



DISCIPLINA: CÁLCULO I

Professor: Jamilson R. Campos

PERÍODO:
2008.2

TURMA(S):
01

DATA:
15 / 04 / 2009

LISTA DE EXERCÍCIOS Nº 2

Limite e Continuidade de Funções de uma variável real.

2.1 Em cada caso abaixo calcule o limite de $f(x)$, quando $x \rightarrow a$.

(a) $f(x) = 2x + 5$; $a = -7$ (b) $f(x) = \frac{3}{\sqrt{3x+1}+1}$; $a = 0$

(c) $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$; $a = -5$ (d) $f(x) = \frac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$; $a = -2$

(e) $f(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$; $a = 1$ (f) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+8} - 3}{x + 1}$; $a = -1$

(g) $f(x) = \frac{x^4 - 1}{x^3 - 1}$; $a = 1$ (h) $f(x) = \frac{3 - \sqrt{x}}{9 - x}$; $a = 9$

(i) $f(x) = \frac{x^2 + x}{x}$; $a = 0$ (j) $f(x) = \frac{x^2 + 8x - 20}{x^2 - x - 2}$; $a = 2$

(k) $f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x}}{\sqrt{x-1} - x}$; $a = 3$ (l) $f(x) = \frac{x^4 - 2x + 1}{x^3 + 2x^2 + 1}$; $a = 1$

(m) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{2}}{x - 2}$; $a = 2$ (n) $f(x) = \frac{(3 - x^3)^4 - 16}{x^3 - 1}$; $a = 1$ (faça $u = 3 - x^3$)

(o) $f(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2+3} - 2}{x^2 - 1}}$; $a = 1$ (p) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x+2} - 1}{x + 1}$; $a = -1$ (faça $u = \sqrt[3]{x+2}$)

2.2 Se f é uma função definida em $\mathbb{R}$ e $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, mostre que:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = 3$ (b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x} = 0$

2.3 Se $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x^2} = 1$, calcule $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ e $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{x}$.

2.4 Sabendo-se que $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 5}{x - 2} = 3$, calcule $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

2.5 Se φ é uma função tal que $1 - \frac{x^2}{4} \leq \varphi(x) \leq 1 + \frac{x^2}{2}$, $\forall x \neq 0$, calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x)$.

2.6 Sejam f e g funções definidas em D , tais que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ e $|g(x)| \leq M$, $\forall x \in D$, sendo M

uma constante positiva. Use o Teorema do Sanduíche e mostre que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = 0$.

2.7 Considere a função g definida por $g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \leq 0 \\ -1, & \text{se } x > 0 \end{cases}$. Investigue a existência dos limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} x^2 g(x).$$

2.8 Em cada caso abaixo, calcule os limites laterais de f no ponto a .

(a) $f(x) = \frac{x+3}{x+2}, a = -2$

(b) $f(x) = \frac{x}{(x-2)^2}, a = 2$

(c) $f(x) = \frac{2-x}{(1-x)^3}, a = 1$

(d) $f(x) = \frac{x^2-4}{|x-2|}, a = 2$

(e) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+4x+5}-\sqrt{5}}{x}, a = 0$

(f) $f(x) = \frac{(x+3)|x+2|}{x+2}, a = -2$

(g) $f(x) = \frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}, a = 1$

(h) $f(x) = \frac{x+3}{|x^2-9|}, a = -3$

(i) $f(x) = \frac{x^2-1}{|x-1|}, a = 1$

(j) $f(x) = \frac{x+2}{|x^2-4|}, a = -2$

2.9 Calcule $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2}$ e verifique se existe o limite $\lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{x-2}$.

2.10 Calcule os limites laterais indicados.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$

(e) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{x-3}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5}{x-3}$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x}$

(h) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-3}{x^2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{x^2-x}$

(j) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3}{x^2-x}$

(k) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2-3x}{x^2-6x+9}$

(l) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{|x-1|}{x-1}$

(m) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x+1}{x^2+x}$

(n) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2-4}{1-x^2}$

(o) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$

(p) $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2+3}{x^2-1}$

2.11 Calcule os seguintes limites no infinito.

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 3x + 2)$

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 - 3x + 2)$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 + 2x + 1)$

(d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^3 + 2x + 1)$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$

(f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (5 - 4x + x^2 - x^5)$

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^3 + 2}$

(h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^3 + 2}$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x} + 1}{x + 3}$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x+3})$

(k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+3})$

(l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^3+3})$

(m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{x^3+3})$

(n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5-x}{3+2x}$

(o) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - \sqrt{|x|}}{\sqrt{1-x}}$

2.12 Calcule $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, onde a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & \text{se } x \neq 1 \\ 3, & \text{se } x = 1 \end{cases}$.

Esta função é contínua em $x = 1$?

2.13 Seja f uma função real contínua, definida em torno do ponto $a = 1$, tal que $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$, para $x \neq 1$. Quanto vale $f(1)$? Por quê?

2.14 Determine o valor de k , de modo que cada uma das funções dadas abaixo seja contínua no ponto a indicado.

$$(a) a = 2; f(x) = \begin{cases} \frac{x^3 - 8}{x - 2}, & \text{se } x \neq 2 \\ k, & \text{se } x = 2 \end{cases} \quad (b) a = 3; f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}, & \text{se } x > 0 \text{ e } \neq 3 \\ k, & \text{se } x = 3 \end{cases}.$$

2.15 Seja f a função definida por: $f(-1) = 2$ e $f(x) = \frac{x^2 + x}{x + 1}$, para $x \neq -1$. A função f é contínua no ponto $x = -1$? Por quê? E no ponto $x = 0$?

2.16 Dê exemplo de uma função f , definida em $\mathbb{R}$, descontínua no ponto $x = 2$, mas que satisfaça

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x).$$

2.17 Qual das afirmações abaixo é verdadeira?

$$(a) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \implies f \text{ é contínua em } x = a;$$

$$(b) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| \text{ existe, então } \lim_{x \rightarrow a} f(x) \text{ também existe;}$$

$$(c) \text{ Se } \lim_{x \rightarrow a} |f(x)| = 0, \text{ então } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0.$$

2.18 Seja f uma função tal que $|f(x)| \leq x^2$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua em $x = 0$.

2.19 Esboce o gráfico e encontre os pontos de descontinuidade da função f , definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^2 + 3}{5}, & \text{se } x \leq 1 \\ 6 - 5x, & \text{se } 1 < x < 3 \\ x - 3, & \text{se } x \geq 3 \end{cases}.$$

2.20 Em cada caso, esboce o gráfico da função e diga se ela é contínua no ponto a indicado.

$$(a) a = 0; f(x) = \begin{cases} 2 - x, & \text{se } x > 1 \\ x^2, & \text{se } x \leq 1 \end{cases} \quad (b) a = 0; f(x) = \begin{cases} \frac{x - 2}{|x - 2|}, & \text{se } x \neq 2 \\ 1, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

$$(c) a = -1; f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \quad (d) a = 1; f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < 0 \\ [x], & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Nota: No Exercício 2.20(d), $[x]$ representa o *maior inteiro menor ou igual a x* e a função correspondente $x \mapsto [x]$ é denominada *função escada*.

2.21 Existe um número real α capaz de fazer com que $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + \alpha x + \alpha + 3}{x^2 + x - 2}$ exista?

2.22 Uma companhia ferroviária cobra R\$10,00 por km , para transportar um vagão até uma distância de $200km$, cobrando ainda R\$8,00 por cada km que exceda a 200. Além disso, essa mesma companhia cobra uma taxa de serviço de R\$1.000,00 por vagão, independentemente da distância a percorrer.

Determine a função que representa o custo para transportar um vagão a uma distância de x km e esboce seu gráfico. Essa função é contínua em $x = 200$?

2.23 Uma fábrica é capaz de produzir 15.000 unidades de um certo produto, em um turno de 8 horas de trabalho. Para cada turno de trabalho, sabe-se que existe um custo fixo de R\$2.000,00, relativo ao consumo de energia elétrica. Supondo-se que, por unidade produzida, o custo variável, dado o gasto com matéria prima e salários, é de R\$2,00, determine a função que representa o custo total para a fabricação de x unidades e esboce seu gráfico. A função encontrada é contínua para $0 \leq x \leq 45.000$?

2.24 Um estacionamento cobra R\$3,00 pela primeira hora, ou parte dela, e R\$2,00 por hora sucessiva, ou parte dela, até o máximo de R\$10,00. Esboce o gráfico do custo do estacionamento como uma função do tempo decorrido e analise as discontinuidades dessa função.

2.25 Prove que a equação $x^5 + x + 1 = 0$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[-1, 0]$.

2.26 Prove que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais e distintas.

2.27 Considere a função f definida por: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{se } -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 - 2, & \text{se } 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$. Mostre que não existe um número α no intervalo $[-2, 2]$ tal que $f(\alpha) = 0$. Isto contradiz o corolário do Teorema do valor Intermediário?

2.28 Explique por que os limites abaixo não existem.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x-1} \quad (c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+3}{(x-1)(x+2)} \quad (d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+3}{x}$$

Respostas

2.1

- (a) -9 (c) -7 (e) 4 (g) $4/3$
 (i) 1 (k) $1/(3 - \sqrt{2})$ (m) $1/3\sqrt[3]{4}$ (n) -32 (o) $1/2$

2.2 (a) Faça $u = 3x$ e note que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(3x)}{x} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u}$. Em (b), fazendo $u = x^2$, encontramos $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2)}{x} = \pm \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sqrt{u}f(u)}{u}$

2.3 4 e -2 **2.4** 5 **2.5** 1 **2.6** Temos: $0 \leq |f(x) \cdot g(x)| \leq M |f(x)|$

2.7 A função $g(x)$ não tem limite em $x = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 g(x)] = 0$

2.8

	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)
$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	-4	$2\sqrt{5}/5$	-1	$-\sqrt{2}$	$-1/6$	-2	$1/4$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	4	$2\sqrt{5}/5$	1	$\sqrt{2}$	$1/6$	2	$-1/4$

2.9 Quando $x \rightarrow 2^+$ o limite existe e vale 0 . Quando $x \rightarrow 2^-$ o limite não existe.

2.10

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)	(p)
∞	$-\infty$	∞	∞	∞	$-\infty$	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	∞	∞	∞	$-\infty$	1	$-\infty$

2.11

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)	(i)	(j)	(k)	(l)	(m)	(n)	(o)
∞	∞	∞	$-\infty$	$-\infty$	∞	$5/6$	$5/6$	0	∞	0	$-\infty$	$-\infty$	$-1/2$	-1

2.12 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$ e $f(1) = 3$. Logo, f é descontínua em $a = 1$.

2.13 Como f é contínua em $a = 1$, devemos ter $f(1) = -1$.

2.14 (a) $k = 12$ (b) $k = \sqrt{3}/6$

2.15 f é contínua em -1 e descontínua em 0 .

2.16 Considere, por exemplo, a função f definida assim: $f(x) = x$, para $x \neq 2$ e $f(2) = 0$.

2.17 (a) falsa. (b) falsa (c) verdadeira.

2.18 Use o Teorema do Sanduíche.

2.19 $x = 3$ é a única descontinuidade de f .

2.20 (a) sim (b) sim (c) não (d) não.

2.21 Se $\alpha = 15$, o limite será 1.

2.22 Se $x \leq 200$, o custo $C(x)$ é determinado em reais por $C(x) = 1.000 + 10x$. O custo para uma distância de 200 km é, portanto, $C(200) = R\$3.000,00$. Se a distância excede 200 km, isto é, se $x > 200$, então o custo total será dado por $C(x) = 3.000 + 8(x - 200)$. Resumindo, temos:

$$C(x) = \begin{cases} 1000 + 10x, & \text{se } 0 < x \leq 200 \\ 1400 + 8x, & \text{se } x > 200 \end{cases}$$

e essa função é contínua em $x = 200$.

2.23 Se $0 \leq x \leq 15000$, um único turno de trabalho será suficiente e, assim, $C(x) = 2000 + 2x$. Se $15000 < x \leq 45000$, então a fábrica deverá operar em 3 turnos e, nesse caso, $C(x) = 6000 + 10x$.

A função custo é descontínua no intervalo considerado.

2.24 As descontinuidades ocorrem nos pontos $t = 1$, $t = 2$, $t = 3$ e $t = 4$.

2.27 Não. Como a função não é contínua em $[-2, 2]$, o fato não contradiz o resultado citado.

2.28 Em cada caso note que os limites laterais, quando existem, são diferentes.