Integral de Linha de um Campo Escalar

Resumo:

Queremos definir $\int_C f \, ds$.

$f: A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua definida num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$

(f diz-se um campo escalar sobre $A \subset \mathbb{R}^3$)

$C \subset \mathbb{R}^3$ é uma curva em A

Seja $\alpha : I = [a,b] \longrightarrow A \subset \mathbb{R}^3$, $\alpha(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma parametrização da curva C de classe C^1 (ou seja, as funções $x, y, z : I \longrightarrow \mathbb{R}$ têm derivadas contínuas)

Seja $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ uma partição do intervalo $[a,b]$ t.q. $\Delta t := t_j - t_{j-1} = \frac{b-a}{n}$, $j = 1, \ldots, n$

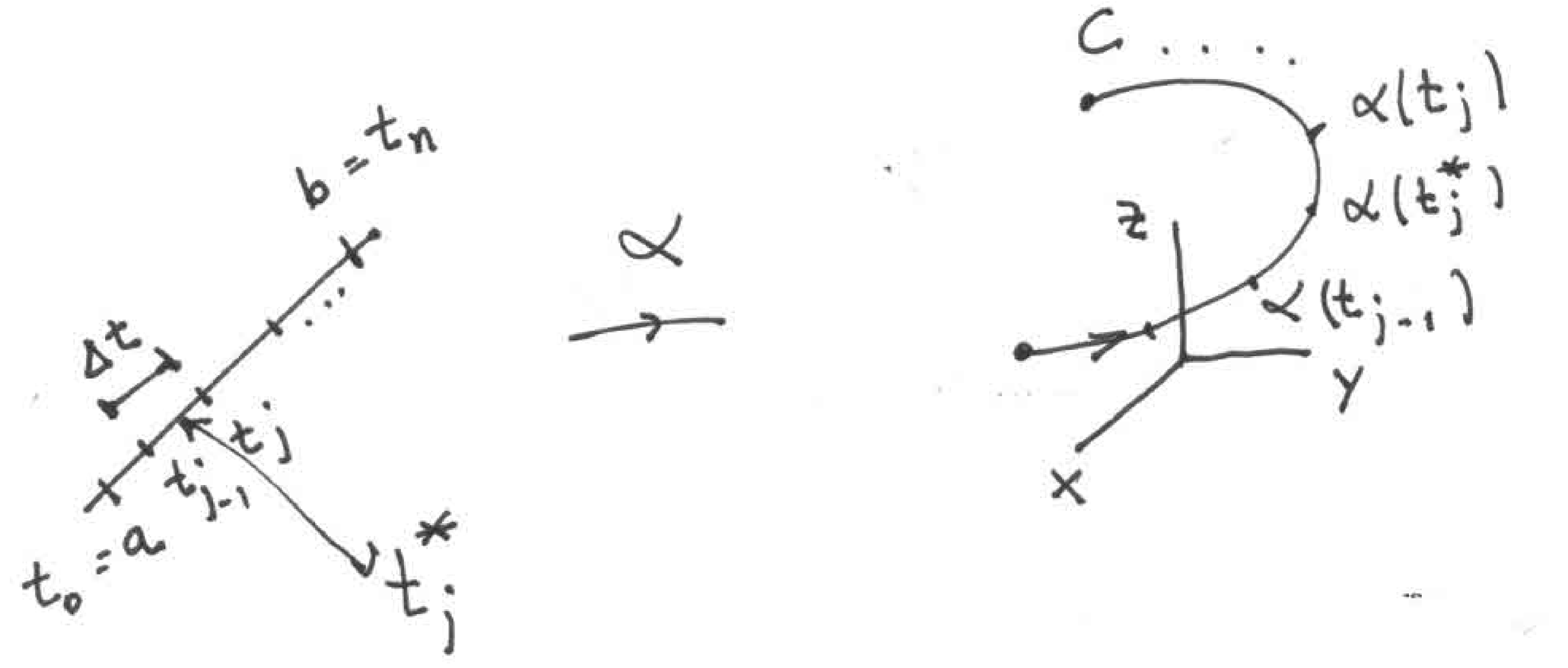
Dessa forma temos dividido o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos $I_1, I_2, \ldots, I_n$ todos com o mesmo comprimento Δt.

A curva C fica dividida em n subarcos $C_1, \ldots, C_n$ de comprimentos $\Delta s_1, \Delta s_2, \ldots, \Delta s_n$; onde

$\Delta s_j \simeq \| \alpha'(t_j^*) \| \Delta t$ para algum $t_j^* \in I_j = [t_{j-1}, t_j]$

Consideramos a soma

$$\sum_{j=1}^{n} f(\alpha(t_j^*))\,\Delta s_j = \sum_{j=1}^{n} f(\alpha(t_j^*))\,\|\alpha'(t_j^*)\|\,\Delta t$$



Definimos a integral de linha de f sobre C por

$$\int_C f\,ds = \int_C f(x,y,z)\,ds := \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f(\alpha(t_j^*))\,\|\alpha'(t_j^*)\|\,\Delta t$$

se esse limite existir independente da partição escolhida e do ponto $t_j^* \in I_j$.

Obs

(1) Se f é contínua, sabemos que o limite acima existe.

Logo,

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\alpha(t))\,\underbrace{\|\alpha'(t)\|\,dt}_{ds}$$

$$= \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2}\; dt .$$

(2) Se $f: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua e C é uma curva em $A \subset \mathbb{R}^2$ parametrizada por $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ com $t \in I = [a,b]$ (α de classe C^1), então

$$\int_C f\,ds = \int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\alpha(t))\underbrace{\|\alpha'(t)\|\,dt}_{ds}$$

$$= \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt .$$

(3) Para $f: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e C curva em $A \subset \mathbb{R}^n$ parametrizada por $\alpha(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$, $t \in I = [a,b]$, α de classe C^1; a situação é completamente analoga.

$$\int_C f\,ds = \int_a^b f(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt$$

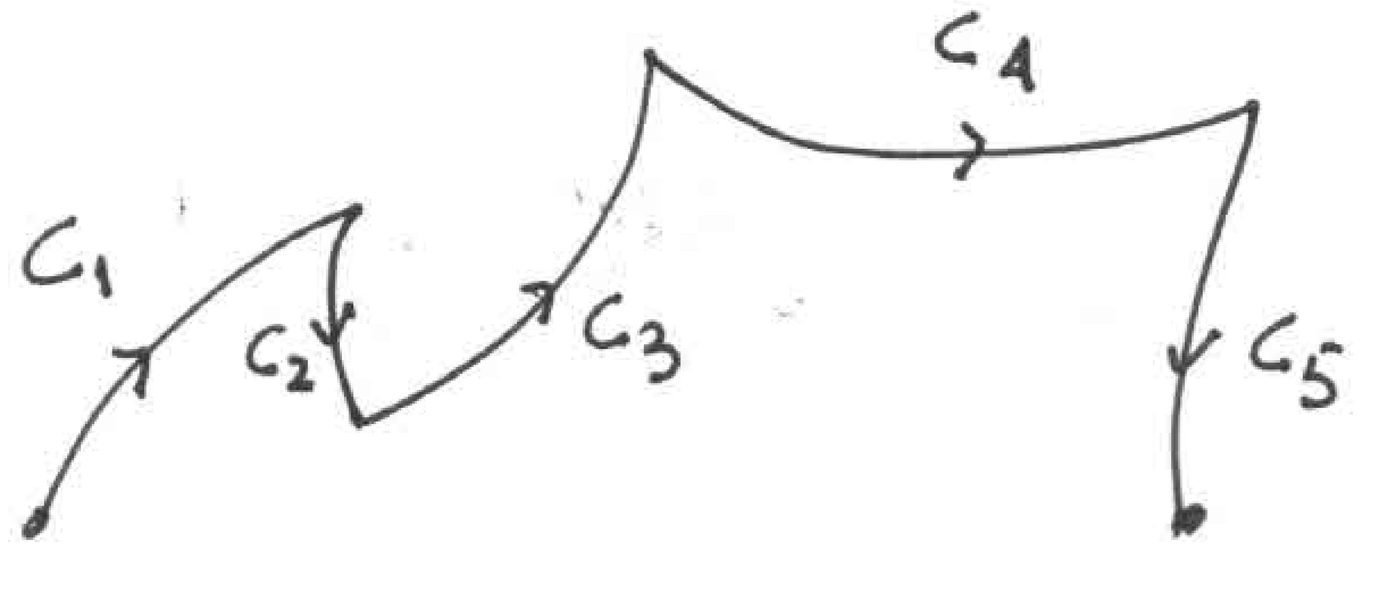
$$= \int_a^b f(x_1(t), \dots, x_n(t)) \cdot \sqrt{(x_1'(t))^2 + \dots + (x_n'(t))^2}\,dt .$$

(4) Se a curva C é C^1 por partes, ou seja a parametrização $\alpha: I \to \mathbb{R}^3$ é contínua e existe uma partição de $[a,b]$, $a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b$ de modo que

$$\alpha\big|_{(t_{j-1},t_j)} : (t_{j-1}, t_j) \longrightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{é de classe } C^1$$

então

$$\int_C f\,ds = \sum_{j=1}^{k} \int_{C_j} f\,ds \qquad \text{onde } C_j := \alpha([t_{j-1}, t_j])$$



" $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5$ "

Exemplos:

① Calcule $\int_C f\,ds$, onde:

C é parametrizada por $\alpha(t) = (t^2, t^3, 0)$ com $t \in [0,1]$

e $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = 1 + xyz$.

Solução:

$$\int_C f\,ds = \int_0^1 f(\alpha(t))\,\|\alpha'(t)\|\,dt.$$

$$f(\alpha(t)) = f(t^2, t^3, 0) = 1 + t^2 \cdot t^3 \cdot 0 = 1$$

$$\alpha'(t) = (2t, 3t^2, 0) \Rightarrow \|\alpha'(t)\| = \sqrt{4t^2 + 9t^4} = t\sqrt{4 + 9t^2}$$

$$\therefore \int_C f\,ds = \int_0^1 t\sqrt{4+9t^2}\,dt$$

$$\begin{cases} u = 4 + 9t^2 \Rightarrow du = 18t\,dt \\ t = 0 \Rightarrow u = 4 \\ t = 1 \Rightarrow u = 13 \end{cases}$$

$$= \int_4^{13} \frac{1}{18}\sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{18} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_4^{13} = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} - 4\sqrt{4}\right)$$

$$= \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} - 8\right)$$

(2) Calcule $\int_C f\,ds$ onde, C é a hélice parametrizada

por $\gamma(t) = (a\cos t, a\,\text{sen}\,t, at)$ com $a > 0$ e $t \in [0, 4\pi]$

e $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z-a^2}$

Solução:

$$f(\gamma(t)) = e^{a^2\cos^2 t + a^2\text{sen}^2 t + at - a^2}$$

$$= e^{at}.$$

$$\gamma'(t) = (-a\,\text{sen}\,t, a\cos t, a)$$

$$\|\gamma'(t)\|^2 = a^2\text{sen}^2 t + a^2\cos^2 t + a^2 = 2a^2$$

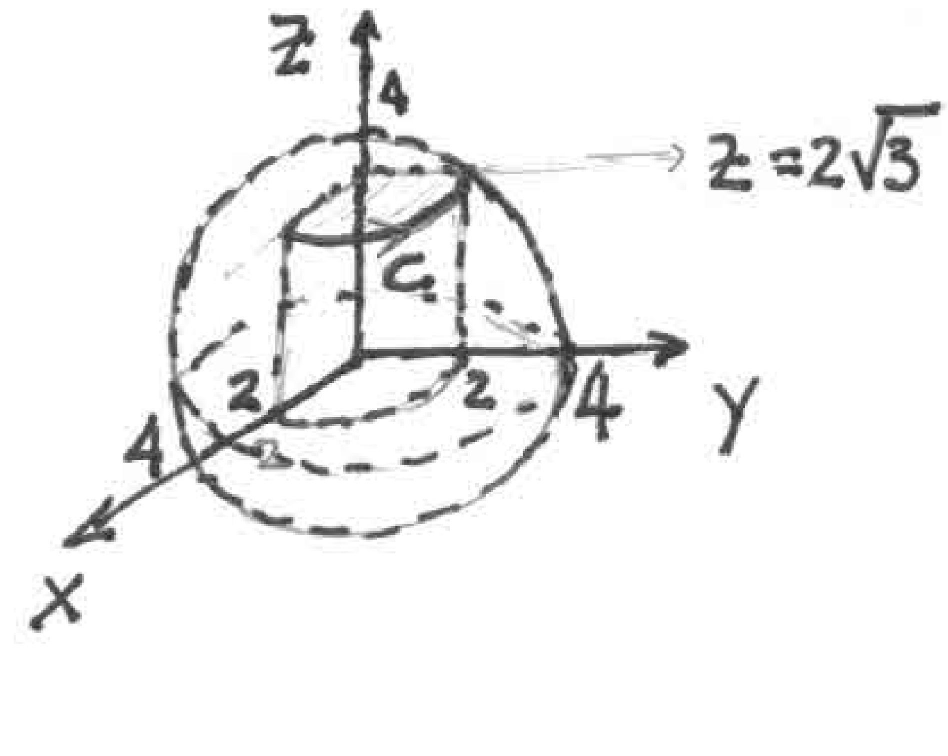
$$\therefore \quad \|\gamma'(t)\| = a\sqrt{2}.$$

$$\int_C f\,ds = \int_0^{4\pi} e^{at}\cdot a\sqrt{2}\,dt = a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{a}\,e^{at}\Big|_0^{4\pi}$$

$$= \sqrt{2}\left(e^{4\pi a} - e^0\right) = \underline{\underline{\sqrt{2}\left(e^{4\pi a} - 1\right)}}$$

(3) Calcule $\int_C \sqrt{3}\,xyz\,ds$, onde C é a curva de interseção da esfera $x^2+y^2+z^2=16$ com o cilindro $x^2+y^2=4$ que se encontra no 1º octante.

Solução:



A projeção de C sobre o plano XY corresponde à parte da circunf. $x^2+y^2=4$ que se encontra no 1º quadrante.

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=16 \\ x^2+y^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow z^2=12$$

$$\Rightarrow z=\sqrt{12} \quad (z>0)$$

$$\underline{\underline{z=2\sqrt{3}.}}$$

Assim, uma parametrização para C é:

$$\alpha(t)=\left(2\cos t,\, 2\operatorname{sen} t,\, 2\sqrt{3}\right), \quad t\in\left[0,\tfrac{\pi}{2}\right]$$

Daí $\alpha'(t)=(-2\operatorname{sen} t,\, 2\cos t,\, 0)$ e $\|\alpha'(t)\|=2$

$$\therefore \int_C \sqrt{3}\, xyz\, ds = \sqrt{3}\int_0^{\pi/2} 2\cos t\cdot 2\operatorname{sen} t\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\, dt$$

$$= 16\cdot 3\int_0^{\pi/2}\cos t\operatorname{sen} t\, dt$$

$$= 48\int_0^1 u\, du \qquad \left\{\begin{array}{l} u=\operatorname{sen} t \\ du=\cos t\, dt \\ t=0 \Rightarrow u=0 \\ t=\pi/2 \Rightarrow u=1 \end{array}\right.$$

$$= 48\cdot\frac{1}{2}u^2\Big|_0^1 = \underline{\underline{24}}$$

Obs.

① Se considerarmos a curva C como um arame "muito fino" e $f=f(x,y,z)$ como a densidade de massa do arame, então a massa total do arame é dada por $\int_C f\, ds$.

(2) Define-se o valor médio da função f ao longo da curva C como o número

$$\overline{M} := \frac{1}{L(C)} \int_C f\, ds$$

onde $L(C)$ é o comprimento da curva C.

Assim, por exemplo, se f representa a temperatura do arame, a média de temperatura no arame é dada por

$$\overline{M} = \frac{1}{L(C)} \int_C f\, ds$$

(3) Suponha que a curva $C \subset \mathbb{R}^3$ representa um arame de densidade $f = f(x,y,z)$ em $(x,y,z) \in C$. Então valem as seguintes fórmulas:

(i) Comprimento de arame:

$$L = \int_C ds$$

(ii) Massa do arame:

$$M = \int_C f\, ds$$

(iii) Centro de massa, $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, onde

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \int_C x\, f(x,y,z)\, ds$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \int_C y\, f(x,y,z)\, ds$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \int_C z\, f(x,y,z)\, ds$$

(iv) Momento de inércia em relação a uma reta ℓ.

$$I_\ell = \int_C d^2(x,y,z) \cdot f(x,y,z)\, ds$$

onde $d(x,y,z) =$ distância do pto (x,y,z) à reta ℓ.

Exemplo:

Calcule a massa de um arame fino que tem o formato da hélice $\alpha(t) = (3\cos t, 3\,\text{sen}\, t, 4t)$, com $0 \leq t \leq \pi/2$, se a densidade de massa é $f(x,y,z) = \dfrac{kx}{1+y^2}$, $k \in \mathbb{R}$, $k > 0$.

Solução

$$M = \int_C f\, ds = \int_C \frac{kx}{1+y^2}\, ds = k \int_0^{\pi/2} \frac{3\cos t}{1 + 9\,\text{sen}^2 t} \cdot 5\, dt$$

$$\left(\alpha'(t) = (-3\,\text{sen}\, t, 3\cos t, 4), \quad \|\alpha'(t)\|^2 = 9\,\text{sen}^2 t + 9\cos^2 t + 16 = 25 \right.$$
$$\left. \therefore \quad \|\alpha'\| = 5 \right)$$

$$M = 3k \int_0^{\pi/2} \frac{5\cos t}{1 + 9\,\text{sen}^2 t}\, dt = 5k \int_0^{\pi/2} \frac{3\cos t\; dt}{1 + (3\,\text{sen}\, t)^2}$$

$u = 3\,\text{sen}\, t \Rightarrow du = 3\cos t\, dt$

$$\begin{cases} t = 0 \Rightarrow u = 0 \\ t = \pi/2 \Rightarrow u = 3 \end{cases}$$

$$M = 5k \int_0^3 \frac{du}{1+u^2} = 5k \,\text{arctg}\, u \Big|_0^3 = 5k\,\text{arctg}(3)$$