Integral de Linha de um Campo Vetorial

Suponha que uma partícula se move ao longo de uma curva C, sob a ação de um campo de forças $\vec{F}$. Qual é o trabalho realizado pela força $\vec{F}$, quando a partícula se desloca de um pto $A \in C$ até um pto $B \in C$.

Seja $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ uma parametrização de C e suponha que

$$\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\vec{i} + Q(x,y)\,\vec{j} .$$

Se $\vec{F}$ é constante e C é um segmento de reta, então sabemos que o trabalho é dado por:

$$\boxed{W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}}$$

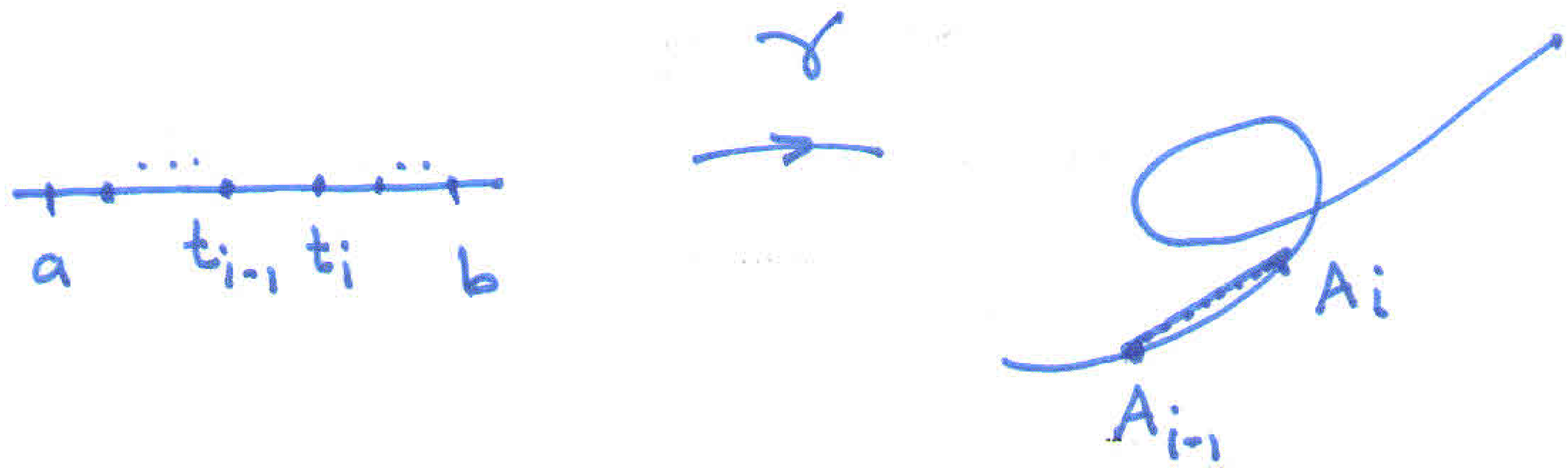
No caso geral fazemos o que segue-se:

dividimos o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, do mesmo comprimento,

$$[t_{i-1}, t_i], \quad i = 1, \ldots, n$$

$$\Delta t = t_i - t_{i-1} = \frac{b-a}{n}$$

Isto nos dá n subarcos $\gamma([t_{i-1}, t_i]) = C_i$
e n segmentos $[A_{i-1}, A_i]$ com $A_i = \gamma(t_i) = (x(t_i), y(t_i))$



Supondo que $\vec{F}$ é constante ao longo do segmento $[A_{i-1}, A_i]$, o trabalho ao longo de C_i é aprox.

$$W_i = \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot \overrightarrow{A_{i-1} A_i}$$

$$= \vec{F}(\gamma(t_i)) \cdot (A_i - A_{i-1})$$

$$= P(x(t_i), y(t_i))\, \Delta x + Q(x(t_i), y(t_i))\, \Delta y$$

onde,
$$\Delta x = x(t_i) - x(t_{i-1})$$
$$\Delta y = y(t_i) - y(t_{i-1})$$

Pelo teor. do valor médio temos:

$$\Delta x = x'(t_i^*)\, \Delta t \quad \text{com} \quad t_i^* \in \,]t_{i-1}, t_i[$$

$$\Delta y = y'(t_i^{**})\, \Delta t \quad \text{com} \quad t_i^{**} \in \,]t_{i-1}, t_i[\,.$$

Assim,

$$W_i \cong \left[P(x(t_i), y(t_i))\, x'(t_i^*) + Q(x(t_i), y(t_i))\, y'(t_i^{**})\right]\Delta t$$

e logo,

$$W \cong \sum_{i=1}^{n} (P x' + Q y')\, \Delta t \quad := S_n \, .$$

Definimos

$$\boxed{W := \lim_{\Delta t \to 0} S_n}$$

ou seja, se o limite existe,

$$\boxed{W = \int_a^b \left\{P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t)\right\} dt}$$

Isto sugere a seguinte definição:

Def.: Seja $C \subset \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada por $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ de classe C^1 e t.q. $\gamma'(t) \neq 0 \ \forall t \in [a,b]$. Seja $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ um campo contínuo sobre C. Então a integral de linha do campo F ao longo de C é definida por

$$\boxed{\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt}$$

$$\int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_a^b P\,dx + Q\,dy + R\,dz$$

onde $dx = x'\,dt$, $dy = y'\,dt$, $dz = z'\,dt$.

$$\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Obs

(1) Se C é regular por partes e $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$ com C_j, $j = 1, \ldots, k$, regular, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \ldots + \int_{C_k} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

(2) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ não depende da parametrização da curva C, desde que não se inverta sua orientação.

Se denotamos por C^- a curva C percorrida no sentido contrário, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{C^-} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Exemplos:

(1) Calcule $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ e C é a hélice param. por

$\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solução:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\cos t, \operatorname{sen} t, t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)\, dt$$

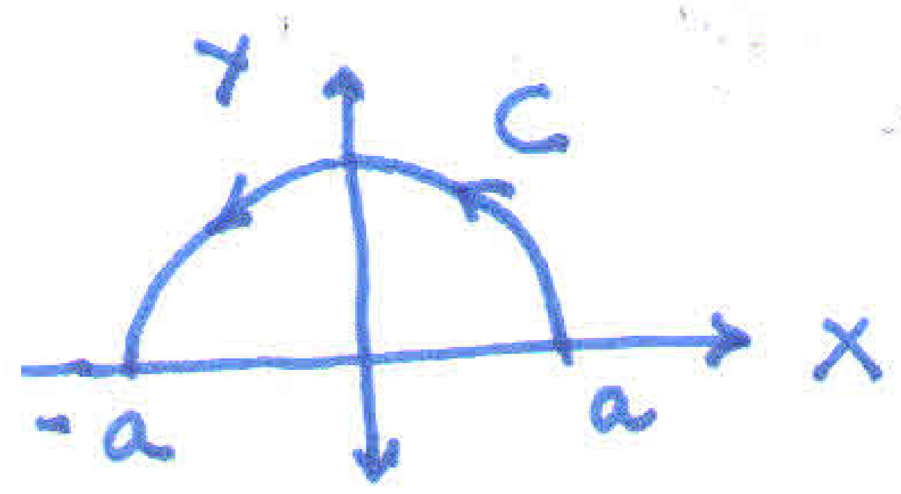
$$= \int_0^{2\pi} (\cancel{-\operatorname{sen} t \cos t} + \cancel{\operatorname{sen} t \cos t} + t)\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} t\, dt = \frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi)^2$$

$$= 2\pi^2$$

(2) Calcule $\int_C -2xy\, dx + (x^2+y^2)\, dy$ onde C é a semi circunferência $\begin{cases} x^2+y^2 = a^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$ de $(a,0)$ até $(-a,0)$

Solução :



uma parametrização para C é

$$\gamma : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\gamma(t) = (a\cos t, a \,\text{sen}\, t)$$

$$\gamma(0) = (a, 0) \quad , \quad \gamma(\pi) = (-a, 0)$$

$$\begin{cases} dx = -a \,\text{sen}\, t \, dt \\ dy = a \cos t \, dt \end{cases}$$

$$\int_C -2xy\,dx + (x^2+y^2)\,dy = \int_0^{\pi} \left[-2a\cos t \cdot a\,\text{sen}\,t\,(-a\,\text{sen}\,t) + 1 \cdot a\cos t\right] dt$$

$$= \int_0^{\pi} 2a^3 \,\text{sen}^2 t \cos t \, dt + \int_0^{\pi} a \cos t \, dt$$

$$= 2a^3 \cdot \frac{1}{3} \,\text{sen}^3 t \,\Big|_0^{\pi} + a\,\text{sen}\,t \,\Big|_0^{\pi}$$

$$= 0$$

Obs.

Se C é uma curva fechada, é usual denotar a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ por $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Teorema:

Sejam $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ um campo de classe C^2 e C uma curva regular por partes em D com pto inicial A e pto final B.

Se $\vec{F}$ é conservativo, ou seja, existe uma função $\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla \varphi = \vec{F}$, então

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_C \nabla \varphi \cdot d\vec{r} = \varphi(B) - \varphi(A)$$

(Este teorema é conhecido como: "Teorema Fundamental do Cálculo para integrais de Linha".)

Ele afirma que a integral de linha de um campo conservativo só depende dos ptos A e B e não da curva que os liga.

Em particular, se C é uma curva fechada, então

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

ou equivalentemente, se $\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} \neq 0$ para alguma curva fechada C, então $\vec{F}$ não é conservativo.

Exemplos

(1) O campo $\vec{F}(x,y) = x\vec{i} + y\vec{j}$ é conservativo, um potencial para $\vec{F}$ é $\varphi(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2)$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} = x \ , \ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = y \ . \ \text{Logo} \ \nabla\varphi = x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{F} \right)$$

Assim, qualquer que seja a curva fechada C,

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0 \quad \text{ou seja} \quad \oint_C x\,dx + y\,dy = 0$$

(2) Seja $\vec{F} : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$$F(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\vec{j}$$

Note que $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ $\quad (\vec{F} = (P,Q))$

De fato,

$$P = \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$Q = \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

Assim, $\text{rot}(\vec{F}) = 0$ em D.

Agora, se C é a circunf. $\gamma(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t)$ $0 \leq t \leq 2\pi$, então

$$\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_C \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a\,\text{sen}\,t}{a^2}(-a\,\text{sen}\,t) + \frac{a\cos t}{a^2}\,a\cos t \right] dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\text{sen}^2 t + \cos^2 t)\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi$$

$$\therefore \quad \oint_C \vec{F}\cdot dr \neq 0$$

Logo $\vec{F}$ não é conservativo.

Note que $\text{rot}(\vec{F}) = 0$

Lembre que:

Vimos que se $\vec{F}$ é conservativo, então $\text{rot}(\vec{F}) = 0$.
O exemplo acima mostra que a recíproca não vale.
i.e.

$$\text{rot}(\vec{F}) = 0 \not\Longrightarrow \vec{F} \text{ conservativo}.$$

#