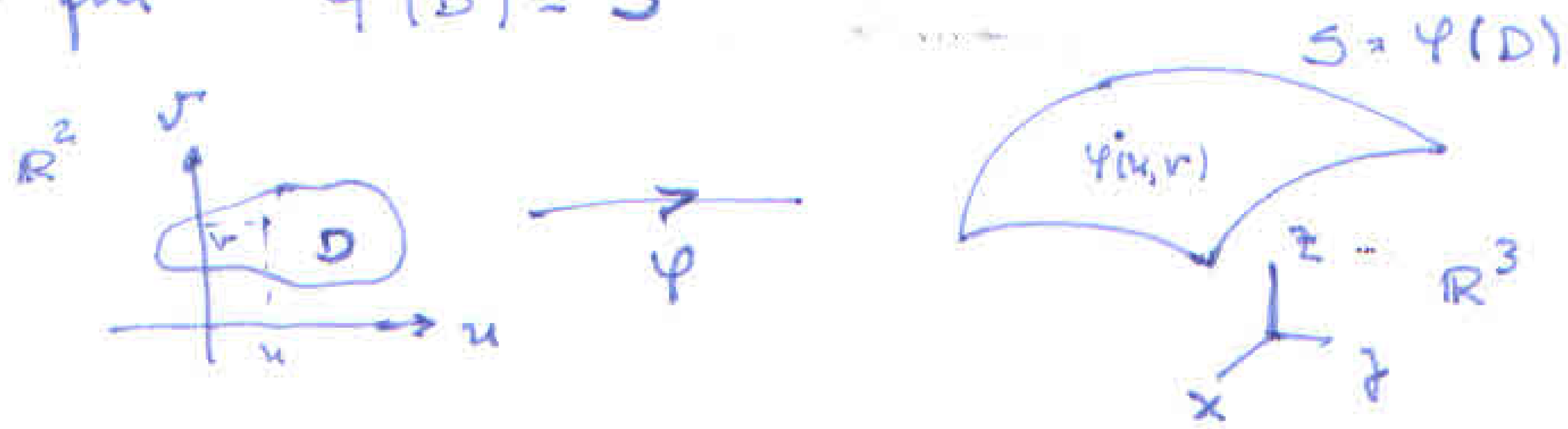
Superfícies Parametrizadas

Def: Um conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ diz-se uma superf. parametrizada se existe uma função ~~contínua~~ diferenciável

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$(u,v) \longmapsto \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

tal que $\varphi(D) = S$



$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$ são as equações paramétricas de S

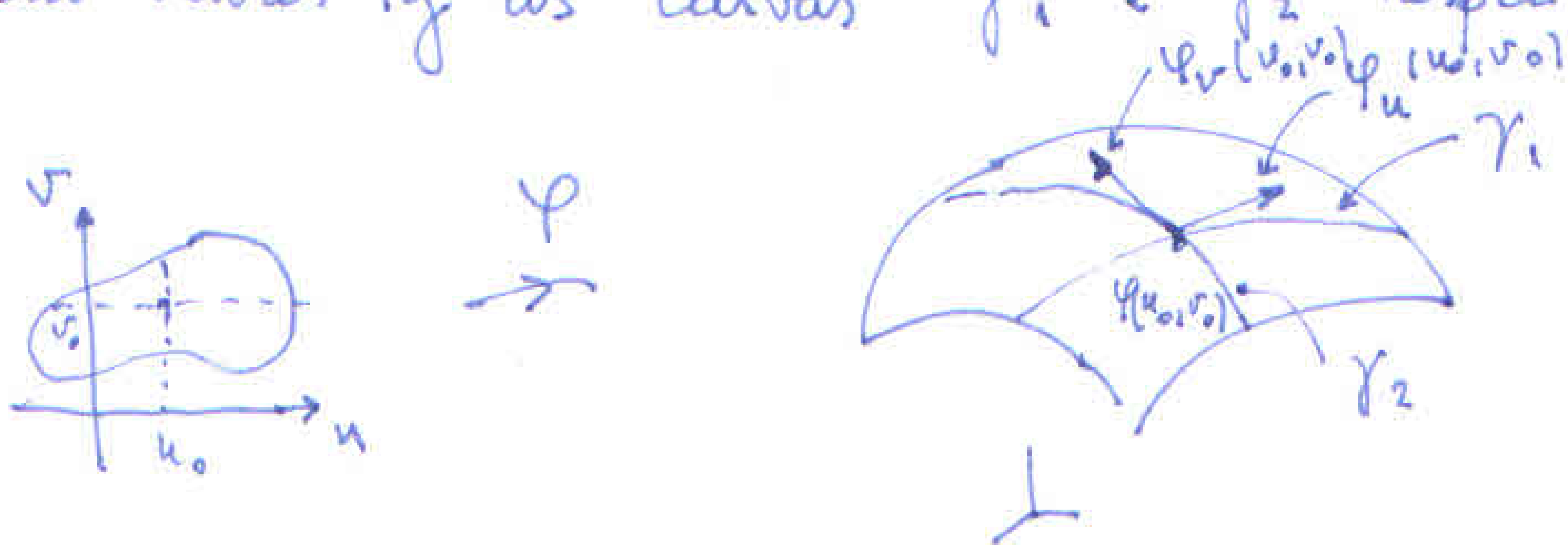
Dado um pto $(u_0, v_0) \in D$ temos as curvas diferenciáveis

$$C_1 : \gamma_1(u) := \varphi(u, v_0) = (x(u,v_0), y(u,v_0), z(u,v_0)) \quad \text{e}$$

$$C_2 : \gamma_2(v) := \varphi(u_0, v) = (x(u_0,v), y(u_0,v), z(u_0,v))$$

$$\gamma_1'(u_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_0, v_0) \quad , \quad \gamma_2'(v_0) = \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_0, v_0)$$

São vetores tg às curvas γ_1 e γ_2 respect. no pto (u_0, v_0)



$$\varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u}$$
$$\varphi_v = \frac{\partial \varphi}{\partial v}$$

Dizemos que a superf. S é regular sse o vetor

$$\vec{N} = \vec{N}(u,v) = \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \neq 0 \quad \forall (u,v) \in D.$$

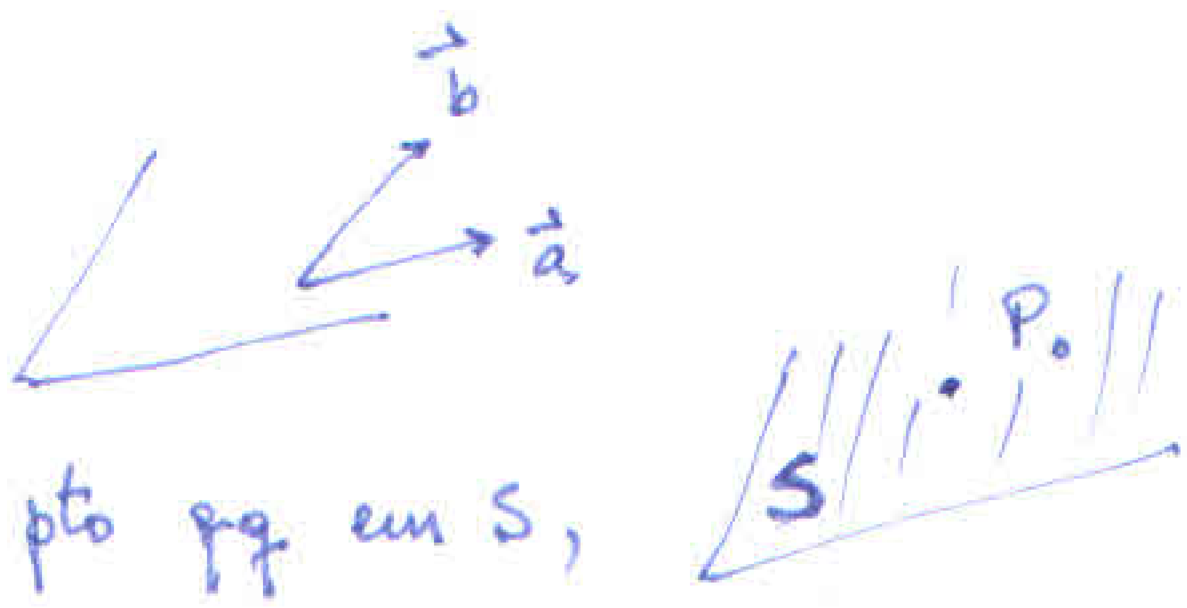
Se $\vec{N}(u_0,v_0) \neq 0$, então $\vec{N}(u_0,v_0)$ é um vetor normal a S em $\varphi(u_0,v_0)$.

O vetor $\vec{n} := \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ é um vetor normal a S que é unitário.

Alguns Exemplos:

(1) Plano

Sejam $\vec{a}$ e $\vec{b}$ vetores em $\mathbb{R}^3$ não paralelos (l.i) e seja S o plano que contém o pto P_0 e é paralelo aos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.



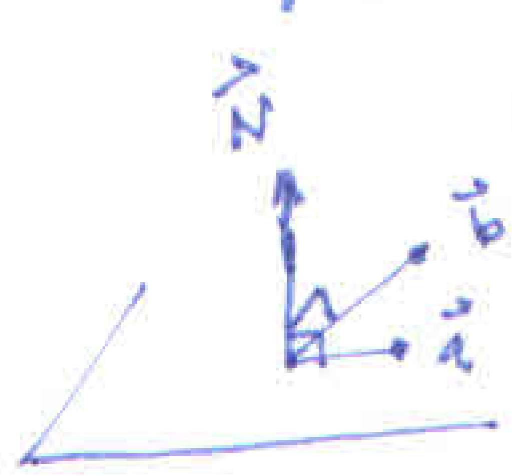
Se P é um pto qq. em S,
então existem escalares $u, v \in \mathbb{R}$ tais que

$\overrightarrow{P_0P} = u\vec{a} + v\vec{b}$, ou seja o vetor $\overrightarrow{P_0P}$ é combinação linear dos vetores $\vec{a}$ e $\vec{b}$.

Uma parametrização de S é dada por

$$\varphi(u,v) = P_0 + u\vec{a} + v\vec{b}, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

Sabemos (Geom. Analítica) que o vetor $\vec{N} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ é normal ao plano S.

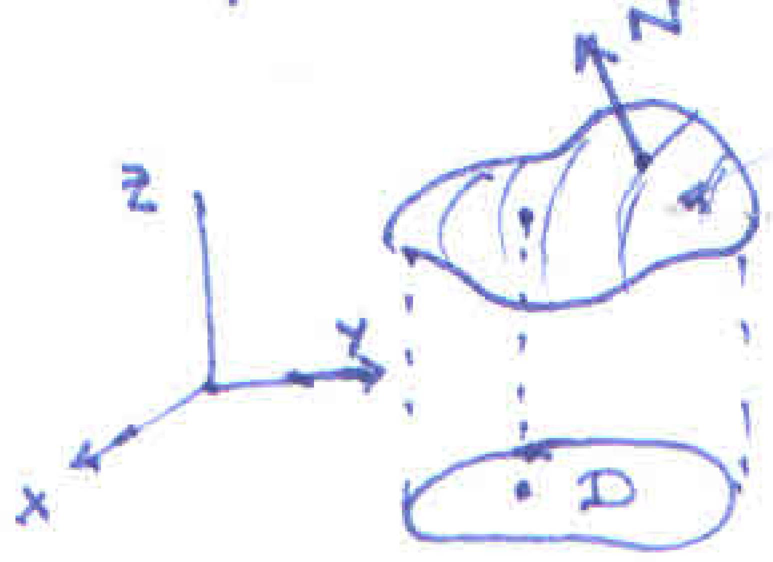


(2) O gráfico de uma função dif

Seja $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$
$(x,y) \longmapsto f(x,y) = z$.

uma função dif. (de classe C^1).

O gráfico de f é o conjunto $Graf(f) = \{(x,y,z) : z = f(x,y), (x,y) \in D\}$



Uma parametrização (canônica) para $S = Graf(f)$ é dada por:

$$\varphi : D \to \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y) = (x, y, f(x,y))$$

Um vetor normal é

$$\vec{N} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} = (1, 0, f_x) \wedge (0, 1, f_y)$$

$$= (-f_x, -f_y, 1).$$

Como $\vec{N}(x,y) \neq 0 \ \forall (x,y) \in D$, a superf. $S = Graf(f)$ é regular.

(3) Cilindro circular reto.

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad a > 0$$

Parametrizamos o cilindro de raio a com coord. cilíndricas

$$\begin{cases} x = a\cos\theta \\ y = a \operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\varphi(\theta, z) = (a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, z) \quad , \quad (\theta, z) \in D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\vec{N} = \varphi_\theta \wedge \varphi_z = (-a\,\text{sen}\,\theta, a\cos\theta, 0) \wedge (0, 0, 1)$$

$= (a\cos\theta, a\,\text{sen}\,\theta, 0)$ é normal (exterior) a S.

④ <u>A Esfera</u> $x^2+y^2+z^2 = a^2$, $a>0$

usamos coord. esfericas para parametrizar a esfera de raio a

$$\begin{cases} x = a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta \\ y = a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta \\ z = a\cos\phi \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{array}$$

$$\varphi(\phi, \theta) = (a\,\text{sen}\,\phi\cos\theta, a\,\text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, a\cos\phi$$

$$\vec{N} = \varphi_\phi \wedge \varphi_\theta = (a^2\text{sen}^2\phi\cos\theta, a^2\text{sen}^2\phi\,\text{sen}\,\theta, a^2\,\text{sen}\,\phi\cos\theta)$$

$$\|\vec{N}\| = a^2\,\text{sen}\,\phi$$

$$\therefore \quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = (\text{sen}\,\phi\cos\theta, \text{sen}\,\phi\,\text{sen}\,\theta, \cos\phi)$$

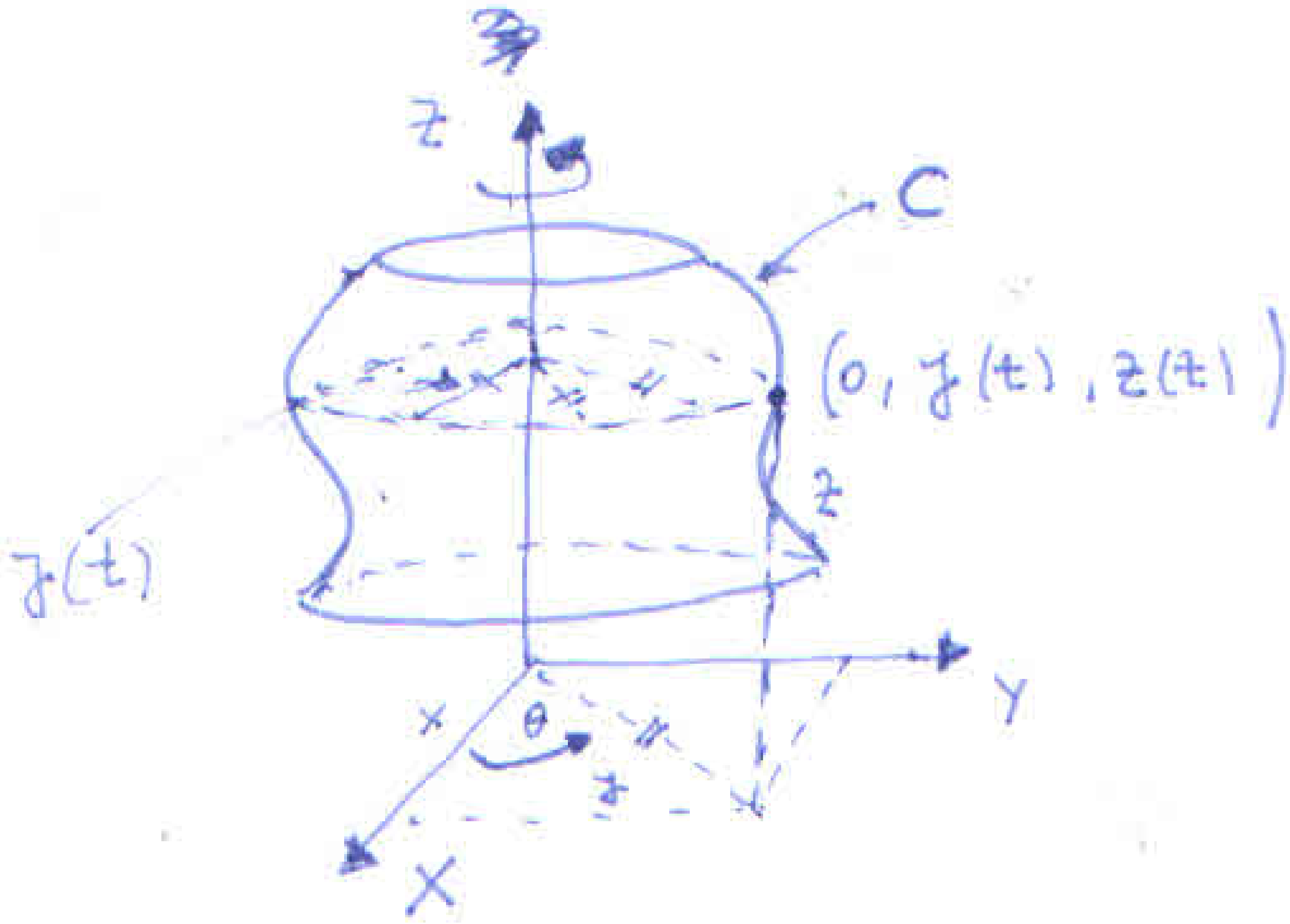
$$= \frac{\varphi(\phi,\theta)}{a} = \frac{1}{a}(x, y, z)$$

⑤ <u>Superfícies de Revolução</u>

Considere uma curva C no plano YZ dada por

$$C : \begin{cases} x = 0 \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \qquad a \leq t \leq b$$

$$y(t) \geq 0 \quad \forall t \in [a,b]$$



Ao girar o pto $(0, y(t), z(t))$ em torno do eixo z obtemos uma circunferência de raio $y(t)$ (no plano $z = z(t)$) que podemos parametrizar por

$$(y(t)\cos\theta,\ y(t)\operatorname{sen}\theta,\ z(t))$$

com $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Assim, uma parametrização para a superfície de revolução S obtida ao girar a curva C em torno do eixo z é

$$S: \quad \varphi(t,\theta) = (y(t)\cos\theta,\ y(t)\operatorname{sen}\theta,\ z(t))$$

$$\text{com} \qquad (t,\theta) \in D: \begin{cases} a \leq t \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Ex: Determine um vetor normal para esta superf.

Área de Superfícies

Considere a superf. parametrizada por $\varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ com $(u,v) \in D \subset \mathbb{R}^2$ onde D é um conjunto compacto e φ é de classe C^2 em um conj. aberto $\mathcal{U}$ que contém D $(D \subset \mathcal{U})$. Além disso, suponha que φ é injetora, exceto, talvez, na fronteira ∂D de D; e que $\varphi_u \wedge \varphi_v \neq 0$ em todos os pontos de D salvo um nº finito.

Nestas condições definimos a área de S por

$$\text{área de } S = A(S) := \iint_D \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u,v) \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u,v) \right\| du\,dv$$

<u>Obs</u>: Se S for o gráfico de uma função de classe C^1, $z = f(x,y)$, $(x,y) \in D$ (com $D \subset \mathbb{R}^2$ compacto), então

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\,dy$$

<u>Exemplos</u>

(1) Calcule a área da esfera $S: x^2+y^2+z^2 = a^2$, $a > 0$

<u>Solução</u>:

usando coord. esféricas (com $\rho = a$) para parametrizar a esfera, temos

$$\varphi(\phi,\theta) = (a\,\text{sen}\phi\cos\theta,\ a\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta,\ a\cos\phi)$$

$$(\phi,\theta) \in D: \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$\varphi_\phi = (a\cos\phi\cos\theta,\ a\cos\phi\,\text{sen}\theta,\ -a\,\text{sen}\phi)$$

$$\varphi_\theta = (-a\,\text{sen}\phi\,\text{sen}\theta,\ a\,\text{sen}\phi\cos\theta,\ 0)$$

$$\varphi_\phi \wedge \varphi_\theta = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{faça a conta.}}}{\cdots\cdots} = a\,\text{sen}\phi \cdot \varphi(\phi,\theta)$$

Logo $\quad \| \varphi_\phi \wedge \varphi_\theta \| = |a \operatorname{sen}\phi| \, \| \varphi(\phi,\theta) \| = a^2 |\operatorname{sen}\phi|$

$$= a^2 \operatorname{sen}\phi \qquad (0 \leq \phi \leq \pi, \therefore \operatorname{sen}\phi \geq 0)$$

$$A(S) = \iint_D a^2 \operatorname{sen}\phi \, d\phi \, d\theta = a^2 \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\theta \, d\phi$$

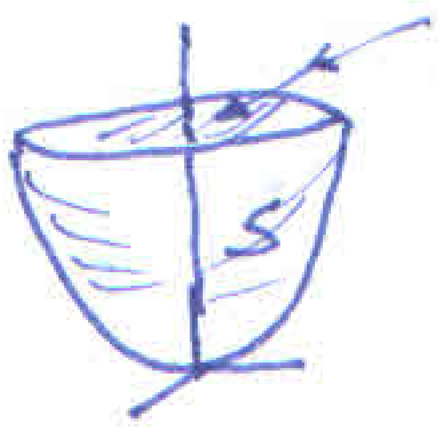
$$= 2\pi a^2 \int_0^{\pi} \operatorname{sen}\phi \, d\phi = 2\pi a^2 (-\cos\phi) \Big|_0^{\pi}$$

$$= 4\pi a^2 \quad \text{unidades de área}$$

---

(2) Determine a área do paraboloide $z = 2(x^2+y^2)$ abaixo do plano $z = 8$.

<u>Solução</u>



$\begin{cases} z = 8 \\ x^2+y^2 \leq 4 \end{cases}$

$S: \; z = 2(x^2+y^2) = f(x,y)$

$D: \; x^2+y^2 \leq 4$

$$A(S) = \iint_D \sqrt{1 + (4x)^2 + (4y)^2} \, dx \, dy$$

Em coord. polares temos

$$A(S) = \iint_{D_{r\theta}} \sqrt{1+16r^2} \, r \, dr \, d\theta = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \sqrt{1+16r^2} \, r \, d\theta \, dr$$

$$= \text{etc.} \ldots = \frac{\pi}{24} \left(65\sqrt{65} - 1 \right) \quad \underline{\text{u.a.}}$$
