4. Integrais Triplas

DM - UFPB
Cálculo III
Prof. Pedro A. Hinojosa

4.1 Integração tripla sobre paralelepípedos

Sejam $R := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ um paralelepípedo retangular e $f: R \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada. Consideremos as seguintes partições dos intervalos $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ e $[a_3, b_3]$ respectivamente,

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b_1$$
$$a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_n = b_2$$
$$a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_n = b_3 .$$

Divida R em n^3 sub-paralelepípedos

$$R_{ijk} := [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

Sejam $\Delta x = \dfrac{b_1 - a_1}{n}$, $\Delta y = \dfrac{b_2 - a_2}{n}$ e $\Delta z = \dfrac{b_3 - a_3}{n}$

Escolha $c_{ijk} \in R_{ijk}$ e faça a soma de Riemann

$$S_n := \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta x \Delta y \Delta z$$

4.2. Def.: Se $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe e é independente da escolha dos $c_{ijk} \in R_{ijk}$ e da escolha das partições dos intervalos, então dizemos que esse limite é a integral tripla de f sobre R que denotamos por

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Neste caso, dizemos que f é integrável sobre R

Como no caso de integrais duplas é possível mostrar que

4.3 Teorema: Se $f: R \to \mathbb{R}$ é contínua, então f é integrável

Note que se $f(x,y,z) = 1 \ \forall (x,y,z) \in R$, então

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \text{vol}(R).$$

De fato, a soma de Riemann $S_n = \sum_{i,j,k=0}^{n-1} \Delta x \Delta y \Delta z$

é a soma dos volumes dos n^3 sub-paralelepípedos formados pela partição e logo $\lim_{n\to\infty} S_n = \text{vol}(R)$.

4.4. Propriedades da Integral Tripla

A integral tripla tem propriedades análogas às da integral dupla

(a) Linearidade

Se $f, g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções integráveis, então $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, a função $\alpha f + \beta g$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\iiint_{\mathcal{R}} \left\{ \alpha f(x,y,z) + \beta g(x,y,z) \right\} dx\,dy\,dz = \alpha \iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \beta \iiint_{\mathcal{R}} g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(b) Se $f, g : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ são integráveis e $f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in \mathcal{R}$ então

$$\iiint_{R} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leqslant \iiint_{R} g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

(c) Se dividimos $\mathcal{R}$ em k paralelepípedos $\mathcal{R}_i$, $i = 1, \ldots, k$ e f é integrável sobre cada $\mathcal{R}_i$, então f é integrável sobre $\mathcal{R}$ e

$$\iiint_{\mathcal{R}} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \sum_{i=1}^{k} \iiint_{R_i} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz .$$

4.5. Teorema (Fubini)

Se $f: R \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{a_1}^{b_1}\left\{\int_{a_2}^{b_2}\left\{\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right\}dy\right\}dx$$

$$= \int_{a_2}^{b_2}\left\{\int_{a_1}^{b_1}\left\{\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,dz\right\}dx\right\}dy$$

$$= \dots$$

Note que agora temos 6 possíveis integrais iteradas.

4.6 Exemplo:

Calcule $\iiint_R \operatorname{sen}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz$, onde

$$R = [0,\pi]\times[0,\pi]\times[0,\pi]$$

Solução

$$\iiint_R \operatorname{sen}(x+y+z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\operatorname{sen}(x+y+z)\,dz\right\}dy\right\}dx$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} -\cos(x+y+z)\Big|_{z=0}^{z=\pi} dy\,dx = \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} 2\cos(x+y)\,dy\,dx$$

$$\left(\cos(x+y+\pi) = \cos(x+y)\cdot\cancelto{-1}{\cos\pi} - \operatorname{sen}(x+y)\cdot\cancelto{0}{\operatorname{sen}\pi} = -\cos(x+y)\right)$$

$$= \int_0^{\pi} 2\,\text{sen}(x+y)\Big|_{y=0}^{y=\pi} = \int_0^{\pi} -4\,\text{sen}\,x\,dx$$

$$\big(\text{sen}(x+\pi) = -\text{sen}\,x\big)$$

$$= 4\cos x\Big|_0^{\pi} = 4(-1-1) = -8$$

4.7. Integrais triplas em regiões mais gerais

Analogo ao que fizemos para integrais duplas.

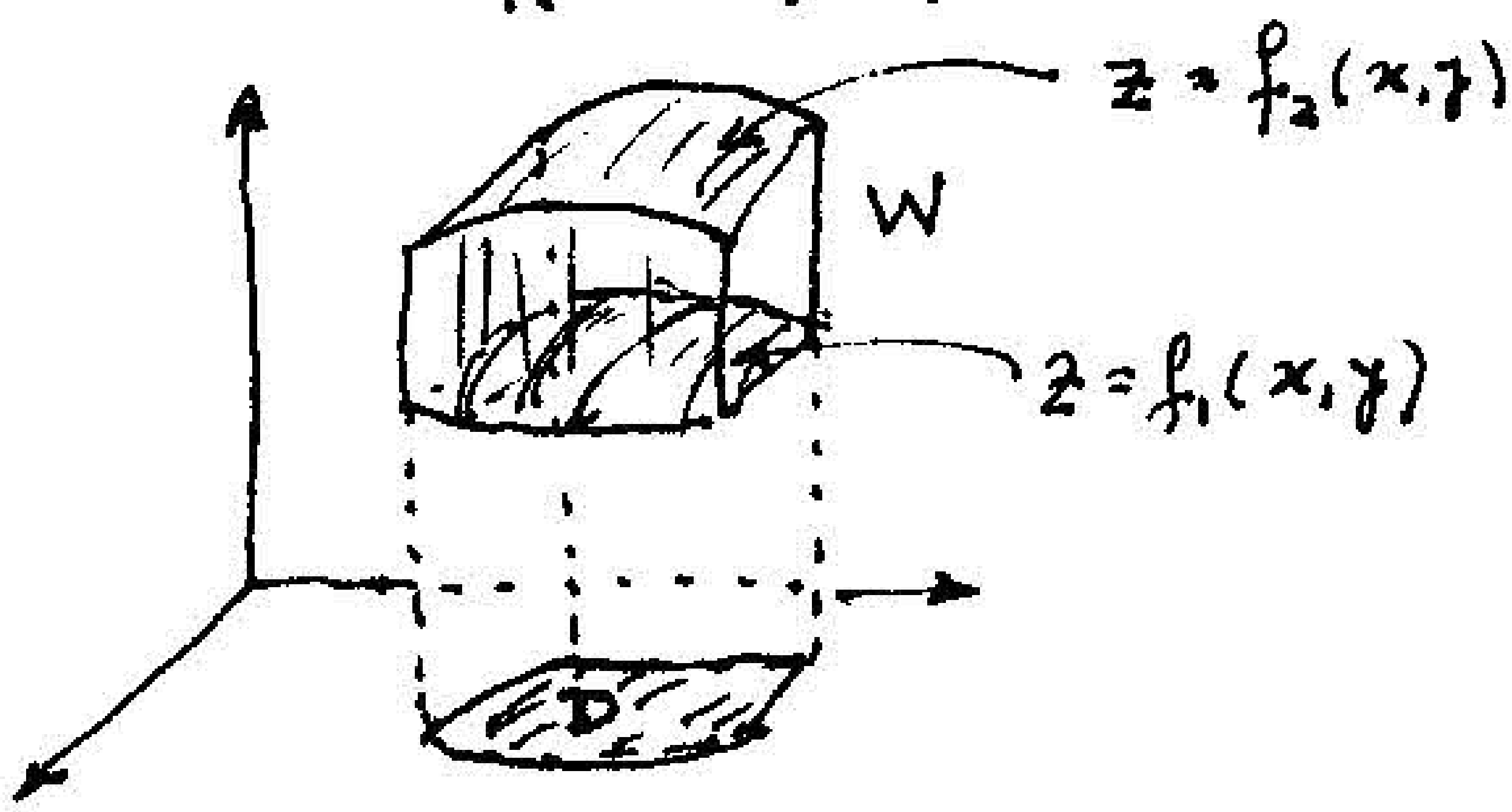
Seja $W \subset \mathbb{R}^3$.

Tipo 1

$W \subset \mathbb{R}^3$ é uma região do tipo 1 sse pode ser descrita como

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ f_1(x,y) \leqslant z \leqslant f_2(x,y)\}$$

onde D é a região elementar do plano xy, projeção de W sobre este plano e $f_1, f_2 : D \longrightarrow \mathbb{R}$ são funções contínuas t.q. $f_1 \leqslant f_2$.



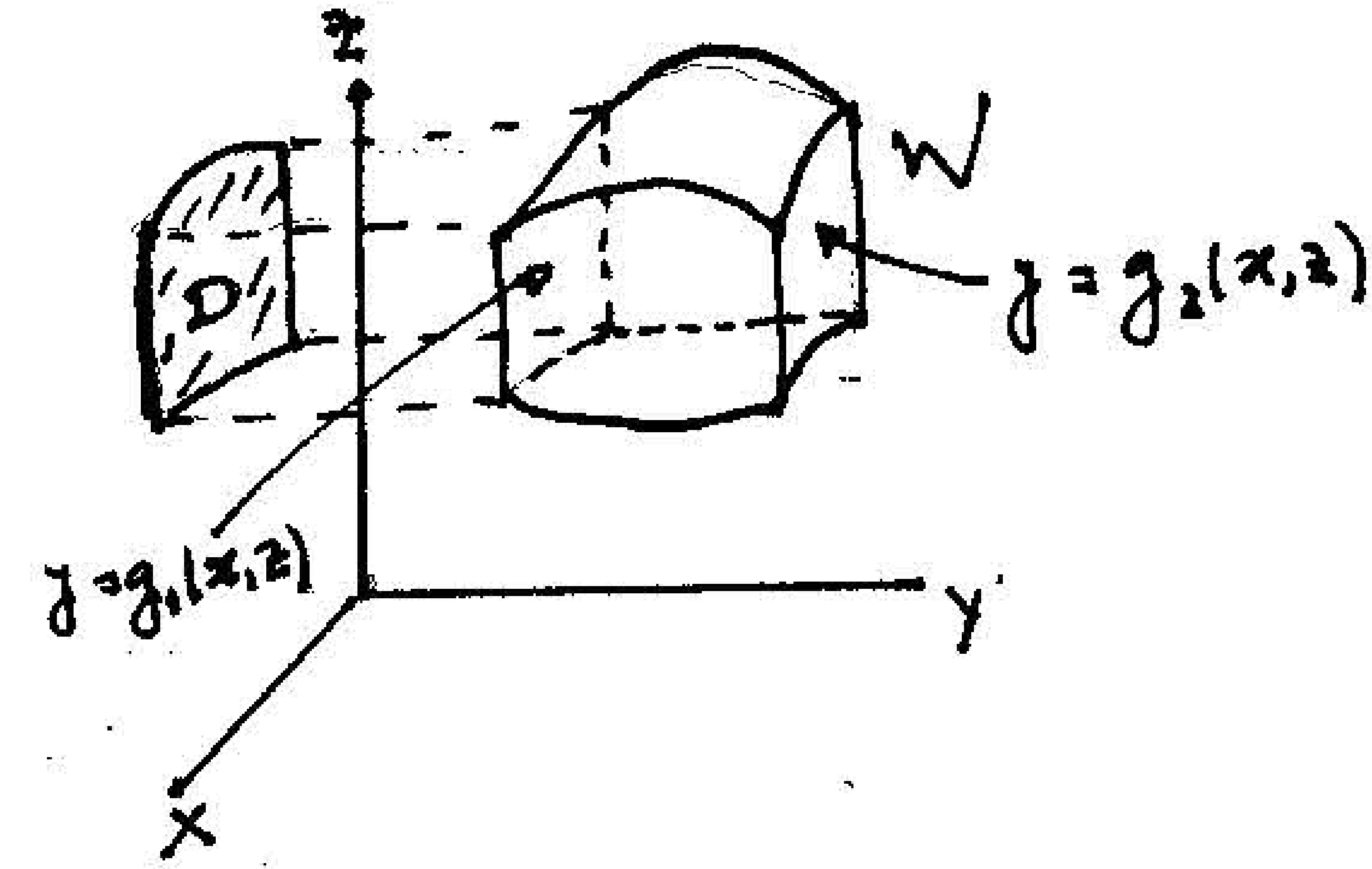
Tipo 2

W é de tipo 2 sse pode ser descrita na forma

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D,\ g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,z)\}$$

onde D é a projeção de W sobre o plano XZ e

$g_1, g_2 : D \to \mathbb{R}$ são funções contínuas t.q. $g_1 \leq g_2$.



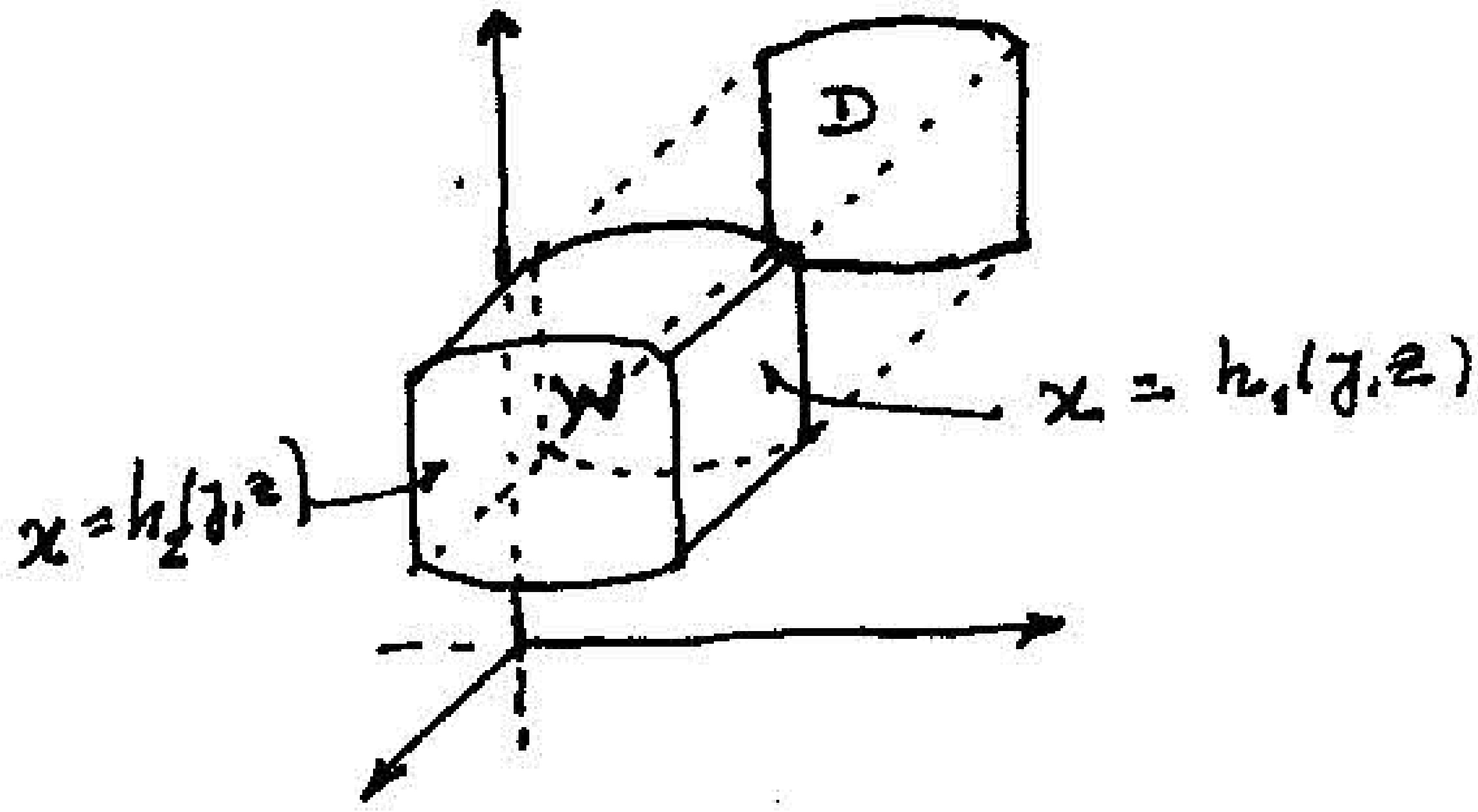
Tipo 3

W é do tipo 3 sse é da forma

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D,\ h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)\}$$

onde D é a projeção de W sobre o plano YZ e

$h_1, h_2 : D \to \mathbb{R}$ são contínuas e $h_1 \leq h_2$.



Regiões que são tipo 1, tipo 2 e tipo 3 são chamadas de tipo 4, como regiões limitadas por uma esfera ou um elipsóide.

$W \subset \mathbb{R}^3$ diz-se uma <u>região elementar do espaço</u> se W é uma região de qualquer dos tipos anteriores

4.8. Extensão da integral tripla

Seja W uma região elementar em $\mathbb{R}^3$ t.q. $W \subset \mathcal{R}$ e $\mathcal{R}$ é um paralelepipedo.

Seja $f : W \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, defina

$$\tilde{f} : \mathcal{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) \\ \text{se } (x,y,z) \in W \\ 0 \text{ se } (x,y,z) \notin W \end{cases}$$

Como no caso de funções de duas variáveis, se ∂W tem medida zero, então $\tilde{f}$ é integrável sobre $\mathcal{R}$ e definimos

$$\int_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_{\mathcal{R}} \tilde{f}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz.$$

Como antes, a integral não depende da escolha do paralelepípedo $\mathcal{R}$.

Dizemos, neste caso, que f é integrável sobre W.

4.9. Proposição:

Seja $f: W \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua.

(A) Se W é do tipo 1,

$$\int_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left\{ \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right\} dx\,dy$$

$$\left(W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in D,\ f_1(x,y) \leq z \leq f_2(x,y)\} \right)$$

(B) Se W é do tipo 2,

$$\left(W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,z) \in D,\ g_1(x,z) \leq y \leq g_2(x,z)\} \right)$$

$$\int_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left\{ \int_{g_1(x,z)}^{g_2(x,z)} f(x,y,z)\,dy \right\} dx\,dz.$$

(C) Se W é do tipo 3,

$$\left(W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (y,z) \in D,\ h_1(y,z) \leq x \leq h_2(y,z)\} \right)$$

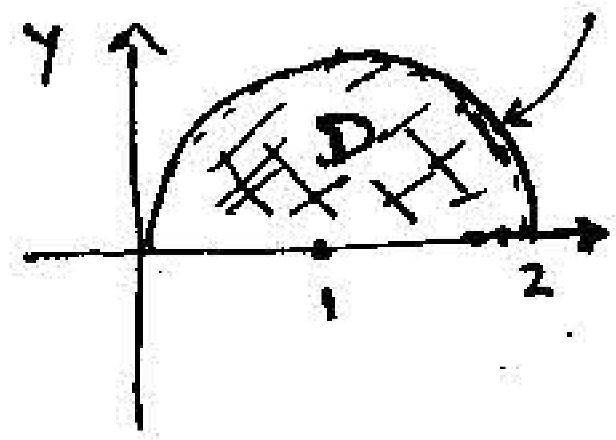
$$\int_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_D \left\{ \int_{h_1(y,z)}^{h_2(y,z)} f(x,y,z)\,dx \right\} dy\,dz$$

4.10. Exemplos:

(1) Calcule $\int_W z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz$, W é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=2x$, com $y \geq 0$ e pelos planos $z=0$ e $z=a$ $(a>0)$.

Solução:

$$x^2+y^2=2x \iff (x-1)^2+y^2=1$$



$x^2+y^2=2x$

$\Updownarrow$

$r=2\cos\theta$

$D_{xy}: \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{2x-x^2} \end{cases}$

$D_{r\theta}: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq \pi/2 \\ 0 \leq \underbrace{r \leq 2\cos\theta}_{(*)} \end{cases}$

(*) $x^2+y^2 \leq 2x$

$\Downarrow$

$r^{\cancel{2}} \leq 2\cancel{r}\cos\theta$

$\boxed{r \leq 2\cos\theta}$

$W: \begin{cases} (x,y) \in D \\ 0 \leq z \leq a \end{cases}$

$$\int_W z\sqrt{x^2+y^2}\,dxdydz = \int_D \int_0^a z\sqrt{x^2+y^2}\,dz\,dxdy$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_D \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy = \frac{a^2}{2}\int_{D_{r\theta}} \sqrt{r^2}\,.\,r\,drd\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\cos\theta} r^2\,drd\theta = \frac{a^2}{2}\int_0^{\pi/2} \left.\frac{r^3}{3}\right|_0^{2\cos\theta} d\theta$$

$$= \frac{a^2}{\cancel{6}}\int_0^{\pi/2} 8\cos^3\theta\,d\theta = \frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2} \cos\theta\,(1-\operatorname{sen}^2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}\cos\theta\, d\theta - \frac{4}{3}a^2\int_0^{\pi/2}\operatorname{sen}^2\theta\cos\theta\, d\theta$$

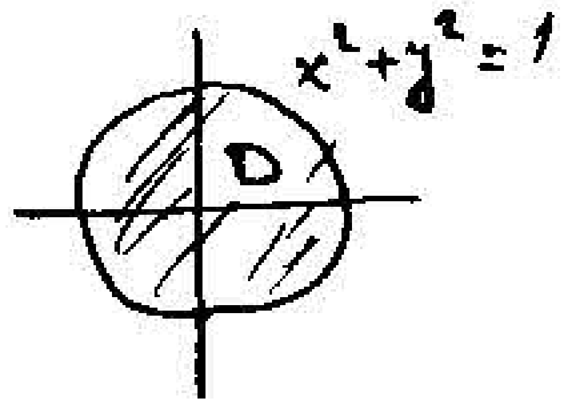
$$= \frac{4}{3}a^2 \operatorname{sen}\theta\,\Big|_0^{\pi/2} - \frac{4}{3}a^2\cdot\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3\theta\,\Big|_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{4}{3}a^2 - \frac{4}{9}a^2 = \frac{8}{3}a^2$$

---

(2) Calcule $\int_W z^2\, dxdydz$, W é o sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e pelos planos $z=0$ e $z=4$

<u>Solução</u>



$$W: \begin{cases} (x,y)\in D \\ 0\leq z\leq 4 \end{cases}$$

$$D: x^2+y^2\leq 1, (z=0)$$

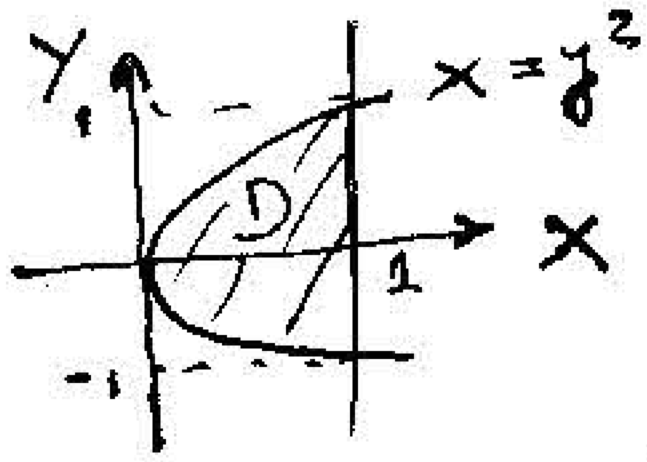
$$\int_W z^2\, dxdydz = \int_D\left(\int_0^4 z\, dz\right)dxdy = \int_D \frac{1}{2}z^2\Big|_0^4 dxdy$$

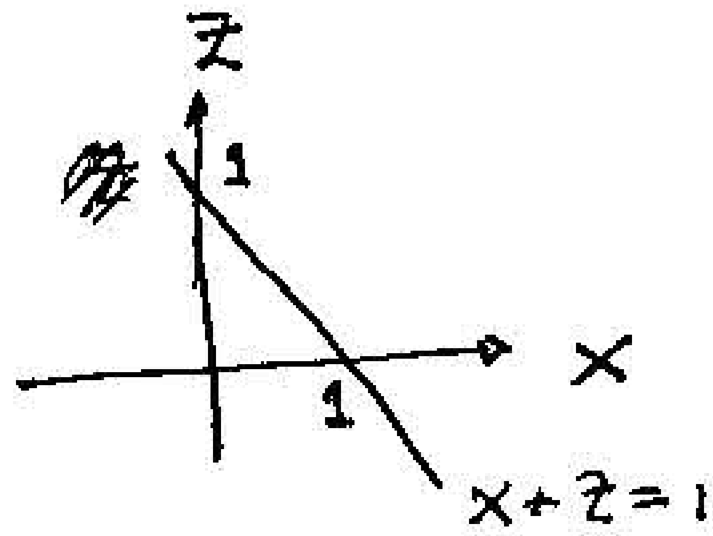
$$= \int_D (8-0)\,dxdy = 8\int_D dxdy$$

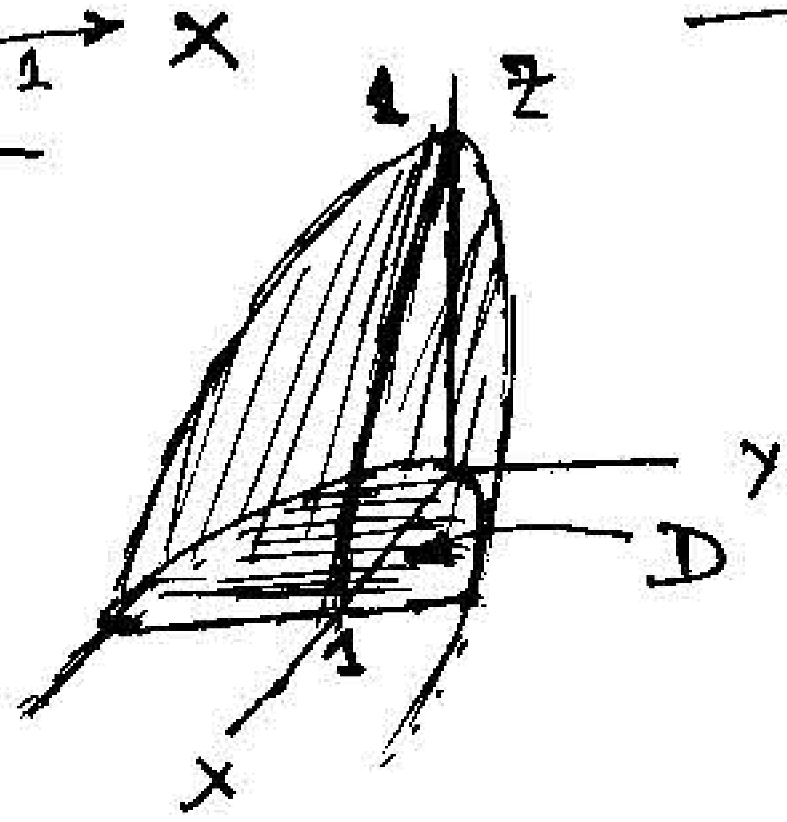
$$= 8\,\text{área}(D) = 8\pi$$

(3) Determine o volume do sólido W limitado pelo cilindro $x = y^2$ e os planos $z = 0$ e $x + z = 1$

<u>Solução</u> :







$$W : \begin{cases} (x, y) \in D \\ 0 \leq z \leq 1 - x \end{cases}$$

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{x} \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{ou} \quad D : \begin{cases} y^2 \leq x \leq 1 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{vol}(W) = \int_D \int_0^{1-x} dz\,dx\,dy = \int_D (1-x)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \int_{y^2}^{1} (1-x)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \left(x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_{y^2}^{1} dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left[\left(1 - \frac{1}{2}\right) - \left(y^2 - \frac{y^4}{2}\right)\right] dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(1/2 - y^2 + y^4/2\right) dy = \left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{10}y^5\right)\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \ldots = 8/15$$