frac{\int_1^\infty s(1-s^{2-N})p_M(s)ds}{M} \\
&< 1\frac{1}{(N-2)} \leq 1.
\end{aligned}$$

Verificamos, dessa forma, a hipótese (A_1). Para mostrarmos (A_2) devemos verificar que existe $A \subset (0,1)$ de medida positiva tal que,

$$\liminf_{u\to 0^+} \frac{g(t,u)}{u} = +\infty, \quad \text{uniformemente para quase todo} \quad t \in A.$$

Por (B_2) temos que existe B com medida positiva tal que,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{f(s,u)}{u} = +\infty, \text{ uniformemente para quase todo } s \in B.$$

Pela bijeção entre $(0,1)$ e $(1,\infty)$ obtemos, $A \subset (0,1)$ de medida potisiva tal que para cada $t \in A$ existe $s \in B$ e,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{f((1-t)^{1/(2-N)}, u)}{u} = +\infty, \text{ uniformemente para quase todo } t \in A.$$

Como $\frac{1}{(N-2)^2}$ e $(1-t)^{(2N-2)/(2-N)}$ são positivos então,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} \frac{f((1-t)^{1/(2-N)}, u)}{u} = +\infty,$$

uniformemente para quase todo $t \in A$, ou seja,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{g(t,u)}{u} = +\infty, \quad \text{uniformemente para quase todo} \quad t \in A.$$

Donde concluímos que,

$$\liminf_{u\to 0^+} \frac{g(t,u)}{u} = +\infty, \quad \text{uniformemente para quase todo} \quad t \in A.$$

Assim, verificamos que g satisfaz as hipóteses do Teorema 4.1, donde concluímos que o Problema (4.2) tem pelo menos uma solução positiva, a qual é solução radial positiva do Problema (4.1). Isto finaliza a prova do Teorema 4.2. $\blacksquare$

Um modelo de uma não linearidade f satisfazendo as hipóteses do Teorema 4.2, é dado por,

$$f(\|x\|, u) = \frac{u^{\alpha(\|x\|)}}{\|x\|^{\beta}}, \quad \text{para} \quad \|x\| \geq 1,$$

onde, $\beta > 2$ e $\alpha : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz $\sup_{s \in [1,\infty)} \alpha(s) < 1$.

Observação 4.2 *Notemos que, (B_2) pode ser substituída pela seguinte hipótese:*
(B_2') Existem um conjunto $B \subset (1, \infty)$ de medida positiva e uma constante L_B suficientemente grande tal que,

$$L_B \int_A G(\frac{a+b}{2}, t) \frac{1}{(N-2)^2} (1-t)^{(2N-2)/(2-N)} \min\{a, 1-b\} \geq 1,$$

e

$$f(s, u) \geq L_B u \text{ para } s \in B \text{ e } u \geq R. \tag{4.13}$$

Com efeito, de acordo com a equação (4.13), existe $A \subset (0, 1)$ de medida positiva tal que,

$$f((1-t)^{1/(2-N)}, u) \geq L_B u \text{ para } t \in A \text{ e } u \geq R,$$

donde,

$$\frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} f((1-t)^{1/(2-N)}, u(t)) \geq \frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} L_B u,$$

ou seja,

$$g(t, u) \geq \frac{1}{(N-2)^2}(1-t)^{(2N-2)/(2-N)} L_B u, \tag{4.14}$$

para $t \in A$ e $u \geq R$.

Sabemos que (B_2) foi usada para verificarmos a hipótese (A_2) do Teorema 4.1, agora se trocarmos (A_2) pela equação (4.14) na demonstração desse teorema, obtemos a mesma estimativa do tipo expansão/compressão para L_B suficientemente grande, e portanto (B_2) pode ser substituída por (B_2').

Observação 4.3 *Por (B_1) temos que, $0 \leq f(s, u) \leq p_M(s)$, para todo $0 \leq u \leq M$ e $s > 1$, logo ocorre um decaimento da não-linearidade f quando $s \to \infty$.*

Com efeito, se considerarmos $p_M(s) = s^{\alpha}$, com $\alpha < -2$ temos que, $p_M(s) \in K$ e $0 \leq f(s, u) \leq p_M(s) = s^{\alpha} \to 0$ quando $s \to \infty$. Assim, por (B_1) temos que f não depende somente de u, mas também de s.

Corolário 4.1 *Consideremos $f(s, u) = p(s)h(u)$, onde $p : (1, \infty) \to (0, \infty)$ e $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ são funções contínuas, temos que as hipóteses do Teorema 4.2 reduzem-se a:*
(C_1) $p_0 := \int_1^{\infty} s(1 - s^{2-n})p(s)ds < \infty$;
(C_2) $\limsup_{u\to\infty} \frac{h(u)}{u} < \frac{1}{p_0}$;
(C_3) $\liminf_{u\to 0^+} \frac{h(u)}{u} = \infty$.

Prova. Devemos mostrar que a partir das hipóteses (C_1), (C_2) e (C_3) podemos obter (B_1) e (B_2). Pela hipótese (C_2) temos que, dado $\epsilon > 0$, existe $R > 0$ talque

$$h(u) < \frac{u}{p_0 + \epsilon}, \text{ para todo } u \geq R.$$

Temos ainda que, h é uma função contínua e portanto, existe,

$$M_0 := \max_{1 \leq u \leq R} h(u).$$

Logo, podemos considerar,

$$p_M(s) := p(s) \begin{cases} M_0 & \text{se} \quad 1 \leq u \leq R \\ \frac{u}{p_0+\epsilon} & \text{se} \quad R \leq u \leq M. \end{cases}$$

Donde,

$$\int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p_M(s) ds \leq \max\left\{M_0, \frac{M}{p_0 + \epsilon}\right\} \int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p(s) ds < \infty.$$

Além disso, para todo $M > 0$ existe p_M como acima, tal que para todo $0 \leq u \leq M$, $s > 1$ temos que,

$$0 \leq p(s)h(u) \leq p(s) \max\left\{M_0, \frac{M}{p_0 + \epsilon}\right\}.$$

Verifiquemos agora que,

$$\limsup_{M\to\infty} \frac{\int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p(s) ds}{M} < 1.$$

Com efeito, se $1 \leq u \leq R$ então,

$$\begin{aligned} \limsup_{M\to\infty} \frac{\int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p_M(s) ds}{M} &= \limsup_{M\to\infty} \frac{M_0 \int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p(s) ds}{M} \\ &= \limsup_{M\to\infty} \frac{M_0 p_0}{M} \to 0 < 1. \end{aligned}$$

Agora, se $R \leq u \leq M$ então,

$$\begin{aligned} \limsup_{M\to\infty} \frac{\int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p_M(s) ds}{M} &= \limsup_{M\to\infty} \frac{u}{p_0 + \epsilon} \frac{\int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p(s) ds}{M} \\ &\leq \limsup_{M\to\infty} \frac{M}{p_0 + \epsilon} \frac{\int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p(s) ds}{M} \\ &= \limsup_{M\to\infty} \frac{p_0}{p_0 + \epsilon} < 1. \end{aligned}$$

Verificamos portanto a hipótese (B_1). Mostremos agora que podemos obter (B_2) a partir de (C_3). Com efeito, por (C_3) temos que,

$$\lim_{u\to 0^+} \frac{f(s,u)}{u} = p(s) \lim_{u\to 0^+} \frac{h(u)}{u} = p(s) \liminf_{u\to 0^+} \frac{h(u)}{u} = \infty,$$

donde obtemos (B_2).

Assim, para f definida como acima, as hipóteses do Teorema 4.2 podem ser substituídas por (C_1), (C_2) e (C_3). ■

Exemplo: O problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \frac{u^\alpha}{\|x\|^\beta} & \text{para} \quad \|x\| \geq 1, \\ u = 0 & \text{para} \quad \|x\| = 1, \\ u \to 0 & \text{quando} \quad \|x\| \to \infty, \end{cases} \tag{4.15}$$

onde, $\alpha < 1$ e $\beta > 2$, tem uma solução positiva. De fato, verifiquemos que o Problema (4.15) satisfaz (C_1), (C_2) e (C_3). Se $f(s,u) = p(s)h(u)$ então $p(s) = 1/s^\beta$ e $h(u) = u^\alpha$. Assim,

$$p_0 := \int_1^\infty s(1 - s^{2-n})p(s)ds = \int_1^\infty s(1 - s^{2-n})1/s^\beta ds < \infty,$$

desde que $\beta > 1$, como em nosso caso $\beta > 2$, concluímos o resultado. Além disso, como $\alpha < 1$ e $p_0 > 0$ obtemos,

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{h(u)}{u} = \limsup_{u\to\infty} \frac{1}{u^{1-\alpha}} \to 0 < \frac{1}{p_0}.$$

e

$$\liminf_{u\to 0^+} \frac{h(u)}{u} = \liminf_{u\to 0^+} \frac{1}{u^{1-\alpha}} = \infty.$$

Logo, $f(s,u) = p(s)h(u) = u^\alpha/s^\beta$, $s \geq 1$, satisfaz (C_1), (C_2) e (C_3) e portanto pelo Corolário 4.1 satisfaz as hipóteses do Teorema 4.2, donde concluímos que o Problema (4.15) tem uma solução positiva.

4.3 Caso Não-radial

Nesta seção usaremos o resultado de existência para o caso radial e o método de sub e super solução para mostrarmos a existência de pelo menos uma solução não-radial positiva para o problema não-radial. Assim, seja Ω o exterior da bola fechada $B[0,1] \subset \mathbb{R}^N$, com $N \geq 3$. Consideremos o seguinte problema em Ω, onde a não-linearidade f não é necessariamente radial:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \\ u(x) \to 0 & \text{quando} \quad \|x\| \to \infty. \end{cases} \tag{4.16}$$

Antes de enunciarmos nosso principal resultado para o coso não radial relembremos o Teorema de existência para um problema elíptico não-radial com valor de fronteira em um domínio exterior devido a Noussair [9]. Inicialmente, consideremos o seguinte problema com valor de fronteira no domínio exterior $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 3$:

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x,u,\nabla u) & \text{para} \quad x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{para} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{4.17}$$

Consideremos soluções clássicas $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$. Lembremos que $\underline{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma subsolução para (4.17) se satisfaz,

$$\begin{cases} -\Delta u \le f(x,u,\nabla u) & \text{para} \quad x \in \Omega, \\ u(x) \le 0 & \text{para} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

De maneira análoga, definimos $\bar{u} \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ uma super solução para (4.17) se satisfaz,

$$\begin{cases} -\Delta u \ge f(x,u,\nabla u) & \text{para} \quad x \in \Omega, \\ u(x) \ge 0 & \text{para} \quad x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema 4.3 (Noussair [9]) *Sejam Ω um domínio exterior e $f : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo as seguintes condições:*
(D_1) para cada domínio limitado $M \subset \Omega$ existe uma função contínua $\varrho_M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in M$, $u \in \mathbb{R}$ e $p \in \mathbb{R}^n$,

$$|f(x,u,p)| \le \varrho_M(u)(1 + |p|^2),$$

(D_2) f é uma função Hölder contínua ($C^{0,r}$) com respeito a (x,u,p) e C^1 com respeito a u, p;
(D_3) o Problema (4.17) possui uma sub solução $\underline{u}$ e uma super solução $\bar{u}$, tal que $\underline{u}(x) \le \bar{u}(x)$ para todo $x \in \Omega$.
Então, existe pelo menos uma solução u do Problema (4.17), tal que $\underline{u}(x) \le u(x) \le \bar{u}(x)$ para todo $x \in \Omega$.

Estamos agora prontos para enunciar e provar o nosso principal resultado de existência para o Problema (4.16).

Teorema 4.4 *Consideremos uma função $f : \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ satisfazendo as seguintes hipóteses:*
(E_1) f é Hölder contínua ($C^{0,r}$) com respeito a (x,u), continuamente diferenciável e não-crescente com respeito a segunda variável;
(E_2) para todo $M > 0$ existe uma função $p_M : (1,\infty) \to (0,\infty)$ tal que,

$$\int_1^\infty s(1 - s^{2-n}) p_M(s)\, ds < \infty,$$

e

$$0 \le f(x,u) \le p_M(\|x\|), \ \textit{para todo}\ 0 \le u \le M \ \textit{e}\ \|x\| > 1;$$

(E_3) existe um conjunto $B \subset (1,\infty)$ de medida positiva tal que,

$$\liminf_{u \to 0^+} \frac{f(x,u)}{u} = +\infty, \quad \textit{uniformemente para quase todo} \quad \|x\| \in B.$$

Então, existe pelo menos uma solução positiva para o Problema (4.16).

Prova. Definamos as funções $f_1, f_2 : (1,\infty) \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ por:

$$f_1(r,u) = \inf_{\|x\|=r} f(x,u) \quad \text{e} \quad f_2(r,u) = \sup_{\|x\|=r} f(x,u).$$

Notemos que f_1 e f_2 estão bem definidas, pois f é Hölder contínua com respeito a x, e estamos considerando-a restrita a $\partial B(0,r) \subset \mathbb{R}^n$, que é compacta.

Afirmamos que f_1 e f_2 satisfazem as hipóteses do Teorema 4.2. Com efeito, notemos primeiramente que, se

$$0 \leq f(x,u) \leq p_M(\|x\|), \text{ para todo } 0 \leq u \leq M \text{ e } \|x\| > 1,$$

então,

$$0 \leq f_1(r,u) = \inf_{\|x\|=r} f(x,u) \leq f(x,u) \leq p_M(\|x\|),$$

para todo $0 \leq u \leq M$ e $r = \|x\| > 1$. Além disso, como,

$$\int_1^\infty s(1-s^{2-n})p_M(s)ds < \infty,$$

podemos considerar R suficientemente grande de tal forma que,

$$\int_1^\infty s(1-s^{2-n})p_M(s)ds < R.$$

Dessa forma, mostramos que f_1 satisfaz a hipótese (B_1) do Teorema 4.2. Verifiquemos agora, a hipótese (B_2). Temos que, dado $\epsilon > 0$, para cada $\|x\| \in B$ e u suficientemente pequeno, $\inf f(x,u) \geq \epsilon u$, donde $f_1(r,u) \geq \epsilon u$, e portanto f_1 satisfaz (B_2). De maneira análoga, obtemos que f_2 também satisfaz as hipóteses do Teorema 4.2. Logo, o Problema (4.1), tem duas soluções radiais positivas u_1 e u_2 com $f = f_1$ e $f = f_2$, respectivamente. Assim, temos,

$$-\Delta u_1 = f_1(\|x\|, u_1) \leq f(x,u_1) \text{ em } \Omega,$$

e

$$-\Delta u_2 = f_2(\|x\|, u_2) \geq f(x,u_2) \text{ em } \Omega,$$

e portanto, u_1 e u_2 são sub e super soluções do Problema (4.16), respectivamente.

Devemos mostrar que $u_1(x) \leq u_2(x)$ para todo $x \in \Omega$. De fato, suponhamos por absurdo, que existe x_0 em Ω tal que $u_1(x_0) > u_2(x_0)$. Consideremos U a componente conexa do conjunto $A := \{x \in \Omega : u_1(x) > u_2(x)\}$ tal que $x_0 \in U$. Notemos que $A \neq \emptyset$, pois $x_0 \in A$.

Consideremos a função $h : \Omega \to \mathbb{R}$ dada por, $h(x) = u_2(x) - u_1(x)$. Assim, obtemos que,

$$\begin{aligned}
-\Delta h(x) &= -\Delta(u_2(x) - u_1(x)) \\
&= -\Delta u_2(x) + \Delta u_1(x) \\
&= f_2(\|x\|, u_2) - f_1(\|x\|, u_1) \\
&\geq f_1(\|x\|, u_2) - f_1(\|x\|, u_1).
\end{aligned}$$

Observemos que na última desigualdade usamos o fato que,

$$f_2(\|x\|, u_2) = \sup_{\|x\|=r} f(x,u_2) \geq \inf_{\|x\|=r} f(x,u_2) = f_1(\|x\|, u_2).$$

Por (E_1) temos que, f é não-crescente com respeito a segunda variável, logo, se $u_2(x) < u_1(x)$ então $f_1(\|x\|, u_2) \geq f_1(\|x\|, u_1)$, e portanto,

$$\begin{aligned} -\Delta h(x) &\geq f_1(\|x\|, u_2) - f_1(\|x\|, u_1) \\ &\geq f_1(\|x\|, u_1) - f_1(\|x\|, u_1) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} -\Delta h(x) \geq 0 & \text{para} \quad x \in U, \\ h(x) = 0 & \text{para} \quad x \in \partial U, \\ h(x) \to 0 & \text{quando} \quad \|x\| \to \infty, \ x \in U. \end{cases} \tag{4.18}$$

Da última condição temos $h(x) \to 0$ quando $\|x\| \to \infty$, logo se h é negativa em algum ponto, deve atingir um mínimo negativo em algum x_0. Consideremos $r_0 > 0$ tal que $\|x_0\| < r_0$ e $h(x) \geq 1/2h(x_0)$ para $\|x\| \geq r_0$. Consideremos ainda o conjunto, $U_1 := \{x \in U : 1 < \|x\| < r_0\}$, notemos que $x_0 \in U_1$ e portanto $U_1 \neq \emptyset$. Aplicando o Princípio do Máximo Fraco no conjunto U_1, obtemos que h atinge o mínimo sobre a ∂U_1. Como $x_0 \in U_1$ então $\inf_{\partial U_1} h(x) \leq h(x_0)$, por outro lado, se $x \in \partial U_1$ ou $\|x\| = 1$ e nesse caso, $u_1(x) = u_2(x) = 0$, donde $h(x) = 0$ e $0 = \inf_{\partial U_1} h(x) \geq 1/2h(x_0)$, já que $h(x_0) < 0$, ou $\|x\| = r_0$, donde $\inf_{\partial U_1} h(x) \geq 1/2h(x_0)$. Assim, pelas considerações acima, $h(x_0) \geq \inf_{\partial U_1} h(x) \geq 1/2h(x_0)$, ou seja, $h(x_0) \geq 0$, donde $x_0 \notin U$, contradição. Logo, $u_1(x) \leq u_2(x)$ para todo $x \in \Omega$, e pelo Teorema 4.3, obtemos uma solução u_0 para o Problema (4.16) tal que $u_1 \leq u_0 \leq u_2$.

Notemos que, u_0 é não radial com respeito a x, desde que f não o seja. ■

Exemplo: Consideremos o seguinte problema

$$\begin{cases} -\Delta u = g(x)u^\alpha & \text{em} \quad \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \\ u(x) \to 0 & \text{quando} \quad \|x\| \to \infty, \end{cases} \tag{4.19}$$

onde $\alpha < 1$ e $g : \Omega \to (0, \infty)$ é uma função contínua, não-negativa e estritamente positiva no anel $\Omega_1 = \{x \in \Omega : a \leq \|x\| \leq b\} \subset \Omega$, onde a, b são constantes positivas tais que $1 < a < b$, satisfazendo,

$$\int_1^\infty r(1 - r^{2-N}) \sup_{\|x\|=r} g(x) dr < \infty.$$

Afirmamos que o Problema (4.19) tem uma solução positiva, a qual é não-radial se g é não-radial.

Com efeito, devemos verificar que o Problema (4.19) satisfaz as hipóteses do Teorema 4.4. Sejam $M > 0$, tal que $0 \leq u \leq M$ e $\|x\| > 1$. Então,

$$0 \leq g(x)u^\alpha \leq \sup_{\|x\|=r} g(x)M.$$

Assim, se definirmos $p_M(\|x\|) := \sup_{\|x\|=r} g(x)M$, temos que,

$$\int_1^\infty r(1 - r^{2-N}) p_M(\|x\|) dr = M \int_1^\infty r(1 - r^{2-N}) \sup_{\|x\|=r} g(x) dr < \infty.$$

Além disso,

$$\liminf_{u\to 0^+} \frac{f(x,u)}{u} = \liminf_{u\to 0^+} \frac{g(x)u^\alpha}{u} = g(x) \liminf_{u\to 0^+} \frac{1}{u^{1-\alpha}} = +\infty,$$

uniformemente para quase todo $\|x\| \in B$. Logo, pelo Teorema 4.4, o Problema (4.19) tem uma solução positiva, a qual é não radial se g é não radial.

Referências Bibliográficas

[1] B. Przeradzki, R. Stanczy, *Positive solutions for sublinear elliptic equations,* Colloquium Mathematicum vol. 92 (2002) N0. 1 141-151.

[2] C. Bandle, L. A. Peletier, *Nonlinear elliptic problems with critical expoent in shrinking annuli,* Math. Ann. 280 (1988), 1-19.

[3] D. D. Hai, *Positive solutions for semilinear elliptic equations in annular domains,* Nonlinear Analysis 37 (1999), 1051-1058.

[4] D. G. de Figueiredo, *Lectures on the Ekeland variational principle with aplications and detours,* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay; by Springer-Verlag, Berlin, (1989).

[5] D. G. de Figueiredo, *Positive solutions of semilinear elliptic problems,* Escola Latino-Americana de Equações Diferenciais (1981).

[6] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order,* Springer Verlag,(2001).

[7] D. Guo, V. Lakshmikantham *Nonlinear Problem in Abstract Cones,* Academic Press, Orlando, FL, (1988).

[8] E. S. Noussair, C. A. Swanson, *Global positive solutions of semilinear elliptic problems,* Pacific J. Math. 115 (1984), 177-192.

[9] E. S. Noussair, *On Semilinear elliptic boundary value problems in unbounded domains,* J. Differential Equations 41 (1981), 334-348.

[10] E. S. Noussair, C. A. Swanson, *Positive solutions of elliptic systems with bounded nonlinearities,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 108 (1988), 321-332.

[11] E. S. Noussair, C. A. Swanson, *Semilinear elliptic problems with pairs of decaying positive solutions,* Canad. J. Math. 39 (1987), 1162-1173.

[12] H. Brezis, *Analyse Fonctionelle, Theorie et Applications,* Masson, Paris (1987).

[13] H. Dang, K. Schmitt, *Existence of positive solutions for semilinear elliptic equations in annular domains,* Differential Integral Equations 7 (1994), 747-758.

[14] J. Dugundji, *An extension of Tretze's theorem,* Pacific J. Math. vol. 1 (1951), 353-367.

[15] J.M. do Ó, S. Lorca, P. Ubilla, *Multiparameter elliptic equations in annular domains,* J. Differential Equations 211 (2005) 1-19.

[16] J.M. do Ó, S. Lorca, P. Ubilla, *Three positive radial solutions for elliptic equations in a ball,* Applied Mathematics Letters 18 (2005) 1163-1169.

[17] J.M. do Ó, S. Lorca, P. Ubilla, *Three positive solutions for a class of elliptic systems in annular domains,* Proc. Edinb. Math. Soc. (2) 48 (2005), 365–373.

[18] K. Deimling, *Nonlinear Functional Analysis,* Springer-Verlag, New York, 1985.

[19] K. S. Ha, Y. H. Lee, *Existence of multiple positive solutions of singular boundary value problems,* Nonlinear Anal. 28 (1997), 1429-1438.

[20] L. C. Evans, *Partial Differential Equations,* Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Volume 19 (1998).

[21] L. Kong, J. Wang, *Multiple positive solutions for the one-dimensional p-Laplacian,* Nonlinear Analysis 42 (2000), 1327-1333.

[22] M. G. Lee, S. S. Lin, *On the positive solution for semilinear elliptic equations on annular domain with non-homogenuous Dirichlet boundary conditions,* J. Math. Anal. Appl. 181 (1994), 348-361.

[23] M. H. Berestycki, *Methodes Topologiques Et Problemes Aux Limites Non Lineaires,* Soutenue le 18 MARS 1975.

[24] P. Caldiroli, A. Malchiodi, *Singular elliptic problems with critical growth,* preprint SISSA, Trieste, 1999.

[25] P. Habets, F. Zanolin, *Positive solutions for a class of singular boundary value problems,* Boll. Un. Mat. Ital. A (7) 9 (1995), 273-286.

[26] R. G. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure,* Wiley, New York (1995).

[27] R. Molle, D. Passasco, *Multiple solutions of nonlinear elliptic Dirichlet problems in exterior domains,* Nonlinear Anal. 39 (2000), 447-462.

[28] R. Stanczy, *Decaying solutions for sublinear elliptic equations in exterior domains,* Topol. Methods Nonlinear Anal. 14 (1999), 363-370.

[29] R. Stanczy, *Positive solutions for superlinear equations,* submitted.

[30] W. E. Boyce e R. C. Diprima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno,* sétima edição, LTC, Rio de Janeiro (2002).

[31] W. Reichel, *Radial symmetry for elliptic boundary-value problems on exterior domains,* Arch. Rational Mech. Anal. 137 (1997), 381-394.

[32] Y. H. Lee, *An existence result of positive solutions for singular superlinear boundary value problems and its applications,* J. Korean Math. Soc. 34 (1997), 247-255.

[33] Y. H. Lee, *Eigenvalues of singular boundary value problems and existence results of positive radial solutions of semilinear elliptic problems in exterior domains,* Differential Integral Equations 13 (2000), 631-648.

[34] Y. H. Lee, *Existence and multiplicity results of positive radial solutions for semilinear elliptic problems in an exterior domain,* H. J. Choe and H. O. Bae (eds.), Proc. Korea-Japan PDE Conf. (Taejon, 1996), Lecture Notes Ser. 39, Seoul National Univ., Seoul, 1997, 10 pp.

[35] Y. H. Lee, *Multiplicity of positive radial solutions for multiparameter semilinear elliptic systems on an annulus,* J. Differential Equations 174 (2001), 420-441.

[36] Y. Liu, *Multiple positive solutions of singular boundary value problem for the one-dimensional p-Laplacian,* Indian J. pure appl. Math. 33 (2002), 1541-1555.

[37] Y. Zhang, *Positive solutions of singular sublinear Emden-Fowler boundary value problems,* J. Math. Anal. Appl. 185 (1994), 215-222.