O Teorema de Green

O Teorema de Green estabelece uma relação entre integrais de linha e integrais duplas. Antes de enunciá-lo precisamos esclarecer a noção de orientação para um domínio limitado em $\mathbb{R}^2$.

Def.: Seja $\mathcal{B} = \{\vec{v}_1 = (x_1, y_1), \vec{v}_2 = (x_2, y_2)\} \subset \mathbb{R}^2$ uma base de $\mathbb{R}^2$. Dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base positiva sse

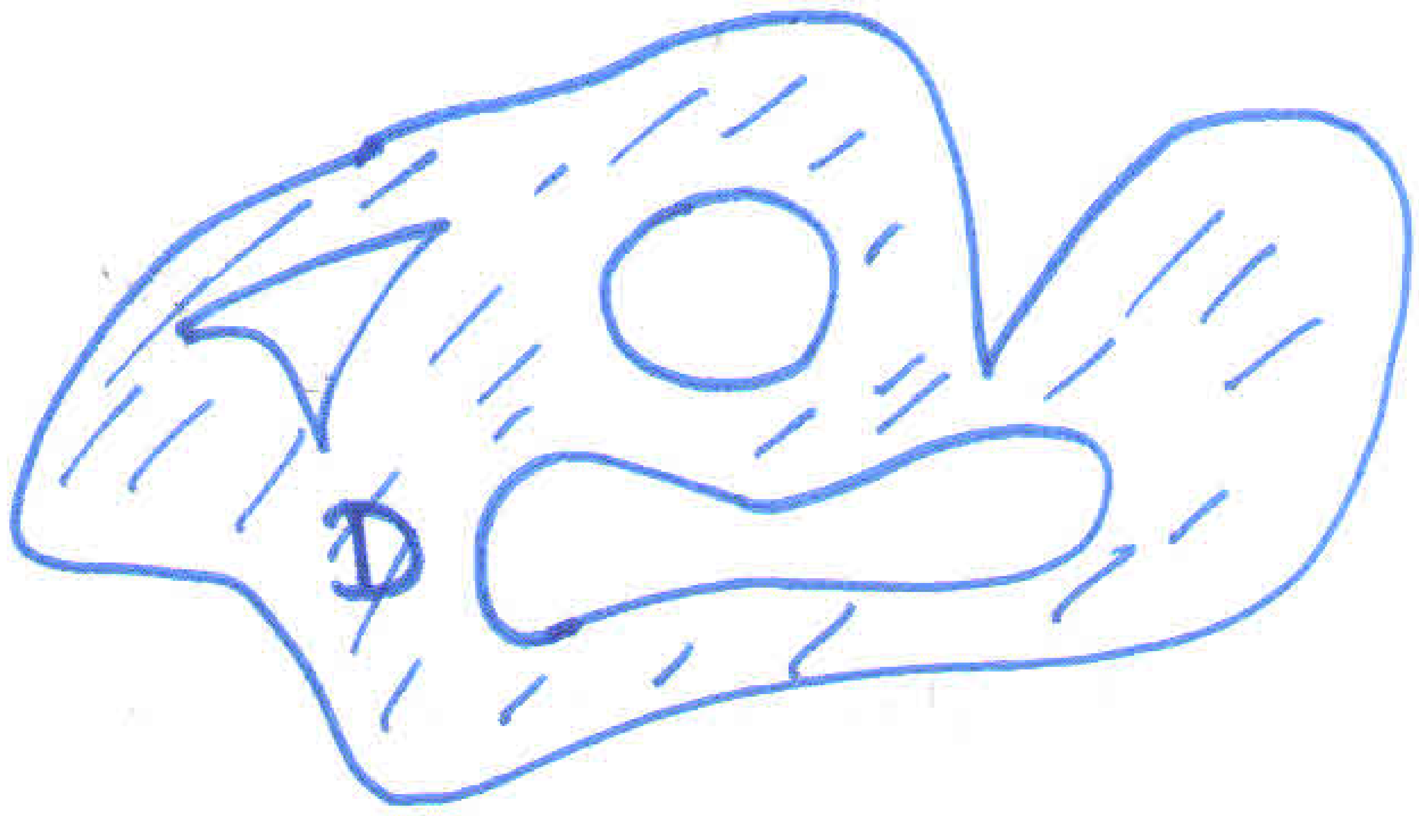
$$\det \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{bmatrix} > 0 .$$

caso contrário, dizemos que $\mathcal{B}$ é uma base negativa.

Observe que estamos considerando $\mathcal{B}$ como uma base ordenada.

Por exemplo a base canônica do $\mathbb{R}^2$, $\{(1,0), (0,1)\}$ é positiva, mas a base $\{(0,1), (1,0)\}$ é negativa.

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio fechado e limitado cujo bordo ∂D é formado por um nº finito de curvas simples, fechadas e regulares por partes que não se intersetam.

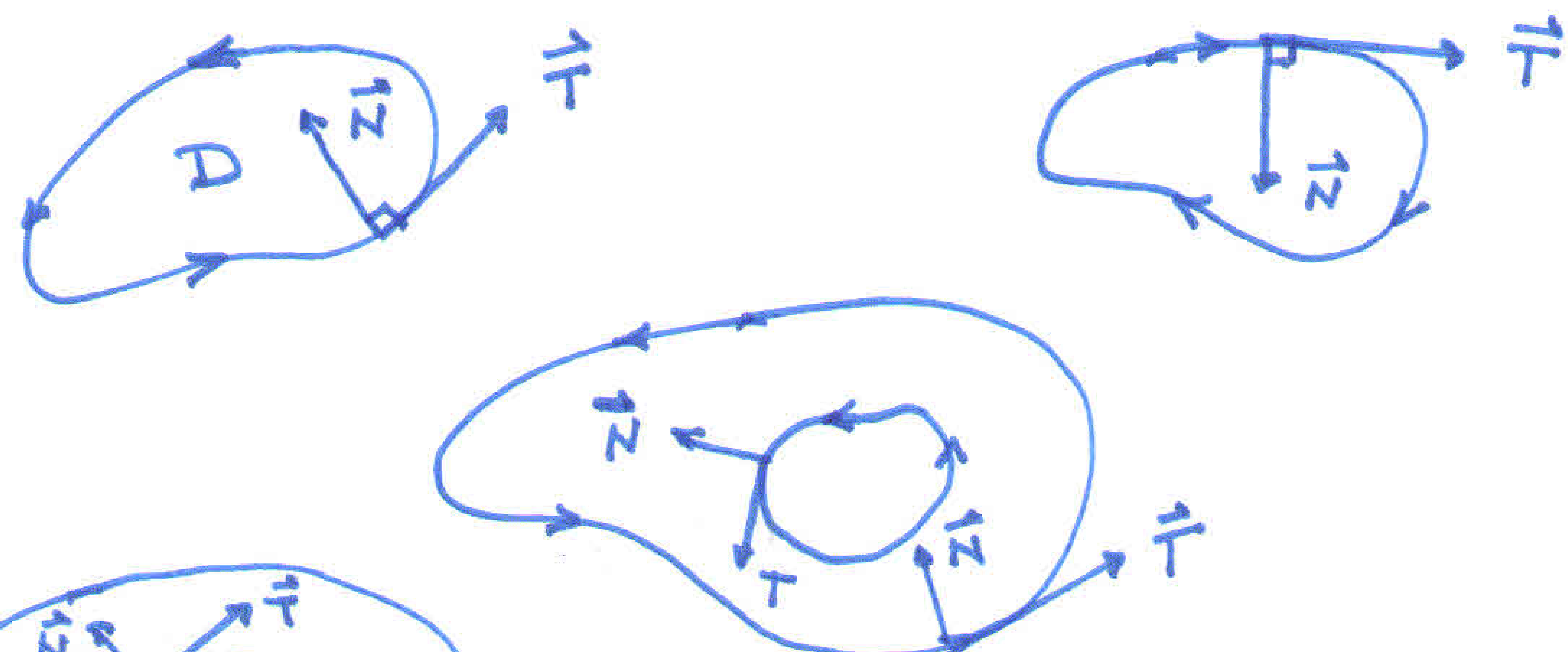


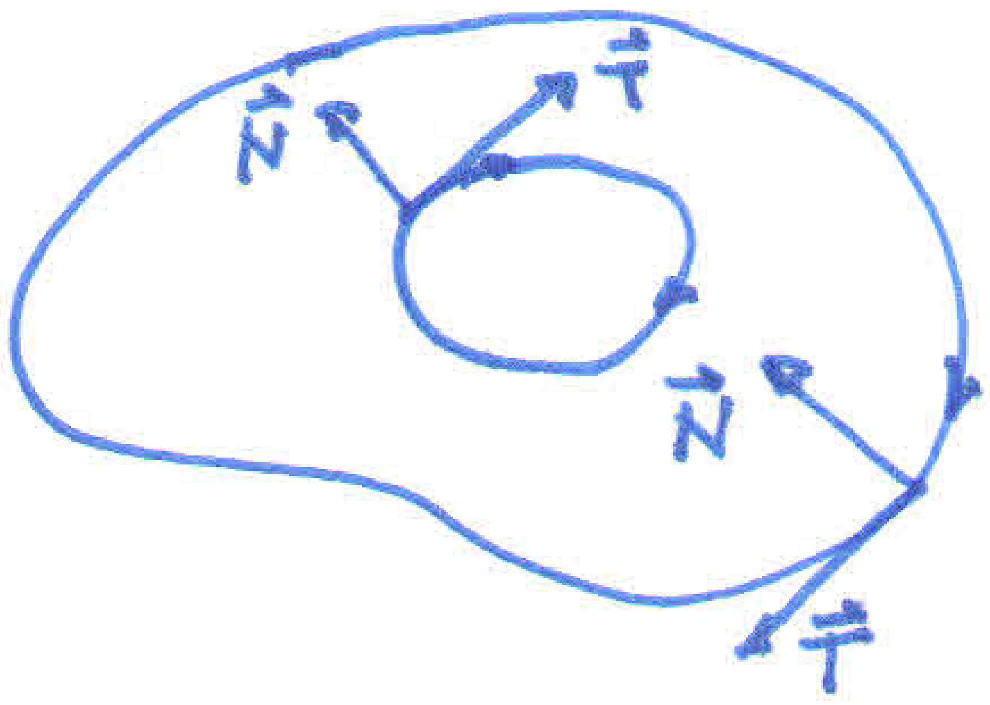
$$\partial D = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_k$$

$$C_i \cap C_j = \emptyset \quad \forall i \neq j,$$

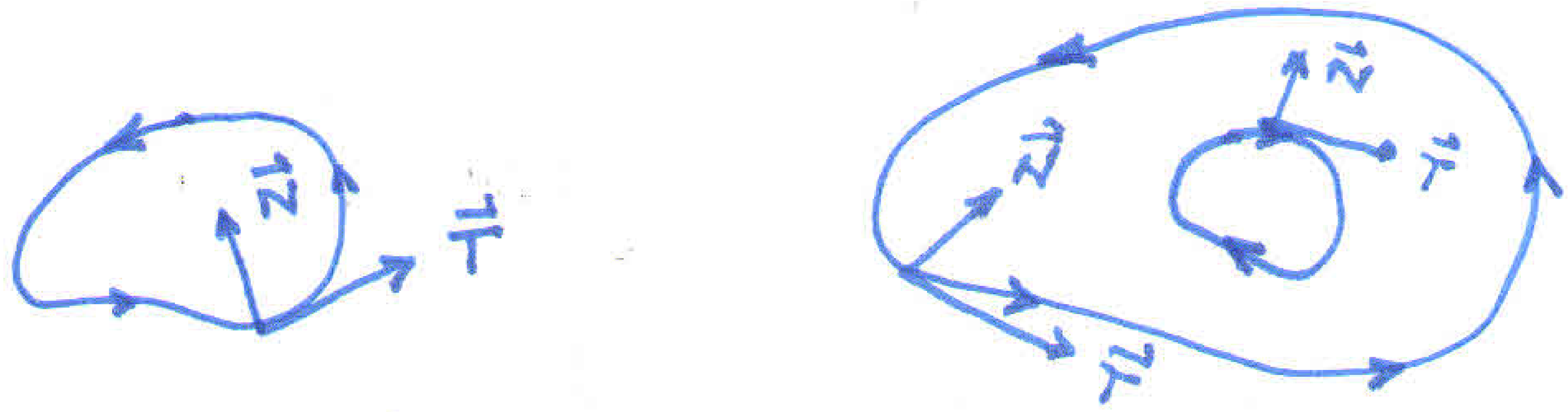
C_i fechada, simples e regular p.p.

Em cada ponto regular de cada curva do bordo ∂D, escolha uma base de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \{\vec{T}, \vec{N}\}$, de modo que $\vec{T}$ é o vetor tangente à curva no pto. em questão e $\vec{N}$ é normal à curva nesse ponto e aponta para o interior do domínio D





Dizemos que D está orientado positivamente sse a base $\{\vec{T}, \vec{N}\}$, escolhida como acima, é uma base positiva em cada ponto.



Domínios orientados positivamente

Agora podemos enunciar o Teor. de Green.

Teorema (Green)

Seja $D \subset \mathbb{R}^2$ um domínio fechado e limitado do plano cujo bordo ∂D é formado por um nº finito de curvas simples, fechadas, C^1 por partes que não se intersetam. Suponha que D está orientado positivamente e seja $\vec{F} : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ um campo de classe C^1 definido num aberto U t.q. $D \subset U$. $(\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j})$

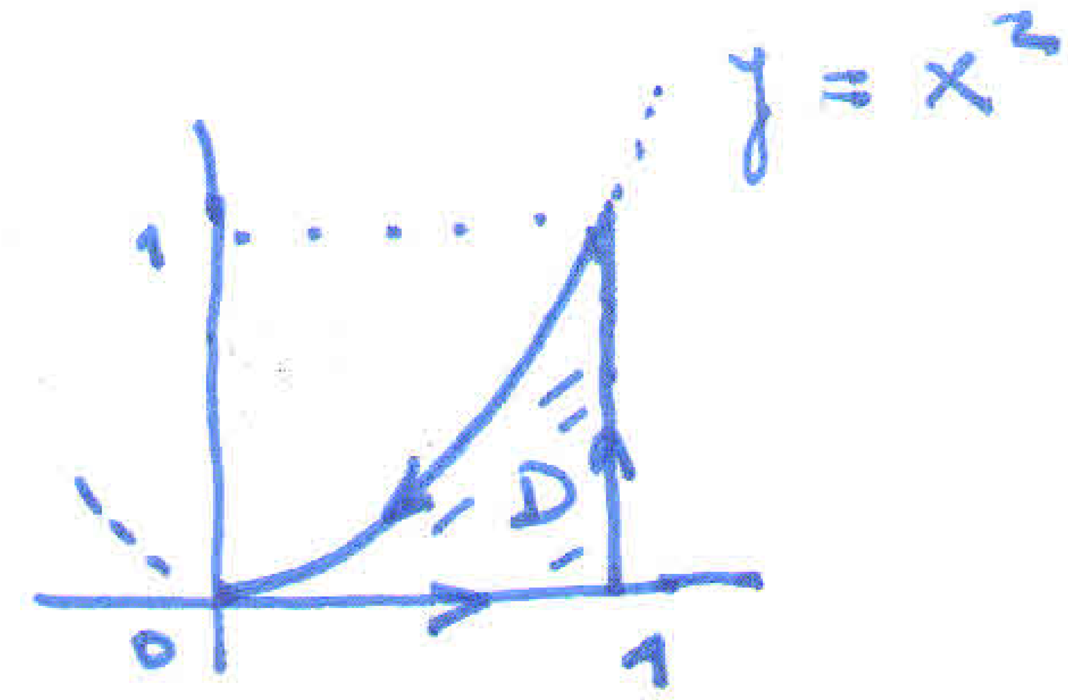
Então

$$\int_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA$$

Exemplos

① Calcule $\int_C \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy$, onde C é a curva formada pelas retas $x = 1$ e $y = 0$ e pela parábola $y = x^2$ (orientada positivamente)

Solução



Seja D a região limitada por C $(\partial D = C)$

$$\vec{F} = \sqrt{y}\,\vec{i} + \sqrt{x}\,\vec{j} \quad , \quad P = \sqrt{y} \implies \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

$$Q = \sqrt{x} \implies \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

$$\int_C \sqrt{y}\,dx + \sqrt{x}\,dy = \int_D \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dA$$

$$= \cancel{\int_0^1 \int_0^{x^2} \frac{1}{2}\left(\sqrt{x} - \sqrt{y}\right)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{y}}\right) dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\,y - 2\sqrt{y}\right)\Big|_0^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^{3/2} - 2x\right) dx$$

$$= \ldots\ldots = -3/10$$

(2) Considere o campo $\vec{F}(x,y) = -y\vec{i} + x\vec{j}$

(i.e. $P(x,y) = -y$, $Q(x,y) = x$) , então

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_D (1-(-1))\, dA = 2\int_D dA$$

$$= 2\,\text{área}(D)$$

Assim, pelo Teor. de Green ,

$$\boxed{\text{área}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx}$$

Além disso, integrando por partes, é fácil ver que

$$\int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx \quad .$$

Logo,

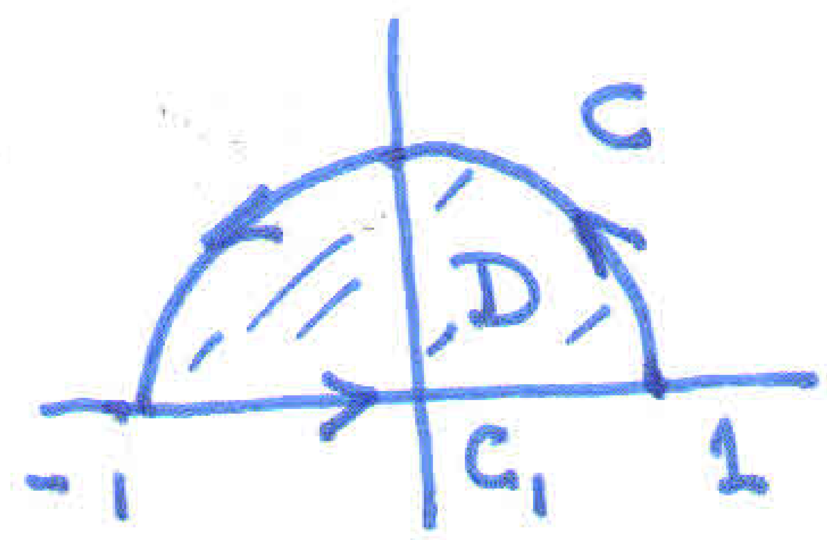
$$\boxed{\text{área}(D) = \frac{1}{2}\int_{\partial D} x\,dy - y\,dx = \int_{\partial D} x\,dy = -\int_{\partial D} y\,dx}$$

(3) Calcule $\int_C e^x \operatorname{sen} y\, dx + (e^x \cos y + x)\, dy$.

C é o semi círculo $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

orientado no sentido anti horário.

Solução:



$\tilde{C} = C \cup C_1$

C não é fronteira de região alguma ... o Teor. de Green não se aplica.

Para aplicar o Teor. consideramos a curva $\tilde{C} = C \cup C_1$ (diferenciável por partes) onde C_1 é o segmento de reta do pto $(-1,0)$ até o pto $(1,0)$. Seja D a região limitada por $\tilde{C}$ $(\partial D = \tilde{C})$. Agora podemos aplicar o Teor. de Green na região D.

$\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$ com $P = e^x \operatorname{sen} y$ e $Q = e^x \cos y + x$.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y \ , \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \cos y + 1$$

$$\int_{\tilde{C}} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = \int_D 1 \cdot dA = \text{área}(D)$$

$$= \frac{1}{2}\pi .$$

Mas

$$\int_{\tilde{C}} P dx + Q dy = \int_C P dx + Q dy + \int_{C_1} P dx + Q dy$$

Em C_1 temos $\begin{cases} y = 0 \\ x = t, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$

Logo $Pdx + Qdy = 0$ em C_1. Daí

$$\frac{1}{2}\pi = \int_C Pdx + Qdy + \int_{C_1} \cancel{Pdx + Qdy}^{\,0}$$

$$\therefore \quad \boxed{\int_C Pdx + Qdy = \frac{1}{2}\pi}$$

④ Seja $\vec{F} : \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definido por

$$\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}\,\vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2}\,\vec{j}$$

Este campo já apareceu antes.
Lembra?

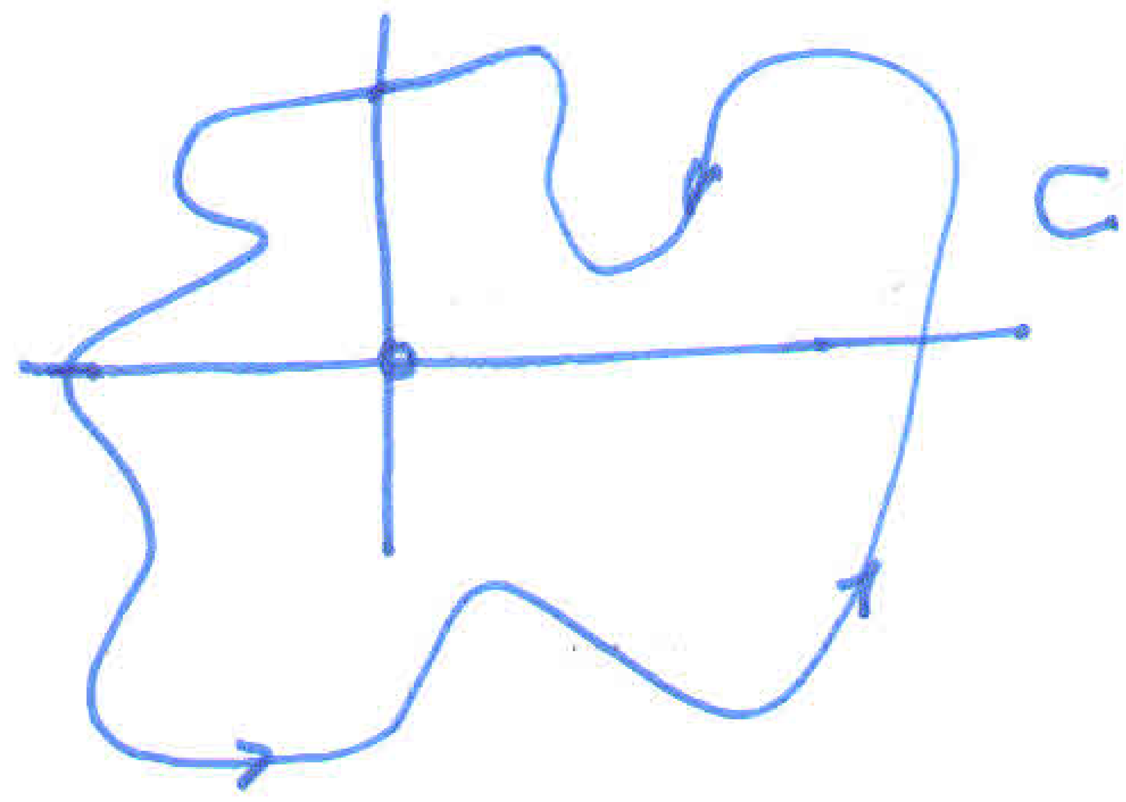
Sabemos que $\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = 0$,

ou seja, $\boxed{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0}$

Sabemos também que se C_a é um círculo com centro na origem e raio $a > 0$, então

$$\oint_{C_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi \qquad \left(\begin{array}{l}\text{a integral não depende}\\ \text{do raio } a \text{ da curva } C\end{array}\right)$$

Problema: seja C uma curva qualquer, fechada e C^1 por partes que envolve a origem (como na fig. abaixo)



Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

Solução:

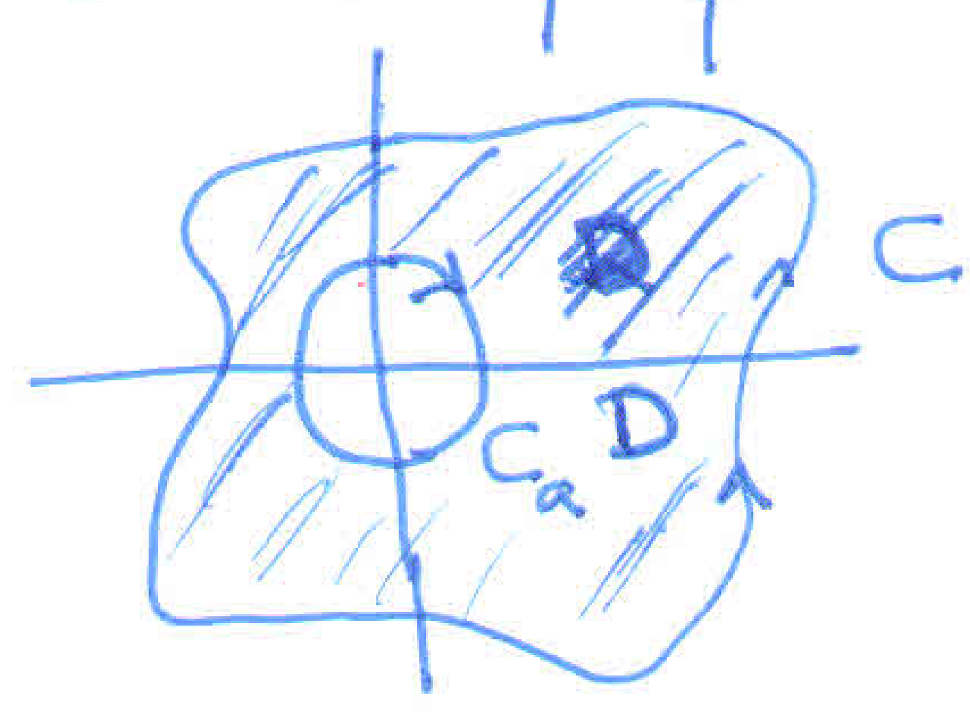
Note que a região limitada por C não está contida em $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ onde $\vec{F}$ está definido, logo... não podemos aplicar o teor. de Green.

($(0,0)$ pertence à região limitada por C)

Por outro lado, a curva é "qualquer", não temos uma parametrização, de modo que também não podemos usar a def. para calcular $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

E agora? ...

É claro que se $a > 0$ é suficientemente pequeno a curva C_a não corta a curva C



Seja D a região limitada por $C_a \cup C$, então $\partial D = C_a^- \cup C$ e D não contém o pto $(0,0)$.

Podemos aplicar o Teor. de Green na região D.

Temos:

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA = 0 \qquad \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \right)$$

Assim,

$$\oint_{\partial D} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 .$$

Logo

$$\int_{C_a^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\therefore \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\oint_{C_a^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \oint_{C_a} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

$$\therefore \boxed{\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi}$$