Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Espaços de Orlicz e uma aplicação a sistemas hamiltonianos

por

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

sob orientação do

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2006
João Pessoa - PB

Espaços de Orlicz e uma aplicação a sistemas hamiltonianos

por

Bruno Henrique Carvalho Ribeiro

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Análise.

Aprovada por:

Prof. Dr. João Marcos Bezerra do Ó - UFPB (Orientador)

Prof. Dr. Elves Alves de Barros e Silva - UnB

Prof. Dr. Olímpio Hiroshi Miyagaki - UFV

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2006

Agradecimentos

Agradeço a minha família, por todo o amor e todas as palavras de incentivo recebidos; a meus amigos e colegas de estudo, do ensino médio e da universidade, pelos inúmeros conselhos e apoio incondicional; a todos os meus educadores; aos professores Flávia Jerônimo Barbosa, Everaldo Souto de Medeiros, Ana Maria Bertone e Uberlândio Batista Severo por sempre acreditarem em mim, com palavras estimulantes de confiança; ao CNPq, pelo apoio financeiro. Agradeço também a Elisandra, por seu carinho, companherismo, estímulo e ajuda. Gostaria de agradecer a meus avós, Juarez Cézar e Amélia Carvalho, cujas presenças em minha vida foram e são fundamentais para a minha formação humana. Em especial, deixo minha eterna gratidão a meu orientador, João Marcos Bezerra do Ó, pois seus esforços para minha formação acadêmica, tanto na graduação, quanto no mestrado, ultrapassam a fronteira orientador-orientando e, um dia, espero poder recompensar.

Dedicatória

A minha querida avó Adete (in memoriam)

Resumo

Apresentamos e estudamos os espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, que são, respectivamente, generalizações naturais dos espaços de Lebesgue e Sobolev, a fim de aplicá-los na discussão de existência de solução para uma classe de sistemas hamiltonianos superlineares, com condição de fronteira de Dirichlet, sobre domínios limitados em $\mathbb{R}^n$ com $n \geq 3$.

Abstract

We study Orlicz and Orlicz-Sobolev spaces, which are natural generalizations of Lebesgue and Sobolev spaces respectively, in order to apply this theory in the discussion on existence of solutions for a class of superlinear hamiltonian systems, with Dirichlet boundary conditions, on bounded domains in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

Sumário

Introdução

Os espaços de Orlicz são generalizações naturais dos espaços de funções de Lebesgue. Surgiram primeiramente em 1932, num artigo do matemático polonês Wladyslaw Roman Orlicz (vide [15]), inicialmente definidos utilizando-se uma condição que hoje denotamos por condição Δ_2 e posteriormente, em 1936, sob a generalidade hoje estudada. Por possuírem estruturas topológica e geométrica bastante ricas, tais espaços vêm sendo utilizados, nas décadas recentes, em análise, equações diferenciais, equações integrais, probabilidade, estatística matemática, etc.

Nosso objetivo, para os três primeiros capítulos, consiste em apresentar, descrever e estudar os espaços de Orlicz e espaços de Orlicz-Sobolev, que são obtidos da mesma forma em que os espaços de Sobolev são formados a partir dos espaços de Lebesgue. No último capítulo, aplicamos a teoria apresentada no estudo de existência de solução fraca para uma classe de sistemas hamiltonianos superlineares, com condição de fronteira de Dirichlet, em domínios limitados de fronteira suave.

Começamos, no capítulo 1, por estudar uma classe especial de funções convexas definidas em $\mathbb{R}$ a valores em $\mathbb{R}$, chamadas de N-funções, que desempenham um papel de definidoras dos espaços de Orlicz. Isto é, para cada N-função podemos associar um espaço de Orlicz, da mesma forma em que as funções $|s|^p$, para $1 < p < \infty$ (que são exemplos especiais de N-funções), definem os espaços L^p. Apresentamos também neste capítulo a noção de N-função conjugada: dada uma N-função M introduzimos uma nova N-função N tal que vale uma desigualdade do tipo Young

$$uv \leq M(u) + N(v).$$

Detalhamos ainda algumas características adicionais que determinadas N-funções satisfazem e que refletem em propriedades topológicas adicionais para os espaços de Orlicz por elas definidos.

Dedicamos então o capítulo 2 aos espaços de Orlicz propriamente ditos. Dada uma N-função M estudada no capítulo anterior, construímos a classe de Orlicz desta N-função, definida pelo conjunto

$$\mathcal{L}_M(\Omega) \equiv \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } \; ; \; \int_\Omega M(u(x))dx < \infty \right\},$$

onde dx representa a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado e aberto. Observamos que a escolha da medida é puramente convencional, uma vez que tal conjunto de funções pode ser definido a partir de qualquer medida. Notemos ainda que no caso em que $M(s) = |s|^p$, para $1 < p < \infty$ esta classe de Orlicz se resume ao espaço L^p conhecido. É interessante também salientar que a classe de Orlicz não é necessariamente um espaço vetorial e estudaremos quando de fato isto ocorre. Portanto, a fim de uma definição mais geral, chamamos de espaço de Orlicz $L_M(\Omega)$ de uma N-função M o menor espaço vetorial gerado pela classe de Orlicz desta mesma N-função. Com o auxílio da noção de N-função complementar, introduzimos então os espaços de Orlicz conjugados: Dada um par de N-Funções complementares M e N, dizemos que $L_M(\Omega)$ e $L_N(\Omega)$ são espaços de Orlicz conjugados. Aqui, novamente, cabe uma analogia aos espaços de Lebesgue. Se $L_M(\Omega) = L^p(\Omega)$ então teremos $L_N(\Omega) = L^q(\Omega)$, onde $1/p + 1/q = 1$.

Discutimos, posteriormente, todas as "boas" propriedades dos espaços de Orlicz, tais como completeza, separabilidade e reflexividade. Todas as propriedades das N-funções estudadas no capítulo 1 revelar-se-ão aqui fundamentais para esta discussão. Por exemplo, se uma determinada N-função M satisfaz a condição de crescimento chamada condição Δ_2, então o espaço de Orlicz $L_M(\Omega)$ por ela definido é separável, e reciprocamente. Observamos ainda que as condições impostas às N-funções são quase sempre assintóticas, pois, como estamos trabalhando em domínios limitados, determinadas propriedades dos espaços de Orlicz serão válidas simplesmente exigindo condições de crescimento das N-funções satisfeitas apenas no infinito. Impor condições de crescimento globais faz-se necessário se pretende-se trabalhar em domínios não limitados.

Na mesma naturalidade em que são definidos os espaços de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$, a partir dos espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$, definimos e estudamos, no capítulo 3, os espaços de Orlicz-Sobolev W^1L_M obtidos a partir dos espaços de Orlicz L_M. Mais uma vez, vemos as propriedades básicas destes espaços, bem como o importante subespaço $W_0^1L_M$. Estudamos ainda as generalizações de determinadas imersões de Sobolev, contínuas e compactas. Ao final do capítulo, introduzimos uma importante ferramenta a ser utilizada no capítulo 4: a função $\sim$ que associa, homeomorficamente, dois espaços de Orlicz-Sobolev dados por N-funções conjugadas.

No último capítulo, com o intuito de aplicar a teoria estudada nos capítulos 1, 2 e 3, fazemos uso da mesma na discussão de existência de solução fraca para o sistema hamiltoniano superlinear

$$\begin{cases} -\Delta u \; = \; g(v) & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v \; = \; f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u \; = \; 0, \; v \; = \; 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, tal que $\partial\Omega$ é suave. Aplicamos

um método variacional padrão: a busca por pontos críticos de um funcional associado ao problema, definido em um espaço de funções adequado. Os espaços de Orlicz-Sobolev surgem, alternativamente, como domínio de tal funcional, ao invés, por exemplo, do costumeiro espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Como ferramenta para busca destes pontos críticos, utilizamos o famoso teorema do passo da montanha de Ambrosseti-Rabinowitz, em sua forma generalizada. Esta abordagem por meio dos espaços de Orlicz-Sobolev nos permite, por exemplo, impor crescimentos assintóticos não necessariamente polinomiais às funções f e g do sistema. Finalizamos então o capítulo com um apêndice apresentando o teorema do passo da montanha mencionando.

Toda esta proposta foi elaborada em [5] e assim, este trabalho, além de estudar minuciosamente as características e propriedades dos espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev, torna-se, principalmente em seu último capítulo, uma releitura auto explicativa deste artigo.

Capítulo 1

N-funções

1.1 Funções convexas

Definição 1.1 *Uma função $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita **convexa** se*

$$M\big(tu_1 + (1-t)u_2\big) \leq tM(u_1) + (1-t)M(u_2),$$

para qualquer $t \in [0,1]$ e para quaisquer $u_1, u_2 \in \mathbb{R}$.

Observação: Sejam $u_1 \leq u_3 \leq u_2$, com $u_2 \neq u_1$, assim

$$u_3 = \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} u_1 + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} u_2.$$

Portanto, se M é uma função convexa, temos que

$$M(u_3) \leq \frac{u_2 - u_3}{u_2 - u_1} M(u_1) + \frac{u_3 - u_1}{u_2 - u_1} M(u_2).$$

Estamos interessados em estudar apenas as funções convexas contínuas. Da desigualdade acima, podemos deduzir uma propriedade importante de tais funções: possuir derivadas laterais bem definidas em cada ponto. É o que mostraremos agora.

Definição 1.2 *Dizemos que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ possui **derivada lateral à esquerda** quando existe a função*

$$\begin{array}{rccl} p_- : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & p_-(u) = \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{M(u) - M(u-h)}{h}. \end{array}$$

p_- é dita derivada lateral à esquerda de M.

*Similarmente, M possui **derivada lateral à direita** p_+ quando está bem definida a função*

$$\begin{array}{rccl} p_+ : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & u & \longmapsto & p_+(u) = \displaystyle\lim_{h \to 0^+} \frac{M(u+h) - M(u)}{h}. \end{array}$$

Lema 1.1 *Uma função $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua e convexa possui, em cada ponto, uma derivada à direita $p_+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e uma derivada à esquerda $p_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.*

Prova: Fixado $u \in \mathbb{R}$, para $0 < h_1 < h_2$ vemos que

$$\begin{aligned} \frac{M(u) - M(u-h_2)}{h_2} \quad &\leq \quad \frac{M(u) - M(u-h_1)}{h_1} \quad \leq \\ \leq \frac{M(u+h_2) - M(u)}{h_2} \quad &\leq \quad \frac{M(u+h_1) - M(u)}{h_1}. \end{aligned}$$

Dessa forma, podemos concluir que a razão

$$\frac{M(u) - M(u-h)}{h}$$

não decresce quando $h \to 0^+$ e, consequentemente, possui um limite $p_-(u)$. Analogamente, a razão

$$\frac{M(u+h) - M(u)}{h}$$

não cresce quando $h \to 0^+$, possuindo assim um limite $p_+(u)$. ♦

Um outro fato importante é o seguinte

Lema 1.2 *A derivada à direita p_+ de uma função convexa e contínua M é não-decrescente e contínua à direita.*

Prova: Sejam $u_1 < u_2$. Tomemos $h \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeno tal que $u_1 < u_2 - 2h$. Portanto $u_1 < u_1 + h < u_2 - h < u_2$, donde concluímos que

$$\frac{M(u_1+h) - M(u_1)}{h} \leq \frac{M(u_2-h) - M(u_1+h)}{u_2 - (u_1+2h)} \leq \frac{M(u_2) - M(u_2-h)}{h}.$$

Logo, fazendo $h \to 0^+$, temos

$$p_+(u_1) \leq p_-(u_2).$$

Mas é fácil verificar que $p_-(u_2) \leq p_+(u_2)$ e assim,

$$p_+(u_1) \leq p_+(u_2),$$

provando a monotonicidade da função. Provar continuidade à direita é provar que $\lim\limits_{u \to u_0^+} p_+(u) = p_+(u_0)$. Para tanto, fixemos $h > 0$. Temos que

$$\frac{M(u+h') - M(u)}{h'} \leq \frac{M(u+h) - M(u)}{h}, \qquad \forall h' \in (0,h).$$

Assim, fazendo $h' \to 0^+$, concluímos que para cada $h > 0$, temos

$$p_+(u) \leq \frac{M(u+h) - M(u)}{h}.$$

Tomando $u \to u_0^+$ nesta inequação, temos, pela continuidade de M, que para cada $h > 0$ vale

$$\lim_{u \to u_0^+} p_+(u) \leq \frac{M(u_0 + h) - M(u_0)}{h}.$$

Fazendo agora $h \to 0^+$, temos

$$\lim_{u \to u_0^+} p_+(u) \leq p_+(u_0).$$

Por outro lado, para cada $u \geq u_0$, a monotonicidade de p_+ nos garante que $p_+(u) \geq p_+ u_0$. Assim, se $u \to u_o^+$, temos

$$\lim_{u \to u_0^+} p_+(u) \geq p_+(u_0),$$

donde $\lim\limits_{u \to u_0^+} p_+(u) = p_+(u_0)$. ♦

Observação: Pode-se demonstrar de modo análogo que p_- é não-decrescente e contínua à esquerda.

Lema 1.3 *Uma função convexa contínua M é localmente lipchitziana.*

Prova: Considere $I = [a, b]$. Sejam $a < u_1 < u_2 < b$. Pelo que já foi observado, temos

$$\frac{M(u_1) - M(a)}{u_1 - a} \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq \frac{M(b) - M(u_2)}{b - u_2},$$

donde segue que

$$p_+(a) \leq \frac{M(u_2) - M(u_1)}{u_2 - u_1} \leq p_-(b).$$

Dessa forma, existe uma constante $C \geq 0$ dependendo de I tal que

$$|M(u_1) - M(u_2)| \leq C|u_1 - u_2|.$$

O que prova que M é localmente lipchitziana. ♦

Pelo que foi feito podemos agora enunciar e demonstrar o próximo teorema, que trata de uma representação integral para funções convexas e contínuas.

Teorema 1.1 *Cada função convexa e contínua $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, satisfazendo $M(a) = 0$, pode ser representada sob a forma*

$$M(u) = \int_a^u p(t)dt,$$

onde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não-decrescente e contínua à direita.

Prova: Notemos inicialmente que toda função convexa e contínua M possui derivada em quase todo ponto. De fato, pelo que já foi estudado, temos, para $u_2 > u_1$,

$$p_-(u_2) \geq p_+(u_1) \geq p_-(u_1).$$

Mas p_- é uma função contínua em quase todo ponto, por ser monótona (uma função monótona possui no máximo uma quantidade enumerável de descontinuidades, vide [14]). Seja, portanto, u_1 um ponto de continuidade desta função. Fazendo $u_2 \to u_1$ nas desigualdades acima, obtemos

$$p_-(u_1) \geq p_+(u_1) \geq p_-(u_1) \to p_+(u_1) = p_-(u_1).$$

Dessa forma, tomemos $p = p_+$. Uma vez que M é localmente lipchitziana, M é a integral indefinida de sua derivada (definida em quase todo ponto). ♦

1.2 N-funções e suas propriedades

Estudamos nesta seção a ferramenta básica para definição de um espaço de Orlicz, nosso ambiente de trabalho durante todo o texto.

Definição 1.3 *Uma função convexa e contínua $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita uma* ***N-função*** *se satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *M é par;*
2. $\displaystyle\lim_{u \to 0} \frac{M(u)}{u} = 0$*;*
3. $\displaystyle\lim_{u \to \infty} \frac{M(u)}{u} = \infty$*;*
4. *$M(u) > 0$ para $u > 0$.*

As funções $|s|^p$ para $p \in (1, \infty)$ são exemplos de N-funções. Temos também como exemplo as funções $M_1(u) = e^{u^2} - 1$ e $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$.

Segue do item 2 da definição acima que se M é N-função então $M(0) = 0$. Agora, pelo Teorema 1.1, como M é par, temos que M pode ser escrita sob a forma

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt,$$

onde $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a derivada à direita de M. p é não-decrescente e contínua à direita. É interessante observar que as propriedades que definem a N-função M implicam em algumas propriedades para p.

1. $u > 0 \Rightarrow p(u) > 0$.
   De fato se $u > 0$ então $M(u) = \int_0^u p(t)dt$. Mas p é não-decrescente e, portanto, $\int_0^u p(t)dt \leq p(u)\int_0^u dt = up(u)$. Assim $p(u) \geq M(u)/u$, donde, pelo item 4 da Definição 1.3, $p(u) > 0$.

2. $\lim\limits_{u\to\infty} p(u) = \infty$.
   Segue imediatamente do item 3 da Definição 1.3, pois $p(u) \geq M(u)/u$.

3. $p(0) = 0$.
   Com efeito, tomando $u > 0$, vemos que

$$M(2u) = \int_0^{2u} p(t)dt = \int_0^u p(t)dt + \int_u^{2u} p(t)dt > \int_u^{2u} p(t)dt > up(u),$$

   ou seja, $0 < p(u) < M(2u)/u$. Mas p é contínua à direita, e portanto, pelo item 2 da Definição 1.3,

$$0 \leq p(0) = \lim_{u\to 0^+} p(u) \leq \lim_{u\to 0^+} M(2u)/u = 0.$$

Observe ainda que só estamos interessados em estudar a função p definida em $\mathbb{R}^+$, donde passamos agora a considerar apenas $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$.

Observação 1.1 *Estas propriedades da função p caracterizam a N-função M. Isto é, podemos provar que se M é uma função dada por $M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$ onde $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é contínua à direita, não decrescente, positiva para valores positivos, satisfazendo $p(0) = 0$ e $\lim\limits_{u\to\infty} p(u) = \infty$, então M é N-função.*

Com efeito, suponha que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função dada por

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt,$$

onde $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfaz as propriedades

$$\begin{array}{l} i)\ \ p(0) = 0; \\ ii)\ \ p(t) > 0 \ \ \forall\, t > 0; \\ iii)\ \ \lim_{t\to\infty} p(t) = \infty; \\ iv)\ \ p \text{ é não decrescente e} \\ v)\ \ p \text{ é contínua à direita.} \end{array} \qquad (1.1)$$

Provemos que M satisfaz a Definição 1.3:

M é contínua, por definição. Para mostrar que M é convexa, é suficiente que M satisfaça a Definição 1.1 apenas em $t = 1/2$. A continuidade de M vai garantir a

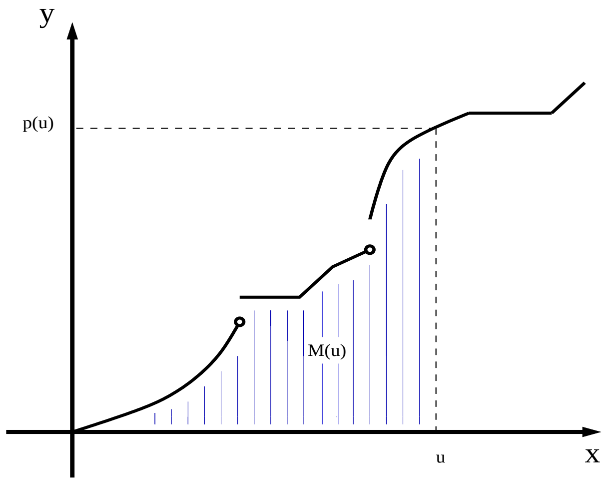

Figura 1.1: Gráfico da função p

inequação para todo $t \in [0,1]$. Sendo assim, suponha inicialmente $0 \leq u_1 < u_2$. Em virtude da monotonicidade de p, temos,

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = \int_0^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt \leq \int_0^{u_1} p(t)dt + \int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt \;=$$

$$= \int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt + \int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt\right] \;\leq$$

$$\leq \int_0^{u_1} p(t)dt + \frac{1}{2}\left[\int_{u_1}^{(u_1+u_2)/2} p(t)dt + \int_{(u_1+u_2)/2}^{u_2} p(t)dt\right] \;=$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^{u_1} p(t)dt + \int_0^{u_2} p(t)dt\right] \;=\; \frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right].$$

Agora, generalizando para u_1 e u_2 arbitrários, em virtude de M ser, por definição, par e crescente,

$$M\left(\frac{u_1+u_2}{2}\right) = M\left(\frac{|\,u_1+u_2|}{2}\right) \;\leq$$

$$\leq\; M\left(\frac{|\,u_1|+|\,u_2|}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[M(u_1)+M(u_2)\right].$$

Por ii) em (1.1), M claramente satisfaz a condição 4 da Definição 1.3.

Resta-nos verificar as condições 2 e 3 desta definição.

Para a condição 2, observemos que se $u > 0$ então

$$M(u) = \int_0^u p(t)dt \leq up(u).$$

Assim,

$$0 \leq \lim_{u\to 0^+} \frac{M(u)}{u} \leq \lim_{u\to 0^+} p(u) = p(0) = 0,$$

pois p verifica i) e v) em (1.1), por hipótese. Se $u < 0$ o resultado é análogo, pela paridade de M.

Para finalizar, se $u > 0$ vemos que

$$\frac{M(u)}{u} = \frac{1}{u}\int_0^u p(t)dt \geq \frac{1}{u}\int_{u/2}^u p(t)dt \geq p\left(\frac{u}{2}\right)\frac{1}{u}\int_{u/2}^u dt = \frac{p(u/2)}{2} \overset{u\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

♦

Sejam $\alpha > 1$ e $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$M(u) = \frac{|u|^\alpha}{\alpha}.$$

Claramente, M é N-função, onde p é dada por $p(t) = t^{\alpha-1}$.

1.3 N-função complementar

Dada uma função $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ satisfazendo as condições em (1.1), podemos associar a p um função que segue as mesmas características, definindo $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ dada por

$$q(s) = \sup\{t : p(t) \leq s\}.$$

Mostraremos num lema adiante que q satisfaz todas as condições em (1.1). Primeiramente observemos que

1. $q(p(t)) \geq t, \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$.

   Prova: Claramente, $t \in \{r :\ p(r) \leq p(t)\}$. Portanto $q(p(t)) = \sup\{r :\ p(r) \leq p(t)\} \geq t$.

2. $p(q(s)) \geq s, \quad \forall\, s \in \mathbb{R}^+$.

   Prova: Seja $(t_n) = (q(s) + 1/n)$. Assim $p(t_n) > s\ \forall\, n \in \mathbb{N}$ e $t_n \searrow \sup_{p(t)\leq s} t = q(s)$. Uma vez que p é contínua à direita, temos

$$p(q(s)) = \lim_{t_n \searrow q(s)} p(t_n) \geq s.$$

3. $q(p(t)-\varepsilon) \leq t, \quad \forall \varepsilon > 0$ e $\forall t \in \mathbb{R}^+$.

   Prova: Ora, se $u \in \{r : \; p(r) \leq p(t) - \varepsilon\}$, então $p(u) \leq p(t) - \varepsilon < p(t)$. Mas p é crescente, e portanto $u < t$. Portanto, t é cota superior para o conjunto acima. Assim,
   $$q(p(t)-\varepsilon) = \sup\{r : \; p(r) \leq p(t) - \varepsilon\} \leq t.$$

4. $p(q(s)-\varepsilon) \leq s, \quad \forall \varepsilon > 0$ e $\forall s \in \mathbb{R}^+$.

   Prova: De fato não há o que fazer, pois dado $\varepsilon > 0$ então pela definição de supremo existe um t_0 em $\{t : \; p(t) \leq s\}$ tal que $q(s) - \varepsilon \leq t_0 \leq q(s)$. Mas p é crescente e portanto
   $$p(q(s)-\varepsilon) \leq p(t_0) \leq s.$$

Observação 1.2 *Estas quatro propriedades da função q refletem um resultado interessante de que podemos recuperar a função p a partir da função q da mesma forma em que q foi definida. Em outras palavras, mostremos que p é dada por*

$$p(t) = \sup\{s : q(s) \leq t\}.$$

Com efeito, mostremos primeiramente que $p(t)$ é cota superior para o conjunto $\{s : \; q(s) \leq t\}$. Tomando s neste conjunto, temos $q(s) \leq t$. p é crescente, e portanto, $p(q(s)) \leq p(t)$. Mas a propriedade 2 acima nos diz que $p(q(s)) \geq s$. Assim, $s \leq p(t)$ e portanto, $p(t)$ é cota superior para o conjunto. Agora para qualquer $\varepsilon > 0$, $p(t) - \varepsilon$ pertence ao mesmo, pois $q(p(t) - \varepsilon) \leq t$, pela propriedade 3 da função q. Portanto $p(t)$ é de fato o supremo, concluindo o resultado. ♦

O que faremos agora é mostrar que q satisfaz as mesmas propriedades em (1.1), caracterizando q como uma espécie de inversa da função p e, pela observação feita acima, a função p torna-se também esta mesma espécie de inversa da função q. Chamamos q de inversa à direita de p e consequentemente, p inversa à direita de q. Esta nomenclatura não é por acaso. Observando a Figura 1.1, podemos deduzir o esboço do gráfico da função q simplesmente fazendo do eixo y o domínio da função q. O traço do gráfico desta função é o mesmo traço do gráfico de p, apenas observando que, onde p possui saltos, q é constante, e onde p é constante, q possui um salto.

Lema 1.4 *Considere as propriedades dadas em (1.1), para uma certa função $p : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Se $q : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ é dada por $q(s) = \sup\{t : \; p(t) \leq s\}$, então q satisfaz as mesmas propriedades.*

Prova:

q **satisfaz i):** Claramente, como $p(0) = 0$ e p verifica $ii)$ então $\{0\} = \{t : \; p(t) \leq 0\}$. Assim $q(0) = \sup\{t : \; p(t) \leq 0\} = 0$.

q **satisfaz ii):** Tomemos $s > 0$ e $t_0 > 0$ tal que $p(t_0) \leq s$. Tal t_0 existe pois caso ocorresse $p(t) > s$ para todo $t > 0$, então dada uma seqüência $0 < t_n \searrow 0$, pela continuidade à direita de p, teríamos $0 < s \leq \lim_{t_n \searrow 0} p(t_n) = p(0) = 0$, o que seria um absurdo. Sendo assim,

$$q(s) = \sup_{p(t) \leq s} t \geq t_0 > 0.$$

q **satisfaz iv):** Tomando $s_1 \leq s_2$ em $\mathbb{R}^+$ vemos que $\{t : \ p(t) \leq s_1\} \subseteq \{t : \ p(t) \leq s_2\}$. Assim, $q(s_1) = \sup\{t : \ p(t) \leq s_1\} \leq \sup\{t : \ p(t) \leq s_2\} = q(s_2)$.

q **satisfaz iii):** Queremos mostrar que para qualquer seqüência $s_n \to \infty$, temos $q(s_n) \to \infty$. Comecemos tomando $t_n \to \infty$. Uma vez que p satisfaz iii) temos $p(t_n) \to \infty$. Sendo assim, $q(p(t_n)) \geq t_n \to \infty$. Determinamos portanto a existência de uma seqüência $p(t_n) \equiv \lambda_n \to \infty$ tal que $q(\lambda_n) \to \infty$. Seja agora $s_n \to \infty$ arbitrária. Uma vez que $q(\lambda_n) \to \infty$, dado $C > 0$ existe n_1 tal que $q(\lambda_{n_1}) \geq C$. Porém, tomando este λ_{n_1}, uma vez que $s_n \to \infty$, podemos encontrar n_0 tal que $s_n \geq \lambda_{n_1}$ $\forall\, n \geq n_0$. Uma vez que q é crescente temos então

$$q(s_n) \geq q(\lambda_{n_1}) \geq C, \quad \forall\, n \geq n_0.$$

Portanto, $q(s_n) \to \infty$.

q **satisfaz v):** Tomemos $s_n \searrow s$ em $\mathbb{R}^+$. Devemos provar que $q(s_n) \to q(s)$. Suponha, por absurdo, que $q(s_n) \nrightarrow q(s)$. Como q é crescente e $s_n \geq s$ para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $q(s_n) \geq q(s)$. Assim, podemos encontrar $\varepsilon > 0$ tal que $q(s_n) \geq q(s) + 2\varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $q(s_n) - \varepsilon \geq q(s) + \varepsilon$. p é crescente, logo

$$s_n \geq p(q(s_n) - \varepsilon) \geq p(q(s) + \varepsilon).$$

Tomando $n \to \infty$ acima, temos $p(q(s) + \varepsilon) \leq s$, um absurdo. ♦

Temos agora em mãos as definições e resultados necessários para a seguinte

Definição 1.4 *Seja $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma N-função dada por*

$$M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt.$$

Seja q a inversa à direita de p, isto é, $q(s) = \sup\{t : \ p(t) \leq s\}$. A N-função $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$N(v) = \int_0^{|v|} q(s)ds$$

é dita ***N-função complementar*** *a M.*

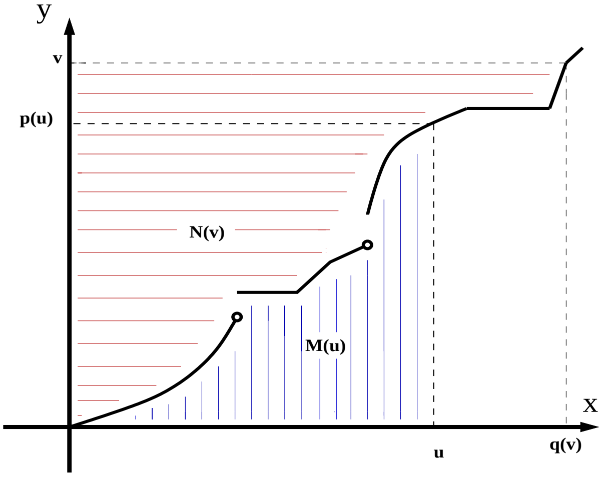

Figura 1.2: N-funções complementares

Sendo assim, a Observação 1.2 nos diz que se N é N-função complementar a M então, reciprocamente, M é complementar a N, donde iremos nos referir a tal par por **N-funções mutuamente complementares** ou simplesmente **N-funções complementares** (ver Figura 1.2).

Já observamos que $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $M(u) = |u|^\alpha/\alpha$ com $\alpha > 1$ é N-função e $p(t) = t^{\,\alpha-1}$. Logo, $q(s) = s^{1/(\alpha-1)}$ e portanto a N-função N complementar a M é dada por $N(v) = |v|^\beta/\beta$ onde $1/\alpha + 1/\beta = 1$. Ora, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$, temos a conhecida desigualdade de Young:

$$uv \leq \frac{|u|^\alpha}{\alpha} + \frac{|v|^\beta}{\beta}, \quad \text{com} \quad \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1.$$

É natural, portanto, questionarmos a possibilidade de generalização desta desigualdade para um par qualquer de N-funções complementares. De fato, o próximo lema mostra que é possível tal generalização.

Antes disso, façamos algumas observações. Tomando M e N um par de N-funções complementares, se $u, v \geq 0$, então $M(u)$ e $N(v)$ são, respectivamente as áreas abaixo das curvas p e q de 0 a u e de 0 a v, onde p e q são as funções das representações integrais de M e N, como podemos observar na Figura 1.2. Sendo assim, é geometricamente claro, de acordo com esta mesma figura, que a área do quadrado $up(u)$ é exatamente igual à soma $M(u) + N(p(u))$. Pela paridade das N-funções, temos assim a igualdade

$$|u|p(|u|) = M(u) + N(p|u|). \tag{1.2}$$

De maneira totalmente análoga temos

$$|v|q(|v|) = M(q(|v|)) + N(v). \tag{1.3}$$

Lema 1.5 ***(Desigualdade de Young)*** *Dado um par de N-funções complementares M e N, temos, para quaisquer $u, v \in \mathbb{R}$,*

$$uv \leq M(u) + N(v).$$

Prova: Claramente, precisamos apenas nos preocupar com $u, v \geq 0$. Suponha ainda $u, v \geq 0$ tais que $p(u) \leq v$. Portanto,

$$\int_{p(u)}^{v} q(s)ds \geq q(p(u))(v - p(u)) \geq u(v - p(u)) = uv - up(u).$$

Assim, utilizando a desigualdade acima e (1.2), temos

$$\begin{aligned}
M(u) + N(v) &= M(u) + \int_0^v q(s)ds \\
&= M(u) + \int_0^{p(u)} q(s)ds + \int_{p(u)}^{v} q(s)ds \\
&\geq M(u) + N(p(u)) + uv - up(u) \\
&= M(u) + N(p(u)) + uv - (M(u) + N(p(u))) \\
&= uv.
\end{aligned}$$

Por outro lado, se $p(u) > v$ então $q(v) < u$ e basta portanto utilizar um raciocínio análogo, trocando os papéis de u, v e p, q acima e utilizar a igualdade (1.3) ao invés de (1.2). ♦

Outro exemplo de par de N-funções complementares é $M(u) = e^{|u|} - |u| - 1$ e $N(v) = (1 + |v|)\ln(1 + |v|) - |v|$.

1.4 Mais algumas propriedades das N-funções

Esta última seção deste capítulo destina-se a apresentar algumas propriedades relevantes das N-funções que serão utilizadas ao longo deste trabalho.

Lema 1.6 *Se M é N-função e p é tal que $M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$ então*

$$M(u) < up(u), \quad \forall\, u > 0.$$

Prova: Claramente, se $u > 0$ então

$$M(u) = \int_0^u p(t)dt \leq up(u),$$

pois p é não-decrescente. Sendo assim, suponha que $u_0 p(u_0) = M(u_0)$. Iremos mostrar que $u_0 = 0$. De fato, temos que

$$\int_0^{u_0} p(u_0) = u_0 p(u_0) = M(u_0) = \int_0^{u_0} p(t)dt.$$

Logo,

$$\int_0^{u_0} (p(u_0) - p(t))dt = 0.$$

Uma vez que $p(t) \leq p(u_0)$ se $0 \leq t \leq u_0$, então ou teremos $u_0 = 0$ e portanto não haverá mais nada a fazer, ou então teremos $p(t) = p(u_0)$ para todo $t \in (0, u_0)$. Assim, uma vez que p é contínua à direita, temos que

$$p(u_0) = \lim_{t \to 0^+} p(t) = p(0) = 0,$$

donde, novamente, $u_0 = 0$. ♦

Lema 1.7 *Se M é N-função, então $M(ku) > kM(u)$, para todo $u \neq 0$ e $k > 1$.*

Prova: Supomos, sem perda de generalidade, que $u > 0$. Assim, pelo Lema 1.6, temos

$$\begin{aligned} M(ku) = \int_0^{ku} p(t)dt &= \int_0^{u} p(t)dt + \int_u^{ku} p(t)dt \\ &\geq M(u) + (ku - u)p(u) = M(u) + (k-1)up(u) \\ &> M(u) + (k-1)M(u) = kM(u). \end{aligned}$$

♦

Proposição 1.2 *Sejam M e N duas N-funções complementares. Então,*

$$t < M^{-1}(t)N^{-1}(t) \leq 2t, \qquad \forall\, t > 0.$$

Prova: A segunda desigualdade é facilmente obtida a partir da desigualdade de Young. Com efeito, se $t > 0$, tome $u = M^{-1}(t)$ e $v = N^{-1}(t)$ no Lema 1.5.

Para a primeira desigualdade, provemos primeiro que $N(M(a)/a) < M(a)$ para todo $a > 0$. De fato, tomando $v = M(a)/a$ em (1.3), temos

$$N\left(\frac{M(a)}{a}\right) = \frac{M(a)}{a} q\left(\frac{M(a)}{a}\right) - M\left(q\left(\frac{M(a)}{a}\right)\right).$$

Portanto,

$$N\left(\frac{M(a)}{a}\right) < \frac{M(a)}{a} q\left(\frac{M(a)}{a}\right).$$

Uma vez que $M(a)/a < p(a)$ (pelo Lema 1.6), tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $M(a)/a = p(a) - \varepsilon$. Assim

$$N\left(\frac{M(a)}{a}\right) < \frac{M(a)}{a} q\left(\frac{M(a)}{a}\right) = \frac{M(a)}{a} q(p(a) - \varepsilon) \leq \frac{M(a)}{a} a = M(a).$$

Para concluir, se $t > 0$, tomemos então $a > 0$ tal que $M(a) = t$. Logo,

$$N\left(\frac{t}{M^{-1}(t)}\right) < t,$$

donde

$$t < M^{-1}(t)N^{-1}(t).$$

♦

Abaixo definimos duas propriedades adicionais que determinadas N-funções satisfazem, a condição Δ_2 e a condição ∇_2. Mais adiante veremos a relação entre ambas. Ao final desta seção, uma nova condição será estudada. Tais propriedades serão importantes no estudo e classificação dos espaços de Orlicz, objetivo do próximo capítulo deste trabalho.

Definição 1.5 *Dizemos que uma N-função M satisfaz a **condição** Δ_2 se existem constantes $k > 0$ e $u_0 \geq 0$ tais que*

$$M(2u) \leq kM(u), \quad \forall u \geq u_0.$$

Escrevemos $M \in \Delta_2$ se M é uma N-função que satisfaz tal condição.

As funções $|s|^p$ para $1 < p < \infty$ são exemplos claros de N-funções que satisfazem a condição Δ_2. Outros exemplos podem ser vistos nas funções $M_1(u) = |u|^\alpha(|ln|u|| + 1)$, $\alpha > 1$ e $M_2(u) = (1 + |u|)\ln(1 + |u|) - |u|$. Como contraexemplos, temos a N-função complementar a M_2, dada por $N_2(v) = e^{|v|} - |v| - 1$ e a N-função $N(v) = e^{v^2} - 1$.

Para uma N-função M, satisfazer a condição Δ_2 é equivalente a satisfazer a inequação

$$M(lu) \leq k_l M(u), \quad \forall u \geq u_0, \tag{1.4}$$

onde $u_0 \geq 0$ e $k_l > 0$ é constante dependendo de l, para qualquer $l > 1$.

Com efeito, suponha que M satisfaz a condição Δ_2 e seja $l > 1$. Tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $2^n \geq l$. Se $u \geq u_0$ então

$$M(lu) \leq M(2^n u) \leq k^n M(u),$$

e, portanto, $k_l = k^n$. Reciprocamente, se M satisfaz a inequação (1.4) para $l > 1$, tomemos $n \in \mathbb{N}$ tal que $2 \leq l^n$. Então segue que, para $u \geq u_0$,

$$M(2u) \leq M(l^n u) \leq k_l^n M(u),$$

donde $k = k_l^n$.

Lema 1.8 *Seja M uma N-função e p sua derivada à direita. Assim, são equivalentes as afirmações:*

1. *$M \in \Delta_2$;*

2. *Existem $\alpha > 1$ e $u_0 > 0$ tais que $\dfrac{up(u)}{M(u)} < \alpha$ para todo $u \geq u_0$.*

Prova: Suponha que a Afirmação 2 é válida. Logo, se $u \geq u_0$, temos que

$$\ln\left(\frac{M(2u)}{M(u)}\right) = \int_u^{2u} \frac{p(t)}{M(t)}dt < \alpha \int_u^{2u} \frac{1}{t}dt = \alpha \ln 2.$$

Portanto,

$$M(2u) < 2^{\alpha} M(u), \quad \forall u \geq u_0.$$

Logo, $M \in \Delta_2$.

Reciprocamente, suponha $M \in \Delta_2$. Tomemos então $K > 0$ e $u_0 > 0$ tal que $M(2u) \leq KM(u)$ se $u \geq u_0$. Assim, se $u \geq u_0$, temos

$$KM(u) \geq M(2u) = \int_0^{2u} p(t)dt > \int_u^{2u} p(t)dt \geq up(u).$$

Portanto

$$\frac{up(u)}{M(u)} < K, \quad \forall u \geq u_0.$$

Pelo Lema 1.7, temos que $K > 2$, donde segue o resultado. ♦

Definição 1.6 *Dizemos que uma N-função M satisfaz a* ***condição*** *∇_2 se existem constantes $l > 1$ e $v_0 \geq 0$ tais que*

$$M(v) \leq \frac{1}{2l} M(lv), \quad \forall v \geq v_0.$$

Escrevemos $M \in \nabla_2$ se M é uma N-função que satisfaz tal condição.

Novamente, temos as funções $|s|^p$ como exemplos triviais de N-funções que satisfazem a condição ∇_2. Observamos também que a função $M(u) = (1 + |u|)ln(1 + |u|) - |u|$ é exemplo de N-função que satisfaz a condição Δ_2 e não satisfaz a condição ∇_2.

De maneira completamente análoga ao Lema 1.8, podemos verificar o seguinte

Lema 1.9 *Seja M uma N-função e p sua derivada à direita. Assim, se existem $\beta > 1$ e $u_0 > 0$ tais que $up(u)/M(u) \geq \beta$ para todo $u \geq u_0$, então $M \in \nabla_2$.*

Prova: Suponha que a Afirmação 2 é verdadeira. Assim, seja l, tal que $l^{\beta-1} \geq 2$. Portanto, tomando $u \geq u_0$, temos

$$\ln\left(\frac{M(lu)}{M(u)}\right) = \int_u^{lu} \frac{p(t)}{M(t)}dt \geq \beta \int_u^{lu} \frac{1}{t}dt = \beta \ln l.$$

Logo, $M(lu) \geq l^\beta M(u)$, se $u \geq u_0$. Como $l^\beta \geq 2l$, temos que $M \in \nabla_2$. ♦

Os próximos dois lemas serão utilizados para determinar uma relação existente entre as condições Δ_2 e ∇_2.

Lema 1.10 *Sejam M_1 e M_2 são duas N-funções complementares a N_1 e N_2, respectivamente, com p_1, p_2, q_1, q_2 suas respectivas derivadas à direita. Suponha que existe u_0 tal que $M_1(u) \leq M_2(u)$ para todo $u \geq u_0$. Então $N_2(v) \leq N_1(v)$ para todo $v \geq v_0 = p_2(u_0)$.*

Prova: Tomando $v \geq v_0$, temos que

$$q_2(v) \geq q_2(v_0) = q_2(p_2(u_0)) \geq u_0. \tag{1.5}$$

Agora, por (1.3), temos $q_2(v)v = M_2(q_2(v)) + N_2(v)$. Além disso, pela desigualdade de Young, $q_2(v)v \leq M_1(q_2(v)) + N_1(v)$. Assim,

$$M_2(q_2(v)) + N_2(v) \leq M_1(q_2(v)) + N_1(v). \tag{1.6}$$

Agora, se $v \geq v_0$, então, por (1.5) e (1.6), temos

$$\begin{aligned} N_2(v) &\leq [M_1(q_2(v)) - M_2(q_2(v))] + N_1(v) \\ &\leq N_1(v). \quad \blacklozenge \end{aligned}$$

Lema 1.11 *Sejam M e N duas N-funções complementares, com p e q suas respectivas derivadas à direita. Considere $M_1(u) = aM(bu)$, com $a, b > 0$. Então M_1 é N-função e a N-função complementar a M_1 é dada por $N_1(v) = aN[v/(ab)]$.*

Prova:

$$aM(bu) = a\int_0^{bu} p(t)dt.$$

Assim,

$$M_1(u) = \int_0^u abp(bt)dt.$$

Portanto $p_1(t) = abp(bt)$. Consequentemente, $q_1(s) = \sup\{t : \ p_1(t) \leq s\}$, ou seja,

$$q_1(s) = \frac{1}{b}\sup\{k : \ p(k) \leq \frac{s}{ab}\} = \frac{1}{b}q\left(\frac{s}{ab}\right).$$

Logo,

$$N_1(v) = \int_0^v \frac{1}{b}q\left(\frac{s}{ab}\right)ds = \frac{1}{b}\int_0^{v/(ab)} abq(s)ds = aN\left(\frac{v}{ab}\right).$$

♦

Proposição 1.3 *Sejam M e N duas N-funções complementares. Então $M \in \Delta_2$ se e somente se $N \in \nabla_2$.*

Prova: Suponha $N \in \nabla_2$. Tomemos l de acordo com a Definição 1.6 e definamos $N_1(v) = (1/2l)N(lv)$. Pelo Lema 1.11, com $a = 1/2l$ e $b = 2$, temos que $M_1(u) = (1/2l)M(2u)$. A condição ∇_2 pode ser escrita sob a forma $N(v) \leq N_1(v)$, para todo $v \geq v_0$. Segue do Lema 1.10 que existe u_0 tal que $M_1(u) \leq M(u)$, para todo $u \geq u_0$, isto é, $M(2u) \leq 2lM(u)$, se $u \geq u_0$. Portanto, $M \in \Delta_2$.

Agora suponha $M \in \Delta_2$. Logo, existem $u_0 \geq 0$ e $K > 0$ tais que $M(2u) \leq KM(u)$ se $u \geq u_0$. Tomando $a = 1/K$ e $b = 2$, e definindo $M_1(u) = aM(bu)$, temos, pelo Lema 1.11, que $N_1(v) = (1/K)N[(K/2)v]$. Além disso, pelo Lema 1.10, se $v_0 = p(u_0)$ então $N(v) \leq (1/K)N[(K/2)v]$, para todo $v \geq v_0$. Ora, pelo Lema 1.7, $K > 2$ e portanto, tomando $l = K/2$, temos o resultado requerido. ♦

Definição 1.7 *Dizemos que uma N-função M é **Δ-regular** se $M \in \Delta_2 \cap \nabla_2$.*

Obviamente, todas as funções $|s|^p$ com $1 < p < \infty$ são Δ-regulares e a função $M(u) = e^{u^2} - 1$ serve como contraexemplo para a definição acima.

O resultado abaixo é conseqüência imediata da Proposição 1.3.

Corolário 1.1 *Sejam M e N duas N-funções complementares. M é N-função Δ-regular se e somente se M e N satisfazem a condição Δ_2.*

Finalmente, apresentamos uma nova e útil condição. Tal propriedade será utilizada no Capítulo 4.

Definição 1.8 *Seja M uma N-função e p sua derivada à direita. Dizemos que M é **θ-regular**, se existe um $\theta_M > 1$ tal que*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{up(u)}{M(u)} = \theta_M.$$

Tal condição é mais restritiva do que ambas as condições Δ_2 e ∇_2. Fato que pode ser visto na

Proposição 1.4 *Se M é θ-regular então M é Δ-regular.*

Prova: Provemos que M satisfaz a Afirmação 2 no Lema 1.8 e a hipótese do Lema 1.9, donde concluiremos que $M \in \Delta_2 \cap \nabla_2$. De fato, tomemos $\varepsilon > 0$ tal que $\theta_M - \varepsilon > 1$. Por hipótese podemos tomar $u_0 > 0$ satisfazendo

$$\left| \frac{up(u)}{M(u)} - \theta_M \right| < \varepsilon, \quad \forall u \geq u_0.$$

Portanto, para todo $u \geq u_0$, temos

$$\theta_M - \varepsilon < \frac{up(u)}{M(u)} < \theta_M + \varepsilon$$

♦

Capítulo 2

Classes de Orlicz, espaços de Orlicz

Durante todo o trabalho Ω representará um domínio limitado de $\mathbb{R}^n$, no qual consideramos a medida de Lebesgue.

2.1 Classes de Orlicz

Definição 2.1 *Seja M uma N-função. Definimos a* ***classe de Orlicz*** *da função M como sendo o conjunto*

$$\mathcal{L}_M(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \;\; \textit{mensurável}: \int_\Omega M(u(x))dx < \infty \right\}$$

Para efeito de simplificação utilizamos durante o texto a seguinte **notação**:

$$\rho(u, M) = \int_\Omega M(u(x))dx.$$

Nos casos em que não houver perigo de confusão, poderemos utilizar o símbolo $\mathcal{L}_M$ ao se referir à classe de Orlicz $\mathcal{L}_M(\Omega)$.

Como exemplo motivador desta definição, vemos que se $M(s) = |s|^p$, $1 < p < \infty$ então $\mathcal{L}_M = L^p$, o conhecido espaço de Lebesgue das funções p-integráveis. Outros exemplos de classes de Orlicz são dados pelas N-funções mencionadas no capítulo 1, $M_1(u) = e^{u^2} - 1$, $M_2(u) = e^{|u|} - |u| - 1$, etc.

Um primeiro fato importante com respeito às classes de Orlicz é o seguinte

Teorema 2.1 *Seja $L^1(\Omega)$ o espaço de Lebesgue das funções integráveis. Então*

$$L^1(\Omega) = \bigcup_M \mathcal{L}_M(\Omega),$$

união tomada sobre todas as N-funções.

Prova: Tomemos $u \in L^1(\Omega)$. Considere os conjuntos

$$\Omega_n = \{x \in \Omega : \ n-1 \leq |\, u(x)| < n\}.$$

Assim

$$\int_\Omega |\, u(x)|\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} |\, u(x)|\, dx \geq \sum_{n=1}^{\infty} (n-1)|\, \Omega_n| \geq \sum_{n=1}^{\infty} n|\, \Omega_n| - |\, \Omega|.$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} n|\, \Omega_n| \leq \int_\Omega |\, u(x)|\, dx + |\, \Omega| < \infty.$$

Tomemos agora uma seqüência real (α_n) estritamente crescente tal que $\alpha_1 = 1$ e ainda tenhamos

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n|\, \Omega_n| < \infty.$$

Definimos $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ da seguinte forma:

$$p(t) = \begin{cases} t & \text{se} \quad 0 \leq t < 1 \\ \alpha_n & \text{se} \quad n \leq t < n+1 \end{cases}$$

Logo p é não-decrescente, contínua à direita, $p(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$. Tomemos, portanto, a N-função M dada por

$$M(v) = \int_0^{|v|} p(t)dt.$$

Uma vez que

$$M(n) = \int_0^n p(t)dt \leq n\alpha_n,$$

temos

$$\int_\Omega M(u(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M(u(x))dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} M(n)|\, \Omega_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n n|\, \Omega_n| < \infty.$$

Isto implica que $u \in \mathcal{L}_M(\Omega)$.

Reciprocamente, seja $u \in \mathcal{L}_M(\Omega)$ onde M é N-função. Provemos que u é integrável (caso $u \equiv 0$ não há o que fazer. Portanto, consideremos $u \neq 0$). Seja p a função da representação integral de M. Sabemos que $p(t) \to \infty$ quando $t \to \infty$. Assim, tomemos $C \in \mathbb{R}$ tal que $p(|\, u(x)|/2) \geq 1$ sempre que $|\, u(x)| > C$. Defina

$$\Omega_C = \{x \in \Omega : \ |u(x)| \leq C\}.$$

Ω_C é mensurável pois u é mensurável. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\infty &> 2\int_\Omega M(u(x))dx = 2\int_\Omega\int_0^{|u(x)|} p(t)dt\,dx \geq \\
&\geq 2\int_\Omega\int_{|u(x)|/2}^{|u(x)|} p(t)dt\,dx \geq 2\int_\Omega p\left(\frac{|u(x)|}{2}\right)\frac{|u(x)|}{2}\,dx = \\
&= \int_\Omega p\left(\frac{|u(x)|}{2}\right)|u(x)|\,dx \geq \int_{\Omega\setminus\Omega_C} p\left(\frac{|u(x)|}{2}\right)|u(x)|\,dx.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |u(x)|\,dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_C}|u(x)|\,dx + \int_{\Omega_C}|u(x)|\,dx \\
&\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_C}|u(x)|\,dx + C|\Omega_C| \\
&\leq \int_{\Omega\setminus\Omega_C} p\left(\frac{|u(x)|}{2}\right)|u(x)|\,dx + C|\Omega_C| < \infty,
\end{aligned}$$

,

demonstrando o teorema. ♦

É interessante observar também que toda função mensurável essencialmente limitada pertence à classe de Orlicz $\mathcal{L}_M$, para qualquer N-função M.

O próximo resultado é uma condição de comparação entre classes de Orlicz e será útil mais adiante.

Teorema 2.2 *Sejam M_1, M_2 N-funções. Assim,*

$$\mathcal{L}_{M_1} \subset \mathcal{L}_{M_2} \tag{2.1}$$

se e somente se existem constantes u_0 e a tais que

$$M_2(u) \leq aM_1(u), \quad \forall\ u \geq u_0. \tag{2.2}$$

Prova: Suponhamos que (2.2) é satisfeito e seja $u \in \mathcal{L}_{M_1}$. Tomemos

$$K = \{x \in \Omega : \ |u(x)| < u_0\}.$$

Assim,

$$\rho(u, M_2) = \int_{\Omega\setminus K} M_2(u(x))dx + \int_K M_2(u(x))dx \leq a\int_\Omega M_1(u(x))dx + M_2(u_0)|K| < \infty,$$

donde $u \in \mathcal{L}_{M_2}$.

Raciocinemos por absurdo para obter a recíproca. Suponhamos que (2.2) não é satisfeito. Assim, uma seqüência indefinidamente crescente de números (u_n), com $u_1 > 0$ pode ser encontrada tal que

$$M_2(u_n) > 2^n M_1(u_n).$$

Dividimos o domínio Ω em subdomínios Ω_n tais que

$$|\,\Omega_n| = \frac{M_1(u_1)|\,\Omega|}{2^n M_1(u_n)}.$$

Definimos agora $u : \Omega \to \mathbb{R}$ a função mensurável dada por

$$u(x) = \begin{cases} u_n & \text{se} \quad x \in \Omega_n, \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n. \end{cases}$$

A função u pertence a $\mathcal{L}_{M_1}$, uma vez que

$$\begin{aligned} \rho(u, M_1) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M_1(u(x))dx \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} M_1(u_n)|\,\Omega_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{M_1(u_n)M_1(u_1)|\,\Omega|}{2^n M_1(u_n)} \\ &= M_1(u_1)|\,\Omega| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \;<\; \infty. \end{aligned}$$

No entanto, $u \notin \mathcal{L}_{M_2}$, pois

$$\begin{aligned} \rho(u, M_2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M_2(u(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} M_2(u_n)|\,\Omega_n| \\ &> \sum_{n=1}^{\infty} 2^n M_1(u_n)|\,\Omega_n| \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n M_1(u_n)M_1(u_1)|\,\Omega|}{2^n M_1(u_n)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} M_1(u_1)|\,\Omega| \;=\; \infty. \end{aligned}$$

♦

Corolário 2.1 *Sejam M_1 e M_2 N-funções. Então $\mathcal{L}_{M_1} = \mathcal{L}_{M_2}$ se e somente se, existem constantes a, b e u_0 tais que*

$$aM_2(u) \leq M_1(u) \leq bM_2(u) \quad \forall\; u \geq u_0.$$

Antes de enunciar o próximo resultado, observemos que toda classe de Orlicz $\mathcal{L}_M$ é um conjunto convexo de funções mensuráveis: se u_1, $u_2 \in \mathcal{L}_M$ então, supondo $t \in [0,1]$, a função u_t, definida por $u_t(x) = tu_1(x) + (1-t)u_2(x)$, é tal que

$$\begin{aligned} \rho(u_t, M) &= \int_\Omega M\left(tu_1(x) + (1-t)u_2(x)\right) dx \\ &\leq t\rho(u_1, m) + (1-t)\rho(u_2, M) \ < \ \infty, \end{aligned}$$

donde $u_t \in \mathcal{L}_M$. Porém, é importante notar que em geral $\mathcal{L}_M$ não é espaço vetorial, por exemplo, a classe $\mathcal{L}_{M_1}$ dada pela N-função $M_1(s) = e^{s^2} - 1$, situação descrita pelo

Teorema 2.3 *A classe de Orlicz $\mathcal{L}_M$ é um espaço vetorial se, e somente se, a N-função M satisfaz a condição Δ_2.*

Prova: Suponhamos que M satisfaça a condição Δ_2. Assim, dado $l > 1$ existem constantes k_l e u_0 tais que $M(lu) \leq k_l M(u), \quad \forall u \geq u_0$. Portanto, tomando

$$K = \{x \in \Omega : \ |u(x)| < u_0\},$$

temos

$$\rho(lu, M) = \int_{\Omega \setminus K} M(lu(x))dx + \int_K M(lu(x))dx \leq k_l \int_\Omega M(u(x))dx + M(lu_0)|K| < \infty.$$

Agora, se $0 \leq l \leq 1$, então $M(lu(x)) \leq M(u(x))$ pois M é par e crescente, concluindo também que $lu \in \mathcal{L}_M$. Caso $l \leq 0$ segue o mesmo resultado, pela paridade de M. Portanto, dado qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$ temos que $\alpha u \in \mathcal{L}_M$ sempre que $u \in \mathcal{L}_M$. Mais ainda, se u_1 e u_2 estão em $\mathcal{L}_M$, então

$$\begin{aligned} \rho(u_1 + u_2, M) = \int_\Omega M\left(\frac{1}{2}\left(2u_1(x)\right) + \frac{1}{2}\left(2u_2(x)\right)\right) dx \leq \\ \leq \frac{1}{2}\int_\Omega M(2u_1(x))dx + \frac{1}{2}\int_\Omega M(2u_2(x))dx < \infty. \end{aligned}$$

e, portanto, $u_1 + u_2 \in \mathcal{L}_M$. Logo $\mathcal{L}_M$ é espaço vetorial.

Reciprocamente, suponha que $\mathcal{L}_M$ é um espaço vetorial. Isto significa, em particular, que $2u \in \mathcal{L}_M$ sempre que $u \in \mathcal{L}_M$. Considere $M_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a N-função definida por $M_1(v) = M(2v)$. Seja $\mathcal{L}_{M_1}$ a clase de Orlicz gerada por esta função. Desta forma $\mathcal{L}_M \subseteq \mathcal{L}_{M_1}$. Logo, pelo Teorema 2.2, existem constantes a e u_0 tais que

$$M(2u) = M_1(u) \leq aM(u) \ \ \forall u \geq u_0,$$

concluindo que M satisfaz a condição Δ_2. ♦

2.2 Espaços de Orlicz

Sejam M e N duas N-funções complementares. Considere o conjunto

$$L_M(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \int_\Omega u(x)v(x)dx < \infty, \quad \forall v \in \mathcal{L}_N(\Omega) \right\}.$$

Utilizamos também a notação L_M ao invés de $L_M(\Omega)$ sempre que não houver perigo de confusão. Para efeito de simplificação, fazemos uso da notação:

$$(u, v) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Segue, imediatamente da definição, que $L_M(\Omega)$ é um espaço vetorial. Mais ainda, devido à desigualdade de Young para N-funções complementares, temos que, se $u \in \mathcal{L}_M$ então

$$(u, v) \leq \rho(u, M) + \rho(v, N) < \infty,$$

donde sempre teremos $\mathcal{L}_M \subset L_M$.

O próximo lema se faz útil para a definição de uma norma a ser utilizada neste espaço.

Lema 2.1 *Suponha $u \in L_M$. Então*

$$\sup\{|(u, v)| : \rho(v, N) \leq 1\} < \infty.$$

Prova: Vamos supor que a afirmação deste lema não é verdadeira. Assim, podemos encontrar uma função $u_0 \in L_M$ positiva e uma seqüência de funções $v_n \in \mathcal{L}_N$ todas positivas, com $\rho(v, N) \leq 1$, tais que

$$\int_\Omega u_0(x)v_n(x)dx > 2^n. \tag{2.3}$$

Consideremos a seqüência crescente de funções

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} v_k(x).$$

N é convexa e, portanto,

$$\begin{aligned} \rho(g_n, N) &= \int_\Omega N\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} v_k(x)\right) dx \leq \int_\Omega \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} N(v_k(x))dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \int_\Omega N(v_k(x))dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \rho(v_k, N) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 1. \end{aligned}$$

Além disso, devido a (2.3),

$$\int_{\Omega} u_0(x)g_n(x)dx = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2^k}\int_{\Omega} u_0(x)v_k(x)dx\right) > \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}2^k = n. \tag{2.4}$$

A seqüência monótona crescente (g_n) converge em quase todo ponto para

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}v_k(x).$$

Uma vez que N é crescente, temos que a seqüência de funções $N(g_n)$ também cresce monotonicamente. Como N é contínua, temos ainda que $N(g_n)$ converge em quase todo ponto para $N(g)$. Além disso, $N(g_n) \geq 0$ e $N(g) \geq 0$. Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona (vide [10]), temos que

$$\int_{\Omega} N(g(x))dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} N(g_n(x))dx \leq 1,$$

concluindo que $g \in \mathcal{L}_N$. Por outro lado, observamos analogamente que a seqüência $(u_0 g_n)$ também é monotonicamente crescente, não negativa e converge em quase todo ponto para $u_0 g \geq 0$. Portanto, pelo mesmo teorema e por (2.4),

$$\int_{\Omega} u_0(x)g(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega} u_0(x)g_n(x)dx = \infty,$$

contradizendo o fato de que $u_0 \in L_M$. ♦

Este lema nos permite agora introduzir uma norma no espaço vetorial $L_M(\Omega)$ dada pela igualdade:

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v,\ N)\leq 1}\left|\int_{\Omega} u(x)v(x)dx\right|. \tag{2.5}$$

De fato, como é facilmente verificado, $\|\cdot\|_M$ realmente satisfaz os axiomas usuais,

1. $\|u\|_M = 0$ se, e somente se, $u = 0$ (em quase todo ponto),
2. $\|\alpha u\|_M = |\alpha|\|u\|_M \ \ \forall\ \alpha \in \mathbb{R}$ e $\forall\ u \in L_M$ e
3. $\|u_1 + u_2\|_M \leq \|u_1\|_M + \|u_2\|_M \ \ \forall\ u_1, u_2 \in L_M$.

Definição 2.2 *O espaço vetorial normado* $(L_M(\Omega), \|\cdot\|_M)$ *é denominado* ***espaço de Orlicz*** *com respeito à N-função M.*

Faremos uma economia usual de notação, nos referindo ao espaço vetorial normado $(L_M(\Omega), \|\cdot\|_M)$ apenas como $L_M(\Omega)$, ou L_M, quando não apresentar perigo de confusão.

Já observamos no Teorema 2.1 que $\mathcal{L}_M(\Omega) \subset L^1(\Omega)$. O próximo teorema nos dá um resultado mais forte que o anterior.

Teorema 2.4 *Todo espaço de Orlicz $L_M(\Omega)$ está imerso continuamente no espaço de Lebesgue das funções integráveis. Em outras palavras, dado $u \in L_M(\Omega)$ então $u \in L^1(\Omega)$ e existe uma constante $K > 0$ tal que*

$$\|u\|_1 \leq K\|u\|_M.$$

Prova: Seja N a N-função complementar a M. Tomemos $C > 0$ tal que $N(C) = 1/|\,\Omega|$. Podemos fazer isto pois N é N-função. Dessa forma, a função $v \equiv C$ é tal que $v \in \mathcal{L}_N$ e $\int_\Omega N(v(x))dx = 1$. Tomemos $u \in L_M$. Assim

$$\int_\Omega |u(x)|dx \;=\; \frac{1}{C}\int_\Omega u(x)\mathrm{sgn}u(x)v(x)dx.$$

Mas, como N é função par, a função $(\mathrm{sgn}u)v$ também pertence a $\mathcal{L}_N$ com $\rho((\mathrm{sgn}u)v, N) = \rho(v, N) = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\|u\|_1 &= \int_\Omega |\,u(x)|dx \\
&= \frac{1}{C}\left|\int_\Omega u(x)\mathrm{sgn}u(x)v(x)dx\right| \\
&\leq \frac{1}{C}\sup_{\rho(v,N)\leq 1}\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \\
&= \frac{1}{C}\|u\|_M.
\end{aligned}$$

♦

Com este último resultado em mãos, estamos aptos a enunciar e demonstrar o já esperado

Teorema 2.5 *Todo espaço de Orlicz é completo.*

Prova: Seja (u_n) uma seqüência de Cauchy em L_M. Pelo Teorema 2.4, (u_n) também é seqüência de Cauchy em $L^1(\Omega)$. Mas $L^1(\Omega)$ é completo e, portanto, existe $u_0 \in L^1$ tal que $\|\,u_n - u_0\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Além disso, (u_n) possui uma subseqüência (u_{n_k}) que converge em quase todo ponto para u_0 e tal que $|\,u_{n_k}(x)| \leq h(x)$, em quase todo ponto, para algum $h \in L^1(\Omega)$ (vide [3], Teorema IV.9).

Fixe $\varepsilon > 0$. Como (u_{n_k}) é ainda seqüência de Cauchy, existe $k(\varepsilon)$ tal que, para todo $k, k+p > k(\varepsilon)$, temos

$$\int_\Omega |\,u_{n_{k+p}}(x) - u_{n_k}(x)|\,|\,v(x)|\,dx < \varepsilon,$$

para cada $v \in \mathcal{L}_N$ satisfazendo $\rho(v, N) \leq 1$. Fazendo $p \to \infty$, obtemos, pelo Teorema de Fatou-Lebesgue (vide [10]),

$$\int_\Omega |\,u_0(x) - u_{n_k}(x)|\,|\,v(x)|\,dx \leq \varepsilon,$$

para cada $v \in \mathcal{L}_N$ satisfazendo $\rho(v, N) \leq 1$. Segue desta última inequação primeiramente que $u_0 - u_{n_k} \in L_M$. Consequentemente $u_0 \in L_M$. Além disso, também verificamos imediatamente desta inequação que

$$\| u_{n_k} - u_0\|_M \leq \varepsilon, \quad \forall k > k(\varepsilon),$$

donde (u_{n_k}) converge na norma de Orlicz para u_0. Como (u_n) é seqüência de Cauchy e (u_{n_k}) é subseqüência de (u_n) convergente para u_0, temos que (u_n) converge para u_0 na norma de Orlicz. ♦

2.3 Desigualdade de Hölder

Observemos inicialmente que, pela desigualdade de Young, dada uma função $u \in \mathcal{L}_M \subset L_M$, temos

$$\|u\|_M = \sup_{\rho(v,N)\leq 1} |(u, v)| \leq \sup_{\rho(v,N)\leq 1} \int_\Omega |u(x)|\,|v(x)|\,dx \leq \rho(u, M) + 1. \tag{2.6}$$

Os próximos três lemas serão necessários na derivação de uma desigualdade de Hölder, similar àquela conhecida para espaços de Lebesgue L^p.

Lema 2.2 *Se $u \in L_M$ então, para cada $v \in \mathcal{L}_N$ temos que*

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)dx\right| \leq \begin{cases} \|u\|_M & se \quad \rho(v,N) \leq 1, \\ \|u\|_M \rho(v,N) & se \quad \rho(v,N) > 1. \end{cases}$$

Prova: Caso $\rho(v, N) \leq 1$ a desigualdade (2.2) é imediata da definição da norma de Orlicz. Agora, caso $\rho(v, N) > 1$, pela convexidade de N, temos que

$$N\left(\frac{v(x)}{\rho(v,N)}\right) dx \leq \frac{N(v(x))}{\rho(v,N)},$$

donde

$$\int_\Omega N\left(\frac{v(x)}{\rho(v,N)}\right) dx \leq \frac{1}{\rho(v,N)} \int_\Omega N(v(x))dx = 1.$$

Sendo assim, $\rho(v/\rho(v, N), N) \leq 1$ e, portanto,

$$\left|\int_\Omega u(x)\frac{v(x)}{\rho(v,N)}dx\right| \leq \|u\|_M,$$

concluindo a demonstração. ♦

Lema 2.3 *Seja M uma N-função e seja p sua representante integral, isto é, $M(u) = \int_0^{|u|} p(t)dt$. Suponha $u \in L_M$, com $\| u\|_M \leq 1$. Assim, a função $v_0 = p(| u|)$ pertence a $\mathcal{L}_N$ e $\rho(v_0, N) \leq 1$.*

Prova: Tomemos

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad |u(x)| \leq n, \\ 0 & se \quad |u(x)| > n. \end{cases}$$

Dessa forma, u_n é função limitada para cada n, donde $p(| u_n|)$ também é limitada (p é não-decrescente). Sendo assim, $p(| u_n|) \in \mathcal{L}_N$, para cada $n \in \mathbb{N}$. Suponha que a afirmação deste lema não é verdadeira. Então ou $v_0 \notin \mathcal{L}_N$ (e portanto $\rho(v, N) = \infty$) ou então $1 < \rho(v, N) < \infty$. Uma vez que $p(| u_n|)$ converge q.t.p. para v_0, $p(| u_n|)$ é limitada para cada n e N é continua e crescente, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, concluímos que podemos encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\int_\Omega N[p(| u_{n_0}(x)|)]dx > 1.$$

Devido à igualdade dada em (1.2), temos que

$$N[p(| u_{n_0}(x)|)] < M(u_{n_0}(x)) + N[p(| u_{n_0}(x)|)] = | u_{n_0}(x)|\, p(| u_{n_0}(x)|).$$

Como $v \equiv p(| u_{n_0}|)\,\mathrm{sgn} u$ é função em $\mathcal{L}_N$, com $\rho(p(| u_{n_0}|)\,\mathrm{sgn} u, N) = \rho(p(| u_{n_0}|), N)$, integrando a inequação acima e utilizando o Lema 2.2, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega N[p(| u_{n_0}(x)|)]dx &< \int_\Omega u_{n_0}(x)\,\mathrm{sgn} u(x)\, p(| u_{n_0}(x)|)dx \\ &\leq \left| \int_\Omega u_{n_0}(x)\,\mathrm{sgn} u(x)\, p(| u_{n_0}(x)|)dx \right| \\ &\leq \| u_{n_0}\|_M \int_\Omega N[p(| u_{n_0}(x)|)]dx, \end{aligned}$$

contradizendo a inequação $\| u_{n_0}\|_M \leq \| u_n\| \leq 1$. ♦

Lema 2.4

$$\| u\|_M \leq 1 \Rightarrow \rho(u, M) \leq \| u\|_M.$$

Em particular, a classe de Orlicz $\mathcal{L}_M$ contém a bola unitária do espaço de Orlicz L_M.

Prova: Tomemos $v_0 = p(| u|)\,\mathrm{sgn} u$. Em virtude do Lema 2.3,

$$\rho(v_0, N) = \rho(p(| u|), N) \leq 1.$$

Temos ainda, devido a (1.2),

$$u(x)v_0(x) = M(u(x)) + N(v_0(x)).$$

Dessa forma,

$$\int_\Omega M(u(x))dx \leq \int_\Omega \big(M(u(x)) + N(v_0(x))\big)dx = \int_\Omega u(x)v_0(x)dx \leq \| u\|_M.$$

♦

Podemos agora concluir, a partir do Lema 2.4, uma inequação bastante útil neste estudo:

$$\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\| u\|_M}\right)dx \leq 1, \quad \forall\ u \in L_M,\ u \neq 0. \tag{2.7}$$

Temos agora desenvolvidos os argumentos necessários para enunciar e demonstrar o

Teorema 2.6 ***(Desigualdade de Hölder)*** *Sejam M e N duas N-funções complementares. Então, para cada $u \in L_M(\Omega)$ e cada $v \in L_N(\Omega)$ é válida a desigualdade*

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \| u\|_M \| v\|_N.$$

Prova: Devido a (2.7), temos que, dado $v \in L_N$,

$$\rho\left(\frac{v}{\| v\|_N}, N\right) \leq 1.$$

Portanto, para cada $u \in L_M$, a definição da norma de Orlicz nos garante que

$$\left| \int_\Omega u(x)\frac{v(x)}{\| v\|_N} \right| \leq \| u\|_M,$$

donde segue o resultado. ♦

2.4 A norma de Luxemburgo

Veremos nesta seção que o espaço vetorial $L_M(\Omega)$ também será espaço de Banach com uma norma diferente da norma de Orlicz. Para tanto, começamos definindo um conjunto que à primeira vista parece ser diferente de $L_M(\Omega)$, mas veremos adiante que na verdade tratam-se dos mesmos conjuntos.

Considere $L_{(M)}(\Omega)$ o conjunto dado por

$$L_{(M)}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mensurável } : \exists\lambda > 0 \text{ com } \int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)dx < \infty \right\}.$$

Afirmação: Os conjuntos $L_{(M)}(\Omega)$ e $L_M(\Omega)$ são iguais. Mais ainda, ambos são iguais ao espaço vetorial gerado pelo conjunto $\mathcal{L}_M(\Omega)$, denotado por $<\mathcal{L}_M(\Omega)>$.

Com efeito, se $u \equiv 0$ não há nada a ser feito. Tomemos portanto $u \neq 0$. Suponha $u \in L_M$. Pela desigualdade (2.7), $\| u\|_M > 0$ é tal que $\int_\Omega M\left(u(x)/\| u\|_M\right) dx \leq 1$. Portanto $u \in L_{(M)}$. Reciprocamente, se $u \in L_{(M)}$ então existe $\lambda > 0$ tal que $\int_\Omega M\left(u(x)/\lambda\right) dx < \infty$. Sendo assim, pela desigualdade de Young, dado $v \in \mathcal{L}_N$ (N a N-função complementar a M), temos

$$\int_\Omega u(x)v(x)dx = \lambda \int_\Omega \frac{u(x)}{\lambda}v(x)dx \leq \lambda \left(\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right)dx + \int_\Omega N(v(x))dx\right) < \infty,$$

donde $u \in L_M$. Agora, sendo L_M espaço vetorial contendo $\mathcal{L}_M$, temos $<\mathcal{L}_M> \subset L_M$. Por outro lado, tomando $u \in L_M$ então

$$u = \| u\|_M \left(\frac{u}{\| u\|_M}\right)$$

e pela inequação (2.7), $\rho(u/\| u\|_M, M) \leq 1$. Em particular $u/\| u\|_M \in \mathcal{L}_M$, donde $u \in <\mathcal{L}_M>$, concluindo a validade da afirmação.

Esta afirmação e o Teorema 2.3 nos levam ao interessante

Corolário 2.2 *O espaço de Orlicz $L_M(\Omega)$ é igual à classe de Orlicz $\mathcal{L}_M(\Omega)$ se e somente se $M \in \Delta_2$.*

No espaço vetorial $L_{(M)}$, podemos definir a seguinte norma: Dado $u \in L_{(M)}(\Omega)$, tomemos

$$\| u\|_{(M)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho(u/\lambda, M) \leq 1\}.$$

Verificamos agora que esta função realmente define uma norma em $L_{(M)}$.

1. Primeiramente, observemos que $\| \cdot \|_{(M)}$ está bem definida. Dado $u \in L_{(M)}$, temos que existe $\lambda > 0$ e $C_u \geq 0$ tais que $\rho(u/\lambda, M) = C_u$. Tomemos $t = \max\{1, C_u\}$, como M é convexa,

$$\rho(\frac{u}{t\lambda}, M) \leq \frac{1}{t}\rho(\frac{u}{\lambda}, M) \leq \frac{1}{C_u}C_u = 1$$

2. Claramente, se $u = 0$ q.t.p. então $\| u\|_{(M)} = 0$.

3. Observemos agora que se $\|u\|_{(M)} = 0$ então, para cada $\lambda > 0$ temos

$$\int_\Omega M(u(x)/\lambda)dx \leq 1.$$

De fato, se tivéssemos $\rho(u/\lambda, M) > 1$ então, para qualquer $\varepsilon \in (0, \lambda)$, como M é convexa e par,

$$\int_\Omega M(u(x)/\varepsilon)dx > \int_\Omega M(u(x)/\lambda)dx > 1,$$

donde teríamos que

$$\| u\|_{(M)} \geq \lambda > 0.$$

4. Supondo $\| u\|_{(M)} = 0$ então $u = 0$ q.t.p.. Caso contrário, se $u \geq \delta > 0$ em $A \subset \Omega$ com $|A| > 0$, veríamos que

$$\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) dx \geq \int_A M\left(\frac{u(x)}{\lambda}\right) dx \geq M\left(\frac{\delta}{\lambda}\right) |A| \stackrel{\lambda\to 0}{\longrightarrow} \infty,$$

o que é impossível, pelo item 3 acima.

5. É imediato verificar que $\| \alpha u\|_{(M)} = |\alpha| \, \| u\|_{(M)}$, uma vez que M é par.

6. A desigualdade triangular segue da convexidade da função M. Com efeito, pela definição da norma de Luxemburgo, temos, para cada u, $v \in L_{(M)}$ e cada $\varepsilon > 0$,

$$\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\| u\|_{(M)} + \varepsilon}\right) \leq 1 \quad \text{e} \quad \int_\Omega M\left(\frac{v(x)}{\| v\|_{(M)} + \varepsilon}\right) \leq 1.$$

Tomando $t_0 < 1$ adequadamente,

$$t_0 = \frac{\| u\|_{(M)} + \varepsilon}{\| u\|_{(M)} + \| v\|_{(M)} + 2\varepsilon} \implies (1 - t_0) = \frac{\| v\|_{(M)} + \varepsilon}{\| u\|_{(M)} + \| v\|_{(M)} + 2\varepsilon}$$

vemos que

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega M\left(\frac{u(x) + v(x)}{\| u\|_{(M)} + \| v\|_{(M)} + 2\varepsilon}\right) dx \ \leq \\
&\leq \int_\Omega M\left(t_0 \frac{u(x)}{\| u\|_{(M)} + \varepsilon} + (1 - t_0) \frac{v(x)}{\| v\|_{(M)} + \varepsilon}\right) dx \ \leq \\
&\leq t_0 \int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\| u\|_{(M)} + \varepsilon}\right) dx + (1 - t_0) \int_\Omega M\left(\frac{v(x)}{\| v\|_{(M)} + \varepsilon}\right) dx \ \leq \\
&\leq t_0 + 1 - t_0 \ = \ 1.
\end{aligned}$$

Consequentemente, para todo $\varepsilon > 0$ temos que

$$\| u + v\|_{(M)} \leq \| u\|_{(M)} + \| v\|_{(M)} + 2\varepsilon,$$

portanto,

$$\| u + v\|_{(M)} \leq \| u\|_{(M)} + \| v\|_{(M)}.$$

♦

Observação: A insistência no uso da notação $L_{(M)}$ ao invés de L_M, uma vez que ambos os conjuntos são iguais, é proposital; pois iremos nos referir ao espaço de Orlicz por $L_{(M)}(\Omega)$, ou simplesmente $L_{(M)}$, toda vez que intencionarmos trabalhar ou se referir ao espaço vetorial munido da norma de Luxemburgo. Quando utilizarmos o símbolo $L_M(\Omega)$, ou L_M, estaremos trabalhando com a norma de Orlicz.

Consideremos $0 \neq u \in L_{(M)}$. Seja (k_n) uma seqüência minimizante em $\{k : p(u/k, M) \leq 1\}$. Isto é, tal que $k_n \to \inf\{k : p(u/k, M) \leq 1\} = \|u\|_{(M)}$. Sendo assim, para qualquer $x \in \Omega$, temos

$$\frac{u(x)}{k_n} \longrightarrow \frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}, \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Portanto, para todo $x \in \Omega$ temos

$$M\left(\frac{u(x)}{k_n}\right) \longrightarrow M\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right), \quad \text{quando} \quad n \to \infty.$$

Conseqüentemente, pelo Teorema de Fatou-Lebesgue,

$$\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right) \leq \sup_n \int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{k_n}\right) \leq 1, \qquad \forall\, u \in L_{(M)}(\Omega). \tag{2.8}$$

Lema 2.5 *As normas* $\|\cdot\|_{(M)}$ *e* $\|\cdot\|_M$ *são equivalentes. Mais precisamente*

$$\|u\|_{(M)} \leq \|u\|_M \leq 2\|u\|_{(M)}$$

Prova: Caso $u \equiv 0$ não há o que fazer. Caso contrário, pela desigualdade (2.7) temos imediatamente que $\|u\|_{(M)} \leq \|u\|_M$. Além disso, por (2.6) e (2.8), temos

$$\left\| \frac{u}{\|u\|_{(M)}} \right\|_M \leq \int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right) dx + 1 \leq 2.$$

♦

Temos como resultado imediato o

Corolário 2.3 *O espaço $L_{(M)}(\Omega)$ é um espaço de Banach.*

Prova: As normas de Luxemburgo e Orlicz são equivalentes e o espaço é Banach com a norma de Orlicz, pelo Teorema 2.5. ♦

Mostremos agora um fato interessante: Se $B_{(M)}$ denota a bola unitária em $L_{(M)}$ (isto é, o espaço de Orlicz com respeito à norma de Luxemburgo), então

$$B_{(M)} = \{u \in \mathcal{L}_M \ : \ \rho(u, M) \leq 1\}. \tag{2.9}$$

Mais precisamente, temos que se $\|u\|_{(M)} \leq 1$ então $\rho(u, M) \leq \|u\|_{(M)}$ e se $\|u\|_{(M)} > 1$ então $\rho(u, M) \geq \|u\|_{(M)}$.

Com efeito, supondo $0 \neq \|u\|_{(M)} \leq 1$ então, pela convexidade de M e por (2.8) temos

$$\rho(u, M) = \int_\Omega M\left(\frac{\|u\|_{(M)}}{\|u\|_{(M)}} u(x)\right) dx \leq \|u\|_{(M)} \int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)}}\right) \leq \|u\|_{(M)}.$$

Agora se $\|u\|_{(M)} > 1$, $\varepsilon_0 > 0$ suficientemente pequeno pode ser encontrado tal que para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, em virtude novamente da convexidade de M e da definição da norma de Luxemburgo, temos

$$\frac{1}{\|u\|_{(M)} - \varepsilon} \int_\Omega M(u(x))dx \geq \int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{\|u\|_{(M)} - \varepsilon}\right) > 1,$$

donde segue o resultado, tomando $\varepsilon \to 0$.

Consequentemente, por (2.9), temos deduzida uma outra fórmula para a norma de Orlicz no espaço L_M:

$$\|u\|_M = \sup_{\|v\|_{(N)} \leq 1} \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right|. \tag{2.10}$$

Finalmente, torna-se agora natural invocar desigualdades de Hölder mais refinadas.

Se u, v pertencem aos espaços de Orlicz L_M e L_N respectivamente, com M, N um par de N-funções complementares, então, por (2.10), valem as seguintes desigualdades:

$$\begin{aligned} \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| &\leq \|u\|_M \|v\|_{(N)}, \\ \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| &\leq \|u\|_{(M)} \|v\|_N. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Para encerrar esta seção faremos mais uma pequena e útil observação com respeito à norma de Luxemburgo:

Notemos que se $k_0 > 0$ é tal que

$$\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{k_0}\right) dx = 1,$$

então $\|u\|_{(M)} = k_0$. Claramente, uma vez que M é estritamente crescente, dado $\varepsilon > 0$ temos que

$$\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{k_0-\varepsilon}\right)dx > \int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{k_0}\right)dx = 1.$$

Como aplicação desta última afirmação, calculemos a norma de Luxemburgo da função característica $\kappa(\cdot, A)$ de um subconjunto A mensurável qualquer de Ω. Uma vez que $M(u) = 0 \Leftrightarrow u = 0$, temos

$$\int_\Omega M\left(\kappa(x,A)M^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\right)\right)dx = \int_\Omega \kappa(x,A)\frac{1}{|A|}dx = 1,$$

donde segue que

$$\|\kappa(\cdot, A)\|_{(M)} = \frac{1}{M^{-1}\left(\frac{1}{|A|}\right)}. \tag{2.12}$$

2.5 Imersões em espaços de Orlicz

Definição 2.3 *Dizemos que* ***a N-função*** M_1 ***domina a N-função*** M_2 *(escrevemos $M_2 \prec M_1$) se existem constantes k e t_0 positivas tais que*

$$M_2(t) \leq M_1(kt), \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Duas N-funções M_1 e M_2 são ditas ***equivalentes*** *(escrevemos $M_1 \sim M_2$) quando $M_2 \prec M_1$ e $M_1 \prec M_2$.*

Uma noção mais forte pode ser considerada na seguinte

Definição 2.4 *Sejam M_1 e M_2 duas N-funções. Dizemos que M_2* ***cresce estritamente mais lento que*** M_1 *(escrevemos $M_2 \prec\prec M_1$) quando para todo $k > 0$ temos*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_2(kt)}{M_1(t)} = 0.$$

Observação: Claramente $M_2 \prec\prec M_1 \Leftrightarrow M_2 \prec M_1$ e $M_2 \nsim M_1$. Temos também, do fato de estarmos sempre trabalhando com Ω limitado, que os conjuntos $L_{M_1}(\Omega)$ e $L_{M_2}(\Omega)$ são iguais sempre que $M_1 \sim M_2$.

Faremos nesta seção alguns teoremas de imersão nos espaços de Orlicz. Trabalharemos nos espaços $L_{(M)}$, ou seja, os espaços de Orlicz munidos da norma de Luxemburgo. Observe que os mesmos resultados de imersão apresentados neste trabalho valem com respeito à norma de Orlicz, uma vez que são normas equivalentes, e a escolha da norma de Luxemburgo para apresentar tais imersões se deu apenas devido à maior facilidade na demonstração.

Teorema 2.7 *Se $M_2 \prec M_1$ então $L_{(M_1)}(\Omega) \hookrightarrow L_{(M_2)}(\Omega)$, continuamente.*

Prova: Uma vez que $M_2 \prec M_1$, tomemos k e t_0 positivos tais que

$$M_2(t) \leq M_1(kt), \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Sejam $t_1 = M_2^{-1}\left(\dfrac{1}{2|\Omega|}\right)$ e $K = \max\left\{1, \dfrac{M_2(t_0)}{M_1(kt_1)}\right\}$. Afirmamos que para todo $t \geq t_1$ temos

$$M_2(t) \leq KM_1(kt).$$

De fato, se $t_1 \geq t_0$, não há o que fazer pois $K \geq 1$. Agora se $t_1 < t_0$ então para $t \geq t_0$ também não há o que fazer. Peguemos então $t_1 \leq t \leq t_0$. Assim, $M_1(kt_1) \leq M_1(kt)$ e $M_2(t) \leq M_2(t_0)$. Portanto,

$$M_2(t) \leq \frac{M_2(t_0)}{M_1(kt_1)} M_1(kt) \leq KM_1(kt),$$

verificando a afirmação.

Agora, tomando $u \in L_{(M_1)}(\Omega)$ e definindo

$$\Omega(u) = \left\{x \in \Omega : \frac{|u(x)|}{2Kk\|u\|_{(M_1)}} < t_1\right\},$$

temos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M_2\left(\frac{|u(x)|}{2Kk\|u\|_{(M_1)}}\right)dx &= \int_{\Omega(u)} M_2\left(\frac{|u(x)|}{2Kk\|u\|_{(M_1)}}\right)dx + \int_{\Omega\setminus\Omega(u)} M_2\left(\frac{|u(x)|}{2Kk\|u\|_{(M_1)}}\right)dx \\
&\leq \int_{\Omega(u)} M_2(t_1)dx + K\int_{\Omega\setminus\Omega(u)} M_1\left(k\frac{|u(x)|}{2Kk\|u\|_{(M_1)}}\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2|\Omega|}|\Omega| + \frac{K}{2K}\int_{\Omega\setminus\Omega(u)} M_1\left(\frac{|u(x)|}{\|u\|_{(M_1)}}\right)dx \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \;=\; 1.
\end{aligned}$$

Portanto $u \in L_{(M_2)}(\Omega)$ e $\|u\|_{(M_2)} \leq 2Kk\|u\|_{(M_1)}$. ♦

Em outras palavras, demonstramos que se $M_2 \prec M_1$ então seqüências convergentes em $L_{(M_1)}$ são levadas em seqüências convergentes em $L_{(M_2)}$. O próximo resultado nos mostra uma imersão mais "forte".

Teorema 2.8 *Suponha que $M_2 \prec\prec M_1$. Então, se uma seqüência (u_n) em $L_{(M_1)}$ é limitada e converge em medida, temos que (u_n) é convergente em $L_{(M_2)}$.*

Prova: Fixe $\varepsilon > 0$ e defina $v_{j,k}(x) = (u_j(x) - u_k(x))/\varepsilon$. Consequentemente $(v_{j,k})$ forma uma seqüência limitada em $L_{(M_1)}$. Considere $K > 0$ tal que $\|v_{j.k}\|_{(M_1)} \leq K$. Uma vez que $M_2 \prec\prec M_1$, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$M_2(t) \leq M_1\left(\frac{1}{4K}t\right) \leq \frac{1}{4}M_1\left(\frac{t}{K}\right), \quad \forall\, t \geq t_0.$$

Seja $\delta = \dfrac{1}{4M_2(t_0)}$. Defina ainda

$$\Omega_{j,k} = \left\{x \in \Omega : \ |v_{j,k}(x)| \geq M_2^{-1}\left(\frac{1}{2|\Omega|}\right)\right\}.$$

Como (u_n) é convergente em medida, tomemos N suficientemente grande tal que, se $j,k \geq N$, então $|\Omega_{j,k}| \leq \delta$. Pondo

$$\Omega'_{j,k} = \{x \in \Omega j,k : \ |v_{j,k}(x)| \geq t_0\} \ \text{ e } \ \Omega''_{j,k} = \Omega_{j,k} \setminus \Omega'_{j,k},$$

temos, para $j,k \geq N$,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M_2(|v_{j,k}(x)|)dx &= \int_{\Omega\setminus\Omega_{j,k}} M_2(|v_{j,k}(x)|)dx + \int_{\Omega'_{j,k}} M_2(|v_{j,k}(x)|)dx + \int_{\Omega''_{j,k}} M_2(|v_{j,k}(x)|) \\
&\leq \frac{|\Omega|}{2|\Omega|} + \frac{1}{4}\int_{\Omega'_{j,k}} M_1\left(\frac{|v_{j,k}(x)|}{K}\right)dx + M_2(t_0)|\Omega''_{j,k}| \\
&\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \ = \ 1.
\end{aligned}$$

Portanto, $\|v_{j,k}\|_{(M_2)} \leq 1$, ou seja, $\|u_j - u_k\|_{(M_2)} \leq \varepsilon$. ♦

Como conseqüência imediata do Teorema 2.8 temos o seguinte corolário, que será utilizado mais a frente, para imersões compactas nos espaços de Orlicz-Sobolev, estudados no próximo capítulo.

Corolário 2.4 *Suponha que $M_2 \prec\prec M_1$. Se $S \subset L_{(M_1)}$ é limitado em $L_{(M_1)}$ e pré-compacto no espaço de Lebesgue das funções integráveis L^1, então S é pré-compacto em $L_{(M_2)}$.*

Prova: Seja (u_n) uma seqüência em S. Tomemos uma subseqüência (u_{n_k}) de (u_n) tal que $u_{n_k} \to u$, em L^1. Pelo Teorema de Vitali, (u_{n_k}) é uma seqüência convergente em medida. Portanto, pelo Teorema 2.8, temos que (u_{n_k}) é seqüência convergente em $L_{(M_2)}$. ♦

2.6 O espaço E_M

Desenvolvemos nesta seção ferramentas para discussão de separabilidade e reflexividade dos espaços de Orlicz. Começamos por definir uma noção de convergência que será útil, adiante, para a separabilidade destes espaços.

Definição 2.5 *Dizemos que uma seqüência (u_n) em L_M é* ***convergente em média*** *para uma função $u_0 \in L_M$ se*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega M(u_n(x) - u_0(x))dx = 0.$$

Pelo Lema 2.4, vemos que convergência na norma de Orlicz sempre implica em convergência em média. Porém, em geral, a recíproca não ocorre. De fato, caso a função M não satisfaça a condição Δ_2 então pode-se construir uma seqüência em L_M convergente em média para 0, porém, não convergente na norma de Orlicz (vide [13]). Contudo, quando a N-função M satisfaz a condição Δ_2 então estas duas noções coincidem. Provemos isto no próximo teorema. Antes, precisaremos do seguinte resultado:

Lema 2.6 *Suponha que $M \in \Delta_2$. Considere (v_n) seqüência em L_M convergente em média para 0. Então (tv_n) também é convergente em média para 0 para qualquer $t \geq 0$.*

Prova: Para $0 \leq t \leq 1$ a demonstração é evidente, pois, pela convexidade de M, temos $M(tv_n) \leq tM(v_n)$, onde não precisamos da condição Δ_2. Agora se $t > 1$, então temos, pela condição Δ_2 sob a forma (1.4), que existem constantes $C > 0$ e $v_0 \geq 0$ tais que

$$M(tv) \leq CM(v), \quad \forall\, v > v_0.$$

Seja portanto $A_n = \{x \in \Omega : |v_n(x)| \leq v_0\}$. Logo

$$\begin{aligned}
\int_\Omega M(tv_n(x))dx &= \int_{\Omega\setminus A_n} M(tv_n(x))dx + \int_{A_n} M(tv_n(x))dx \\
&\leq C\int_{\Omega\setminus A_n} M(v_n(x))dx + \int_{A_n} M(tv_n(x))dx \\
&\leq C\int_\Omega M(v_n(x))dx + \int_{A_n} M(tv_n(x))dx.
\end{aligned}$$

Ora, a primeira integral do lado direito da equação acima tende a zero quando $n \to \infty$, por hipótese.

Resta-nos verificar que $s_n := \displaystyle\int_{A_n} M(tv_n(x))dx \to 0$, quando $n \to \infty$. Primeiramente, vemos que (s_n) é uma seqüência limitada. De fato,

$$|s_n| \leq \int_{A_n} |M(tv_n(x))|dx \leq M(tv_0)|A_n| \leq M(tv_0)|\Omega|, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Sendo assim, torna-se suficiente demonstrar que qualquer subseqüência de (s_n) possui uma subseqüência que converge para 0. Tomemos então uma subseqüência $(s_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ de (s_n). Consideremos a subseqüência de mesmos índices de (v_n). Sabemos, por hipótese, que

$$\int_\Omega \kappa(x, A_{n_k}) M(v_{n_k}(x))dx = \int_{A_{n_k}} M(v_{n_k}(x))dx \leq \int_\Omega M(v_{n_k}(x))dx \to 0,$$

onde $\kappa(\cdot, A_{n_k})$ denota a função característica do conjunto A_{n_k}. Consequentemente, podemos extrair uma subseqüência de $\kappa(\cdot, A_{n_k})M(v_{n_k})$ que ainda denotaremos pelos mesmos índices, tal que

$$\kappa(x, A_{n_k})M(v_{n_k}(x)) \to 0,$$

em quase todo ponto (vide Teorema IV.9 em [3]). Considerando a restrição de M ao domínio $\mathbb{R}^+$ e trocando a seqüência de funções v_n por $|v_n|$ caso necessário (não há problema em fazê-lo, pois M é par), uma vez que M é N-função, então M admite uma inversa M^{-1} em $\mathbb{R}^+$ contínua tal que $M^{-1}(t) = 0 \Leftrightarrow t = 0$. Dessa forma, a convergência em quase todo ponto acima acima nos garante que

$$\begin{aligned} \kappa(x, A_{n_k})|v_{n_k}|(x) &= M^{-1}[M(\kappa(x, A_{n_k})v_{n_k}(x))] \\ &= M^{-1}[\kappa(x, A_{n_k})M(v_{n_k}(x))] \to M^{-1}(0) \; = \; 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\kappa(x, A_{n_k})t|v_{n_k}|(x) \to 0,$$

donde

$$\kappa(x, A_{n_k})M(tv_{n_k}(x)) = M[\kappa(x, A_{n_k})tv_{n_k}(x)] \to M(0) = 0,$$

convergências dadas em quase todo ponto. Todo este trabalho nos garantiu então que a seqüência de funções $\kappa(\cdot, A_{n_k})M(tv_{n_k})$ converge para 0 em quase todo ponto. Além disso, essas funções são limitadas:

$$\kappa(\cdot, A_{n_k})M(tv_{n_k}) \leq M(tv_0).$$

E, como estamos trabalhando em Ω limitado, temos que a função constante $M(tv_0)$ está em $L^1(\Omega)$. Podemos, portanto, invocar o Teorema da convergência dominada de Lebesgue para finalmente garantir que

$$s_{n_k} = \int_{A_{n_k}} M(tv_{n_k}(x))dx = \int_\Omega \kappa(x, A_{n_k})M(tv_{n_k}(x))dx \to 0.$$

♦

Teorema 2.9 *Se a N-função M satisfaz a condição Δ_2, então convergência em média no espaço L_M é equivalente a convergência em norma.*

Prova: Já observamos que é suficiente provar que convergência em média implica em convergência em norma, uma vez que a recíproca é facilmente verificada. Seja, portanto, (u_n) uma seqüência em L_M convergindo em média para $u_0 \in L_M$. Ou seja,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega M(u_n(x) - u_0(x))dx = 0.$$

Tomemos $\varepsilon > 0$ e $k \in \mathbb{N}$ suficientemente grande para que $1/2^{k-1} < \varepsilon$. Uma vez que $M \in \Delta_2$, o Lema 2.6 nos diz que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega M[2^k(u_n(x) - u_0(x))]dx = 0.$$

Sendo asism, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ tenhamos

$$\int_\Omega M[2^k(u_n(x) - u_0(x))]dx < 1.$$

Assim, devido a (2.6), para $n \geq n_0$, temos

$$\|2^k(u_n - u_0)\|_M \leq \rho(2^k(u_n - u_0), M) + 1 < 2.$$

Daí,

$$\|u_n - u_0\|_M < \frac{1}{2^{k-1}} < \varepsilon,$$

concluindo que (u_n) converge em norma para u_0. ♦

Lema 2.7 *Dada $u \in \mathcal{L}_M(\Omega)$, podemos encontrar uma sequência de funções $u_n \in L^\infty(\Omega)$ tal que, (u_n) converge em média para u.*

Prova: Tomemos

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad |u(x)| \leq n \\ 0 & \text{se} \quad |u(x)| > n \end{cases}$$

Assim, definindo $A_n = \{x \in \Omega : \ |u(x)| > n\}$, temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega M(u_n(x) - u(x))dx &= \int_{\Omega\setminus A_n} M(u_n(x) - u(x))dx + \int_{A_n} M(u_n(x) - u(x))dx \\ &= \int_{\Omega\setminus A_n} M(0)dx + \int_{A_n} M(-u(x))dx \\ &= \int_{A_n} M(u(x))dx. \end{aligned}$$

Mas $|A_n| \to 0$ pois, caso contrário, existiria uma subseqüência (A_{n_k}) tal que $|A_{n_k}| \geq \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$, donde teríamos,

$$\int_\Omega M(u(x))dx \geq \int_{A_{n_k}} M(u(x))dx \geq M(n_k)|A_{n_k}| \geq M(n_k)\,\varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Um absurdo, pois $M(n_k) \to \infty$, quando $k \to \infty$, contrariando a hipótese de $u \in \mathcal{L}_M$. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega M(u_n(x) - u(x))dx = \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} M(u(x))dx = 0.$$

♦

Definição 2.6 *Definimos o fecho em $L_M(\Omega)$ do espaço das funções essencialmente limitadas $L^\infty(\Omega)$ na norma de Orlicz por $E_M(\Omega)$, ou simplesmente E_M, caso não haja perigo de confusão.*

Mais sucintamente,

$$E_M(\Omega) = \overline{L^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_M}.$$

Ora, por tudo que foi desenvolvido nesta seção, temos de imediato o seguinte

Teorema 2.10 *E_M=L_M se e somente se $M \in \Delta_2$. Em outras palavras, L^∞ é denso no espaço de Orlicz L_M apenas quando M satisfaz a condição Δ_2.*

Prova: Provemos que em geral temos

$$E_M \subseteq \mathcal{L}_M. \tag{2.13}$$

Feito isto, teremos demonstrado que $E_M \subsetneq L_M$ quando M não satisfaz Δ_2, pois $\mathcal{L}_M \subsetneq L_M$ quando M não satisfaz tal condição, de acordo com o Corolário 2.2. Seja, portanto, $u \in E_M$. Por definição, tomemos $u_1 \in L^\infty$ tal que $\|u - u_1\|_M < 1/2$. Logo, pelo Lema 2.4, temos

$$\int_\Omega M[2u(x) - 2u_1(x)]dx \leq 2\|u - u_1\|_M < 1.$$

Isto implica que $2u-2u_1$ pertence a $\mathcal{L}_M$. Já sabemos que qualquer função em L^∞ pertence a $\mathcal{L}_M$. Sendo assim, escrevendo

$$u = \frac{1}{2}[2u - 2u_1] + \frac{1}{2}[2u_1],$$

vemos que u também pertence a $\mathcal{L}_M$, uma vez que $\mathcal{L}_M$ é um conjunto convexo.

Supondo agora que M satisfaz a condição Δ_2, então pelo Corolário 2.4, temos $\mathcal{L}_M = L_M$ e pelo Lema 2.7 dado $u \in L_M = \mathcal{L}_M$ podemos encontrar (u_n) em L^∞ convergindo em média para u. Mas o Teorema 2.9 garante que essa convergência também se dá na norma de Orlicz. Portanto $u \in E_M$, como queríamos demonstrar. ♦

O teorema que se segue agora nos dá um critério de separabilidade para o espaço de Orlicz L_M.

Teorema 2.11 *E_M é um espaço separável.*

Prova: Consideremos $u \in L^\infty$ com $\|u\|_\infty = a$. Pelo Teorema de Luzin, podemos encontrar uma seqüência de funções contínuas (u_n) uniformemente limitadas, $|u_n(x)| \leq a$, tal que, para cada n, a diferença $u_n(x) - u(x)$ difere de 0 apenas em um conjunto Ω_n cuja medida é menor que $1/n$. Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\|u-u_n\|_{(M)} &= \inf\left\{k : \int_\Omega M\left(\frac{u(x)-u_n(x)}{k}\right)dx \leq 1\right\} \\
&= \inf\left\{k : \int_\Omega M\left(\kappa(x,\Omega_n)\frac{u(x)-u_n(x)}{k}\right)dx \leq 1\right\} \\
&\leq \inf\left\{k : \int_\Omega M\left(\kappa(x,\Omega_n)\frac{2a}{k}\right)dx\right\} \\
&= 2a\|\kappa(\cdot,\Omega_n)\|_{(M)}.
\end{aligned}$$

Tomando $n \to \infty$, então $|\Omega_n| \to 0$. Em virtude de (2.12), temos $\|\kappa(\cdot,\Omega_n)\|_{(M)} \to 0$, e portanto $\|u-u_n\|_{(M)} \to 0$, donde segue que

$$\lim_{n\to\infty} \|u-u_n\|_M = 0,$$

devido à equivalência das normas.

Provamos então que o conjunto das funções contínuas $C(\Omega)$ é denso em $E_M(\Omega)$. Ora, mas sabemos também que dada v em $C(\Omega)$ podemos construir um seqüência de polinômios com coeficientes racionais convergindo uniformemente para v. Caso tal convergência implicar em convergência com respeito a norma de Orlicz, então teremos demonstrado que o espaço enumerável dos polinômios com coeficientes racionais é denso em E_M, concluindo a separabilidade do mesmo. Portanto, provemos tal afirmação: Seja (v_n) seqüência de funções contínuas tal que $v_n \to v$, uniformemente. Então $\|v_n - v\|_M \to 0$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$ existe n_0 tal que $|v_n(x) - v(x)| < \varepsilon$ $\forall\, n \in \mathbb{N}$ e $\forall\, x \in \Omega$. Consequentemente, por (2.6), se $n \geq n_0$, temos

$$\begin{aligned}
\|v_n - v\|_M &\leq \sup_{\rho(v,N)\leq 1} \int_\Omega |v_n(x)-v(x)|dx \\
&\leq \varepsilon \sup_{\rho(v,N)\leq 1} \int_\Omega |v(x)|dx \\
&\leq \varepsilon\left(\int_\Omega M(1)dx + 1\right) \\
&= \varepsilon(M(1)|\Omega| + 1),
\end{aligned}$$

donde $\|v_n - v\|_M \to 0$. ♦

Corolário 2.5 *Se $M \in \Delta_2$ então L_M é separável.*

Prova: Segue dos Teoremas 2.10 e 2.11. ♦

Iremos demonstrar adiante que se M não satisfaz a condição Δ_2 então L_M não pode ser separável. Porém, antes de chegarmos a este resultado, precisaremos de alguns lemas que serão expostos e demonstrados primeiramente.

Lema 2.8 *Suponha que $M \notin \Delta_2$. Então existem u, v funções tais que*

1. *$\alpha u \in \mathcal{L}_M$ para todo $\alpha \leq 1$ e $\beta u \notin \mathcal{L}_M$ para todo $\beta > 1$.*
2. *$\alpha v \in \mathcal{L}_M$ para todo $\alpha < 1$ e $\beta v \notin \mathcal{L}_M$ para todo $\beta \geq 1$.*

Prova: Começamos mostrando que se M não satisfaz a condição Δ_2 então é possível construir uma seqüência (u_n) estritamente crescente indo para o infinito tal que

$$M(u_1) > 1 \ \text{ e } \ M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right] > 2^n M(u_n).$$

Vejamos como isto é possível. Consideremos primeiramente $l_n = 1 + 1/n$. Como cada $l_n > 1$ então M não satisfaz a condição dada em (1.4) para cada l_n. Sendo assim, construiremos passo a passo a seqüência, a partir de cada l_n:

Para l_1 tomemos u_0 tal que $M(u_0) > 1$ e tomemos $u_1 > u_0$ tal que

$$M(l_1 u_1) > 2M(u_1).$$

Para l_2 consideremos $u_1 + 1$ e $u_2 \geq u_1 + 1$ tal que

$$M(l_2 u_2) > 2^2 M(u_2).$$

Para l_3 tomemos $u_2 + 1$ e $u_3 \geq u_2 + 1$ tal que

$$M(l_3 u_3) > 2^3 M(u_3).$$

Seguindo esta lógica para cada n, vemos que é possível construir a seqüência requerida.

Considere agora subconjuntos Ω_n disjuntos dois a dois tais que

$$|\Omega_n| = \frac{|\Omega|}{2^n M(u_n)}.$$

Defina u da seguinte forma:

$$u(x) = \begin{cases} u_n & \text{se} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n \end{cases}$$

A função u pertence a $\mathcal{L}_M$ pois

$$\int_\Omega M(u(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega_n} M(u(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} M(u_n)|\Omega_n| < \infty.$$

A convexidade de $\mathcal{L}_M$ nos garante então que $\alpha u \in \mathcal{L}_M$ para qualquer $\alpha \leq 1$.

Tomemos $\beta > 1$. Dessa forma, consideremos n_0 a partir do qual todo $n \geq n_0$ é tal que $\beta > 1 + 1/n$. Assim, para cada n acima de n_0 temos então

$$\int_{\Omega_n} M(\beta u(x))dx = M(\beta u_n)|\Omega_n| > M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]|\Omega_n| > 2^n M(u_n)|\Omega_n| = |\Omega|.$$

Sendo assim

$$\int_{\Omega} M(\beta u(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{\Omega_n} M(\beta u(x))dx \geq \sum_{n=n_0}^{\infty}\int_{\Omega_n} M(\beta u(x))dx > \sum_{n=n_0}^{\infty}|\Omega| = \infty.$$

Agora defina v por

$$v(x) = \begin{cases} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)u_n & \text{se} \quad x \in \Omega_n \\ 0 & \text{se} \quad x \notin \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega_n. \end{cases}$$

Para $\beta \geq 1$ temos

$$\int_{\Omega} M(\beta v(x))dx \geq \int_{\Omega} M(v(x))dx = \sum_{n=1}^{\infty} M\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]|\Omega_n| >$$

$$> \sum_{n=1}^{\infty} 2^n M(u_n)|\Omega_n| = \infty.$$

Mas se $\alpha < 1$ então tomando n_0 tal que $\alpha(1+1/n) < 1$ para todo $n \geq n_0$, se $n \geq n_0$, temos

$$\int_{\Omega_n} M(\alpha v(x))dx = M\left[\alpha\left(1+\frac{1}{n}\right)u_n\right]|\Omega_n| < M(u_n)|\Omega_n| = \frac{|\Omega|}{2^n}.$$

Consequentemente,

$$\int_{\Omega} M(\alpha(v(x))dx = \sum_{n=1}^{n_0}\int_{\Omega_n} M(\alpha(v(x))dx + \sum_{n=n_0}^{\infty}\int_{\Omega_n} M(\alpha(v(x))dx < \infty.$$

♦

Se $d(u, A) = \inf\limits_{v\in A}\|u - v\|_M$ é a distância da função u ao conjunto A, então defina

$$\Pi(E_M, r)=\{u \in L_M : d(u, E_M) < r\}.$$

O próximo resultado então descreve a disposição do espaço E_M no espaço L_M quando M não satisfaz a condição Δ_2.

Lema 2.9 *Suponha que $M \notin \Delta_2$. Então*

$$\Pi(E_M, 1) \subsetneq \mathcal{L}_M \subsetneq \overline{\Pi(E_M, 1)}.$$

Prova: Provemos a primeira inclusão mostrando que qualquer função $u_0 \in E_M$ pertence à classe $\mathcal{L}_M$ e qualquer outra função em L_M contida na bola aberta de centro u_0 e raio 1 também está nesta classe. Seja, assim, $u \in L_M$ tal que $\|u - u_o\|_M < 1$. Tomemos α tal que $\|u - u_o\|_M < 1 - \alpha$. Ora, E_M é espaço vetorial e, portanto, $(1/\alpha)u_0 \in E_M$. Agora, por (2.13) temos $(1/\alpha)u_0 \in \mathcal{L}_M$. Uma vez que $\|(u - u_0)/(1 - \alpha)\|_M < 1$, pelo Lema 2.4 temos $(u - u_0)/(1 - \alpha) \in \mathcal{L}_M$. Sendo assim, escrevendo

$$u = (1 - \alpha)\left(\frac{u - u_0}{1 - \alpha}\right) + \alpha\left(\frac{u_0}{\alpha}\right),$$

vemos, pela convexidade do conjunto $\mathcal{L}_M$, que $u \in \mathcal{L}_M$.

Provemos agora a segunda inclusão. Tomando $u \in \mathcal{L}_M$, dado $\varepsilon > 0$ pelo Lema 2.7, podemos tomar $u_\varepsilon \in E_M$ limitada tal que

$$\int_\Omega M(u(x) - u_\varepsilon(x))dx < \varepsilon.$$

Sendo assim, por (2.6), $\|u - u_\varepsilon\| < 1 + \varepsilon$, donde

$$d(u, E_M) = \inf_{v \in E_M} \|u - v\|_M \leq \|u - u_\varepsilon\| < 1 + \varepsilon.$$

Uma vez que ε é arbitrário temos $d(u, E_M) \leq 1$, ou seja, $u \in \overline{\Pi(E_M, 1)}$.

Resta-nos provar que as inclusões são próprias.

Ora, no Lema 2.8 construímos uma função $u \in \mathcal{L}_M$ tal que $\alpha u \in \mathcal{L}_M$ para todo $\alpha \leq 1$ e $\beta u \notin \mathcal{L}_M$ se $\beta > 1$. Mostremos que tal u não pode pertencer $\Pi(E_M, 1)$. Claramente se $d(u, E_M)$ fosse menor que 1 então tomaríamos $\beta > 1$ tal que $\beta d(u, E_M) < 1$. Sendo assim, uma vez que $d(\beta u, E_M) = \beta d(u, E_M)$, a primeira inclusão demonstrada implicaria que $\beta u \in \mathcal{L}_M$ contrariando a propriedade básica da u. Analogamente, construímos neste mesmo lema uma função $v \notin \mathcal{L}_M$ tal que $\alpha v \notin \mathcal{L}_M$ se $\alpha \leq 1$ e $\beta v \in \mathcal{L}_M$ se $\beta > 1$. Mostremos que $v \in \overline{\Pi(E_M, 1)}$. De fato, $d(v, E_M) = 1$, caso contrário, poderíamos tomar $\alpha < 1$ tal que $d(\beta v, E_M) > 1$, donde inplicaria, a partir da segunda inclusão demonstrada neste lema que $\beta v \notin \mathcal{L}_M$, contrariando a propriedade de v. ♦

Para finalizar esta seção, temos então o esperado resultado:

Teorema 2.12 *L_M é separável se e somente se $M \in \Delta_2$.*

Prova: Se M satisfaz Δ_2 então L_M é separável, de acordo com o Corolário 2.5.

Agora suponha que M não satisfaz tal condição. Seja também $\{u_n\}$ um conjunto enumerável de funções em L_M. Vejamos que podemos construir uma u em L_M distante de qualquer u_i deste conjunto, provando que L_M não pode ser separável.

Para tanto utilizamos o Teorema de Lusin, para garantir a existência de um conjunto mensurável $\Omega' \subset \Omega$ tal que $|\Omega \backslash \Omega'| \leq \varepsilon$ para ε pequeno e no qual as funções u_n (na verdade, as restrições de u_n ao conjunto Ω') são contínuas e limitadas para cada n. Dessa forma, temos $u_n \in E_M(\Omega')$ (denote a norma de Orlicz do espaço $L_M(\Omega')$ por $\|\!| \cdot |\!\|_M$). Mas, uma vez que M não satisfaz a condição Δ_2 vimos no final da demonstração do Lema 2.9 que é possível encontrar $w \in L_M(\Omega')$ tal que $d(w, E_M(\Omega')) = 1$. Estendendo w para todo o domínio Ω, de forma que se anule fora de Ω' e denotando por u tal extensão, temos que

$$\|u - u_n\|_M \geq |\!|\!| w - u_n |\!|\!|_M \geq d(w, E_M(\Omega')) = 1.$$

♦

2.7 Funcionais lineares nos espaços de Orlicz

Como já vem sendo mencionado, durante toda esta seção M e N representarão duas N-funções complementares.

O espaço vetorial de todos os funcionais lineares $T : L_M$ (ou $L_{(M)}$) $\to \mathbb{R}$ contínuos é chamado de espaço dual de L_M (respectivamente $L_{(M)}$) e denotado por L_M^* (respectivamente $L_{(M)}^*$). Obviamente $L_M^* = L_{(M)}^*$ e a utilização de ambas simbologias ocorrerá apenas para distinguir normas utilizadas no mesmo espaço. Pois mencionamos L_M^* ao trabalharmos no dual de L_M, munindo-o da norma

$$\|T\|_M^* = \sup\{|T(u)| : \ \|u\|_M \leq 1\}$$

e $L_{(M)}^*$ munindo-o da norma

$$\|T\|_{(M)}^* = \sup\{|T(u)| : \ \|u\|_{(M)} \leq 1\}.$$

Para cada $v \in L_N$, podemos definir um funcional $T_v : L_M \to \mathbb{R}$, dado por

$$T_v(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx. \tag{2.14}$$

Assim, a desigualdade de Hölder garante que este funcional linear é contínuo, pois

$$|T_v(u)| = \left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \|v\|_N \|u\|_M.$$

Portanto, $T_v \in L_{(M)}^*$ e

$$\|T_v\|_{(M)}^* = \sup\left\{ \left| \int_\Omega u(x)v(x) \right| : \ \|u\|_{(M)} \leq 1 \right\} = \|v\|_N.$$

Logo, a função

$$\begin{array}{rcl} L_N & \longrightarrow & L_{(M)}^* \\ v & \longmapsto & T_v \end{array} \tag{2.15}$$

define uma imersão isométrica (ou seja, uma função linear que preserva a norma) entre estes dois espaços.

É natural questionar se esta imersão é sobrejetiva. Isto é, se todo funcional linear em L_M^* tem a forma (4.2). O fato é que nem sempre isto ocorre. Situação descrita pelo próximo resultado.

Proposição 2.13 *Se $M \notin \Delta_2$ então a imersão (2.15) não é sobrejetiva.*

Prova: Podemos, por hipótese, tomar $u_0 \in L_M \backslash E_M$. Defina um funcional linear contínuo T em $<E, u_0>$ tal que $T(u) = 0$ se $u \in E_M$ e $T(u_0) = 1$. Estendemos T a um funcional linear contínuo em L_M, pelo Teorema de Hanh-Banach. Suponha que T é dado por (4.2), para algum $v \in L_N$. Considere a seqüência de truncamentos

$$v_n(x) = \begin{cases} v(x) & \text{se} \quad |v(x)| \leq n, \\ 0 & \text{se} \quad |v(x)| > n. \end{cases}$$

Logo, cada v_n é limitada e, portanto, pertence a E_M. Porém, a seqüência de funções positivas $v_n v$ converge em quase todo ponto para v^2. Assim, pelo Teorema de Fatou-Lebesgue,

$$0 = \sup_n T(v_n) = \sup_n \int_\Omega v_n(x)v(x)dx \geq \int_\Omega v^2(x)dx,$$

donde concluímos que $v = 0$, o que é um absurdo pois $T(u_0) = 1$. ♦

Este "problema" pode ser contornado se considerarmos agora, ao invés do espaço $L_{(M)}^*$, o dual do espaço $E_{(M)}$ (isto é, o espaço E_M munido da norma de Luxemburgo), denotado por $E_{(M)}^*$. Em outras palavras, considere imersão isométrica

$$\begin{array}{ccc} L_N & \longrightarrow & E_{(M)}^* \\ v & \longmapsto & T_v. \end{array} \tag{2.16}$$

Temos o seguinte

Teorema 2.14 *A imersão (2.16) é sobrejetiva, ou seja, todo funcional $T \in E_{(M)}^*$ é dado por (4.2).*

Prova: Seja $T \in E_{(M)}^*$. Considere $\Sigma = \{U \subseteq \Omega : \ U$ é mensurável $\}$. Defina em Σ a função

$$\begin{array}{rccl} F: & \Sigma & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & U & \longmapsto & F(U) = T(\kappa(\cdot, U)). \end{array}$$

Por (2.12), temos que

$$|F(U)| \leq \|T\|_{(M)}^* \|\kappa(\cdot, U)\|_{(M)} \overset{|U| \to 0}{\longrightarrow} 0,$$

donde, pelo Teorema de Radon-Nikodyn, podemos encontrar uma função v mensurável tal que

$$F(U) = \int_U v(x)dx.$$

Portanto se w é uma função mensurável simples, isto é, assumindo um número finito de valores, vemos que

$$T(w) = T\left(\sum \alpha_i \kappa(\cdot, U_i)\right) = \sum \alpha_i T(\kappa(\cdot, U_i))$$

$$= \sum \alpha_i F(U_i) = \sum \alpha_i \int_{U_i} v(x)dx = \int_\Omega w(x)v(x)dx.$$

Tomando $w \in L^\infty$, temos também $T(w) = \int_\Omega w(x)v(x)dx$. Para tanto, é suficiente observar que se w é essencialmente limitada, podemos tomar uma seqüência (w_n) de funções simples convergindo em quase todo ponto e em $E_{(M)}$ para w. Novamente, por densidade de L^∞ em $E_{(M)}$ temos que para qualquer $u \in E_{(M)}$,

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v(x)dx.$$

Para concluir, falta-nos apenas mostrar que $v \in L_N(\Omega)$. Sendo assim, tome $u \in L_M$. Como de costume, considere os truncamentos $u_n \in L^\infty$

$$u_n(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se} \quad |u(x)| \leq n \\ 0 & \text{se} \quad |u(x)| > n \end{cases}$$

Logo, $|u_n v| \to |uv|$ em quase todo ponto, e, pelo Teorema de Fatou-Lebesgue,

$$\left| \int_\Omega u(x)v(x)dx \right| \leq \sup_n \left\{ \int_\Omega |u_n(x)v(x)|dx \right\} =$$

$$= \sup_n |T(|u_n|\mathrm{sgn} v)| \leq \|T\|_M^* \sup_n \|u_n\|_M \leq \|T\|_M^* \|u\|_M < \infty.$$

Portanto, $v \in L_N$, como queríamos demonstrar. ♦

Finalmente, a Proposição 2.13 e o Teorema 2.14, nos dizem que

$$L_{(M)}^* = L_N \Leftrightarrow M \in \Delta_2$$

e analogamente,

$$L_{(N)}^* = L_M \Leftrightarrow N \in \Delta_2.$$

Portanto, temos de imediato o seguinte

Corolário 2.6 *L_M é um espaço reflexivo se e somente se M é Δ-regular.*

Prova: Segue imediatamente da Proposição 2.13, do Teorema 2.14 e do Corolário 1.1. ♦

Capítulo 3

Espaços de Orlicz-Sobolev, imersões de Sobolev

Estudaremos neste capítulo os espaços de Orlicz-Sobolev. Estes são obtidos a partir dos espaços de Orlicz, da mesma maneira em que obtemos os espaços de Sobolev a partir dos espaços de Lebesgue. Começamos por definir e estudar as propriedades básicas de tais espaços e posteriormente exibindo imersões dos espaços de Orlicz-Sobolev em espaços de Orlicz. Tais imersões têm o intuito de generalizar as conhecidas imersões de Sobolev e o Teorema de Rellich-Kondrachov (para o caso $p \leq n$, onde n é a dimensão do espaço $\mathbb{R}^n$ no qual Ω está contido. Ver [3], Seção IX.3). Ao final do capítulo apresentamos um homeomorfismo entre dois espaços de Orlicz-Sobolev gerados por N-funções complementares, que será utilizado ao longo do capítulo 4.

3.1 Espaços de Orlicz-Sobolev

Definição 3.1 *Dada M uma N-função, definimos o* ***espaço de Orlicz-Sobolev*** $W^1L_M(\Omega)$ *como sendo o espaço vetorial*

$$W^1L_M(\Omega) = \left\{ u \in L_M(\Omega) : \begin{array}{c} \text{existem } f_1, f_2, \cdots, f_n \in L_M(\Omega) \text{ tais que} \\ \displaystyle\int_\Omega u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega f_i \phi dx \ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega) \ \forall i = 1, \cdots, n \end{array} \right\}$$

Se $u \in W^1L_M$ então tais f_i são únicas, devido ao Lema IV.2 em [3]. Assim, denotemos

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = f_i \ \text{ e } \nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

A conhecida notação não é por acaso. É imediato verificar que uma função $u \in W^1L_M$ que possua todas as derivadas parciais no sentido usual, verifica também a igualdade

$\partial u/\partial x_i = f_i$. Tais funções f_i são portanto chamadas de derivadas fracas da função u, o que justifica tal notação.

Observamos ainda que podemos identificar o espaço W^1L_M como um subespaço de um produto cartesiano de L_M, $n+1$ vezes:

$$\begin{aligned} W^1L_M &\longrightarrow L_M \times L_M \times \cdots \times L_M \equiv \prod_{n+1} L_M \\ u &\longmapsto (u, \nabla u) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Definimos então duas normas em W^1L_M imediatamente através da definição natural de norma em $\prod_{n+1} L_M$. Se $u \in W^1L_M$, sejam

$$\|u\|_{W^1L_M} = \max_{1\le i\le n} \left\{ \|u\|_M, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_M \right\}$$

e

$$\|u\|_{W^1L_{(M)}} = \max_{1\le i\le n} \left\{ \|u\|_{(M)}, \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{(M)} \right\}$$

Claramente, pelo Lema 2.5, as normas são equivalentes com

$$\|u\|_{W^1L_{(M)}} \le \|u\|_{W^1L_M} \le 2\|u\|_{W^1L_{(M)}}.$$

Teorema 3.1 *W^1L_M é um espaço de Banach.*

Prova: Uma vez que (3.1) define uma imersão isométrica, é suficiente mostrar que a imagem de tal imersão é fechada. Sendo assim, tomemos

$$(u_k, \nabla u_k) \to (u, u_1, \cdots, u_n), \quad \text{quando} \quad k \to \infty.$$

Nosso objetivo é mostrar que $u_i = \partial u/\partial x_i$ para cada $i = 1, \cdots, n$. Como $(u_k, \nabla u_k)$ converge em $\prod_{n+1} L_M$ para $(u, u_1, \cdots, u_n)$, então $u_k \to u$ e $\partial u_k/\partial x_i \to u_i$ em L_M, para cada i. Agora, fixado $\phi \in C_0^\infty$, temos que ϕ, $\partial\phi/\partial x_i \in L_N$,para cada i, onde N denota a N-função complementar a M. Portanto

$$v \longmapsto \int_\Omega v(x)\phi(x)dx \quad \text{e} \quad v \longmapsto \int_\Omega v(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx$$

definem funcionais lineares contínuos em L_M. Consequentemente,

$$\int_\Omega u_k(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx \longrightarrow \int_\Omega u(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx \quad \text{e} \quad \int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx \longrightarrow \int_\Omega u_i(x)\phi(x)dx.$$

Portanto, uma vez que

$$\int_\Omega u_k(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega \frac{\partial u_k}{\partial x_i}(x)\phi(x)dx,$$

concluímos que

$$\int_\Omega u(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}(x)dx = -\int_\Omega u_i(x)\phi(x)dx,$$

para cada $i = 1, \cdots, n$. Portanto, como ϕ é arbitrário, temos, por definição, que $u_i = \partial u/\partial x_i$, para cada i, como queríamos demonstrar. ♦

Em particular, vemos na demonstração do Teorema 3.1, que o espaço W^1L_M é subespaço fechado de $\prod_{n+1} L_M$. Definimos também o espaço W^1E_M, de maneira análoga à Definição 3.1. Assim, muitas das propriedades estudadas nos espaços $L_M(E_M)$ serão facilmente verificadas para o espaço $W^1L_M(W^1E_M)$. Podemos resumí-las no seguinte

Teorema 3.2

1. *W^1E_M é separável;*

2. *$W^1L_M = W^1E_M$ é separável se e somente se $M \in \Delta_2$;*

3. *Para cada $T \in (W^1E_M)^*$ existem $v_i \in L_N$, $i = 0, \cdots, n$ tais que*

$$T(u) = \int_\Omega u(x)v_0(x)dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)v_i(x)dx;$$

4. *W^1L_M é reflexivo se e somente se M é Δ-regular.*

Prova: O item 1 Segue do Teorema 2.11. Já o item 2 é conseqüência do Teorema 2.10 e do Teorema 2.12. O Teorema 2.14 prova o item 3. Finalmente, o item 4 segue imediatamente do Corolário 2.6. ♦

3.2 Imersões de Sobolev

Destinamos esta seção ao estudo de imersões dos espaços de Orlicz-Sobolev nos espaços de Orlicz. Com o objetivo de motivar tal estudo, façamos um breve comentário a respeito das imersões de Sobolev. Mais detalhes podem ser vistos em [3], [1].

Considere $W^{1,p}(\Omega)$ o espaço de Sobolev obtido a partir do espaço de Lebesgue $L^p(\Omega)$. Se $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é limitado, de fronteira suave, com $n \geq 3$, então, para todo $p < n$ temos que

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p^*}(\Omega),$$

continuamente, onde $p^* = np/(n-p)$ é chamado de expoente crítico de Sobolev. Além disso, para todo $q \in [1, p^*)$, temos que a imersão

$$W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega),$$

existe e é compacta.

Nosso intuito é generalizar este resultado para espaços de Orlicz e espaços de Orlicz-Sobolev. Observe que, para cada $p < n$ (ou cada N-função $|t|^p$) construímos um novo expoente $p^* > 1$ (ou então, uma nova N-função $|t|^{p^*}$) tal que as imersões acima são válidas. Seguindo esta idéia, dada uma N-função M satisfazendo alguma propriedade, iremos construir uma N-função M_* de forma que a imersão

$$W^1 L_M \hookrightarrow L_{M_*}$$

existe e é contínua. Além disso, veremos que qualquer N-função A crescendo estritamente mais lento que M_* (tal é o caso da N-função $|t|^q$, com $1 < q < p^*$), em relação à N-função $|t|^{p^*}$) é tal que a imersão

$$W^1 L_M \hookrightarrow L_A$$

existe e é compacta.

Lema 3.1 *Seja M uma N-função satisfazendo*

$$\int_0^1 \frac{M^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau < \infty \tag{3.2}$$

$$\int_1^\infty \frac{M^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau = \infty. \tag{3.3}$$

então a função $M_*^{-1} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dada por

$$M_*^{-1}(t) = \int_0^t \frac{M^{-1}(\tau)}{\tau^{1+1/n}} d\tau \tag{3.4}$$

é bijetiva e sua inversa M^* é N-função.

Prova: Claramente, M_*^{-1} é estritamente crescente, portanto injetiva. Também é imediato verificar que $M_*^{-1}(0) = 0$. Além disso, observando a hipótese (3.3), temos que $M_*^{-1}(t) rightarrow \infty$, quando $t \to \infty$. Uma vez que esta função é também contínua, por definição, temos que M_*^{-1} é sobrejetiva. Sendo assim, fica bem definida a função inversa M_*. Provemos que tal função é N-função (na verdade, a extensão par de M_* para toda a reta $\mathbb{R}$ é que será a N-função desejada).

- M_* é contínua, estritamente crescente e $M_*(0) = 0$, imediatamente da definição.
- M_* é convexa. Para tanto, provemos que M_*^{-1} é côncava. Por definição,

$$(M_*^{-1})'(t) = \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}}.$$

Agora, dado $s \geq 0$ e $0 \leq \alpha \leq 1$, temos,

$$M(\alpha M^{-1}(s)) \leq \alpha M(M^{-1}(s)).$$

Portanto
$$\alpha M^{-1}(s) \leq M^{-1}(\alpha s),$$
para qualquer $s \geq 0$ e para todo $0 \leq \alpha \leq 1$. Supondo agora $0 < a \leq b$, então $a/b \leq 1$ e tomando $\alpha = a/b$ e $s = b$, temos

$$M^{-1}(a) \geq \frac{a}{b} M^{-1}(b) \geq \left(\frac{a}{b}\right)^{1+1/n} M^{-1}(b).$$

Logo,
$$(M_*^{-1})'(a) = \frac{M^{-1}(a)}{a^{1+1/n}} \geq \frac{M^{-1}(b)}{b^{1+1/n}} = (M_*^{-1})'(b).$$
Portanto, $(M_*^{-1})'$ é decrescente, provando que M_*^{-1} é côncava.

- Devemos provar que
$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_*(t)}{t} = \infty.$$
Para tanto, é suficiente verificar
$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_*^{-1}(t)}{t} = 0.$$
Portanto, pela regra de L'Hôpital, temos
$$\lim_{t\to\infty} \frac{M_*^{-1}(t)}{t} = \lim_{t\to\infty} \frac{M^{-1}(t)}{t^{1+1/n}} = \lim_{t\to\infty} \frac{M^{-1}(t)}{t} \frac{1}{t^{1/n}} = 0.$$

- Temos finalmente que
$$\lim_{t\to 0} \frac{M_*(t)}{t} = 0,$$
onde a demonstração de tal fato ocorre de maneira completamente análoga à feita acima, utilizando a regra de L'Hôpital. ♦

Suponha que $M(t) = |t|^p$, então a inversa de M em $\mathbb{R}^+$ é dada por $M^{-1}(t) = t^{1/p}$. Se M satisfaz as hipóteses (3.2) e (3.3) então é fácil verificar que $p \leq n$. Além disso, calculando diretamente M_* vemos que $M_*(t) = |t|^{p^*}$, onde p^* é o expoente crítico de Sobolev, $np/(n-p)$. Fazendo analogia às imersões de Sobolev, é natural então esperar que se M é uma N-função satisfazendo estas hipóteses, então há uma imersão do espaço W^1L_M em L_{M_*}. O próximo teorema enuncia tal imersão.

Teorema 3.3 *Seja Ω limitado e admissível*[1]*. Suponha que a N-função M satisfaz as hipóteses (3.2) e (3.3). Se M_* é dada por (3.4), então temos a imersão contínua*

$$W^1L_M \hookrightarrow L_{M_*}.$$

[1]Por admissível, entendemos os domínios em que ocorrem as imersões de Sobolev $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, com $1 \leq q \leq n/(n-1)$.

Além disso, se Φ é N-função crescendo estritamente mais lento que M_* (vide Definição 2.4) então a imersão

$$W^1L_M \hookrightarrow L_\Phi$$

existe e é compacta.

Prova: Por definição,

$$\frac{dM_*^{-1}}{ds}(s) = \frac{M^{-1}(s)}{s^{1+1/n}}, \quad \forall s > 0.$$

Logo, se $t = M_*^{-1}(s)$, temos

$$\frac{dM_*}{dt}(t) = \frac{1}{dM_*^{-1}(s)/ds} = \frac{s^{1+1/n}}{M^{-1}(s)} = \frac{(M_*(t))^{1+1/n}}{M^{-1}(M_*(t))}.$$

Portanto, a N-função M_* satisfaz a equação diferencial

$$M^{-1}(M_*(t))\frac{dM_*}{dt}(t) = (M_*(t))^{1+1/n}. \tag{3.5}$$

Considere N a N-função conjugada de M. Conseqüentemente, pela proposição 1.2, temos, para todo t, que

$$M_*(t) \le M^{-1}(M_*(t))N^{-1}(M_*(t)).$$

Logo, por (3.5), temos

$$\begin{aligned} M^{-1}(M_*(t))\frac{dM_*}{dt}(t) &= M_*(t)(M_*(t))^{1/n} \\ &\le M^{-1}(M_*(t))(M_*(t))^{1/n}N^{-1}(M_*(t)), \end{aligned}$$

donde concluímos que

$$\frac{dM_*}{dt}(t) \le (M_*(t))^{1/n}N^{-1}(M_*(t)) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Definindo $\sigma(t) = (M_*(t))^{1-1/n}$, vemos que

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}(t) &= \frac{n-1}{n}M_*^{-1/n}(t)\frac{dM_*}{dt}(t) \\ &\le \frac{n-1}{n}M_*^{-1/n}(t)M_*^{1/n}(t)N^{-1}(M_*(t)) \\ &= \frac{n-1}{n}N^{-1}\left[(\sigma(t))^{n/(n-1)}\right] \end{aligned} \tag{3.6}$$

Suponha inicialmente que $u \in W^1L_M \cap L^\infty$, $u \neq 0$. Se $f(\lambda) = \int_\Omega M_*[u(x)/\lambda]dx$ então f está bem definida para toda a reta, é contínua e tal que $f(\lambda) \to 0$ e $f(\lambda) \to \infty$, quando $\lambda \to \infty$. conseqüentemente, existe $K > 0$ tal que $f(K) = 1$. Portanto $K = \|u\|_{(M_*)}$ e

$$\int_\Omega M_*\left(\frac{u(x)}{K}\right) = 1. \tag{3.7}$$

Tome $f(x) = \sigma(|u(x)|/K)$. Como estamos supondo u essencialmente limitada, temos, por (3.6) que σ é função lipchitziana na imagem de $|u|/K$. Além disso, $u \in W^{1,1}(\Omega)$, pois $u \in L_M$, $\partial u/\partial x_i \in L_M$ para todo $i = 1, \cdots, n$ e $L_M \hookrightarrow L^1$, pelo Teorema 2.4. Assim, a função composta $f = \sigma \circ (|u|/K)$ está em $W^{1,1}(\Omega)$ e, pela regra da cadeia,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \sigma'\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)\frac{1}{K}\mathrm{sgn}u(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}(x).$$

Agora, pelo Teorema de imersão de Sobolev, (ver [3]), temos $W^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{n/(n-1)}(\Omega)$ e portanto,

$$\begin{aligned}\|f\|_{n/(n-1)} &\leq C_1\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial f}{\partial x_j}\right\|_1 + \|f\|_1\right) \qquad (3.8)\\ &= C_1\left(\frac{1}{K}\sum_{j=1}^{n}\int_\Omega \sigma'\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)\left|\frac{\partial u}{\partial x_j}(x)\right|dx + \int_\Omega \sigma\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx\right).\end{aligned}$$

Sendo assim, por (3.7), (3.8) e pela desigualdade de Hölder em (2.11), temos

$$\begin{aligned}1 &= \left(\int_\Omega M_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx\right)^{(n-1)/n}\\ &= \left(\int_\Omega \left[\sigma\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)\right]^{n/(n-1)}dx\right)^{(n-1)/n}\\ &= \|f\|_{n/(n-1)}\\ &\leq \frac{2C_1}{K}\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\sigma'\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|_{(N)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{(M)}\right) + C_1\int_\Omega \sigma\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)dx. \qquad (3.9)\end{aligned}$$

Por (3.6),

$$\begin{aligned}\left\|\sigma'\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|_{(N)} &\leq \frac{n-1}{n}\left\|N^{-1}\left[\left(\sigma\left(\frac{|u|}{K}\right)\right)^{n/(n-1)}\right]\right\|_{(N)}\\ &= \frac{n-1}{n}\inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega N\left(\frac{N^{-1}[M_*(|u(x)|/K)]}{\lambda}\right)dx \leq 1\right\}.\end{aligned}$$

Porém, se $\lambda > 1$, então, novamente por (3.7),

$$\begin{aligned}\int_\Omega N\left(\frac{N^{-1}[M_*(|u(x)|/K)]}{\lambda}\right)dx &\leq \frac{1}{\lambda}\int_\Omega N\left(N^{-1}\left[M_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right)\right]\right)dx\\ &= \frac{1}{\lambda} < 1.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega N\left(\frac{N^{-1}[M_*(|u(x)|/K)]}{\lambda}\right)dx \leq 1\right\} \leq 1,$$

donde temos que

$$\left\|\sigma'\left(\frac{|u|}{K}\right)\right\|_{(N)} \leq \frac{n-1}{n}. \tag{3.10}$$

Sejam $g(t) = M_*(t)/t$ e $h(t) = \sigma(t)/t$. Portanto,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{h(t)} = \lim_{t\to\infty} \frac{M_*(t)}{\sigma(t)} = \lim_{t\to\infty} \big(M_*(t)\big)^{1/n} = \infty.$$

Assim, tomemos $t_0 > 0$ tal que

$$h(t) \leq \frac{g(t)}{2C_1}, \qquad \forall\, t \geq t_0.$$

Além disso, uma vez que h é limitada em intervalos limitados, tomando $C_2 = C_1 \sup\limits_{[0,t_0]} h(t)$, temos, para cada $t \geq t_0$,

$$\sigma(t) = h(t)t \leq \frac{1}{2C_1} g(t)t = \frac{1}{2C_1} M_*(t)$$

e para cada $0 \leq t \leq t_0$,

$$\sigma(t) = h(t)t \leq \frac{C_2}{C_1} t.$$

Portanto,

$$\sigma(t) \leq \frac{1}{2C_1} M_*(t) + \frac{C_2}{C_1} t, \qquad \forall\, t \geq 0.$$

Conseqüentemente, utilizando (3.7) e a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} C_1 \int_\Omega \sigma\left(\frac{|u(x)|}{K}\right) dx &\leq \frac{1}{2}\int_\Omega M_*\left(\frac{|u(x)|}{K}\right) dx + C_2 \int_\Omega \frac{|u(x)|}{K} dx \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{C_3}{K} \|u\|_{(M)}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

onde $C_3 = 2C_2\|1\|_{(N)}$.

Combinando agora (3.9), (3.10) e (3.11), vemos que

$$1 \leq \frac{2C_1}{K}\frac{n-1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right\|_{(M)}\right) + \frac{1}{2} + \frac{C_3}{K}\|u\|_(M).$$

Portanto,

$$\frac{1}{2} \leq \frac{2C_1}{K}\frac{n-1}{n} n \max_{1\leq i\leq n}\left\{\|u\|_{(M)}, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{(M)}\right\} + \frac{C_3}{K}\max_{1\leq i\leq n}\left\{\|u\|_{(M)}, \left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{(M)}\right\},$$

ou seja,

$$\|u\|_{(M_*)} \leq C\|u\|_{W^1L_{(M)}},$$

onde $C = 4C_1(n-1) + 2C_3$.

Provamos assim que a imersão requerida é válida para qualquer $u \in W^1L_M$ essencialmente limitada. Suponha agora que $u \in W^1L_M$. Defina, para cada $k \in \mathbb{N}$, o truncamento

$$u_k(x) = \begin{cases} |u(x)| & \text{se} \quad |u(x)| \leq k, \\ k & \text{se} \quad |u(x)| > k. \end{cases}$$

Claramente, $u_k \in W^1L_M \cap L^\infty$ e

$$\frac{\partial u_k}{\partial x_j} = \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x_j}(x) & \text{se} \quad |u(x)| \leq k, \\ 0 & \text{se} \quad |u(x)| > k. \end{cases}$$

Além disso, se $k_1 \leq k_2$ então

$$\|u_{k_1}\|_{(M_*)} \leq \|u_{k_2}\|_{(M_*)}.$$

Mais ainda, $(\|u_k\|_{(M_*)})$ forma uma seqüência limitada, pois

$$\|u_k\|_{(M_*)} \leq C\|u_k\|_{W^1L_{(M)}} \leq C\|u\|_{W^1L_{(M)}}.$$

Portanto,

$$K \equiv \lim_{k\to\infty} \|u_k\|_{(M_*)} \leq C\|u\|_{W^1L_{(M)}}.$$

Finalmente, uma vez que $u_k(x)/K \to |u(x)|/K$ para todo x, temos que $M_*(u_k(x)/K) \to M_*(|u(x)|/K)$, e, pelo Teorema de Fatou-Lebesgue,

$$\int_\Omega M_*\left(\frac{u(x)}{K}\right) dx \leq \sup_k \int_\Omega M_*\left(\frac{u_k(x)}{K}\right) dx \leq 1,$$

ou seja,

$$\|u\|_{(M_*)} \leq K \leq C\|u\|_{W^1L_{(M)}},$$

concluindo que

$$W^1L_M \hookrightarrow L_{(M_*)}.$$

Suponha agora que $\Phi \prec\prec M_*$. Conseqüentemente, $L_{M_*} \hookrightarrow L_\Phi$, pelo Teorema 2.7. Portanto, $W^1L_M \hookrightarrow L_\Phi$. Provemos que tal imersão é compacta. De fato, dado S limitado em W^1L_M, como a imersão $W^1L_M \hookrightarrow L_{(M_*)}$ é contínua, temos que S é limitado em L_{M_*}. Além disso, $W^1L_M \hookrightarrow W^{1,1}$, continuamente. Mais ainda, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov, $W^{1,1} \hookrightarrow L^1$ compactamente. Assim $W^1L_M \hookrightarrow L^1$, compactamente. Portanto S é pré-compacto em L^1. Ora, pelo Corolário 2.4, temos que S é também pré-compacto em L_Φ, concluindo a demonstração do Teorema 3.3. ⧫

Observação 3.1 *De acordo com [9] as imersões estabelecidas no Teorema 3.3 serão ótimas (no sentido de que o espaço L_{M_*} é o menor espaço de Orlicz no qual o espaço W^1L_M está imerso) sempre que a N-função M é dominada por uma função polinomial $|t|^p$ para algum $p < n$. Em [1], pág. 277, verifica-se que tal imersão não é ótima, quando, por exemplo, $M(t) = |t|^n$.*

Definição 3.2 *Sejam Φ e Ψ duas N-funções Δ-regulares. Então (Φ, Ψ) formam um* ***par crítico de Orlicz*** *se existe M uma N-função Δ-regular tal que, se N denota a N-função complementar a M, então as imersões*

$$W^1L_M \hookrightarrow L_\Phi \quad e \quad W^1L_N \hookrightarrow L_\Psi$$

existem e são ótimas.

Temos, por exemplo, que se $\Phi(t) = |t|^r$, com $1 < r < n$ então $p = rn/(n+r)$ é tal que $p^* = r$ e sendo $q = p/(p-1)$, tomemos $s = q^*$. Assim, temos que (Φ, Ψ) formam um par critico de Orlicz, onde $\Psi(t) = |t|^s$. Um exemplo diferente dos espaços de Lebesgue pode ser visto em [5] e são N-funções dadas por

$$\Phi_1(s) = cs^{p+1}(\ln s)^\alpha, \text{ com } c \geq 0 \text{ e } p+1 > \frac{n}{n-2}$$

e

$$\Psi_1 = ds^{q+1}(\ln s)^{-\alpha\frac{q+1}{p+1}},$$

onde

$$\frac{1}{p+1} + \frac{1}{q+1} = 1 - \frac{2}{n}.$$

O próximo resultado destina-se a dar condições para existência de pares críticos de Orlicz.

Teorema 3.4 *Seja M uma N-função e seja p a sua derivada à direita. Suponha que M é θ-regular, com*

$$\lim_{s\to\infty} \frac{p(s)s}{M(s)} = \theta_M, \quad \theta_M \in (2, n). \tag{3.12}$$

Então (M_*, N_*) forma um par crítico de Orlicz, onde N denota a N-função complementar a M. Além disso, temos que M_* e N_* são θ-regulares e satisfazem

1. $\theta_{M_*} \equiv \lim\limits_{s\to\infty} \dfrac{s{M_*}'(s)}{M_*(s)} > \dfrac{n}{n-2}$ *e*
2. $\dfrac{1}{\theta_{M_*}} + \dfrac{1}{\theta_{N_*}} = 1 - \dfrac{2}{n}$.

Prova: A hipótese (3.12) expressa o fato de que M é θ-regular, com $2 < \theta_M < n$. Primeiramente, temos que provar que a imersão

$$W^1L_M \hookrightarrow L_{M_*}$$

é ótima. Para tanto, precisamos verificar que M é dominada por alguma função $|t|^p$, com $p < n$. De fato, de (3.12), temos que, dado $\varepsilon > 0$ existe $s_0 > 0$ tal que

$$\frac{p(s)}{M(s)} \leq \frac{\theta_M + \varepsilon}{s}, \quad \forall\, s \geq s_0.$$

Portanto, integrando ambos os lados, obtemos, para cada $s > s_0$,

$$\int_{s_0}^{s} \frac{p(\xi)}{M(\xi)} d\xi \leq (\theta_M + \varepsilon) \int_{s_0}^{s} \frac{1}{\xi} d\xi,$$

ou seja,

$$\ln \frac{M(s)}{M(s_0)} \leq \ln \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\theta + \varepsilon}.$$

Logo, provamos que dado $\varepsilon > 0$, existem K_ε e s_ε constantes positivas tais que, se $s > s_\varepsilon$, então

$$M(s) \leq K_\varepsilon s^{\theta_M + \varepsilon}. \tag{3.13}$$

Portanto, tomemos ε suficientemente pequeno afim de $\theta_M + \varepsilon < n$. Dessa forma M torna-se uma N-função dominada por $|t|^{\theta_M + \varepsilon}$, concluindo a otimalidade da imersão.

Sejam $\widetilde{M} \equiv M^{-1}$ e $\widetilde{p}$ a derivada à esquerda de $\widetilde{M}$. Um simples cálculo nos leva a concluir que

$$\lim_{t \to \infty} \frac{t\widetilde{p}(t)}{\widetilde{M}(t)} = \frac{1}{\theta_M}.$$

Observe ainda que $\left(M_*^{-1}\right)'(s) = \widetilde{M}(s)/s^{1+1/n}$. Daí, utilizando a regra de L'Hôpital, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{s \to \infty} \frac{s\left(M_*^{-1}\right)'(s)}{M_*^{-1}(s)} &= \lim_{s \to \infty} \frac{\widetilde{M}(s) s^{-1/n}}{M_*^{-1}(s)} \\
&= \lim_{s \to \infty} \frac{\widetilde{p}(s) s^{-1/n} - (1/n) s^{-1/n-1} \widetilde{M}(s)}{\widetilde{M}(s)/s^{1+1/n}} \\
&= \lim_{s \to \infty} \frac{s\widetilde{p}(s)}{\widetilde{M}(s)} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{n - \theta_M}{n\theta_M}.
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Portanto, M_* é θ-regular com $\theta_{M_*} = n\theta_M/(n - \theta_M) > n/(n-2)$, provando a afirmação 1 deste teorema. Agora, para provarmos que N_* é θ-regular, é suficiente verificar que N é θ-regular e o resultado segue de maneira completamente análoga à feita acima. Seja então q a derivada à direita da N-função N. Tomando $s = p(t)$ temos então que $t \to \infty$ se e somente se $s \to \infty$ e, portanto,

$$\frac{1}{\theta_M} = \lim_{t \to \infty} \frac{M(t)}{tp(t)} = \lim_{t \to \infty} \frac{st - N(s)}{st} = 1 - \lim_{t \to \infty} \frac{N(s)}{sq(s)}.$$

Logo,

$$\frac{1}{\theta_N} = \lim_{t \to \infty} \frac{sq(s)}{N(s)} = 1 - \frac{1}{\theta_M} = \frac{\theta_M - 1}{\theta_M}.$$

Conseqüentemente, da mesma forma que derivamos (3.14), podemos concluir que N_* é também θ-regular e

$$\theta_{N_*} = \frac{n\theta_N}{n - \theta_N}.$$

Além disso, uma vez que $\theta_N = \theta_M/(\theta_M - 1)$, temos que $\theta_N < n$, e, analogamente a (3.13), concluímos que N é N-função dominada por $|t|^p$, para algum $p < n$. Assim, a imersão $W^1 L_N \hookrightarrow L_{N_*}$ é também ótima.

Para provar a afirmação 2, observamos que

$$\frac{1}{\theta_{M_*}} + \frac{1}{\theta_{N_*}} = \frac{n - \theta_M}{n\theta_M} + \frac{n - \theta_N}{n\theta_N} = \frac{1}{\theta_M} + \frac{1}{\theta_N} - \frac{2}{n} = 1 - \frac{2}{n}.$$

♦

3.3 O espaço $W_0^1 L_M$

Da mesma forma em que definimos os espaços $W_0^{1,p}(\Omega)$, podemos definir o espaço $W_0^1 L_M$, sendo o fecho na norma $\|\cdot\|_{W^1 L_{(M)}}$ do espaço $C_0^\infty(\Omega)$. Na simbologia matemática usual,

$$W_0^1 L_M(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^1 L_{(M)}}}.$$

Analogamente, poderíamos definir o espaço $W_0^1 E_M$. Porém, é imediato verificar que dada qualquer M N-função, teremos sempre $W_0^1 E_M = W_0^1 L_M$. Com efeito, suponha que $u \in W_0^1 L_M$. Conseqüentemente, existe (u_k) em C_0^∞ tal que $u_k \to u$ em $W^1 L_{(M)}$. Isto implica que $u_k \to u$ e $\partial u_k/\partial x_i \to \partial u/\partial x_i$, em $L_{(M)}$, para cada $i = 1, \cdots, n$. Logo, $u, \partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_n \in E_M$, por definição do espaço E_M. Portanto, $u \in W_0^1 E_M$, como queríamos demonstrar.

Continuando as analogias dos espaços de Orlicz-Sobolev com os espaços de Sobolev, nos perguntamos se é possível derivar uma desigualdade de Poincaré para os espaços $W_0^1 L_M$, obtendo assim uma nova norma neste espaço, que, devido a esta desigualdade, será equivalente às normas definidas no início deste capítulo, e é dada por

$$\|u\|_{1,(M)} = \|\nabla u\|_{(M)}. \tag{3.15}$$

Tal desigualdade de fato ocorre e é apresentada e demonstrada no próximo teorema (vide [11], Seção 2.4).

Teorema 3.5 *Existe uma constante $c > 0$ tal que*

$$\|u\|_{(M)} \leq c \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{(M)},$$

para todo $u \in W_0^1 L_M(\Omega)$.

Prova: Suponha que $|\Omega| = d$. Provemos inicialmente que

$$\int_\Omega M(u(x))dx \leq \int_\Omega M\left(2d\frac{\partial u}{\partial x_1}\right), \quad \forall\, u \in w_0^1 L_M. \tag{3.16}$$

Com efeito. Admita inicialmente $u \in C_0^\infty(\Omega)$. Então, pela desigualdade de Jenssen (vide Teorema 4.3.3.1 em [10]),

$$\begin{aligned}
M(u(x_1, x_2, \cdots, x_n)) &= M\left(\int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \cdots, x_n)d\xi\right)\\
&= M\left(\int_{-\infty}^{x_1} \frac{d}{d}\frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \cdots, x_n)d\xi\right)\\
&\leq \frac{1}{d}\int_{-\infty}^{\infty} M\left(d\frac{\partial u}{\partial x_1}(\xi, x_2, \cdots, x_n)\right)d\xi.
\end{aligned}$$

Integrando ambos os lados da equação acima sobre Ω, temos portanto,

$$\int_\Omega M(u(x))dx \leq \int_\Omega M\left(d\frac{\partial u}{\partial x_1}(x)\right)dx. \tag{3.17}$$

Claramente, (3.17) torna-se também válido para toda $u \in W_0^1 L_M$, cujo suporte supp$u$ é compacto em Ω. Portanto, tomando agora $u \in W_0^1 L_M$, consideremos o aberto Ω^1 contendo $\bar{\Omega}$, de diâmetro $2d$, e estendemos u para todo este aberto, impondo $u = 0$ em $\Omega^1 \setminus \Omega$. Conseqüentemente, $u \in W_0^1 L_M(\Omega^1)$ e supp$u$ é compacto em Ω^1. Portanto, por (3.17) podemos escrever

$$\int_\Omega M(u(x))dx = \int_{\Omega^1} M(u(x))dx \leq \int_{\Omega^1} M\left(2d\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx = \int_\Omega M\left(2d\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)dx,$$

provando a validade de (3.16).

Obviamente, todo o processo na demonstração de (3.16) pode ser feito analogamente para todas as outras derivadas parciais de u. Com isso, derivamos facilmente a desigualdade de Poincaré. De fato, se $u \in W_0^1 L_M$ então

$$u/(2d\|\partial u/\partial x_i\|_{(M)}) \equiv \tilde{u}_i \in W_0^1 L_M.$$

Portanto, por (3.16),

$$\int_\Omega M(\tilde{u}_i(x))dx \leq \int_\Omega M\left(2d\frac{\partial u/\partial x_i}{2d\|\partial u(x)/\partial x_i\|_{(M)}}\right)dx \leq 1, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

Logo,

$$\int_\Omega M\left(\frac{u(x)}{2d\|\partial u/\partial x_i\|_{(M)}}\right)dx \leq 1, \quad \forall i = 1, \cdots, n$$

ou, equivalentemente,

$$\|u\|_{(M)} \leq 2d\left\|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\|_{(M)}, \quad \forall i = 1, \cdots, n,$$

demonstrando o teorema. ♦

Podemos definir então uma nova norma em $W_0^1L_M$, dada por (3.15), que, devido ao Teorema 3.5, é equivalente às normas do espaço W^1L_M. Convém observar que a função dada em (3.15) é de fato uma norma apenas em $W_0^1L_M$, uma vez que $\|\nabla u\|_{(M)} = 0$ implica que $\nabla u = 0$, ou seja, $u \equiv$ cte. Portanto, em $W_0^1L_M$, $u = 0$. Denotaremos o espaço $(W_0^1L_M, \|\cdot\|_{1,(M)})$ por $W_0^1L_{(M)}$.

Na mesma forma em que definimos a norma de Orlicz para uma função em um espaço de Orlicz - ver (2.5) - podemos definir uma outra norma no espaço $W_0^1L_M$. Considere N a N-função complementar a M. Defina assim,

$$\|u\|_{1,M} = \sup\left\{\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx : \ v \in W_0^1L_{(N)}, \ \|v\|_{1,(N)} \leq 1\right\}. \tag{3.18}$$

ou equivalentemente,

$$\|u\|_{1,M} = \sup\left\{\left|\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx\right| : \ v \in W_0^1L_{(N)}, \ \|v\|_{1,(N)} \leq 1\right\}.$$

$\|\cdot\|_{1,(M)}$ e $\|\cdot\|_{1,M}$, são normas equivalentes e, de acordo com o Lema 2.5, temos

$$\|\cdot\|_{1,(M)} \leq \|\cdot\|_{1,M} \leq 2\|\cdot\|_{1,(M)}.$$

Denotaremos o espaço $(W_0^1L_M, \|\cdot\|_{1,M})$ simplesmente por $W_0^1L_M$.

Convém observar também que o supremo do lado direito da equação (3.18) pode ser tomado na esfera de raio 1 em $W_0^1L_{(N)}$, que denotaremos por $S_1(W_0^1L_{(N)})$. De fato, se $v \in W_0^1L_{(N)}$ com $0 < \|v\|_{1,(N)} < 1$, tomemos $v' = v/\|v\|_{1,(N)}$. Assim $\|v'\|_{1,(N)} = 1$ e, se $u \in W_0^1L_M$,

$$\left|\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v'(x)dx\right| = \frac{1}{\|v\|_{1,(N)}}\left|\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx\right| > \left|\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx\right|.$$

Suponha agora que M é uma N-função Δ-regular. Assim, pelo Teorema 3.2, item 4, temos que $W_0^1L_M$ e $W_0^1L_{(N)}$ são reflexivos. Mais ainda, pelo Teorema 2, página 297, em [17], podemos supor que ambos os espaços são uniformemente convexos (pág 51 em [3]).

Com a ajuda das duas normas vistas acima, podemos definir a seguinte função

$$\begin{aligned} \widehat{\ }: W_0^1L_M \setminus \{0\} &\longrightarrow S^1(W_0^1L_{(N)}) \\ u &\longmapsto \widehat{u}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

onde $\widehat{u}$ é tal que $\|u\|_{1,M} = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla\widehat{u}(x)dx$. De fato, provemos que tal função está bem definida.

Existência: Provemos que dado $u \in W_0^1 L_M$, $u \neq 0$, existe tal $\widehat{u}$.
Por definição,

$$\|u\|_{1,M} = \sup\left\{\int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)dx : w \in W_0^1 L_{(N)} \text{ e } \|w\|_{1,(N)} = 1\right\}.$$

Assim, tomando (v_n) seqüência maximizante em

$$\left\{\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx : v \in W_0^1 L_{(N)} \text{ e } \|v\|_{1,(N)} = 1\right\}$$

temos que $\|v_n\|_{1,(N)} = 1$ e sendo $W_0^1 L_{(N)}$ um espaço de Banach reflexivo, passando à subseqüência se necessário, podemos assumir que $v_n \rightharpoonup v$ em $W_0^1 L_{(N)}$. Assim,

$$\|v\|_{1,(N)} \leq \liminf_{n\to\infty} \|v_n\|_{1,(N)} = 1.$$

Como $v_n \rightharpoonup v$, temos

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v_n(x)dx \to \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx,$$

pois $T_u(v) := \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx$ é um funcional linear em $\left(W_0^1 L_{(N)}\right)^*$. Mas, pela escolha de (v_n),

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v_n(x)dx \to \|u\|_{1,M}.$$

Portanto,

$$\|u\|_{1,M} = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx.$$

Temos que provar ainda que $\|v\|_{1,(N)} = 1$. Raciocinamos por absurdo, supondo que $\|v\|_{1,(N)} < 1$. Tomando $v' = v/\|v\|_{1,(N)}$ então $\|v\,'\|_{1,(N)} = 1$ e

$$\|u\|_{1,M} \geq \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v\,'(x)dx = \frac{1}{\|v\|_{1,(N)}}\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx > \|u\|_{1,M},$$

o que é uma contradição.

Unicidade: Utilizando o fato de que $W_0^1 L_{(N)}$ é uniformemente convexo, mostremos que $\widehat{u}$ é único. Com efeito, suponha que existem $v, w \in S^1(W_0^1 L_{(N)})$ tais que $v \neq w$ e

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla w(x)dx = \|u\|_{1,M}.$$

Portanto, temos também que $v \neq -w$. Conseqüentemente, uma vez que $W_0^1 L_{(N)}$ é suposto uniformemente convexo, vemos que

$$0 < \left\|\frac{v+w}{2}\right\|_{1,(N)} < 1.$$

Sendo assim, defina $\rho \equiv 2/\|v+w\|_{1,(N)} > 1$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|u\|_{1,M} &\geq \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \left(\frac{v+w}{\|v+w\|_{1,(N)}} \right)(x)dx \\
&= \rho \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \left(\frac{v+w}{2} \right)(x)dx \\
&= \rho \left(\frac{1}{2} \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x)dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla u(x) \nabla w(x)dx \right) \\
&= \rho \|u\|_{1,M} \ > \ \|u\|_{1,M},
\end{aligned}$$

o que é impossível. ♦

A função em (3.19) simplesmente nos diz que para cada u em $W_0^1 L_M$, existe uma única função $\widehat{u}$ em $S^1(W_0^1 L_{(N)})$ que atinge a norma (3.18). Observe que a reflexividade de $W_0^1 L_M$ foi essencial para a existência de $\widehat{u}$ e a convexidade uniforme de $W_0^1 L_{(N)}$ foi fundamental para a unicidade desta mesma função.

Introduzimos agora a **função til** que será utilizada ao longo do capítulo 4. Defina

$$\begin{aligned}
\sim \ : W_0^1 L_M &\longrightarrow W_0^1 L_{(N)} \\
u &\longmapsto \widetilde{u},
\end{aligned} \tag{3.20}$$

onde $\widetilde{u}$ é tal que $\|\widetilde{u}\|_{1,(N)} = \|u\|_{1,M}$ e $\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \widetilde{u}(x)dx = \|u\|_{1,M}^2$.

Lema 3.2 *A função til dada em (3.20) é um homeomorfismo homogêneo.*

Prova: Utilizaremos os resultados obtidos sobre a função em (3.19). Provemos primeiramente que $\widetilde{u}$ existe. Claramente se $u = 0$ então $\widetilde{u} = 0$ e reciprocamente. Tomemos então $u \neq 0$. Seja portanto $\widehat{u}$ de acordo com (3.19). Defina então $\widetilde{u} = \|u\|_{1,M} \widehat{u}$. Logo, $\|\widetilde{u}\|_{1,(N)} = \|u\|_{1,M}$ e

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla \widetilde{u}(x)dx = \|u\|_{1,M} \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \widehat{u}(x)dx = \|u\|_{1,M}^2.$$

Provemos a unicidade de $\widetilde{u}$. Tomemos $v \in W_0^1 L_{(N)}$ tal que $\|v\|_{1,(N)} = \|u\|_{1,M}$ e $\int_\Omega \nabla(x) u \nabla v(x)dx = \|u\|_{1,M}^2$. Portanto,

$$\left\| \frac{v}{\|u\|_{1,M}} \right\|_{1,(N)} = 1 \quad \text{e} \quad \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \left(\frac{v}{\|u\|_{1,M}} \right)(x)dx = \|u\|_{1,M}.$$

Portanto, pela unicidade de $\widehat{u}$, temos que $v/\|u\|_{1,M} = \widehat{u}$, ou seja, $v = \widetilde{u}$.

Verifiquemos agora que a função til é contínua. Claramente, $\sim$ é contínua na origem, pois se $u_k \to 0$ em $W_0^1 L_M$ então $\|u_k\|_{1,M} \to 0$ e conseqüentemente, $\|\widetilde{u}_k\|_{1,(N)} \to 0$. Logo, $\widetilde{u}_k \to 0$ em $W_0^1 L_{(N)}$. Agora, se $u \neq 0$ tomemos $u_k \to u$ em $W_0^1 L_M$. Daí, temos que $\|\widetilde{u}_k\|_{1,(N)} = \|u_k\|_{1,M} \to \|u\|_{1,M} = \|\widetilde{u}\|_{1,(N)}$. Em particular, $(\|\widetilde{u}_k\|_{1,(N)})$ forma uma seqüência limitada e, sendo $W_0^1 L_{(N)}$ reflexivo, podemos tomar uma subseqüência tal que

$\widetilde{u}_k \rightharpoonup v \in W_0^1 L_{(N)}$. Porém, para tal subseqüência, temos também $\|\widetilde{u}_k\|_{1,(N)} \to \|\widetilde{u}\|_{1,(N)}$. Como $W_0^1 L_{(N)}$ é uniformemente convexo, concluímos que $\widetilde{u}_k \to v$ em $W_0^1 L_{(N)}$. Resta-nos então mostrar que $\widetilde{u} = v$. Do fato de u_k convergir fracamente para v, temos que

$$\int_\Omega \nabla u_k(x) \nabla \widetilde{u}_k(x) dx \to \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

Porém,

$$\int_\Omega \nabla u_k(x) \nabla \widetilde{u}_k(x) dx = \|u_k\|_{1,M} \|\widetilde{u}_k\|_{1,(N)}.$$

Como temos que $\|u_k\|_{1,M} \|\widetilde{u}_k\|_{1,(N)} \to \|u\|_{1,M} \|\widetilde{u}\|_{1,(N)}$, concluímos, portanto,

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \|u\|_{1,M} \|\widetilde{u}\|_{1,(N)}.$$

Além disso, temos $\|v\|_{1,(N)} \leq \liminf \|\widetilde{u}_k\|_{1,(N)} = \|\widetilde{u}\|_{1,(N)}$, donde, supondo, por absurdo, que $\|v\|_{1,(N)} < \|\widetilde{u}\|_{1,(N)}$, chegamos a uma contradição análoga à estabelecida na prova da existência de $\widehat{u}$, e assim, podemos concluir que $\|v\|_{1,(N)} = \|\widetilde{u}\|_{1,(N)}$. Pela unicidade de $\widetilde{u}$, temos $\widetilde{u} = v$, provando a continuidade da função.

Provemos que $\sim$ é homogênea. Seja $\rho \in \mathbb{R}$ e $u \in W_0^1 L_M$. Assim,

$$\int_\Omega \nabla(\rho u(x)) \nabla(\rho \widetilde{u}(x)) dx = \rho^2 \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \widetilde{u}(x) dx = \rho^2 \|u\|_{1,M}^2 = \|\rho u\|_{1,M}^2$$

e

$$\|\rho \widetilde{u}\|_{1,(N)} = |\rho| \|\widetilde{u}\|_{1,(N)} = |\rho| \|u\|_{1,M} = \|\rho u\|_{1,M},$$

donde concluímos que $\rho \widetilde{u} = \widetilde{\rho u}$.

Provemos a injetividade. Suponha então que $u, v \in W_0^1 L_M$, $u \neq v$. Observe que se $u = \lambda v$ então $\widetilde{u} = \lambda \widetilde{v}$, donde também teríamos $\widetilde{u} \neq \widetilde{v}$. Agora se tivéssemos $\|u\|_{1,M} \neq \|v\|_{1,M}$, então também teríamos $\|\widetilde{u}\|_{1,(N)} \neq \|\widetilde{v}\|_{1,(N)}$. Portanto, consideremos apenas $u \neq v$ tais que $\|u\|_{1,M} = \|v\|_{1,M}$. Assim, sabemos então que $\|\widetilde{u}\|_{1,(N)} = \|\widetilde{v}\|_{1,(N)}$. Suponha, por absurdo, que $\widetilde{u} = \widetilde{v}$. Temos então,

$$\int_\Omega \nabla \left(\frac{u(x)}{2\|u\|_{1,M}} \right) \nabla \left(\frac{\widetilde{u}(x)}{\|\widetilde{u}\|_{1,(N)}} \right) dx = \frac{1}{2}$$

e, similarmente,

$$\int_\Omega \nabla \left(\frac{v(x)}{2\|v\|_{1,M}} \right) \nabla \left(\frac{\widetilde{v}(x)}{\|\widetilde{v}\|_{1,(N)}} \right) dx = \frac{1}{2}.$$

Somando estas duas equações, como $\widetilde{u} = \widetilde{v}$, temos

$$\int_\Omega \nabla \left(\frac{u(x) + v(x)}{2\|u\|_{1,M}} \right) \nabla \left(\frac{\widetilde{u}(x)}{\|\widetilde{u}\|_{1,(N)}} \right) dx = 1.$$

Conseqüentemente,

$$\left\| \frac{u+v}{2\|u\|_{1,M}} \right\|_{1,M} \geq 1,$$

ou seja, concluímos que

$$\|u+v\|_{1,M} = \|u\|_{1,M} + \|v\|_{1,M}. \tag{3.21}$$

Provemos então que (3.21) é impossível, levando a uma contradição. De fato, se tal igualdade fosse válida, teríamos

$$\left\| \frac{u/\|u\|_{1,M} + v/\|v\|_{1,M}}{2} \right\|_{1,M} = 1,$$

o que é um absurdo, pois em um espaço uniformemente convexo, se $\|v\| = \|w\| = 1$ e $v \neq w$, então $\|(v+w)/2\| < 1$.

Agora, verifiquemos também que $\sim$ é sobrejetiva.

Seja $v \in W_0^1 L_{(N)}$. Queremos encontrar $u \in W_0^1 L_M$ tal que $\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \|v\|_{1,(N)}^2$ e $\|u\|_{1,M} = \|v\|_{1,(N)}$. Consideremos o conjunto

$$A_v \equiv \left\{ \int_\Omega \nabla w(x) \nabla v(x) dx : \ w \in W_0^1 L_M \text{ and } \|w\|_{1,M} = \|v\|_{1,(N)} \right\}.$$

Temos que $\sup A_v = \|v\|_{1,(N)}^2$. Seja (u_n) uma seqüência maximizante para A_v, isto é, $\|u_n\|_{1,M} = \|v\|_{1,(N)}$ e

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla u_n(x) \nabla v(x) dx = \sup A_v.$$

Por causa da reflexividade de $W_0^1 L_M$, podemos supor que (u_n) converge fracamente para $u \in W_0^1 L_M$ (para alguma subseqüência). Assim, vemos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla u_n(x) \nabla v(x) dx = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx.$$

logo,

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx = \sup A_v = \|v\|_{1,(N)}^2.$$

Falta-nos provar que $\|u\|_{1,M} = \|v\|_{1,(N)}$. Mas isto é claro, pois, por um lado, temos

$$\|u\|_{1,M} \leq \liminf \|u_n\|_{1,M} = \|v\|_{1,(N)}$$

e por outro, vemos que

$$\|v\|_{1,(N)}^2 = \int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx \leq \|u\|_{1,M} \|v\|_{1,(N)}.$$

Finalmente, verificamos facilmente que a função $\sim$ possui inversa contínua, pois, supondo que $\widetilde{u}_n \to \widetilde{u}$ e utilizando os mesmos argumentos elaborados na demonstração da continuidade de $\sim$, vemos que $u_n \to u$. ♦

Capítulo 4

Sistemas hamiltonianos

4.1 Introdução

Aplicamos agora a teoria estudada nos capítulos anteriores a fim de discutir existência de soluções fracas para a seguinte classe de sistemas hamiltonianos superlineares:

$$\begin{cases} -\Delta u = g(v) & \text{em} \quad \Omega, \\ -\Delta v = f(u) & \text{em} \quad \Omega, \\ u = 0, \; v = 0 & \text{sobre} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.1}$$

onde Ω é um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^n$, com $n \geq 3$, com fronteira $\partial\Omega$ suave.

Denotemos F e G como as funções primitivas de f e g, respectivamente. Em [4], considera-se o funcional associado ao sistema definido no espaço $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$. Assim, torna-se necessário impor que as funções F e G possuam crescimento menor ou equivalente a $|s|^{2^*}$, onde 2^* designa o expoente crítico de Sobolev $2n/(n-2)$.

Tal condição de crescimento polinomial pode ainda ser melhorada. Em [6, 12] utiliza-se uma configuração menos usual, os espaços de Sobolev de ordem fracionária, obtendo-se com isto um crescimento mais abrangente, onde pode-se permitir que F e G possuam crescimentos críticos dados por $|s|^{p+1}$ e $|s|^{q+1}$, onde $1/(p+1) + 1/(q+1) = 1 - 2/n$. Por exemplo, podemos supor que F tenha crescimento maior que $|s|^{2^*}$ desde que compensemos proporcionalmente no crescimento de G. Esta proporcionalidade é dada pela equação da *hipérbole crítica*, vista acima.

O que fazemos neste capítulo é adequar o funcional associado a um produto de espaços de Orlicz-Sobolev apropriados. Além de evitarmos trabalhar em espaços de Sobolev fracionários, podemos permitir, com esta proposta, crescimentos não necessariamente polinomiais para as funções F e G, e, com isso, através de um método variacional, obtermos soluções fracas para o sistema (4.1). Esta abordagem via espaços de Orlicz-Sobolev foi proposta em [5]. Questões como regularidade e positividade de tais soluções foram ignoradas, pois o que pretendemos aqui é expor técnicas variacionais utilizando a teoria estudada ao longo deste trabalho. Provamos, portanto, o seguinte teorema devido a [5]:

Teorema 4.1 *Suponha que F e G satisfaçam as condições $(H_1) - (H_3)$ adiante. Então o sistema (4.1) possui uma solução fraca não trivial.*

4.2 O método variacional

Utilizamos uma técnica *minimax*, o teorema do passo da montanha generalizado (vide Apêndice), a fim de discutir existência de soluções (no sentido fraco) ao sistema (4.1). Isto é feito associando a este sistema um funcional definido num espaço de funções adequado, cujos pontos críticos a serem encontrados determinam soluções do sistema. O Teorema do passo da montanha entra então como ferramenta para a busca de tais pontos críticos. Começamos por definir o funcional associado, impondo as hipóteses que julgamos necessárias. Posteriormente, verificamos se tal funcional satisfaz a "geometria" do passo da montanha. Através de uma redução por dimensão finita, detectamos uma seqüência de pontos críticos para o funcional, quando restrito a espaços de dimensão finita. Finalmente, um processo de aproximação nos permite encontrar o ponto crítico procurado.

4.2.1 O funcional associado

Sejam $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ as primitivas das funções f e g, respectivamente. Isto é

$$F(u) \equiv \int_0^u f(t)dt \quad \text{e} \quad G(v) \equiv \int_0^v g(t)dt$$

Algumas hipóteses sobre as funções F e G serão requeridas, com o intuito de obter soluções para o sistema (4.1) através do método proposto neste capítulo. Sendo assim, considere M uma N-função θ-regular, com $2 < \theta_M < n$ (ver Definição 1.8) e N sua N-função complementar. Pelo Teorema 3.4, N também é θ-regular. Tomemos o par crítico de Orlicz (M_*, N_*), de acordo com a Definição 3.2 e o Teorema 3.4. Consideremos então as seguintes hipóteses:

(H_1) F e G são N-funções que crescem estritamente mais lento que M_* e N_*, respectivamente (vide Definição 2.4), tais que

$$\lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{M_*(t)} < \infty \quad \text{e} \quad \lim_{t\to 0} \frac{G(t)}{N_*(t)} < \infty.$$

Associamos ao sistema (4.1) o funcional

$$I(u,v) = \int_\Omega \nabla u(x)\nabla v(x)dx - \int_\Omega \big[F(u(x)) + G(v(x))\big]dx. \tag{4.2}$$

Nosso objetivo consiste em buscar pontos críticos para o funcional I em um espaço de Orlicz-Sobolev apropriado. Obviamente, pela hipótese (H_1) o espaço $E \equiv W_0^1L_M \times W_0^1L_N$ torna-se o candidato mais apropriado. Vale salientar que M e N são escolhidos ainda de forma que $W_0^1L_M$ e $W_0^1L_{(N)}$ sejam espaços uniformemente convexos. Tal escolha é possível, de acordo com o Teorema 2, página 297, em [17]. Observemos que o funcional $I : E \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e sua derivada em um ponto (u,v) é dada por

$$\begin{aligned} I'(u,v)(\eta,\xi) = & \int_\Omega \nabla u(x)\nabla \xi(x)dx + \int_\Omega \nabla v(x)\nabla \eta(x)dx - \\ & - \int_\Omega f(u(x))\eta(x)dx - \int_\Omega g(v(x))\xi(x)dx. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Fazemos uso do Teorema do passo da montanha generalizado (vide Apêndice), a fim de obtermos ponto crítico não trivial para o funcional (4.2). Para tanto, consideramos ainda as seguintes hipóteses:

(H_2) Existem constantes $\theta > 2$ e $t_0 > 0$, tais que, para todo $t \geq 0$,

$$0 < \theta F(t) \leq tf(t) \ \text{ e } \ 0 < \theta G(t) \leq tg(t);$$

(H_3) existem $\sigma > 2$ e $c > 0$ tais que, para todo $s \in [0,1]$,

$$F(st) \leq cs^\sigma F(t) \ \text{ e } \ G(st) \leq cs^\sigma G(t).$$

Com o auxílio da função til, definida em (3.20), consideremos as seguintes subvariedades de E:

$$E^+ = \left\{(u,\widetilde{u}) : \ u \in W_0^1L_M\right\} \ \text{ e } \ E^- = \left\{(u,-\widetilde{u}) : \ u \in W_0^1L_M\right\}.$$

Claramente, ambos não possuem uma estrutura linear, pois $\sim$ não é uma transformação linear. Contornamos este "problema" ao definir em E uma nova estrutura vetorial, com o auxílio da função til. Definamos a "soma til" $\widetilde{+} : E \times E \to E$ dada por

$$(u,\widetilde{v})\widetilde{+}(w,\widetilde{z}) \equiv (u+v, \widetilde{v+z}). \tag{4.4}$$

Com esta estrutura podemos provar o seguinte

Lema 4.1 *Para cada $(w,\widetilde{z})$ em E existem únicos elementos $(u,\widetilde{u}) \in E^+$ e $(v,-\widetilde{v}) \in E^-$ tais que*

$$(z,\widetilde{w}) = (u,\widetilde{u}) \ \widetilde{+} \ (v,-\widetilde{v}),$$

em outras palavras,

$$E = E^+ \ \widetilde{\oplus} \ E^-.$$

Prova: Segue imediatamente das propriedades da função til, vistas no Lema (3.2), donde $u = (z+w)/2$ e $v = (z-w)/2$. ♦

4.2.2 A geometria do passo da montanha

Lema 4.2 *Existem* $\rho_0, \sigma_0 > 0$*, tais que* $I(z) \geq \sigma_0$ *para todo* $z \in \partial B_{\rho_0} \cap E^+$.

Prova: Observemos que

$$\begin{aligned} I(u, \widetilde{u}) &= \int_\Omega \nabla u(x) \nabla \widetilde{u}(x) dx - \int_\Omega F(u(x)) dx - \int_\Omega G(\widetilde{u}(x)) dx \\ &= \frac{1}{2}\|u\|_{1,M}^2 - \int_\Omega F(u(x)) dx + \frac{1}{2}\|u\|_{1,(N)}^2 - \int_\Omega G(\widetilde{u}(x)) dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Agora, tomemos $C_0 > 0$ tal que $\| \cdot \|_{(M_*)} \leq C_0 \| \cdot \|_{1,M}$ e $\| \cdot \|_{(N_*)} \leq C_0 \| \cdot \|_{1,(N)}$. Assim, se $v \in W_0^1 L_M$ é tal que $\|v\|_{1,M} = C_0^{-1}$ então temos que $\|v\|_{(M_*)} \leq 1$ e portanto $\int_\Omega M_*(v(x)) dx \leq 1$. Conseqüentemente, uma vez que, por hipótese, $F \prec\prec M_*$, temos que $\int_\Omega F(|v(x)|) dx \leq C_1$, para algum $C_1 > 0$. Logo, dado $\rho \in [0, 1]$, temos, por (H_3)

$$\int_\Omega F(\rho|v(x)|) dx \leq c\rho^\sigma \int_\Omega F(|v(x)|) dx \leq cC_1 \rho^\sigma,$$

donde temos que

$$\frac{1}{2}\|\rho v\|_{1,M}^2 - \int_\Omega F(\rho v(x)) dx \geq \frac{1}{2} C_0^{-2} \rho^2 - cC_1 \rho^\sigma.$$

Além disso, de maneira completamente análoga, deduzimos que

$$\frac{1}{2}\|\rho \widetilde{v}\|_{1,(N)}^2 - \int_\Omega G(\rho \widetilde{v}(x)) dx \geq \frac{1}{2} C_0^{-2} \rho^2 - cC_2 \rho^\sigma,$$

para algum $C_2 > 0$.

Portanto, tomando $K = c(C_1 + C_2)$, temos que, se $\|v\|_{1,M} = C_0^{-1}$, então

$$I(\rho v, \rho \widetilde{v}) \geq C_0^{-2} \rho^2 - K\rho^\sigma,$$

para todo $\rho \in [0, 1]$. Como, por hipótese, $\sigma > 2$, tomemos ρ_1 suficientemente pequeno tal que

$$\sigma_0 \equiv C_0^{-2} \rho_1^2 - K\rho_1^\sigma > 0.$$

Defina finalmente $\rho_0 \equiv \rho_1 C_0^{-1}$. Logo, sendo $z \in \partial B_{\rho_0} \cap E^+$, então $z = (\rho_1 v, \rho_1 \widetilde{v})$, com $\|v\|_{1,M} = C_0^{-1}$, donde concluimos que

$$I(z) = I(\rho_1 v, \rho_1 \widetilde{v}) \geq \sigma_0.$$

♦

Antes do próximo resultado, observemos que, da hipótese (H_2), podemos extrair duas conclusões:

1. Para todo $t \geq t_0$, temos
$$\frac{\theta}{t} \leq f(t)F(t),$$
donde vemos que
$$\int_{t_0}^{t} \frac{\theta}{\tau} d\tau \leq \int_{t_0}^{t} \frac{f(\tau)}{F(\tau)} d\tau$$
e, conseqüentemente, existe $C > 0$ tal que
$$t^\theta \leq CF(t), \quad \forall t \geq t_0.$$
Sendo assim, $t^\theta \prec F$ e portanto, $L_F(\Omega) \hookrightarrow L^\theta(\Omega)$, continuamente. Obviamente, de maneira análoga, temos também a imersão contínua $L_G(\Omega) \hookrightarrow L^\theta(\Omega)$.

2. Existem $K > 0$ e $K_1 > 0$ tais que $F(t) \geq Kt^\theta - K_1$ sempre que $t \geq 0$. De fato, se $t > t_0$ então, pelo que foi visto acima, temos $F(t) \geq Kt^\theta$. Agora, se $0 \leq t \leq t_0$, pondo
$$K_1 \equiv \max_{0 \leq \tau \leq t_0} |F(\tau) - K\tau^\theta|,$$
temos então $F(t) \geq Kt^\theta - K_1$, e portanto, a afirmação desejada. Mais ainda, pela paridade de F, temos que
$$F(t) \geq K|t|^\theta - K_1 \qquad \forall\, t. \tag{4.6}$$
Analogamente, temos
$$G(t) \geq K|t|^\theta - K_2 \qquad \forall\, t. \tag{4.7}$$

Considere agora uma base de Schauder $\{e_i\}$ em $W_0^1 L_M$ de forma que $\|(e_1, \widetilde{e}_1)\|_E = 1$. Defina assim, para cada par de constantes R_0, R_1, o conjunto
$$Q_{R_0,R_1} \equiv \{r(e_1, \widetilde{e}_1) \widetilde{+} w : \, w \in E^-, \|w\|_E \leq R_0 \text{ e } 0 \leq r \leq R_1\}.$$

Lema 4.3 *Existem constantes R_0 e R_1 positivas, tais que $I(z) \leq 0$ para todo $z \in \partial Q_{R_0,R_1}$, onde $\partial Q_{R_0,R_1}$ refere-se à fronteira do conjunto Q_{R_0,R_1} com respeito ao subespaço $<(e_1, \widetilde{e}_1)> \widetilde{+} E^-$.*

Prova: Estudamos separadamente três subconjuntos que formam a fronteira de Q_{R_0,R_1}.

(i) Primeiramente, suponha que $z \in \partial Q_{R_0,R_1} \cap E^-$, onde R_0 e R_1 são duas quaisquer constantes positivas. Consequentemente, $z = (w, -\widetilde{w})$, e
$$\begin{aligned} I(z) &= \int_\Omega \nabla w(x) \nabla(-\widetilde{w}(x)) dx - \left(\int_\Omega F(w(x)) dx + \int_\Omega G(-\widetilde{w}(x)) dx \right) \\ &= -\int_\Omega \nabla w(x) \nabla \widetilde{w}(x) dx - \left(\int_\Omega F(w(x)) dx + \int_\Omega G(\widetilde{w}(x)) dx \right) \\ &= -\|w\|_{1,M}^2 - \left(\int_\Omega F(w(x)) dx + \int_\Omega G(\widetilde{w}(x)) dx \right) \leq 0. \end{aligned}$$

(ii) Se $z = r(e_1, \widetilde{e}_1)\widetilde{+}(w, -\widetilde{w}) = (re_1 + w, \widetilde{re_1 - w})$, com $\|(w, -\widetilde{w})\|_E = R_0$ e $0 \leq r \leq R_1$. Provemos que podemos encontrar, caso $R_1 = 1$, R' suficientemente grande tal que, se $z \in \partial Q_{R',1}$, então $I(z) \leq 0$. De fato,

$$
\begin{aligned}
I(z) &\leq \int_\Omega \nabla(re_1 + w)(x)\nabla(\widetilde{re_1 - w})(x)dx \\
&= \int_\Omega \nabla(2re_1 - re_1 + w)(x)\nabla(\widetilde{re_1 - w})(x)dx \\
&= -\int_\Omega \nabla(w - re_1)(x)\nabla(\widetilde{w - re_1})(x)dx - 2r\int_\Omega \nabla e_1(x)\nabla(\widetilde{w - re_1})(x)dx \\
&= -\|w - re_1\|_{1,M}^2 + 2r\int_\Omega \nabla e_1(x)\nabla(\widetilde{re_1 - w})(x)dx \\
&\leq -\|w\|_{1,M}^2 - \|re_1\|_{1,M}^2 + 2\|re_1\|_{1,M}\|w\|_{1,M} + 2r\int_\Omega \nabla e_1(x)\nabla(\widetilde{re_1 - w})(x)dx \\
&\leq -\|w\|_{1,M}^2 - \|re_1\|_{1,M}^2 + 2\|re_1\|_{1,M}\|w\|_{1,M} + 2r\|e_1\|_{1,M}\|\widetilde{re_1 - w}\|_{1,(N)} \\
&= -\|w\|_{1,M}^2 - \|re_1\|_{1,M}^2 + 2\|re_1\|_{1,M}\|w\|_{1,M} + 2r\|e_1\|_{1,M}\|re_1 - w\|_{1,M} \\
&\leq -\|w\|_{1,M}^2 - \|re_1\|_{1,M}^2 + 4r\|e_1\|_{1,M}\|w\|_{1,M} + 2r^2\|e_1\|_{1,M}^2 \\
&\leq -\|w\|_{1,M}^2 + 4r\|w\|_{1,M} + r^2 \\
&\leq -\|w\|_{1,M}^2 + 4\|w\|_{1,M} + 1. \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

Portanto, tomemos R' suficientemente grande para que, se $\|(w, -\widetilde{w})\|_E = R'$, então $-\|w\|_{1,M}^2 + 4\|w\|_{1,M} + 1 \leq 0$. Portanto, $I(z) \leq 0$ se $z = r(e_1, \widetilde{e}_1) + (w, -\widetilde{w})$ com $\|(w, -\widetilde{w})\|_E = R'$. Tomando agora $\rho \geq 1$ então, para $0 \leq r \leq \rho$, $\|(w, -\widetilde{w})\|_E = \rho R'$ e $z = r(e_1\widetilde{e}_1)\widetilde{+}(w, -\widetilde{w})$, temos também, por homogeineidade, $I(z) \leq 0$.

(iii) Finalmente, resta-nos encontrar então R_1 tal que $z = R_1(e_1, \widetilde{e}_1) + R_1(w, -\widetilde{w})$, com $\|(w, -\widetilde{w})\|_E \leq R'$ satisfaz $I(z) \leq 0$, uma vez que, tomando $R_0 = R_1 R'$, temos o resultado requerido.

Considere então $z = \sigma(e_1, \widetilde{e}_1)\widetilde{+}\sigma(w, -\widetilde{w}) = (\sigma e_1 + \sigma w, \widetilde{\sigma e_1 - \sigma w})$, com $\|(w, -\widetilde{w})\|_E \leq R'$. Assim, devido a (4.6) e (4.7), temos

$$
\begin{aligned}
I(z) \leq \sigma^2\|e_1 + w\|_{1,M}\|\widetilde{e_1 - w}\|_{1,(N)} &- \\
- K\sigma^\theta\left(\int_\Omega |e_1 + w|(x)^\theta dx + \int_\Omega |\widetilde{e_1 - w}|^\theta(x)dx\right) &+ K_3.
\end{aligned}
$$

Provemos agora que

$$\delta_0 \equiv \inf_{\|(w,-\widetilde{w})\|_E \leq R'} \left\{\int_\Omega |e_1 + w|(x)^\theta dx + \int_\Omega |\widetilde{e_1 - w}|^\theta(x)dx\right\} > 0.$$

Raciocinando por absudo, suponha que existe (w_n) em $W_0^1 L_M$ tal que $\|(w_n, -\widetilde{w}_n)\|_E \leq R'$ e

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |e_1 + w_n|^\theta(x)dx + \int_\Omega |\widetilde{e_1 - w_n}|^\theta(x)dx\right) = 0.$$

Logo, existe $w \in W_0^1 L_M$ tal que $w_n \rightharpoonup w$ para alguma subsequência de (w_n).

Por hipótese, temos que $F \prec\prec M_*$ e, sendo assim, temos a imersão compacta $W_0^1 L_M \hookrightarrow L_F$. Além disso, vimos, da hipótese (H_2), que $L_F \hookrightarrow L^\theta$. Portanto a imersão $W_0^1 L_M \hookrightarrow L^\theta$ existe e é compacta. Logo, $w_n \to w$ fortemente em L^θ. Pela continuidade da função $\sim$, temos que $\widetilde{e_1 - w_n} \to \widetilde{e_1 - w_n}$ também em L^θ, donde concluimos que $\|e_1 + w\|_\theta + \|\widetilde{e_1 - w}\|_\theta = 0$. Ou seja, $e_1 = w$ e $e_1 = -w$, o que é um absurdo. Portanto, por (4.8), temos

$$I(z) \leq \rho^2(1 + r')^2 - K\rho^\theta \delta_0 + K_3, \quad \forall\, \rho \geq 0,$$

donde é possível tomar R_1 suficientemente grande tal que

$$I(z) \leq R_1^2(1 + R')^2 - K R_1^\theta \delta_0 + K_3 \leq 0.$$

♦

4.2.3 A condição de Palais-Smale

Nesta subseção provamos uma proposição que nos dará as condições necessárias para que o funcional satisfaça a condição de Palais-Smale (em espaços de dimensão finita), requeridas na hipótese do Teorema do passo da montanha generalizado.

Proposição 4.2 *Seja $(u_m, \widetilde{v}_m)$ uma sequência em E tal que*

(I_1) $I(u_m, \widetilde{v}_m) = c + \delta_m$ *onde* $\delta_m \to 0$ *quando* $m \to \infty$.

(I_2) $|I'(u_m, \widetilde{v}_m)(\eta, \widetilde{\xi})| \leq \varepsilon_m \|(\eta, \widetilde{\xi})\|_E$, *onde* $\eta, \xi \in \{0, u_m, v_m\}$ *e* $\varepsilon_m \to 0$ *quando* $m \to 0$.

Então existe $C > 0$ tal que

$$\|u_m\|_{1,M} \leq C, \qquad \|\widetilde{v}_m\|_{1,(N)} \leq C,$$

$$\int_\Omega f(u_m(x))u_m(x)dx \leq C, \quad \int_\Omega g(\widetilde{v}_m(x))\widetilde{v}_m(x)dx \leq C,$$

$$\int_\Omega F(u_m(x))dx \leq C, \qquad \int_\Omega G(\widetilde{v}_m(x))dx \leq C.$$

Prova: De (I_1) temos

$$\int_\Omega \nabla u_m(x) \nabla \widetilde{v}_m(x)dx - \int_\Omega F(u_m(x))dx - \int_\Omega G(\widetilde{v}_m(x))dx = c + \delta_m. \tag{4.9}$$

Tomando $(\eta,\widetilde{\xi})=(u_m\widetilde{v}_m)$, então

$$\begin{aligned}&\left|2\int_\Omega\nabla u_m(x)\nabla\widetilde{v}_m(x)dx-\int_\Omega f(u_m(x))u_m(x)dx-\int_\Omega g(\widetilde{v}_m(x))\widetilde{v}_m(x)dx\right|=\\&\qquad=\ |I'(u_m,\widetilde{v}_m)(u_m,\widetilde{v}_m)|\ \le\ \varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E.\end{aligned}\tag{4.10}$$

Assim, por (H_2), (4.9) e (4.10),

$$\begin{aligned}(\theta-2)\int_\Omega[F(u_m)+G(\widetilde{v}_m)]dx &= -2\int_\Omega[F(u_m)+G(\widetilde{v}_m)]dx+\\&\quad+\int_\Omega\theta F(u_m)dx+\int_\Omega\theta G(\widetilde{v}_m)dx\\&\le -2\int_\Omega[F(u_m)+G(\widetilde{v}_m)]dx+\\&\quad+\int_\Omega f(u_m)u_mdx+\int_\Omega g(\widetilde{v}_m)\widetilde{v}_mdx+K\\&\le 2\left|\int_\Omega\nabla u_m\nabla\widetilde{v}_mdx-\int_\Omega F(u_m)dx-\int_\Omega G(\widetilde{v}_m)dx\right|+\\&\quad+\left|2\int_\Omega\nabla u_m\nabla\widetilde{v}_mdx-\int_\Omega f(u_m)u_mdx-\int_\Omega g(\widetilde{v}_m)\widetilde{v}_mdx\right|+K\\&\le 2c+2\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E+K,\end{aligned}$$

donde, tomando $C_0=\max\{2,2c+K\}$, temos

$$(\theta-2)\int_\Omega[F(u_m(x))+G(\widetilde{v}_m(x))]dx\le C_0\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big).$$

Como $\theta>2$, temos então,

$$\int_\Omega F(u_m(x))dx\le C_0\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big)\tag{4.11}$$

e

$$\int_\Omega G(\widetilde{v}_m(x))dx\le C_0\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big).\tag{4.12}$$

Por (4.9), (4.11) e (4.12), temos

$$\begin{aligned}\int_\Omega\nabla u_m(x)\nabla\widetilde{v}_m(x)dx &= c+\delta_m+\int_\Omega F(u_m(x))dx+\int_\Omega G(\widetilde{v}_m(x))dx\\&\le c+\delta_m+2C_0\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big)\\&= c+(2C_0+1)\delta_m+2C_0+\varepsilon_m2C_0\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E.\end{aligned}$$

Tomando $C_1=2C_0+\max\{c,1\}$, temos que

$$\int_\Omega\nabla u_m(x)\nabla\widetilde{v}_m(x)dx\le C_1\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big).\tag{4.13}$$

Combinando (4.10) e (4.13), deduzimos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(u_m)u_m dx+\int_\Omega g(\widetilde{v}_m)\widetilde{v}_m dx &\leq \varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E+2\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla\widetilde{v}_m dx\\ &\leq \varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E+2C_1\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big)\\ &\leq C_2\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big),\end{aligned}$$

onde $C_2=2C_1+1$. Conseqüentemente, podemos concluir que

$$\int_\Omega f(u_m(x))u_m(x)dx \leq C_2\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big) \tag{4.14}$$

e

$$\int_\Omega g(\widetilde{v}_m(x))\widetilde{v}_m(x)dx \leq C_2\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big). \tag{4.15}$$

Precisamos provar, portanto, que a seqüência $\big(\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big)$ é limitada.

Tomemos $(\eta,\widetilde{\xi})=(0,\widetilde{u}_m)$ em (I_2). Assim,

$$\left|\int_\Omega \nabla u_m(x)\nabla\widetilde{u}_m(x)-\int_\Omega g(\widetilde{v}_m(x))\widetilde{u}_m(x)dx\right| \leq \varepsilon_m\|(0,\widetilde{u}_m)\|_E=\varepsilon_m\|\widetilde{u}_m\|_{1,(N)},$$

donde temos que

$$\|u_m\|_{1,M}^2-\int_\Omega g(\widetilde{v}_m(x))\widetilde{u}_m(x)dx \leq \varepsilon_m\|\widetilde{u}_m\|_{1,(N)}. \tag{4.16}$$

Consideremos κ tal que $\|\cdot\|_{(N_*)}\leq\kappa\|\cdot\|_{1,(N)}$ e tomemos

$$\widetilde{U}_m \equiv \frac{\widetilde{u}_m}{\kappa\|\widetilde{u}_m\|_{1,(N)}}.$$

Conseqüentemente, $\|\widetilde{U}_m\|_{1,(N)}=1/\kappa$ e $\|\widetilde{U}_m\|_{(N_*)}\leq 1$. Por (4.16), temos então,

$$\|u_m\|_{1,M}\leq\varepsilon_m+\kappa\int_\Omega g(\widetilde{v}_m(x))\widetilde{U}_m(x)dx. \tag{4.17}$$

Notemos que, como $G \prec\prec N_*$, temos que existem $\alpha>0$ e $\beta>0$, tais que

$$\int_\Omega G(\widetilde{U}_m(x))dx \leq \alpha\int_\Omega N_*(\widetilde{U}_m(x))dx+\beta, \tag{4.18}$$

donde temos que

$$\frac{1}{\alpha}\int_\Omega G(\widetilde{U}_m(x))dx \leq 1+\beta.$$

Além disso, do fato de G ser N-função, sabemos que

$$ab \leq G(a)+g^{-1}(b)b.$$

Tomando $y = g(\widetilde{v}_m(x))$ e $b = \widetilde{U}_m(x)$, temos

$$g(\widetilde{v}_m(x))\widetilde{U}_m(x) \leq G(\widetilde{U}_m(x)) + \widetilde{v}_m(x)g(\widetilde{v}_m(x)). \tag{4.19}$$

Combinando então (4.15), (4.17), (4.18) e (4.19), temos

$$\begin{aligned}
\|u_m\|_{1,M} &\leq \kappa \int_\Omega \big[G(\widetilde{U}_m(x)) + \widetilde{v}_m(x)g(\widetilde{v}_m(x))\big]dx + \varepsilon_m \\
&\leq \kappa\alpha(1+\beta) + \kappa C_2\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big) + \varepsilon_m \\
&\leq \big[\kappa\alpha(1+\beta)\kappa C_2\big]\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big) + \varepsilon_m.
\end{aligned}$$

Logo, se $C_3 \equiv \kappa\big[\alpha(1+\beta)C_2\big]$, temos então que

$$\|u_m\|_{1,M} \leq \varepsilon_m + C_3\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big). \tag{4.20}$$

Agora, de maneira completamente análoga, considerando em (I_2) $(\eta,\xi) = (v_m, 0)$, podemos estimar $\|v_m\|_{1,M}$, deduzindo que existe $C_4 > 0$ tal que

$$\|\widetilde{v}_m\|_{1,(N)} \leq \varepsilon_m + C_4\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big). \tag{4.21}$$

Somando (4.20) e (4.21), temos

$$\begin{aligned}
\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E &\leq C_5\big(\|u_m\|_{1,M} + \|\widetilde{v}_m\|_{1,(N)}\big) \\
&\leq C5\big[2\varepsilon_m + (C_3+C_4)\big(1+\delta_m+\varepsilon_m\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E\big)\big]
\end{aligned}$$

e , tomando, $C_6 = C_5(C_3+C_4)$, então

$$(1 - C_6\varepsilon_m)\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E \leq 2C_5\varepsilon_m + C_6 + C_6\delta_m,$$

donde temos que

$$\begin{aligned}
\|(u_m,\widetilde{v}_m)\|_E &\leq \frac{2C_5\varepsilon_m + C_6 + C_6\delta_m}{1 - C_6\varepsilon_m} \\
&\leq C_7.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Combinando (4.11), (4.12), (4.14), (4.15), (4.20) e (4.21) com (4.22), temos demonstrada esta proposição. ♦

4.2.4 Redução ao caso finito

Considerando as variedades E^+ e E^- e admitindo temporariamente, apenas para efeito de analogia, o espaço vetorial $(E, \widetilde{+}, \cdot)$, observamos que, uma vez que temos $E = E^+ \widetilde{\oplus} E^-$

e os Lemas (4.2), (4.3), podemos compará-los com as hipóteses (I_1) e (I_2) no Teorema 2 no Apêndice. Porém, o fato de E^+ e E^- serem espaços de dimensão infinita nos impede de usar tal teorema. O que fazemos então é uma aproximação por dimensão finita desses espaços.

Tomemos então a base de Schauder $\{e_i\}$ de $W_0^1 L_M$, considerada no Lema (4.3). Definamos

$$E_n = <e_1, \cdots, e_n>$$

e

$$\widetilde{E_n} = \{\widetilde{v} : \ v \in E_n\}.$$

Definamos também E_n^+ e E_n^-, dados pelas restrições das variedades E^+ e E^- ao espaço E_n, respectivamente. Isto é,

$$E_n^+ = \{(u, \widetilde{u}) : \ u \in E_n\} \quad \text{e} \quad E_n^- = \{(u, -\widetilde{u}) : \ u \in E_n\}.$$

Como no Lema 4.2.1, temos que

$$E_n \times \widetilde{E_n} = E_n^+ \widetilde{\oplus} E_n^-.$$

A continuidade da função til e a soma til definida em (4.4) nos permitem definir as seguintes "projeções" contínuas:

$$P_n^- : \ E_n^+ \widetilde{\oplus} E_n^- \longrightarrow E_n^-, \ \ P_n^-(u, \widetilde{v}) = \left(\frac{u-v}{2}, -\widetilde{\frac{u-v}{2}} \right),$$

$$P_n^+ : \ E_n^+ \widetilde{\oplus} E_n^- \longrightarrow E_n^+, \ \ P_n^+(u, \widetilde{v}) = \left(\frac{u+v}{2}, \widetilde{\frac{u+v}{2}} \right).$$

Consideramos ainda o seguinte conjunto:

$$Q_n \equiv \left\{ w \,\widetilde{+}\, r(e_1, \widetilde{e_1}) : \ w \in E_n^-, \|w\|_E \leq R_0 \text{ e } 0 \leq r \leq R_1 \right\},$$

onde R_0 e R_1 são obtidos no Lema 4.3, e também a classe de funções:

$$H_n \equiv \left\{ h \in C(Q_n, E_n^+ \widetilde{\oplus} E_n^-) : \ h(z) = z \text{ sobre } \partial Q_n \right\},$$

onde aqui, tomamos ∂Q_n como a fronteira de Q_n relativa ao espaço $E_n^+ \widetilde{\oplus} E_n^-$.

Uma vez que estamos considerando as variedades E_n^+ e E_n^-, no lugar de subespaços vetoriais, como no Teorema do passo da montanha generalizado dado no Apêndice, recorremos a um lema de "linking", que segue a mesma linha de raciocínio utilizada na proposição 1 deste mesmo apêndice.

Lema 4.4 *O conjunto $h(Q_n) \cap \partial B_{\rho_0} \cap E_n^+$ é não vazio, para qualquer $h \in H_n$, onde ρ_0 é obtido no Lema 4.2.*

Prova: Devemos provar que existe $(u, \widetilde{v})$ em Q_n tal que

$$\|h(u_0, \widetilde{v_0})\| = \rho_0 \text{ e } P_n^-\big(h(u_0, \widetilde{v_0})\big) = 0. \tag{4.23}$$

Seja $(u, \widetilde{v}) = w \widetilde{+} s(e_1, \widetilde{e_1}) \in Q_n$. Definamos, para cada $t \in [0,1]$, a função contínua $\varphi_t : Q_n \longrightarrow E_n^- \widetilde{+} <(e_1, \widetilde{e_1})>$, dada por

$$\varphi_t(w \widetilde{+} s(e_1, \widetilde{e_1})) = tP_n^-\big(h(u, \widetilde{v})\big) \widetilde{+} (1-t)w \widetilde{+} \big[t \left\|P_n^+\big(h(u, \widetilde{v})\big)\right\|_E + (1-t)s - \rho_0\big](e_1, \widetilde{e_1}).$$

Observamos que para qualquer $(u, \widetilde{v}) = w \widetilde{+} s(e_1, \widetilde{e_1})$ em ∂Q_n, temos

$$P_n^-\big(h(u, \widetilde{v})\big) = P_n^-(u, \widetilde{v}) = w$$

e

$$\left\|P_n^+\big(h(u, \widetilde{v})\big)\right\|_E = \|s(e_1, \widetilde{e_1})\|_E = s,$$

donde temos que

$$\varphi_t(w \widetilde{+} s(e_1, \widetilde{e_1})) = w \widetilde{+} (s - \rho)(e_1, \widetilde{e_1}).$$

Redefinimos ρ_0 satisfazendo $0 < \rho_0 < R_1$, de forma que, para qualquer $(u, \widetilde{v}) \in \partial Q_n$, temos

$$\varphi_t(u, \widetilde{v}) \neq (0,0), \ \forall t \in [0,1].$$

Sendo assim, temos que

$$\varphi_0(w \widetilde{+} s(e_1, \widetilde{e_1}) = w \widetilde{+} (s - \rho_0)(e_1, \widetilde{e_1})$$

é homotópico a

$$\varphi_1(w \widetilde{+} s(e_1, \widetilde{e_1}) = P_n^-\big(h(u, \widetilde{v})\big) \widetilde{+} \left(\left\|P_n^+\big(h(u, \widetilde{v})\big)\right\|_E - \rho_0\right)(e_1, \widetilde{e_1}).$$

Utilizando as propriedades topológicas do grau em variedades orientáveis de dimensão finita (vide [18]), temos que o grau das funções φ_t com respeito a Q_n e $(0,0)$ está bem definido e

$$d(\varphi_1, Q_n, (0,0)) = d(\varphi_0, Q_n, (0,0)).$$

Além disso, $\rho_0(e_1, \widetilde{e_1}) \in Q_n$ é o único elemento que satisfaz $\varphi_0(\rho_0(e_1, \widetilde{e_1})) = 0$. Portanto, $d(\varphi_0, Q_n, (0,0)) = 1$, donde concluimos que existe $(u, \widetilde{v}) \in Q_n$ tal que $\varphi_1(u, \widetilde{v}) = 0$. Isto é equivalente a afirmar (4.23). ♦

Definindo, portanto,

$$c_n = \inf_{h \in H_n} \max_{z \in Q_n} I(h(z)),$$

uma vez que, em virtude dos Lemas 4.2 e 4.4,

$$\max_{z \in Q_n} I(h(z)) \geq \sigma_0 > 0, \quad \forall h \in H_n,$$

temos

$$c_n \geq \sigma_0 > 0.$$

Observemos também que uma vez que $Id_{E_n^+ \tilde{\oplus} E_n^-} \in H_n$, temos, para $z = r(e_1, \widetilde{e_1}) \,\widetilde{+}\, (u, -\widetilde{u}) = (re_1 + u, \widetilde{re_1 - u}) \in Q_n$,

$$\begin{aligned} I(z) &\leq \int_\Omega \nabla(re_1 + u)(x)\nabla(\widetilde{re_1 - u})(x)dx \\ &\leq -\|u\|_{1,M}^2 + 4r\|u\|_{1,M} + r^2 \ \leq \ K, \end{aligned}$$

onde estas desigualdades foram determinadas na demonstração do Lema 4.3. Conseqüentemente, temos que

$$c_n \leq \max_{z \in Q_n} I(z) \leq K,$$

para alguma constante $K > 0$. Consideremos $(u_m, \widetilde{v_m})$ uma seqüência de Palais-Smale em $E_n^+ \,\widetilde{\oplus}\, E_n^-$, isto é,

1. $\big(I(u_m, \widetilde{v_m})\big)$ é sequência limitada e
2. $I'(u_m, \widetilde{v_m}) \to 0$.

Sendo assim, existe uma subseqüência $(u_m, \widetilde{v_m})$ satisfazendo as hipóteses (I_1) e (I_2) da proposição 4.2. Por esta mesma proposição, temos então que $(u_m, \widetilde{v_m})$ é limitada. Uma vez que $E_n^+ \,\widetilde{\oplus}\, E_n^-$ tem dimensão finita, uma nova subsequência pode ser tomada convergente e portanto, temos que $I|_{E_n^+ \tilde{\oplus} E_n^-}$ satisfaz a condição de Palais-Smale. Pelos Lemas 4.2 e 4.3 e pelo que foi visto no Lema 4.4 podemos demonstrar, utilizando os mesmos argumentos de contradição na demonstração do Teorema do passo da montanha generalizado no Apêndice, que c_n é valor crítico de $I|_{E_n^+ \tilde{\oplus} E_n^-}$, para cada n, com pontos críticos correspondentes $z_n \in E_n^+ \,\widetilde{\oplus}\, E_n^-$. Observamos também que, de acordo com a proposição 4.2, temos que a sequência de pontos críticos z_n é tal que $\|z_n\|_E \leq C$.

4.2.5 Existência de solução fraca

Prova do teorema 4.1: De acordo com a última subseção, sabemos que existe uma seqüência (z_n) tal que, para cada n, $z_n \in E_n \times \widetilde{E_n}$, $I(z_n) \leq c_n \in [\sigma_0, K]$ e $\big(I|_{E_n \times \widetilde{E_n}}\big)'(z_n) = 0$. Além disso, temos que $\|z_n\|_E \leq C$. Tomemos então uma subseqüência de (z_n) tal que $z_n = (u_n, \widetilde{v_n}) \rightharpoonup z = (u, \widetilde{v})$, para algum $z \in E$. Novamente pela proposição 4.2, temos que $\int_\Omega F(u_n(x))dx \leq C$, $\int_\Omega G(\widetilde{v_n}(x))dx \leq C$, $\int_\Omega f(u_n(x))u_n(x)dx \leq C$ e $\int_\Omega g(\widetilde{v_n}(x))\widetilde{v_n}(x)dx \leq C$. Utilizando então o Lema 2.1 em [7], concluímos que

$$f(u_n) \to f(u) \ \text{ e } \ g(\widetilde{v_n}) \to g(\widetilde{v}) \text{ em } L^1.$$

Tomando $(0, \widetilde{\eta})$ e $(\xi, 0) \in E_n \times \widetilde{E_n}$ em (4.3) e uma vez que $\big(I|_{E_n \times \widetilde{E_n}}\big)'(u_n, \widetilde{v_n}) = 0$, temos portanto,

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{v_n}(x)\nabla\xi(x)dx = \int_\Omega f(u_n(x))\xi(x)dx, \quad \forall\, \xi \in E_n, \tag{4.24}$$

e

$$\int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\widetilde{\eta}(x)dx = \int_\Omega g(\widetilde{v_n}(x))\widetilde{\eta}(x)dx, \quad \forall\, \widetilde{\eta} \in \widetilde{E_n}. \tag{4.25}$$

Fixemos agora $\xi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Assim $\xi \in E_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$. Por definição dos espaços E_n, temos então que $\xi \in E_j$ para qualquer $j \geq k$. Sendo assim, temos, por (4.24), que

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{v_n}(x)\nabla\xi(x)dx = \int_\Omega f(u_n(x))\xi(x)dx, \quad \forall n \geq k. \tag{4.26}$$

Tomemos $n \to \infty$ em ambos os membros da equação (4.26). Pelo lado direito, uma vez que $\widetilde{v_n} \rightharpoonup \widetilde{v}$, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \nabla\widetilde{v_n}(x)\nabla\xi(x)dx = \int_\Omega \nabla\widetilde{v}(x)\nabla\xi(x)dx. \tag{4.27}$$

Pelo lado esquerdo, observemos primeiramente que se $\xi \in E_n$ então $\xi \in W_0^1L_M$. Por definição, tomemos uma seqüência de funções (ξ_k) em $C_0^\infty(\Omega)$ tais que $\xi_k \to \xi$ em $W_0^1L_M$. Observemos que para cada k fixo, temos que

$$\left|\int_\Omega f(u_n(x))\xi_k(x)dx - \int_\Omega f(u(x))\xi_k(x)dx\right| \leq \|\xi_k\|_\infty \|f(u_n) - f(u)\|_1 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Agora, uma vez que $\xi_k \to \xi$ e $W_0^1L_M \hookrightarrow L^1$, temos que, para alguma subseqüência $\xi_k(x) \to \xi(x)$ em quase todo ponto. Logo, fixado $w \in E_n$ temos que

$$f(w(x))\xi_k(x) \to f(w(x))\xi(x)$$

em quase todo ponto. Uma vez que $|f(w(x))\xi_k(x)| \leq \|\xi_k\|_\infty |f(w(x))|$ e $f(w) \in L^1$, temos pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue, que

$$\left|\int_\Omega f(w(x))\xi_k(x)dx - \int_\Omega f(w(x))\xi(x)dx\right| \to 0, \quad \forall w \in E_n,$$

quando $k \to \infty$. Conseqüentemente, temos que para todo $\xi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(u_n(x))\xi(x)dx = \int_\Omega f(u(x))\xi(x)dx. \tag{4.28}$$

Sendo assim, pondo (4.27) e (4.28) em (4.26), temos

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{v}(x)\nabla\xi(x)dx = \int_\Omega f(u(x))\xi(x)dx, \quad \forall\, \xi \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n. \tag{4.29}$$

Partindo agora de (4.25), por um processo inteiramente análogo, deduzimos também que

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\widetilde{\eta}(x)dx = \int_\Omega g(\widetilde{v}(x))\widetilde{\eta}(x)dx, \quad \forall\, \widetilde{\eta} \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{E_n}. \tag{4.30}$$

Temos que provar que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{E_n}$ é denso em $E = W_0^1L_M \times W_0^1L_{(N)}$. De fato, uma vez que, por definição, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ é denso em $W_0^1L_M$, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{E_n}$ é denso em $W_0^1L_N$, pois $\sim$ é homeomorfismo. Sendo assim, dado, $(\xi, \widetilde{\eta}) \in E$ e tomando uma sequência $(\xi_k, \widetilde{\eta_k}) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(E_n \times \widetilde{E_n})$, tal que $(\xi_k, \widetilde{\eta_k}) \to (\xi, \widetilde{\eta})$ em E, temos que

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{v}(x)\nabla\xi_k(x)dx \to \int_\Omega \nabla\widetilde{v}(x)\nabla\xi(x)dx$$

e, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\int_\Omega f(u(x))\xi_k(x)dx \to \int_\Omega f(u(x))\xi(x)dx.$$

Donde, por (4.29), temos

$$\int_\Omega \nabla\widetilde{v}(x)\nabla\xi(x)dx = \int_\Omega f(u(x))\xi(x)dx, \quad \forall\, \xi \in W_0^1 L_M.$$

Analogamente, por (4.30), também temos

$$\int_\Omega \nabla u(x)\nabla\widetilde{\eta}(x)dx = \int_\Omega g(\widetilde{v}(x))\widetilde{\eta}(x)dx, \quad \forall\, \widetilde{\eta} \in W_o^1 L_{(N)}.$$

Portanto, $(u, \widetilde{v})$ é um ponto crítico de I, e, conseqüentemente, solução fraca do sistema (4.1).

Resta-nos mostrar que $(u, \widetilde{v})$ é não trivial. Suponha, por contradição que $(u, \widetilde{v}) = (0, 0)$. Tomemos então uma função F_1, Δ-regular, tal que $F(x) \leq F_1(x)$, $f(x) \leq f_1(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}^+$, e $F_1 \prec\prec M_*$. Uma vez que $u_n \rightharpoonup u = 0$, temos que $\|u_n\|_{(F_1)} \to 0$, pois a imersão $W_0^1 L_M \hookrightarrow L_{(F_1)}$ é compacta. Sendo assim, temos que, tomando n_0 tal que $\|u_n\|_{(F_1)} < 1$, para todo $n \geq n_0$, vale

$$\int_\Omega F(u_n(x))dx \leq \int_\Omega F_1(u_n(x))dx \leq \|u_n\|_{(F_1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Uma vez que F_1 é Δ-regular, temos que $xf_1(x) \leq cF_1(x)$, para algum $c > 1$, e portanto,

$$0 \leq \int_\Omega f(u_n(x))u_n(x)dx \leq \int_\Omega f_1(u_n(x))u_n(x)dx \leq c\int_\Omega F_1(u_n(x))dx \to 0.$$

Portanto, tomando $\xi = u_n$ em (4.24), temos que $\int_\Omega \nabla u_n(x)\nabla\widetilde{v_n}(x)dx \to 0$. Além disso, uma vez que $G \prec\prec \widetilde{A_*}$ e $\widetilde{v_n} \rightharpoonup \widetilde{v} = 0$ em $W_0^1 L_{(N)}$,temos $\widetilde{v_n} \to \widetilde{v}$ em $L_{(G)}$. Isto implica também que $\int_\Omega G(\widetilde{v_n}(x))dx \to 0$. Logo, concluimos que $c_n = I(u_n, \widetilde{v_n}) \to 0$, o que é um absurdo, pois temos que $c_n \geq \sigma_0$, para qualquer $n \in \mathbb{N}$. Logo, $(u, \widetilde{v}) \neq 0$. ♦

Apêndice

Apresentamos aqui o teorema do passo da montanha, sob uma forma generalizada. O capítulo consiste inicialmente num pequeno resumo dos principais resultados da teoria do grau de Brouwer, necessários para o desenvolvimento de tal teorema, e, posteriormente, na apresentação e demonstração do mesmo.

Grau topológico em dimensão finita (Brouwer)

Definiremos uma função que nos dará informações quanto à existência, unicidade ou multiplicidade de soluções para equações da forma $\varphi(x) = b$, onde $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado e b é um ponto fixado em $\mathbb{R}^N$. Tal função é denotada por d e a cada terno (φ, Ω, b) associa um número inteiro $d(\varphi, \Omega, b)$ o grau de φ sobre Ω com respeito a b. Os resultados desta seção podem ser encontrados em [2] ou [8].

Começaremos definindo o grau para valores regulares de $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, isto é, para os pontos $b \in \mathbb{R}^N$ tais que $\varphi'(x)$ é invertível para todo $x \in \varphi^{-1}(b)$. Num segundo momento, estenderemos a definição do grau para qualquer valor de $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e por fim, generalizamos a definição para aplicações $\varphi \in C(\overline{\Omega})$.

Denotamos por S_φ o conjunto dos pontos críticos de φ, ou seja, o conjunto dos pontos $x \in \Omega$ tais que $\varphi'(x)$ não é invertível. Neste caso, $b = \varphi(x)$ é dito um valor crítico (ou singular) de φ.

Definição 1 *Sejam $\varphi \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $b \in \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega \cup S_\varphi)$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é aberto e limitado. Então definimos,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \Sigma_{x \in \varphi^{-1}(b)} \mathrm{sgn} J_\varphi(x).$$

Modifiquemos a definição inicial de modo a abranger também valores singulares.

Definição 2 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $\varphi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Então definimos, $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b^1)$, onde b^1 é um valor regular de φ tal que $|b^1 - b| < \varrho(b, \varphi(\partial\Omega))$ e $d(\varphi, \Omega, b^1)$ é dado pela Definição 1, onde*

$$\varrho(b, \varphi(\partial\Omega)) = \inf\{|b - a| : a \in \varphi(\partial\Omega)\}.$$

Generalizemos agora a definição do grau para funções contínuas suficientemente próximas de funções $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$.

Definição 3 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aberto e limitado, $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ e $b \in \mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$. Então definimos $d(\varphi, \Omega, b) = d(\phi, \Omega, b)$, onde $\phi \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ é uma função tal que $\|\phi - \varphi\|_\infty < \varrho(b, \varphi(\partial\Omega))$ e o $d(\phi, \Omega, b)$ é dado pela Definição 2.*

Principais propriedades do grau de Brouwer

d_1) **Continuidade em relação a função.** Sejam $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Existe uma vizinhança V de φ em $C(\Omega, \mathbb{R}^N)$ tal que para toda $\psi \in V$,

$$b \notin \psi(\partial\Omega) \quad \text{e} \quad d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$$

d_2) **Invariância homotópica do grau.** Sejam $H \in C(\Omega \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Então $d(H(.,t), \Omega, b)$ é constante para $t \in [0,1]$.

d_3) **O Grau é constante em componentes conexas do $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$.** Se b e $\hat{b}$ estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^N \backslash \varphi(\partial\Omega)$, então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, \hat{b})$$

d_4) **Aditividade.** Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são abertos de $\mathbb{R}^N$ tais que $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$ então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b)$$

Conseqüências das propriedades do grau de Brouwer

d_5)

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad b \in \Omega \\ 0 & \text{se} \quad b \notin \overline{\Omega} \end{cases}$$

d_6) Se $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$ então $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.
d_7) Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$ então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.
d_8) Sejam $K \subset \Omega$ fechado e $b \notin \varphi(K)$ então $d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega - K, b)$.

O teorema do passo da montanha generalizado

Seja E um espaço de Banach real. Precisaremos de uma importante propriedade de compacidade com respeito a funcionais em E, chamada de condição de Palais-Smale, definida abaixo.

Definição 4 *dizemos que um funcional $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz a **condição de Palais-Smale** ou simplesmente **(PS)**, quando qualquer seqüência (u_k) em E satisfazendo*

1. *$\big(I(u_n)\big)$ é seqüência limitada e*
2. *$I'(u_n) \to 0$,*

possui uma subseqüência convergente.

Faremos uso do conhecido lema da deformação, cuja demonstração pode ser vista em [16] e está enunciado a seguir.

Teorema 1 (lema da deformação) *Sejam E um espaço de Banach real e $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfazendo (PS). Se $c \in \mathbb{R}$, $\overline{\varepsilon} > 0$ e $\mathcal{O}$ é alguma vizinhança de $K_c = \{x \in E; I(x) = c \text{ e } I'(x) = 0\}$, então existem $\varepsilon \in (0, \overline{\varepsilon})$ e $\eta \in C([0,1] \times E, E)$ tais que*

1 $\eta(0, u) = u, \quad \forall u \in E$;

2 $\eta(t, u) = u, \quad \forall t \in [0,1]$, *se* $I(u) \notin [c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}]$;

3 $\eta(t, \cdot)$ *é um homeomorfismo de E sobre E para cada* $t \in [0,1]$;

4 $\|\eta(t,u) - u\|_E \leq 1, \quad \forall t \in [0,1]$ *e* $\forall u \in E$;

5 $I(\eta(t,u)) \leq I(u), \quad \forall t \in [0,1]$ *e* $\forall u \in E$;

Se $A_s = \{x \in E; I(x) \leq s\}$ então temos ainda

6 $\eta(1, A_{c+\varepsilon} \backslash \mathcal{O}) \subseteq A_{c-\varepsilon}$;

7 *Se $K_c = \emptyset$ então* $\eta(1, A_{c+\varepsilon}) \subseteq A_{c-\varepsilon}$;

8 *Se $I(u)$ é par em (u)então $\eta(t,u)$ é ímpar em u.*

Podemos agora estabelecer o seguinte teorema do passo da montanha, devido a [16]:

Teorema 2 *Seja E um espaço de Banach real com $E = V \oplus X$ onde V tem dimensão finita. Suponha que $I \in C^1(E, \mathbb{R})$ satisfaz (PS) e*

(I_1) *existem constantes $\rho, \alpha > 0$ tais que $I|_{\partial B_\rho \cap X} \geq \alpha$ e*

(I_2) *existe um $e \in \partial B_1 \cap X$ e $R > \rho$ tais que se $Q \equiv \left(\overline{B}_R \cap V\right) \oplus \{re; 0 < r < R\}$ então $I|_{\partial Q} \leq 0$.*

Então I possui um valor crítico $c \geq \alpha$ que pode ser caracterizado por

$$c \equiv \inf_{h \in \Gamma} \max_{u \in Q} I(h(u)),$$

onde

$$\Gamma = \{h \in C(\overline{Q}, E); h \equiv \mathrm{Id} \text{ em } \partial Q\}.$$

Aqui, ∂Q refere-se à fronteira de Q relativamente a $V \oplus <e>$.

Prova: Devemos provar que

$$c \geq \alpha. \tag{4.31}$$

Isto será feito na próxima proposição. Suponha portanto que (4.31) é válido. Então, um argumento padrão de contradição mostra que c é de fato um valor crítico.

Claramente, supondo $K_c = \emptyset$, tome $\overline{\varepsilon} = \alpha/2$ e sejam $\varepsilon, \eta \in C([0,1] \times E, E)$ de acordo com o lema da deformação. Assim, pelo item 7 temos,

$$I(\eta(1, h(u))) \leq c - \varepsilon \;\; \forall u \text{ tal que } I(h(u)) \leq c + \varepsilon.$$

Logo, tome $h \in \Gamma$ tal que

$$\max_{u \in Q} I(h(u)) \leq c + \varepsilon.$$

É suficiente provar então que $\eta(1, h(\cdot)) \in \Gamma$. De fato, se $u \in \partial Q$ então $h(u) = u$ e $\eta(1, h(u)) = \eta(1, u)$. Uma vez que

$$I(u) \leq 0 \leq c - \frac{\alpha}{2} = c - \overline{\varepsilon},$$

temos que $I(u) \notin [c - \overline{\varepsilon}, c + \overline{\varepsilon}]$, portanto

$$\eta(1, h(u)) = \eta(1, u) = u \quad \forall u \in \partial Q.$$

Logo, $\eta(1, h(\cdot)) \in \Gamma$, uma contradição pois

$$c \leq \max_{u \in Q} I(\eta(1, h(u))) \leq c - \varepsilon.$$

♦

Para verificarmos (4.31), estabeleceremos o seguinte resultado:

Proposição 1 *Se $h \in \Gamma$, então*

$$h(Q) \cap \partial B_\rho \cap X \neq \emptyset.$$

Prova: Seja $P : E \to V$ o operador projeção. Assim, para cada $h \in \Gamma$ devemos encontrar $u \in Q$ satisfazendo

$$\begin{cases} P(h(u)) = 0 \\ \|\big(\mathrm{Id} - P\big)(h(u))\|_E = \rho. \end{cases} \tag{4.32}$$

Considerando $\bar{Q}$ como sendo o fecho do conjunto Q com respeito à $V \oplus <e>$, temos que se $u \in \bar{Q}$ então $u = v + re$ onde $v \in \bar{B}_R \cap V$ e $0 \leq r \leq R$, com v e r únicos. Sendo assim, podemos identificar $\bar{Q}$ como um subconjunto de $\mathbb{R} \times V$. Defina então um operador $\phi : \mathbb{R} \times V \longrightarrow \mathbb{R} \times V$, tal que

$$\phi(r, v) = \Big(\|(\mathrm{Id} - P)\big(h(v + re)\big)\|_E, P(h(v + re))\Big).$$

Uma vez que P é um operador contínuo, temos então que $\phi \in C(Q, \mathbb{R} \times V)$. Tomando então $u \in \partial Q$, como $h|_{\partial Q} \equiv \mathrm{Id}$, temos

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \Big(\|(\mathrm{Id} - P)\big(h(u)\big)\|_E, P(h(u))\Big) \\ &= \big(\|u - P(u)\|_E, P(u)\big) \\ &= \big(\|v + re - P(v + re)\|_E, v\big) \\ &= \big(\|re\|_E, v\big) \ = \ (r, v) \ = \ u. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi|_{\partial Q} = \mathrm{Id}. \tag{4.33}$$

Observemos ainda que $(\rho, 0) = \rho e + 0 = \rho e \in Q$, por (I_2). Logo, se $(r, v) \in \partial Q$, temos $\phi(r, v) \neq (\rho, 0)$. Agora, como V tem dimensão finita, temos $d\big(\phi, Q, (\rho, 0)\big)$ bem definido e, por (4.33),

$$d\big(\phi, Q, (\rho, 0)\big) = d\big(\mathrm{Id}, Q, (\rho, 0)\big) = 1.$$

Portanto, pelas propriedades do grau em dimensão finita, temos que existe $u \in Q$ tal que $\phi(u) = (\rho, 0) = \rho e$. Isto é equivalente a (4.32), como queríamos demonstrar. ♦

Referências Bibliográficas

[1] Adams, R. A., Fournier, J. J. F., *Sobolev spaces, second edition*, Elsevier Science, Oxford, 2003.

[2] Berestycki, H., *Methodes topologiques et problemes aux limites non lineaires*, Thése de Doctorat, Universite de Paris VI, 1975.

[3] Brézis, Haïm, *Analyse functionelle*, Masson, Paris, 1983.

[4] da Costa, S. S. I., *Existência de soluções para uma classe de sistemas hamiltonianos fortemente indefinidos*, Dissertação de Mestrado, UFPB, http://www.mat.ufpb.br/˜ jmbo, 2001.

[5] de Figueiredo, D. G., do Ó, J. M., Ruf, B., *An Orlicz-space approach to superlinear elliptic systems*, Journal of Functional Analysis 224, no. 2, 471-496, 2005.

[6] de Figueiredo, D. G., Felmer, P. L.,*On superquadratic elliptic systems*, Trans. Amer. Math. Soc., 343, 99-116, 1994.

[7] de Figueiredo, D. G., Miyagaki O., Ruf, B., *Elliptic equations in* $\mathbb{R}^2$ *with nonlinearities in the critical growth range*, Calculus Variations Partial Differential Equations 3, 139-153, 1995.

[8] Deimling, Klaus, *Nonlinear Funcional Analysis*, Springer Verlag, Berlin, 1985.

[9] Donaldson, T. K., Trudinger, N. S., *Orlicz-Sobolev spaces and imbedding theorems*, Journal of Functional Analysis, 8, 52-75, 1971.

[10] Fernadez, Pedro Jesus, *Medida e integração*, Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2002.

[11] Gossez, J. P., *Orlicz spaces, Orlicz-Sobolev spaces and strongly nonlinear elliptic problems*, Trabalho de Matemática, No. 103, Departamento de Matemática, Universidade de Brasília, 1976.

[12] Hulshof, J., van der Vorst, R, *Differential systems with strongly indefinite variatonal structure, J. Funct. Anal.*, 114, 32-58, 1993.

[13] Krasnosel'skiĭ, M. A., Rutickiĭ, J. B., *Convex Functions and Orlicz Spaces, translated from the first Russian edition by Leo F. Boron*, P. Noordhoff, Ltd. Groningen, Holanda, 1961.

[14] Lima, Elon Lages, *Curso de análise vol.1*, 11 ed., Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 2004.

[15] Orlicz, W. R., *Über eine gewisse Klasse von Räumen vom Typus B in Bull*, Int. Acad. Polon. Sci. A, 8/9, 207-220, 1932.

[16] Rabinowitz, Paul H., *Minimax Methods in Critical Point Theory with Applications to Differential Equations*, CBMS Regional Conference Series in Mathematics, vol. 65, AMS, Providence, RI, 1986.

[17] Rao, M. M., Ren, Z. D., *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and textbooks in pure and applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker, Inc. New York, 1991.

[18] Niremberg L., *Topics in nonlinear functional analysis*, Courant Institute, New York University, 1974.