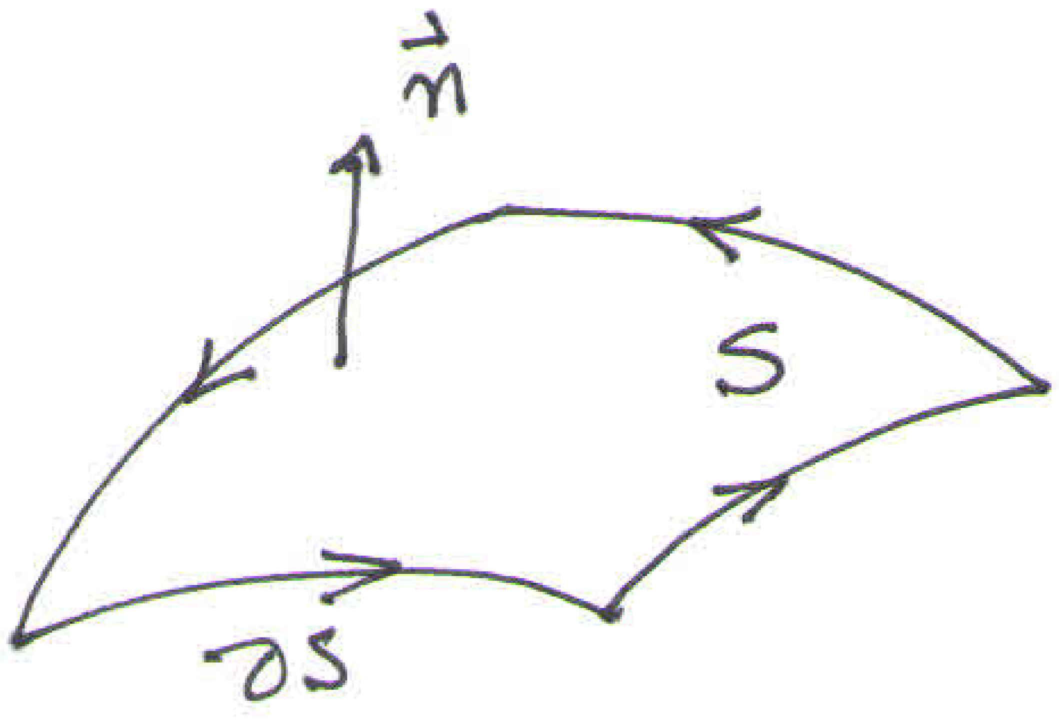
O Teorema de Stokes

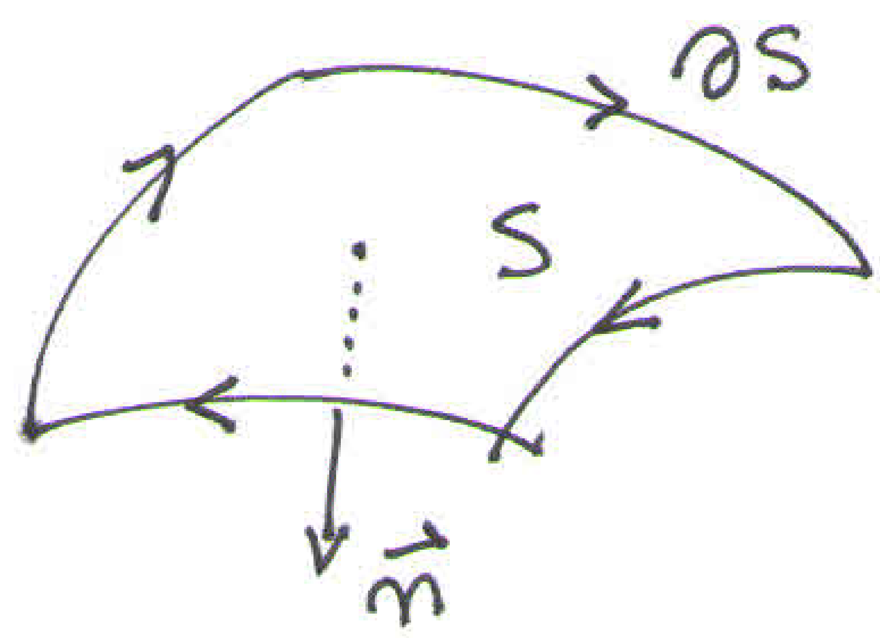
O teorema de Stokes é uma generalização ao espaço do teorema de Green.

Teorema:

Sejam $S \subseteq \mathbb{R}^3$ uma superfície regular por partes orientada pelo campo $\vec{n}$ e $\vec{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um campo de classe C^1 definido num aberto $U \subseteq \mathbb{R}^3$ t.q. $S \subseteq U$. Considere ∂S, o bordo de S, com a orientação induzida pela orientação de S. Então

$$\iint_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



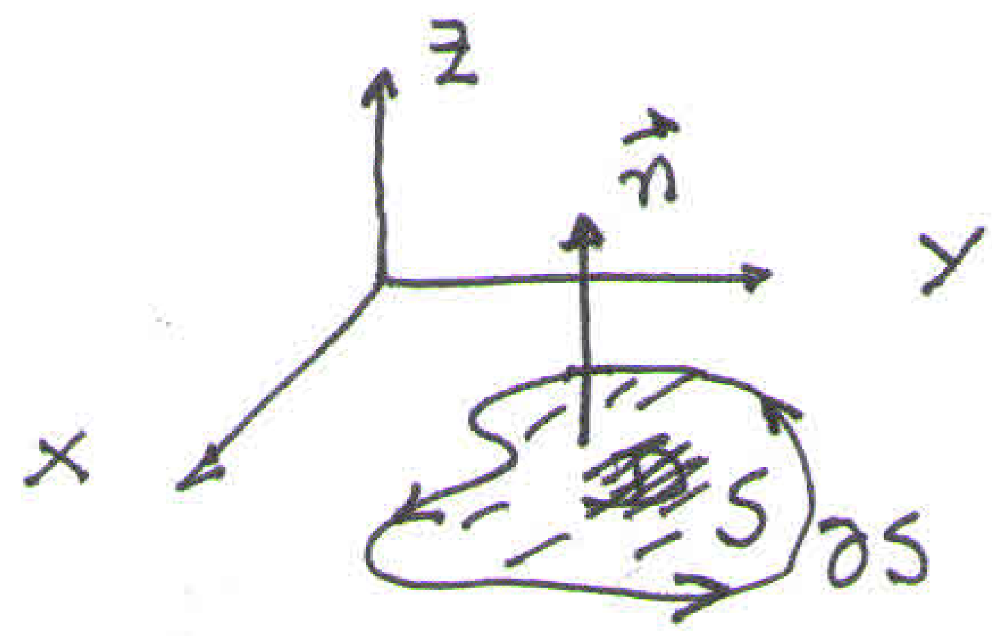


A integral $\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ é conhecida como "circulação de $\vec{F}$".

Assim, o teor. de Stokes afirma que o fluxo do rotacional de $\vec{F}$ é igual à circulação do campo $\vec{F}$.

Obs: Se S é uma superf. plana contida, por exemplo, no plano XY e orientada por $\vec{n} = \vec{k}$. Então

$$S : \begin{cases} z = 0 \\ (x,y) \in D \end{cases}$$



$dS = dx\,dy$

Se $\vec{F}(x,y) = \left(P(x,y), Q(x,y)\right)$ então

$$rot(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k}$$

e, pelo Teor. de Stokes temos

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial S} P\,dx + Q\,dy \overset{\text{stokes}}{=} \int_S rot(\vec{F}) \cdot \vec{n}\,dS$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} \cdot \vec{k}\,dx\,dy$$

$$= \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$$

Ou seja,

$$\boxed{\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy}$$

Assim, o Teor. de Stokes generaliza o Teor. de Green.

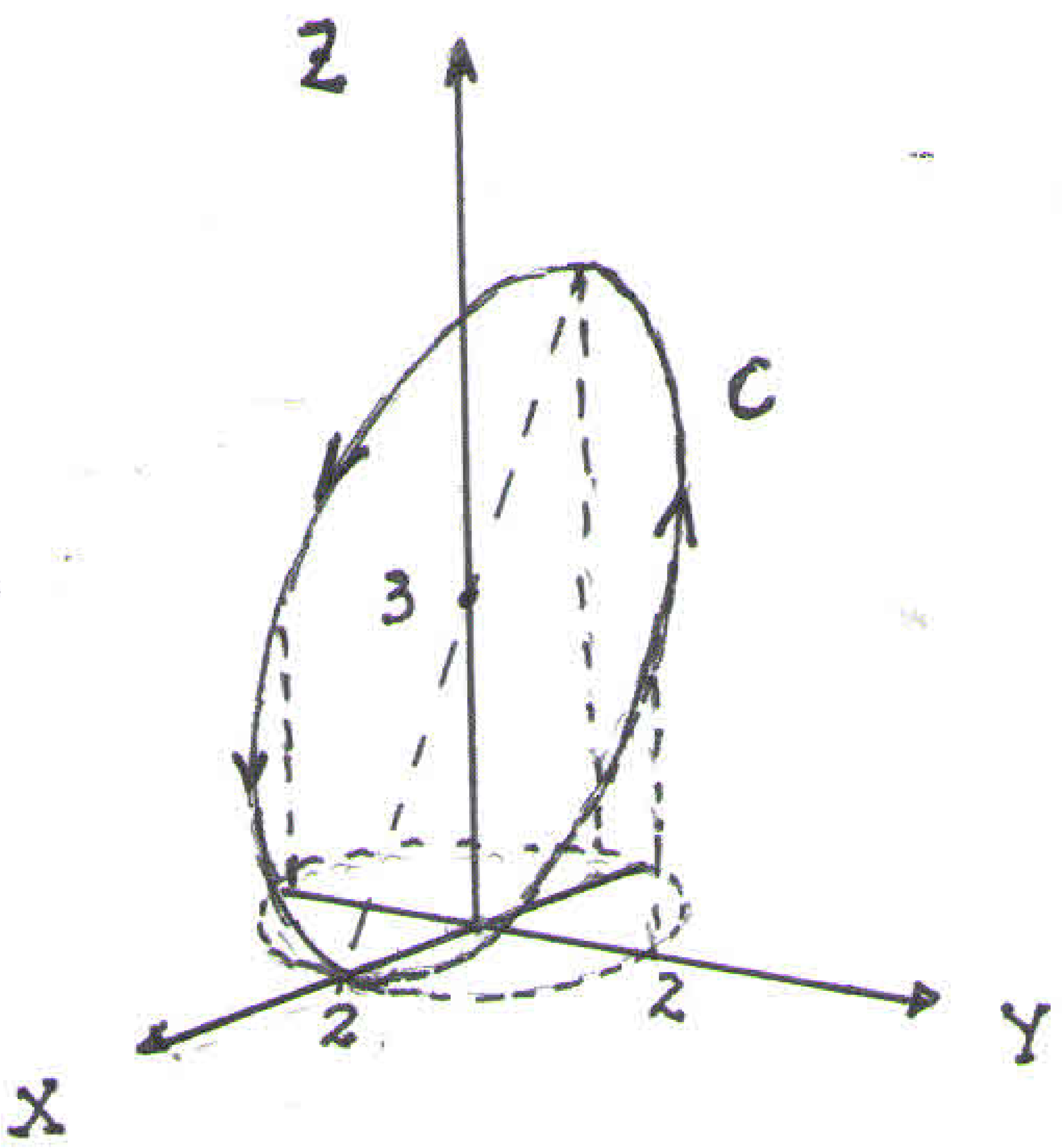
Exemplos

(1) Calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F} = (y - x + \operatorname{sen} x)\vec{i} + (z - x + \cos y)\vec{j} + (x - y + e^z)\vec{k}$$ e

C é a curva interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o plano $3x + 2z = 6$, orientada "positivamente".

Solução:



Seja S a porção do plano $3x + 2z = 6$ limitada pela curva C com orientação $\vec{n}$ apontando "para cima" $(\partial S = C)$

Podemos descrever S como gráfico da função $z = f(x,y) = 3 - \frac{3}{2}x$. Um vetor normal a S é

$\vec{N} = (-f_x, -f_y, 1) = \left(\frac{3}{2}, 0, 1\right)$, $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ e

$dS = \|\vec{N}\| dx dy$.

f está definida em $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\}$

Além disso,

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \det \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y - x + \operatorname{sen} x & z - x + \cos y & x - y + e^z \end{pmatrix}$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = (-1-1)\vec{i} + (-1)\vec{j} + (-1-1)\vec{k} = -2\vec{i} - \vec{j} - 2k$$

Teor. Stokes $\Rightarrow$ $$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, ds$$

$$= \int_D (-2,-1,-2)\cdot\left(\tfrac{3}{2},0,1\right) dx\,dy$$

$$= -5\int_D dx\,dy = -5\ \text{área}(D) = -5\cdot\pi\cdot 2^2$$

$\therefore$ $$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = -20\pi$$

(2) Sejam $\vec{F} = \left(-\frac{a}{2}y + ze^{x}\right)\vec{i} + \left(\frac{a}{2}x - ze^{y}\right)\vec{j} + xy\vec{k}$, com $a>0$

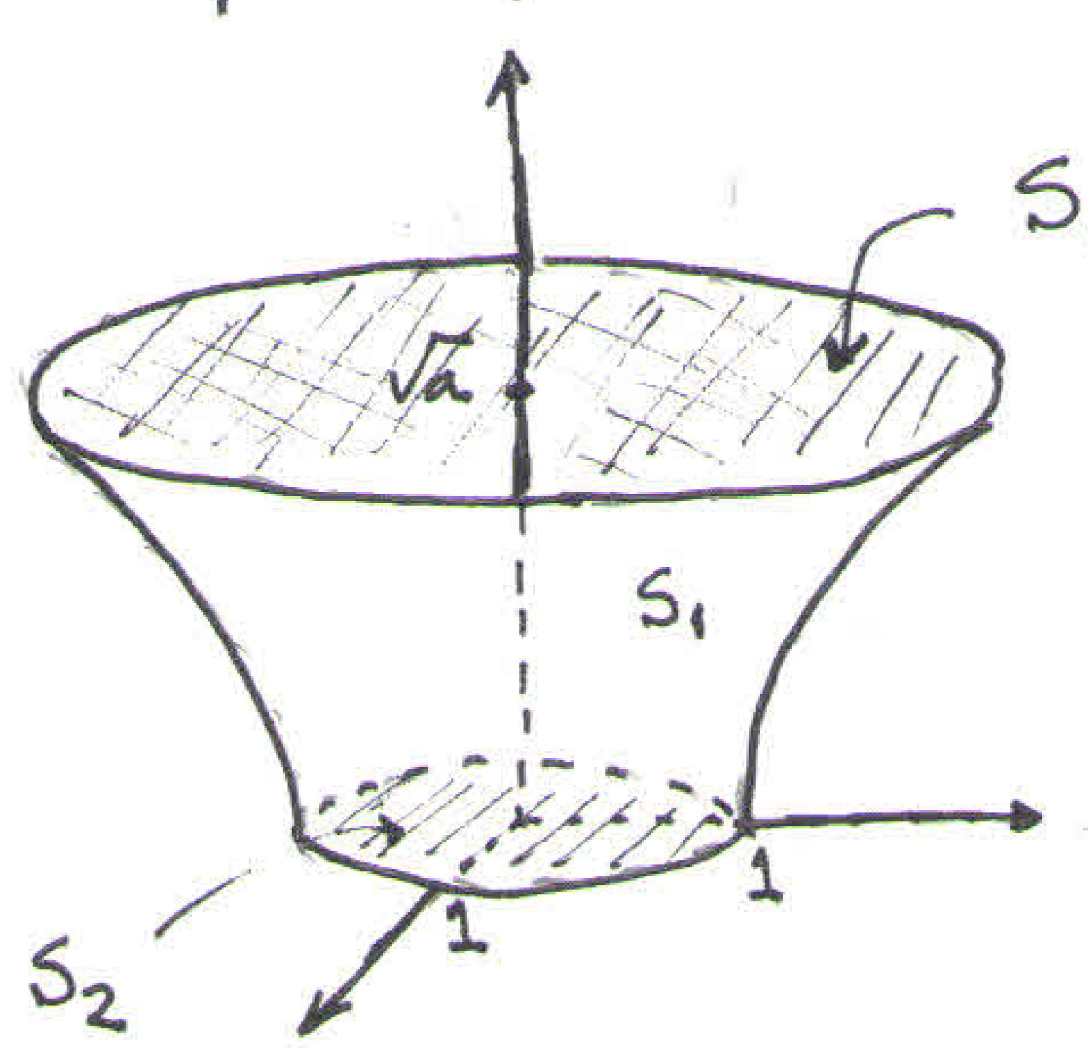
e $S = S_1 \cup S_2$, onde:

$$\begin{cases} S_1: & x^2+y^2-z^2 = 1, \quad 0 \le z \le \sqrt{a} \quad \text{e} \\ S_2: & x^2+y^2 \le 1, \quad z = 0 \end{cases}$$

Calcule o valor de a sabendo que $\int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, ds = -6\pi$ quando $\vec{n}$ aponta para fora de S.

Solução:

$S_3: \begin{cases} z = \sqrt{a} \\ x^2+y^2 \le 1+a \end{cases}$



Vamos aplicar o Teor de Stokes.

Seja W a região limitada em $\mathbb{R}^3$ t.q. $\partial W = S \cup S_3$.

Então, pelo Teorema de Gauss

$$\int_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds + \int_{S_3} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds = \int_W \operatorname{div}\left(\operatorname{rot}(\vec{F})\right) dV.$$

Como $\displaystyle\int_W \operatorname{div}\left(\operatorname{rot}(\vec{F})\right) dV = 0$, pois $\operatorname{div}\left(\operatorname{rot}(\vec{F})\right) = 0$,

e $\displaystyle\int_S \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds = -6\pi$, então:

$$\int_{S_3} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds = 6\pi .$$

Mas,

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = (x + e^y)\vec{i} + (e^x - y)\vec{j} + a\vec{k} \quad \ldots \text{(faça a conta!)}$$

logo

$$\int_{S_3} \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, ds = \int_D (x + e^y, e^x - y, a) \cdot (0,0,1)\, dxdy$$

$$\boxed{D:\ x^2 + y^2 \leq 1 + a}$$

$$= a \int_D dxdy = a \cdot \text{área}(D)$$

$$= a \cdot \pi \left(\sqrt{1+a}\right)^2 = \pi a (1+a)$$

Assim, $\pi a(1+a) = 6\pi$ e logo $a^2 + a - 6 = 0$, donde $a = 2$ ou $a = -3$ e como $a > 0$, então $\underline{\underline{a = 2}}$