2. Mudança de Coordenadas

Seja $\tilde{D} \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região elementar. Uma transformação do plano é uma aplicação

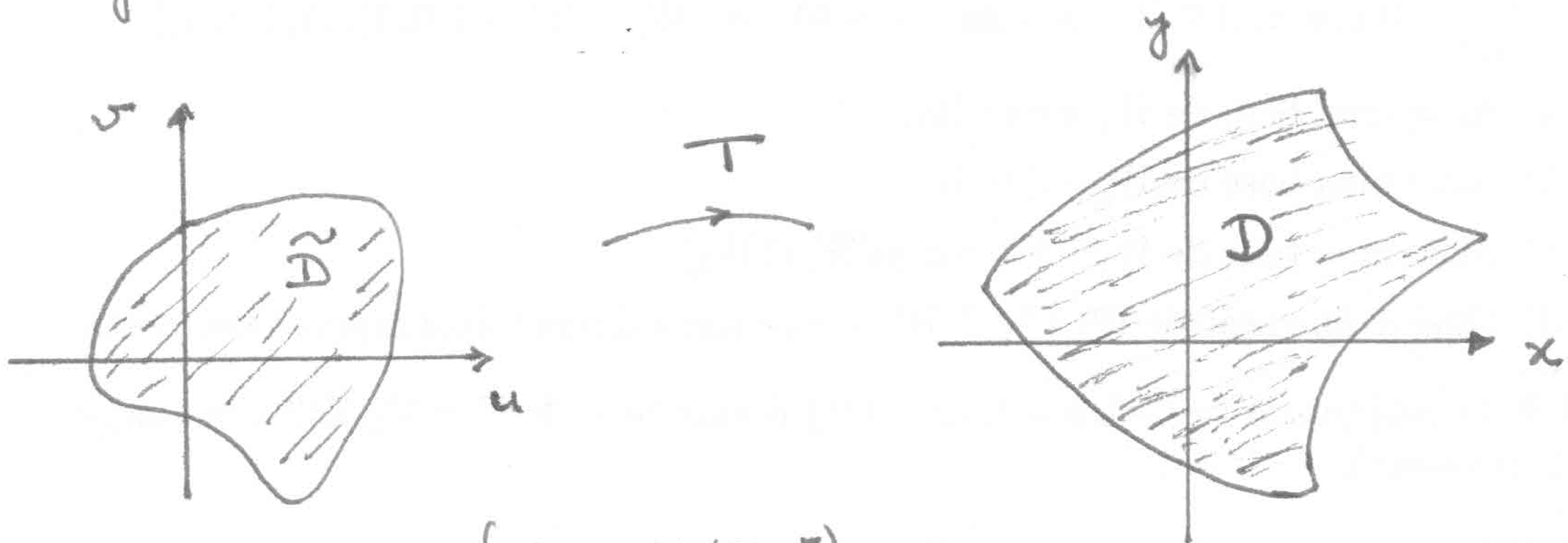
$$T : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(u,v) \longmapsto T(u,v)$$

onde $T(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ e

$$x, y : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

são funções contínuas com derivadas parciais contínuas no retângulo aberto $\mathcal{R}$ t.q. $\tilde{D} \subset \mathcal{R}$.

Seja $D := T(\tilde{D})$.



$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

2.1 Exemplo:

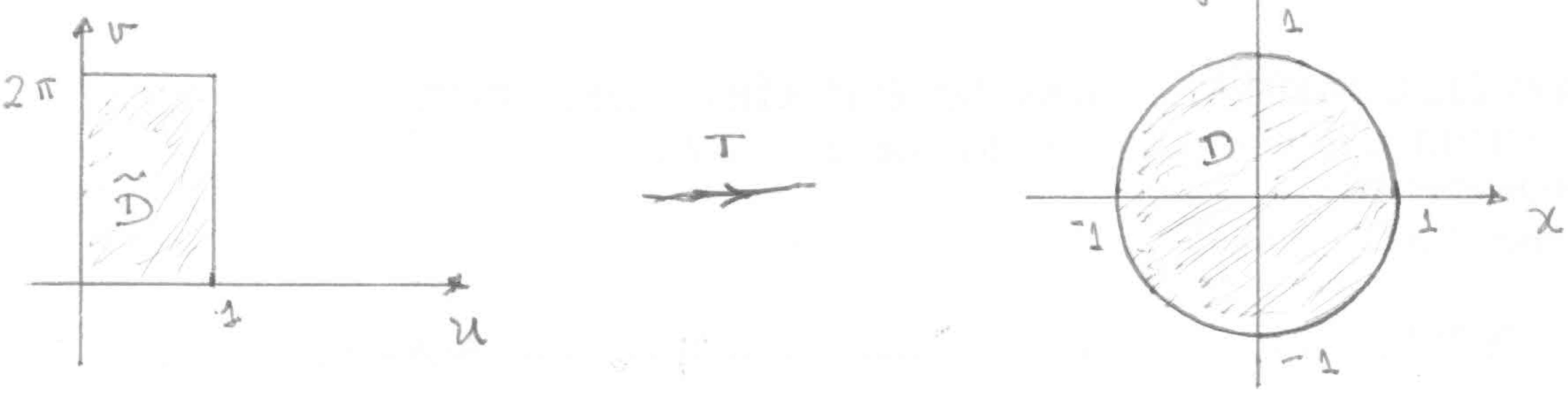
Seja $T : [0,1] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) \qquad \begin{cases} x = x(r,\theta) = r\cos\theta \\ y = y(r,\theta) = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$$

A imagem de $\tilde{D} = [0,1] \times [0,2\pi]$ por T é o círculo

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

Assim, T transforma o retângulo $[0,1] \times [0,2\pi]$ no círculo $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$



2.2 Def: Dizemos que uma transformação $T : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é injetiva em $\tilde{D}$ sse

$$T(u_1,v_1) = T(u_2,v_2) \implies (u_1,v_1) = (u_2,v_2)$$

para todo $(u_1,v_1), (u_2,v_2) \in \tilde{D}$.

Equivalentemente, T é injetiva sse

$$(u_1,v_1) \neq (u_2,v_2) \implies T(u_1,v_1) \neq T(u_2,v)$$

$$\forall (u_1,v_1),(u_2,v_2) \in \tilde{D}.$$

2.3 Exemplos

(a) A transformação T do exemplo 2.1 NÃO é injetiva. De fato,

$$T(1,0) = T(1,2\pi) = (1,0)$$

$$T(1,0) = T(1,2\pi) \quad \text{mas} \quad (1,0) \neq (1,2\pi)$$

(b) A mesma transformação anterior, agora restrita ao retângulo $[0,1] \times [0,\pi]$ é injetiva. Ou seja

$$T : [0,1] \times [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

é injetiva ... Prove!

2.4 <u>Def.</u>

Seja $T: \tilde{D} \to \mathbb{R}^2$ uma transformação do plano definida por
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}, \text{ com } x \text{ e } y \text{ funções de classe } C^1 \text{ em } \tilde{D}.$$

A matriz
$$J := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

é chamada <u>matriz Jacobiana da transformação T</u>.

O determinante da matriz J diz-se <u>Jacobiano de T</u>

<u>Notação:</u>
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} := \det J = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

2.5. <u>Exemplo</u>

Consideremos a transformação T do exemplo 2.1.
$$\left(T(r,\theta) = (r\cos\theta, r\,\mathrm{sen}\,\theta) \right)$$

A matriz jacobiana é:
$$J = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ \mathrm{sen}\,\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$$

e $\det J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r\cos^2\theta + r\,\mathrm{sen}^2\theta = r$

=

Uma das importâncias da matriz jacobiana está no teorema a seguir. cuja demonstração não faremos.

2.6 Teorema:

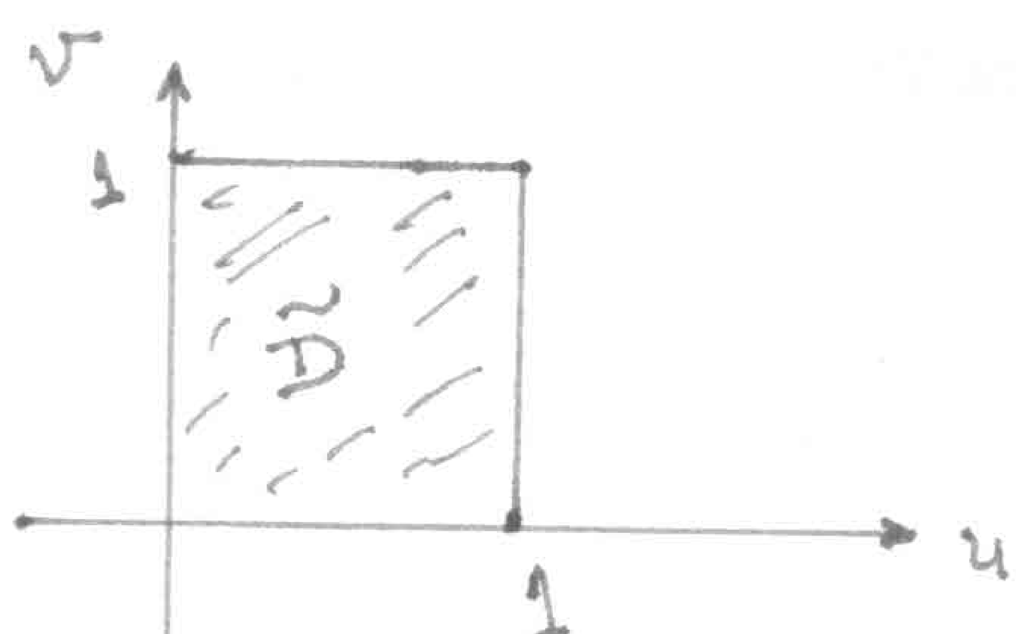
Seja $T : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ uma transformação do plano. Se o jacobiano de T num ponto $(u_0,v_0) \in \tilde{D}$, $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)$, é diferente de zero, então existe uma vizinhança $V \subset \tilde{D}$ do ponto (u_0,v_0) tal que a restrição de T à vizinhança V é injetiva

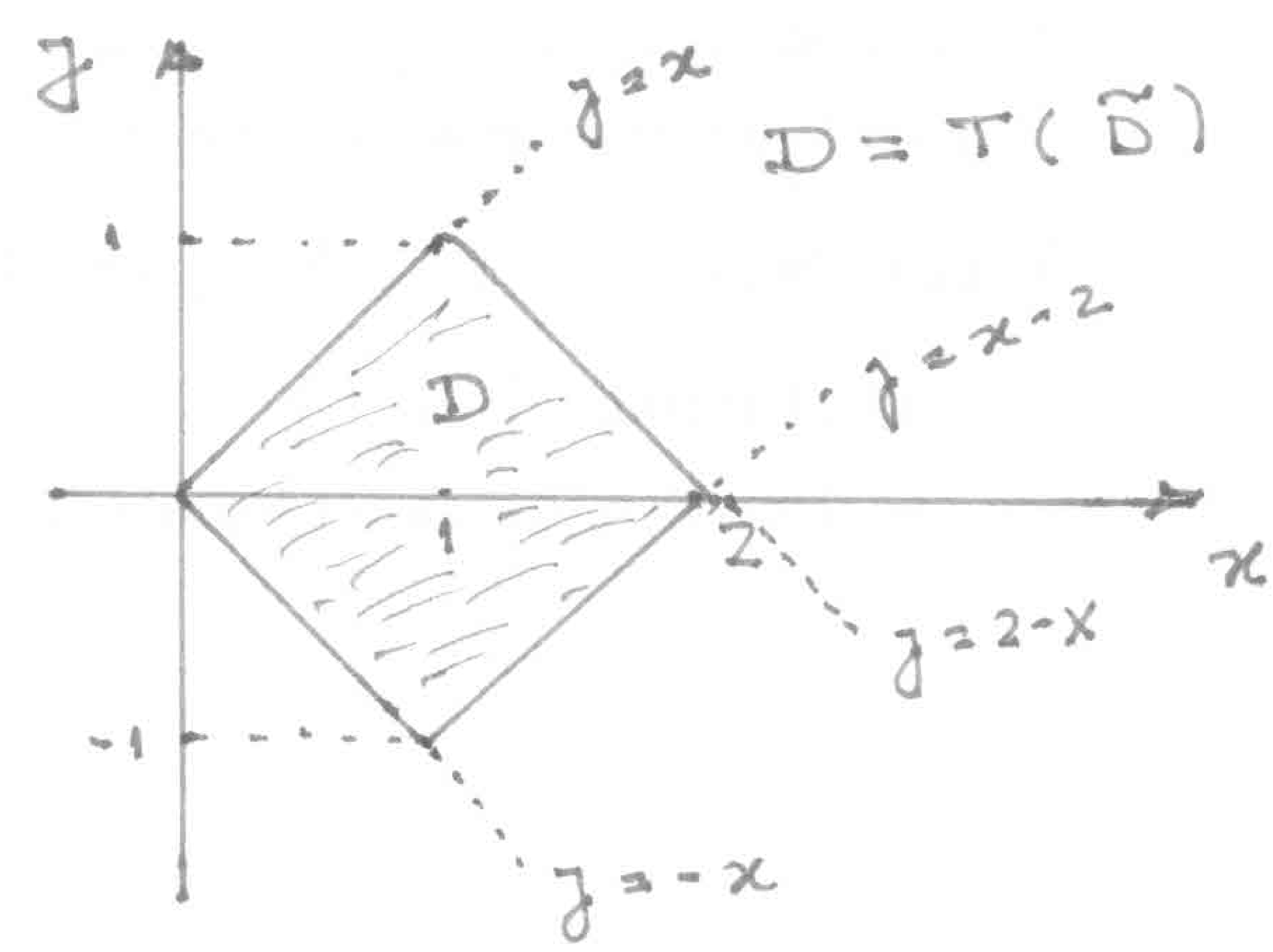
$$\left(\begin{array}{c} \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0) \neq 0 \implies T : V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \text{ injetiva} \\ V \text{ é uma vizinhança de } (u_0,v_0) \end{array} \right)$$

2.7. Exemplos

(a) Seja $T : [0,1] \times [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(u,v) = (u+v, u-v)$

$$\begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$$



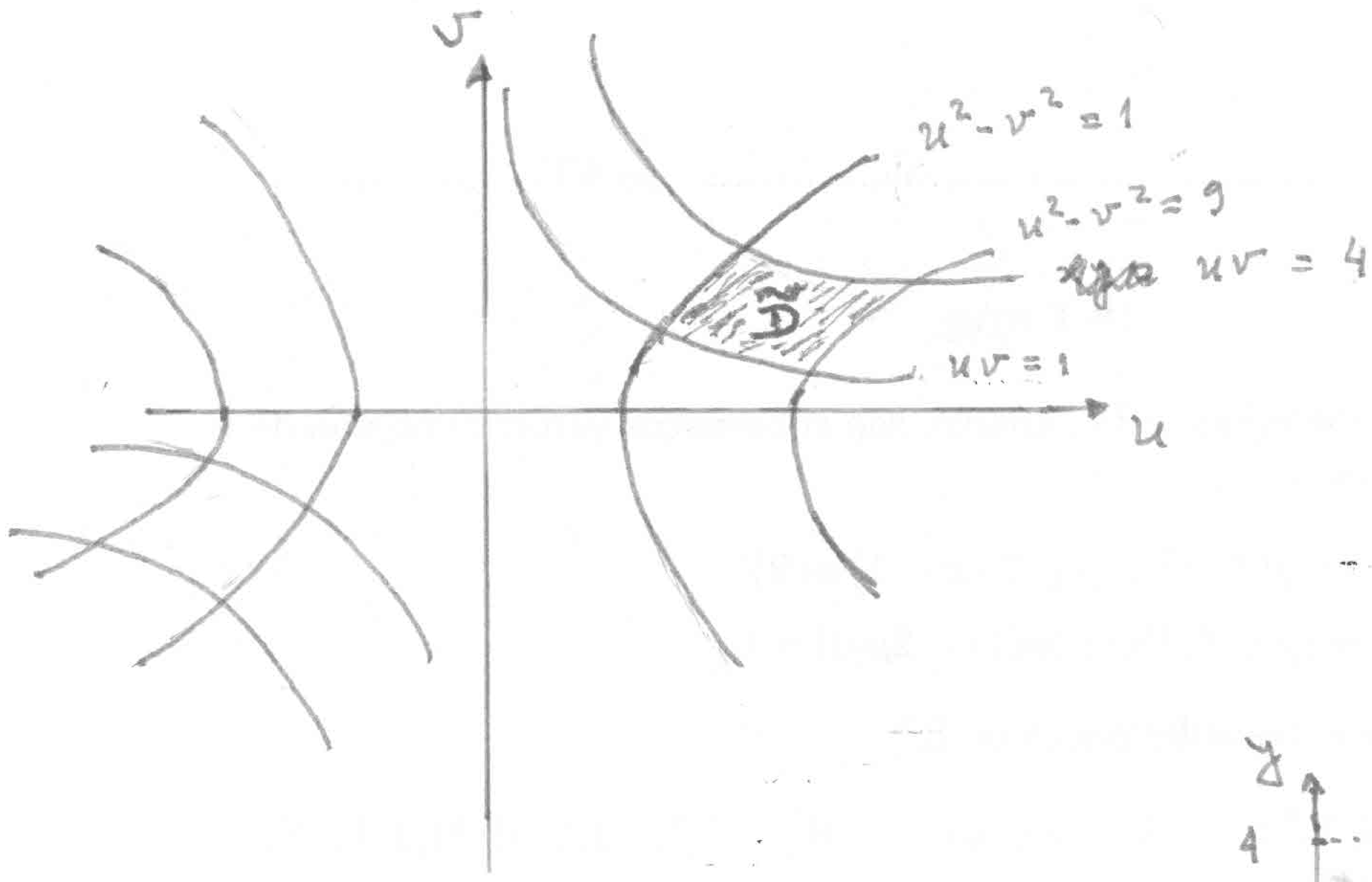


Note que:

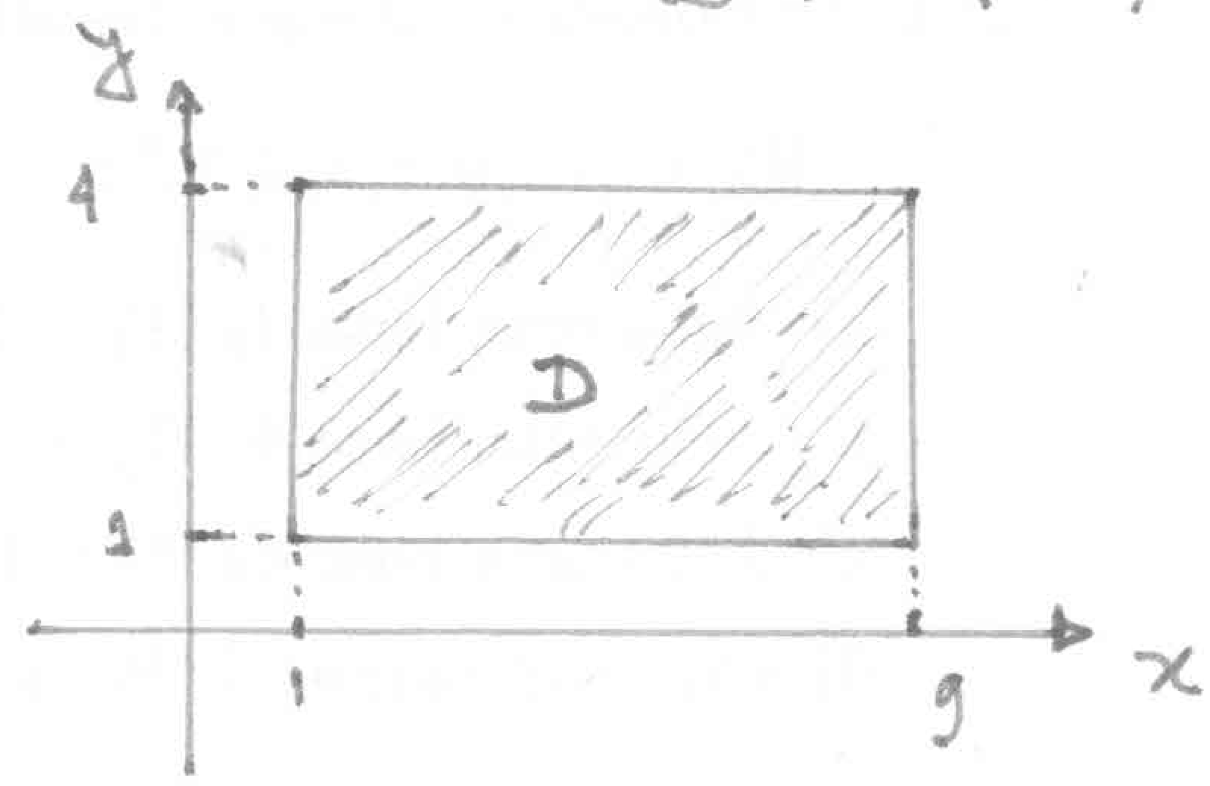
$$\left. \begin{array}{l} u = 0 \implies y = -x \\ v = 0 \implies y = x \\ u = 1 \implies y = 2-x \\ v = 1 \implies y = x-2 \end{array} \right\} \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$$

(b) Considere a transformação T definida por $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = uv \end{cases}$

na região $\tilde{D}$ limitada pelas curvas $u^2 - v^2 = 1$, $u^2 - v^2 = 9$, $uv = 1$ e $uv = 4$, no 1º quadrante



$D = T(\tilde{D})$



$u^2 - v^2 = 1 \Rightarrow x = 1$
$u^2 - v^2 = 9 \Rightarrow x = 9$

$uv = 1 \Rightarrow y = 1$
$uv = 4 \Rightarrow y = 4$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det \begin{pmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{pmatrix} = 2u^2 + 2v^2 = 2(u^2+v^2)$$

Note que $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$ em $\tilde{D}$.

2.8. <u>Teorema</u> (Mudança de coord. em integrais duplas)

Seja $T : \tilde{D} \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação injetiva de classe C^1. Seja $D := T(\tilde{D})$ e suponha que D e $\tilde{D}$ são regiões elementares do plano $\mathbb{R}^2$. Então para toda função integrável $f : D \to \mathbb{R}$ temos:

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} f(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv}$$

onde $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ é o valor absoluto do determinante jacobiano e

$\tilde{f}(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

Note que em particular temos que

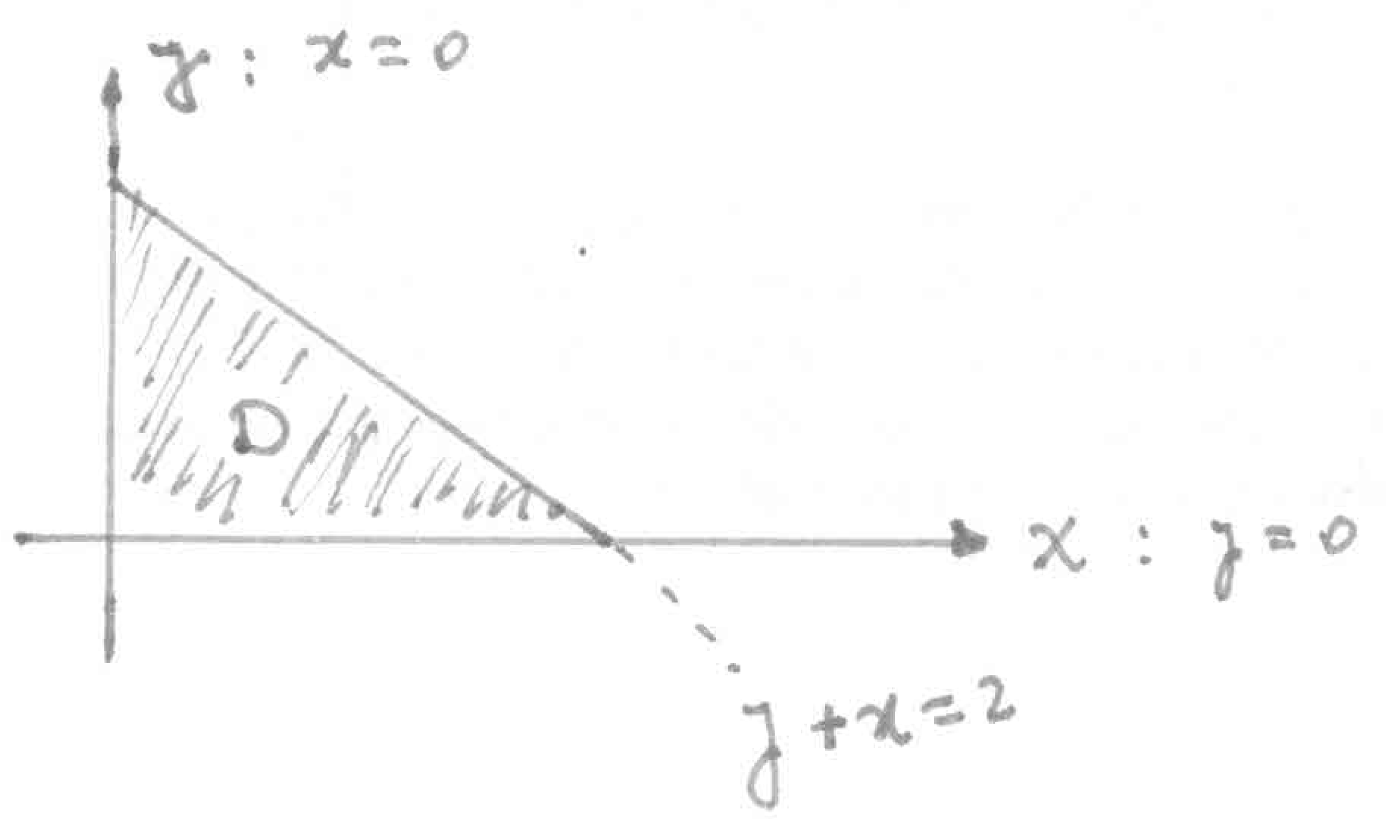
$$\text{área}(D) = \iint_D dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

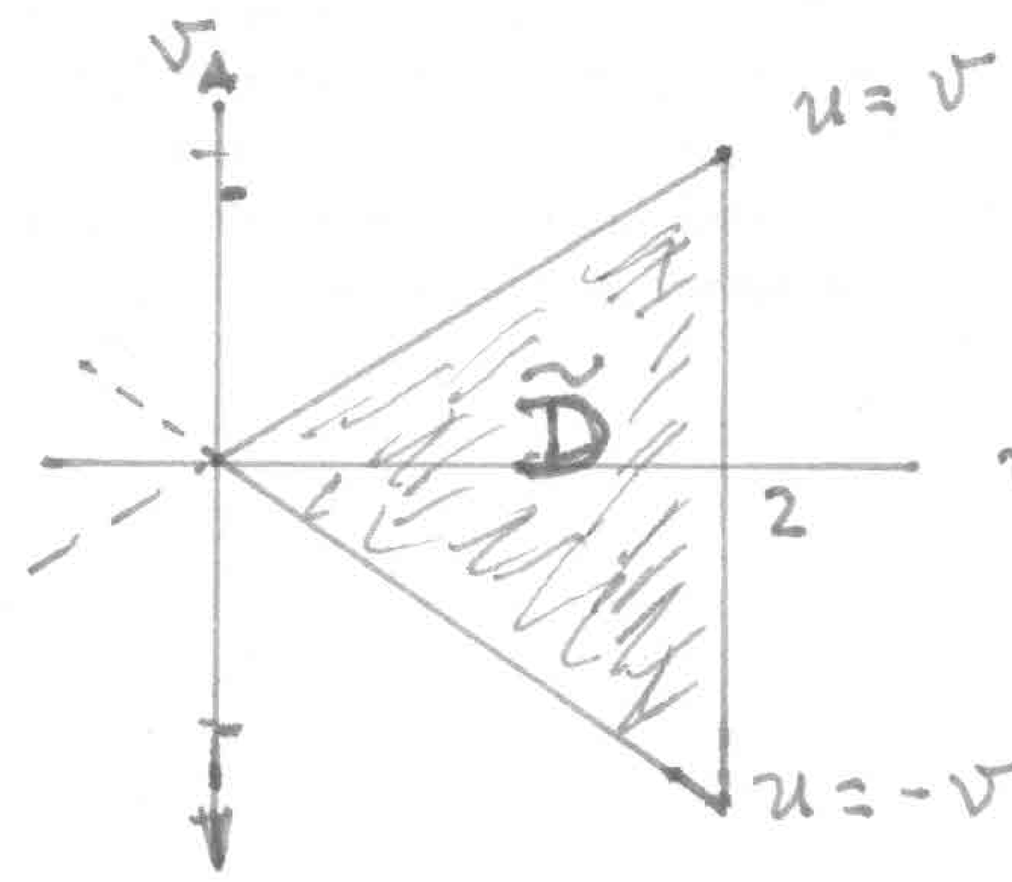
2.9 Exemplos

(a) Calcular $\displaystyle\iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}}\,dx\,dy$, onde D é a região limitada pela reta $y+x=2$ e pelos eixos coord.

Solução

considere a mudança de coord. $\begin{cases} u = x+y \\ v = y-x \end{cases}$





$x=0 \Rightarrow u=v$

$y=0 \Rightarrow u=-v$, $x+y=2 \Rightarrow u=2$

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad \therefore \quad \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = \left|\frac{1}{2}\right| = 1/2$$

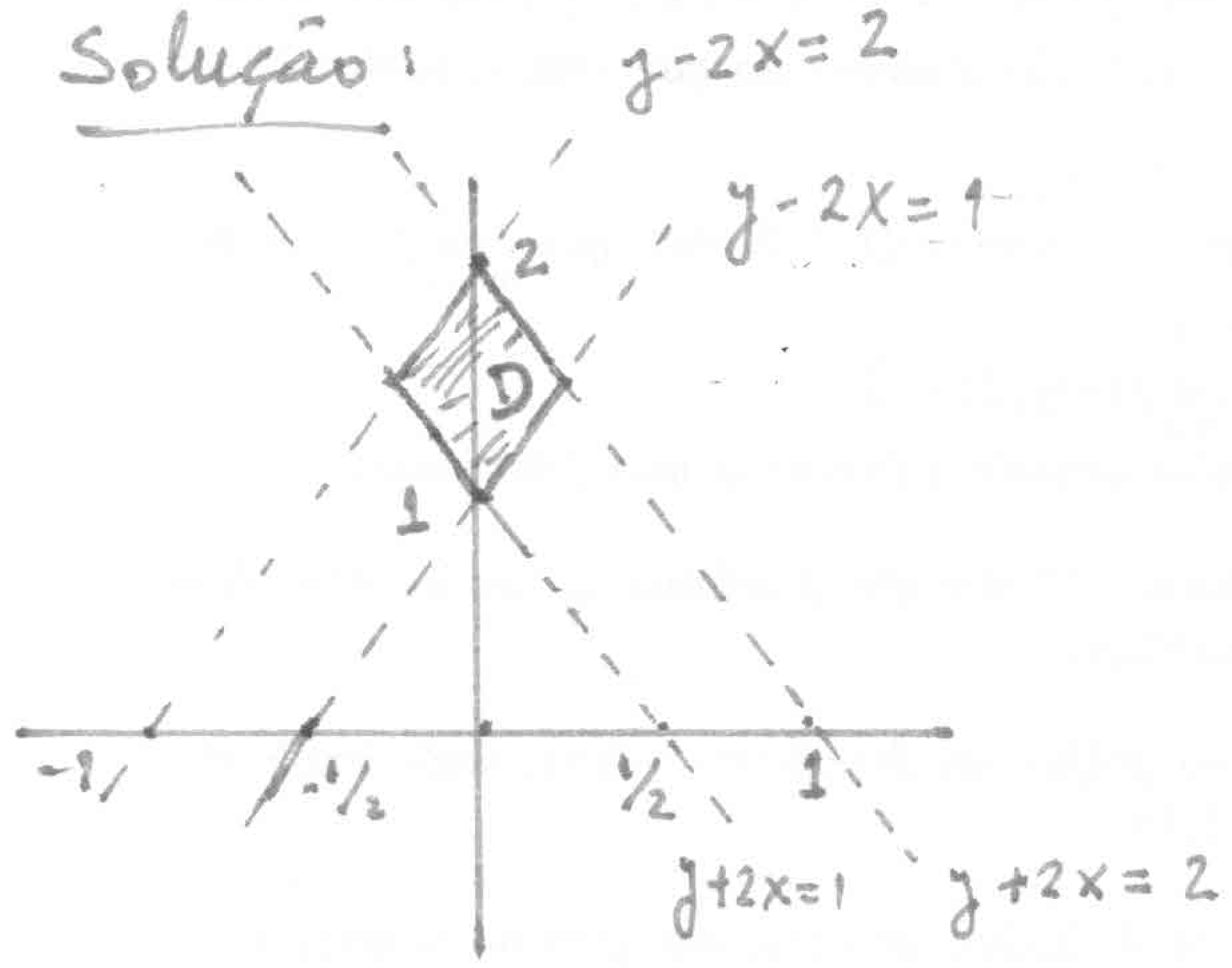
$$\iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\iint_{\tilde{D}} e^{v/u}\,du\,dv = \frac{1}{2}\int_0^2\int_{-u}^{u} e^{v/u}\,dv\,du$$

$$\iint_D e^{\frac{y-x}{x+y}}\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int_0^2 u\,e^{v/u}\Big|_{v=-u}^{v=u}\,du$$

$$= \frac{e-e^{-1}}{2}\int_0^2 u\,du = e - e^{-1}$$

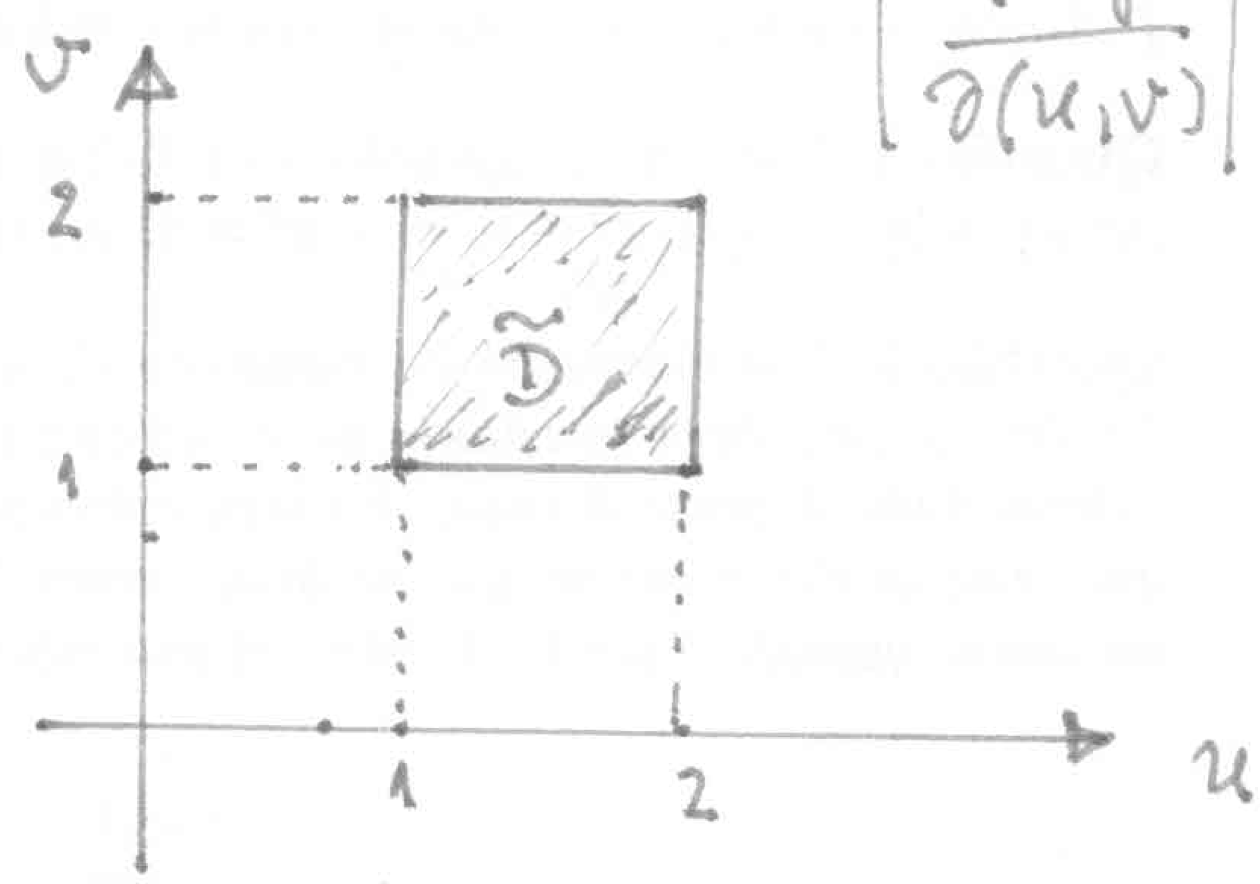
(b) Calcule $\displaystyle\iint_D \frac{y+2x}{(y-2x)^2}\,dx\,dy$ onde D é a região limitada pelas retas $y-2x=2$, $y+2x=2$, $y-2x=1$ e $y+2x=1$.

Solução:



$$\begin{cases} u = y+2x \\ v = y-2x \end{cases}$$

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| = 1/4$$



$y-2x=2 \Rightarrow v=2$

$y+2x=2 \Rightarrow u=2$

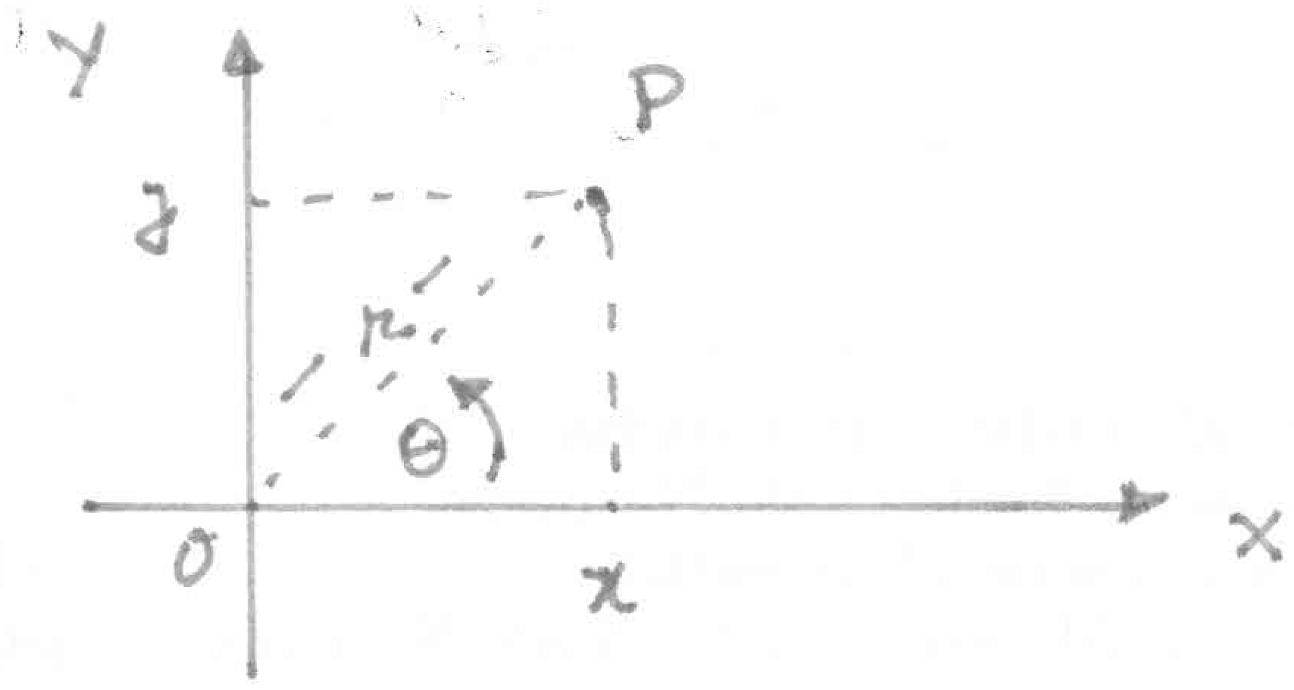
$y-2x=1 \Rightarrow v=1$

$y+2x=1 \Rightarrow u=1$

$$\iint_D \frac{y+2x}{(y-2x)^2}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \frac{u}{v^2}\cdot\frac{1}{4}\,du\,dv = \frac{1}{4}\int_1^2\int_1^2 \frac{u}{v^2}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{4}\int_1^2 \cdots = \cdots = 3/16$$

2.10 - Coordenadas Polares



As coord. polares de um ponto P com coord. retangulares (x,y) são (r,θ) onde $r = d(P,O)$ é a distância do ponto P à origem O e θ é o ângulo entre o eixo X e o segmento de reta que liga os pontos O e P.

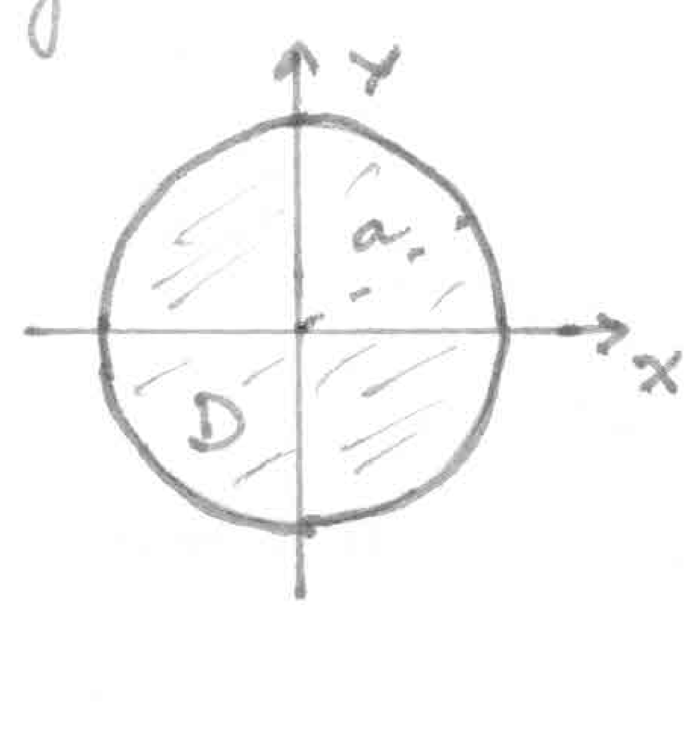
A relação entre as coord. (x,y) e as coord (r,θ) é dada por

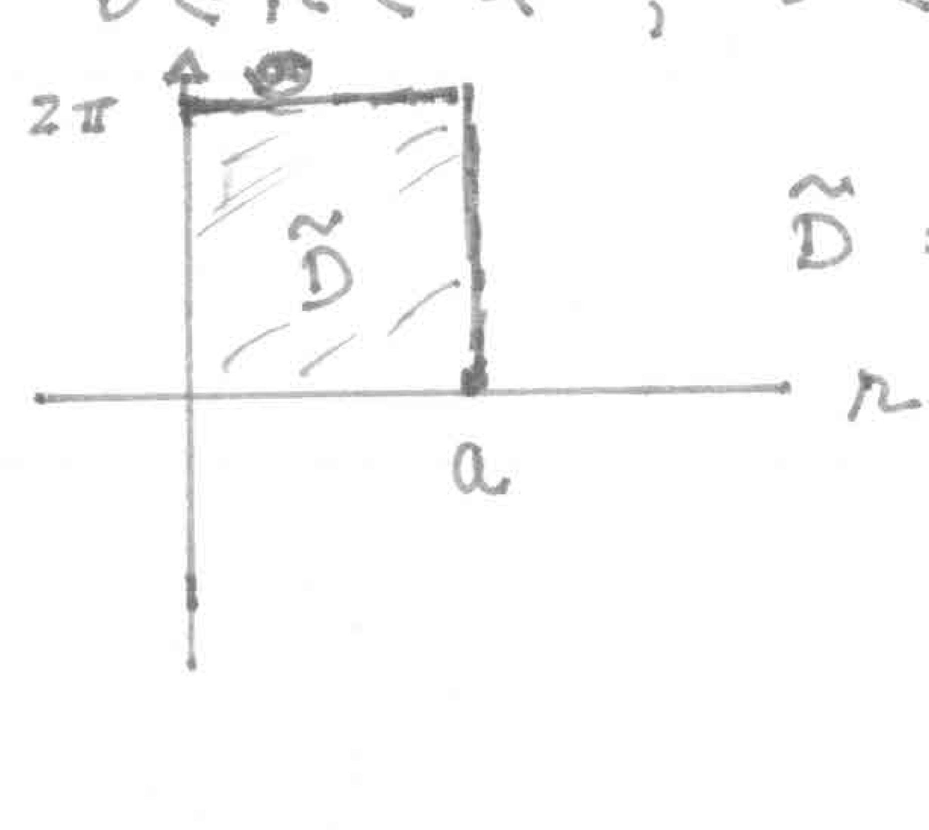
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

Note que esta mudança é injetiva em

$$\tilde{D} = \{(r,\theta) : r>0 \ , \ \theta_0 < \theta < \theta_0 + 2\pi\}$$

com $\theta_0 = $ cte. Além disso, esta mudança transforma a região circular $D = \{(x,y) : x^2+y^2 \le a^2\}$ na região retangular $\tilde{D} = \{(r,\theta) : 0 \le r \le a \ , \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$



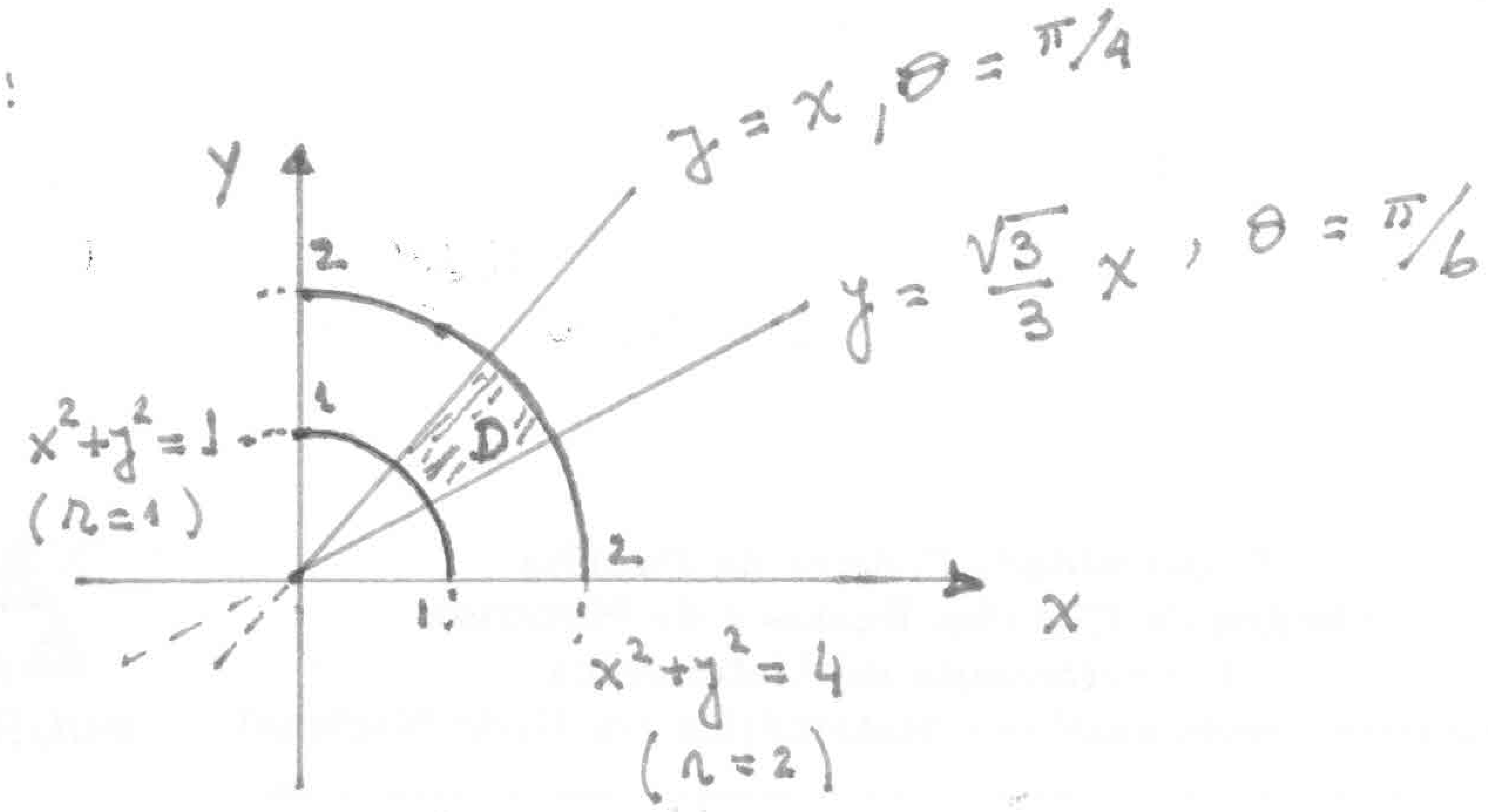


$\tilde{D} = [0,a] \times [0,2\pi]$

2.11 Exemplos

(a) Calcule $\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, onde D é a região limitada pelas curvas $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2=4$, $y=x$ e $y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$, no 1º quadrante

Solução :



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \tilde{D} = \{(r,\theta) : 1 \le r \le 2 \,,\ \pi/6 \le \theta \le \pi/4\}$$

$$\iint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta = \int_{\pi/6}^{\pi/4}\int_1^2 r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \dots\dots = \frac{5\pi}{16}$$

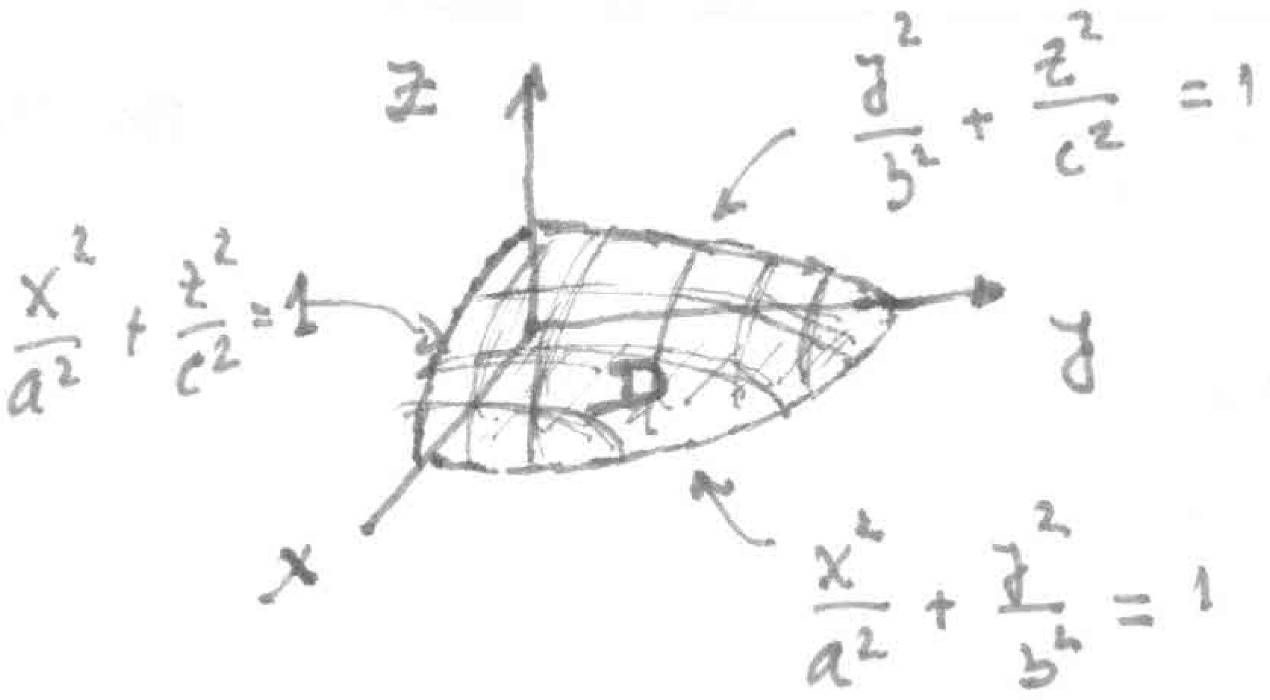
(b) Calcule o volume do sólido limitado pelo elipsóide

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, com $a>0,\ b>0,\ c>0$.

Solução:

Pela simetria do elipsóide podemos calcular o volume no 1º octante, assim:

$$\text{Vol} = 8 \iint_D c\sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy$$



onde D é a região no 1º quadrante do plano xy limitada pela elipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Fazemos a mudança de coord.

$$\begin{cases} \dfrac{x}{a} = r\cos\theta \\[2mm] \dfrac{y}{b} = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases} \qquad \text{ou} \qquad \begin{cases} x = a r\cos\theta \\ y = b r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$$

o jacobiano desta mudança é

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} a\cos\theta & -ar\,\text{sen}\,\theta \\ b\,\text{sen}\,\theta & br\cos\theta \end{pmatrix} = abr$$

Logo,

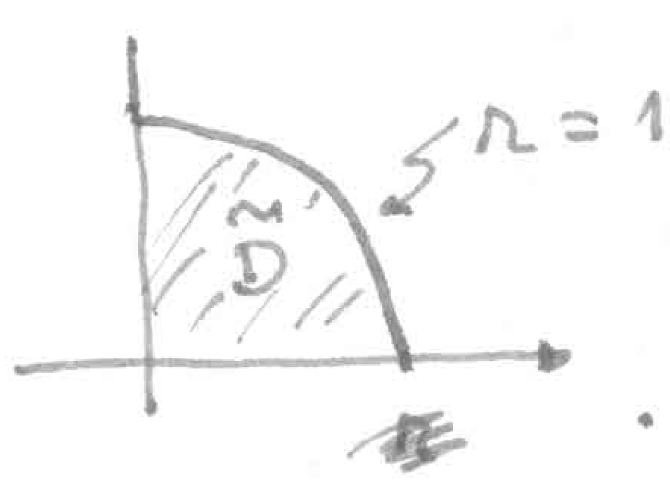
$$\text{Vol} = 8c\iint_D \sqrt{1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)}\,dx\,dy = 8abc\iint_{\tilde{D}} r\sqrt{1-r^2}\,dr\,d\theta$$

$$= 8abc\int_0^1\int_0^{\pi/2} r\sqrt{1-r^2}\,d\theta\,dr = 4abc\pi\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}\,dr$$

$$= \ldots = \frac{4}{3}abc\pi$$

Note que $\left.\begin{matrix} \dfrac{x}{a} = r\cos\theta \\[2mm] \dfrac{y}{b} = r\,\text{sen}\,\theta \end{matrix}\right\} \Rightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = r^2.$

Logo $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \Longrightarrow \underline{r = 1}$



$$\tilde{D}: \begin{cases} 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le \pi/2 \end{cases}$$