Integral de superf. de um campo escalar

Seja $S \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície regular parametrizada por

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

Seja $f : A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ um campo escalar contínuo / definido num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$ t.q. $\varphi(D) \subset A$.

Definimos a integral de superfície do campo $f(x,y,z)$ sobre a superfície S como:

$$\iint_S f\,dS := \iint_S f(x,y,z)\,dS$$

$$= \iint_D f(\varphi(u,v)) \underbrace{\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du\,dv}_{dS}$$

Exemplos:

1) Se S é o gráfico da função $z = z(x,y)$, $(x,y) \in D$, então

$$\iint_S f\,dS = \iint_S f(x,y,z)\,dS$$

$$= \iint_D f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dx\,dy$$

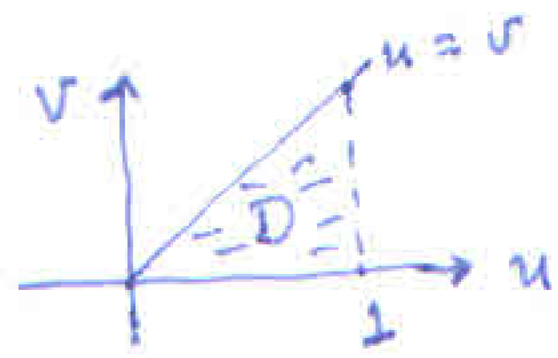
2) Se $f(x,y,z) = 1$ em S, então $\iint_S 1\,dS = \iint_S dS = \text{área}(S)$

3) Calcule $\iint_S xy\,dS$, onde S é a superf. parametrizada por

$\varphi(u,v) = (u, v, 2u+v-1)$ com $(u,v) \in D$ e

$$D: \begin{cases} 0 \le u \le 1 \\ 0 \le v \le u \end{cases}$$

Solução:



$\varphi_u = (1,0,2)$, $\varphi_v = (0,1,1)$

$$\varphi_u \wedge \varphi_v = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & k \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1), \quad \|\varphi_u \wedge \varphi_v\| = \sqrt{6}$$

$\therefore \quad dS = \sqrt{6}\,du\,dv$

$$\iint_S xy\,dS = \iint_D u\cdot v\sqrt{6}\,du\,dv = \int_0^1 \int_0^u uv\sqrt{6}\,dv\,du$$

$$= \int_0^1 \sqrt{6}\,u\cdot \frac{v^2}{2}\Big|_0^u du = \int_0^1 \frac{\sqrt{6}}{2}\,u\cdot u^2\,du$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{2}\int_0^1 u^3\,du = \frac{\sqrt{6}}{2}\,\frac{u^4}{4}\Big|_0^1 = \frac{\sqrt{6}}{8}$$

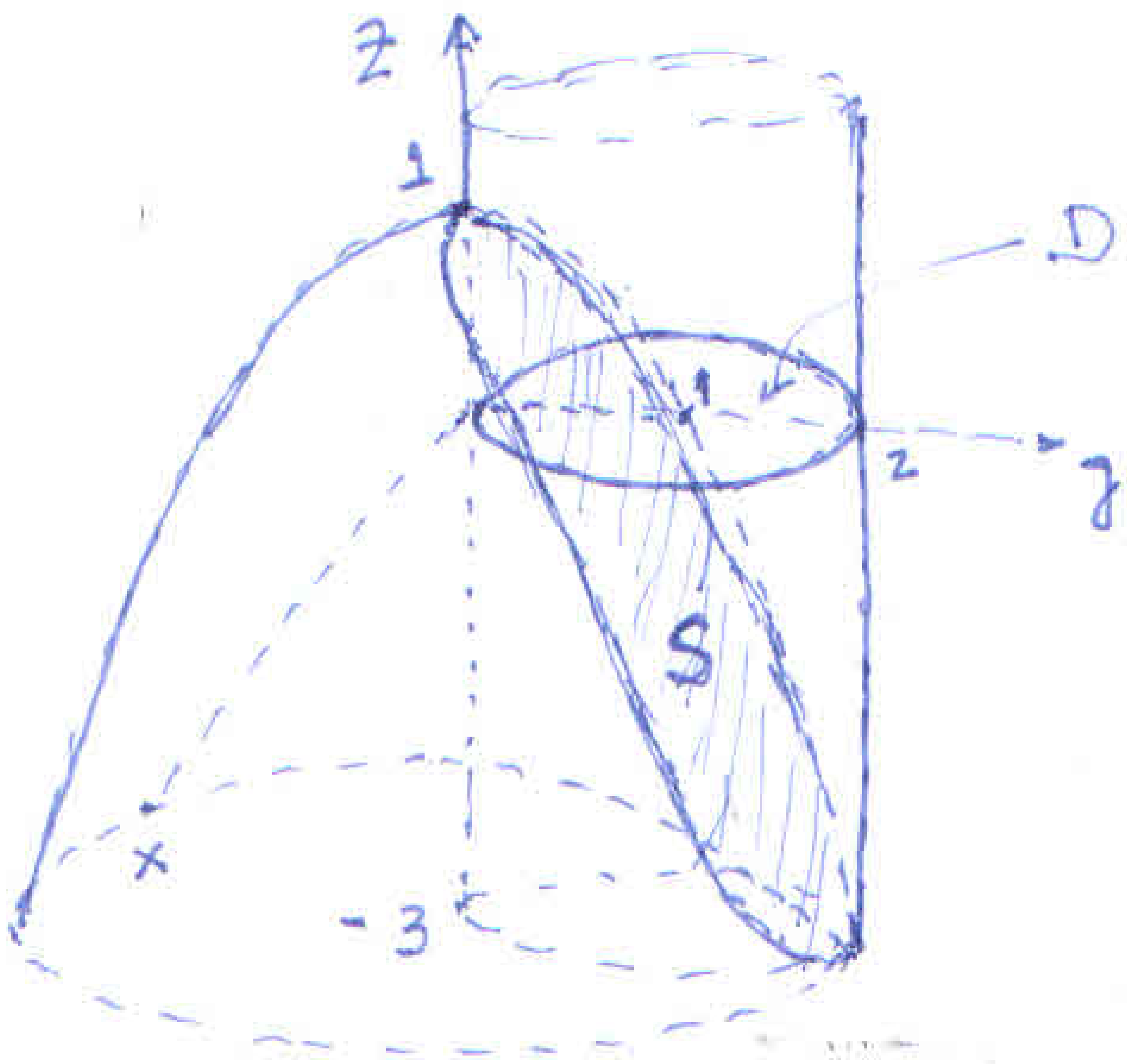
4) Calcule $\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\,dS$, onde S é a superf.

$z = 1-x^2-y^2$ que se encontra dentro do cilindro $x^2+y^2 \le 2y$

Solução

$S: \quad z = f(x,y) = 1 - x^2 - y^2, \quad (x,y) \in D$

$D: \quad x^2+y^2 \le 2y$



$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dx\,dy$$

$$dS = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}\, dx\,dy$$

$$\iint_S \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}}\, dS = \iint_D \frac{1}{\sqrt{1+4x^2+4y^2}} \cdot \sqrt{1+4x^2+4y^2}\, dx\,dy$$

$$= \iint_D dx\,dy = \text{Área}(D) = \pi \cdot 1^2 = \pi$$

Massa, Centro de Massa e Momento de Inércia

Se a superf. S representa uma lâmina delgada e $\delta = \delta(x,y,z)$ é a densidade superficial (que supomos contínua), então a massa M de S é dada por

$$M = \iint_S \delta(x,y,z)\, dS$$

O momento de inércia de S em relação a um eixo E é dado por

$$I_E = \iint_S r^2(x,y,z)\, \delta(x,y,z)\, dS$$

onde $r(x,y,z)$ = distância do ponto (x,y,z) ao eixo E.

Em particular se o eixo E é:

o eixo z, então $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2}$

o eixo x, então $r(x,y,z) = \sqrt{y^2+z^2}$

o eixo y, então $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+z^2}$.

E temos, respectivamente:

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\, \delta(x,y,z)\, dS$$

$$I_x = \iint_S (y^2+z^2)\, \delta(x,y,z)\, dS$$

$$I_y = \iint (x^2+z^2)\, \delta(x,y,z)\, dS$$

O centro de massa $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ é dado por

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iint_S x\, \delta(x,y,z)\, dS \quad , \quad \bar{y} = \frac{1}{M} \iint_S y\, \delta(x,y,z)\, dS$$

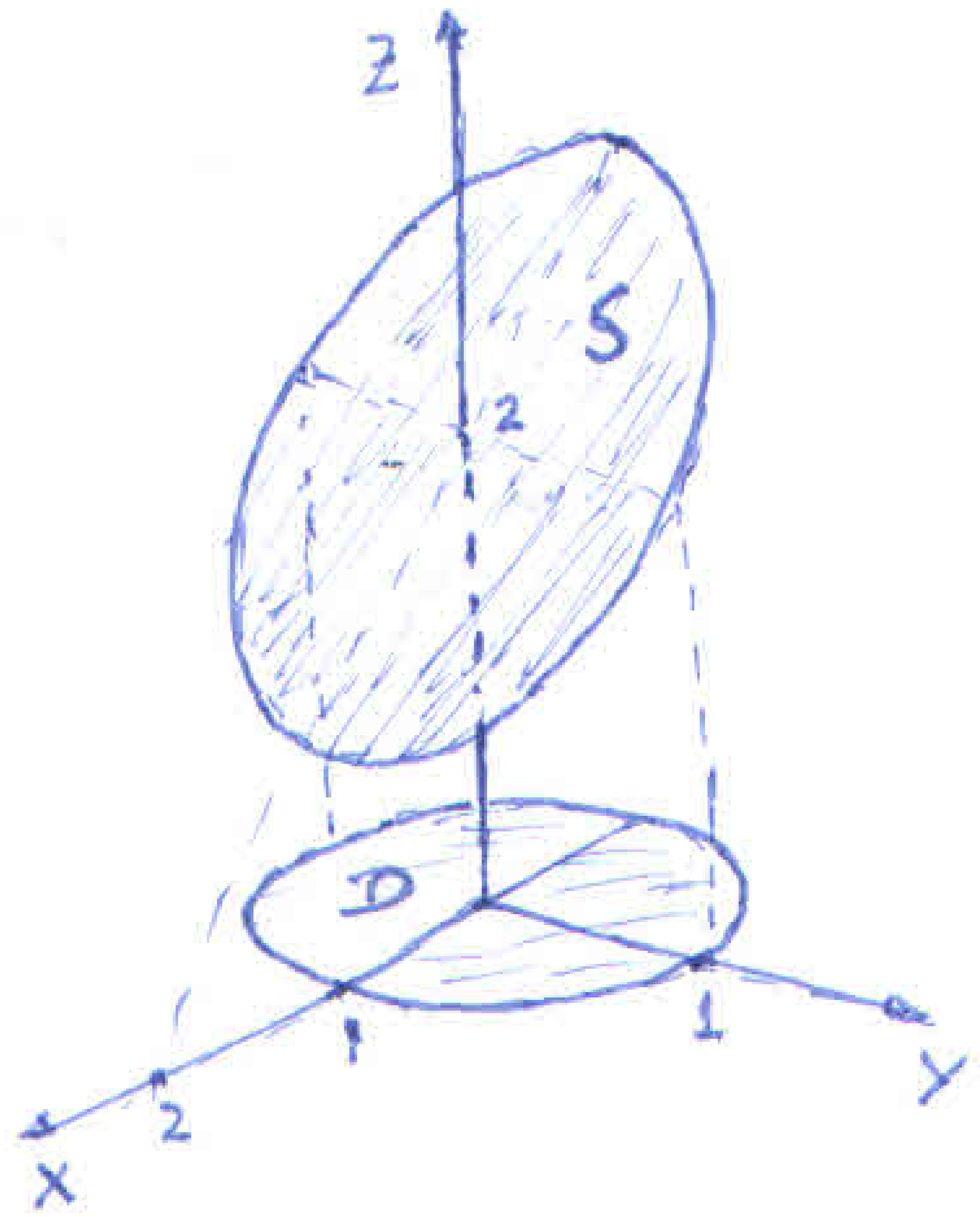
$$\bar{z} = \iint_S z\, \delta(x,y,z)\, dS .$$

Exemplos:

1) Calcule a massa da superf. S que corresponde à parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2+y^2=1$, sendo $\delta(x,y,z) = y^2$ sua densidade

Solução:

$$M = \iint_S \delta(x,y,z)\,dS$$



$S: z = f(x,y) = 2 - x$ com

$(x,y) \in D: x^2+y^2 \leq 1$.

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dxdy$$

$$= \sqrt{1 + (-1)^2 + 0^2}\,dxdy$$

$$dS = \sqrt{2}\,dxdy$$

$$\therefore \quad M = \iint_S \delta(x,y,z)\,dS = \iint_D y^2\sqrt{2}\,dxdy$$

$$= \sqrt{2}\iint_D y^2\,dxdy$$

Em coord. polares:

$$M = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^2 \operatorname{sen}^2\theta \cdot r\,dr\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\operatorname{sen}^2\theta \Big|_{r=0}^{r=1} d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^2\theta\,d\theta = \frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\theta - \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{2}}{4}\pi \quad \text{u.m.}$$