

① Calcular $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS$, onde

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^x - y)\vec{i} + (xz + y^2)\vec{j} + 2yz\vec{k} \quad e$$

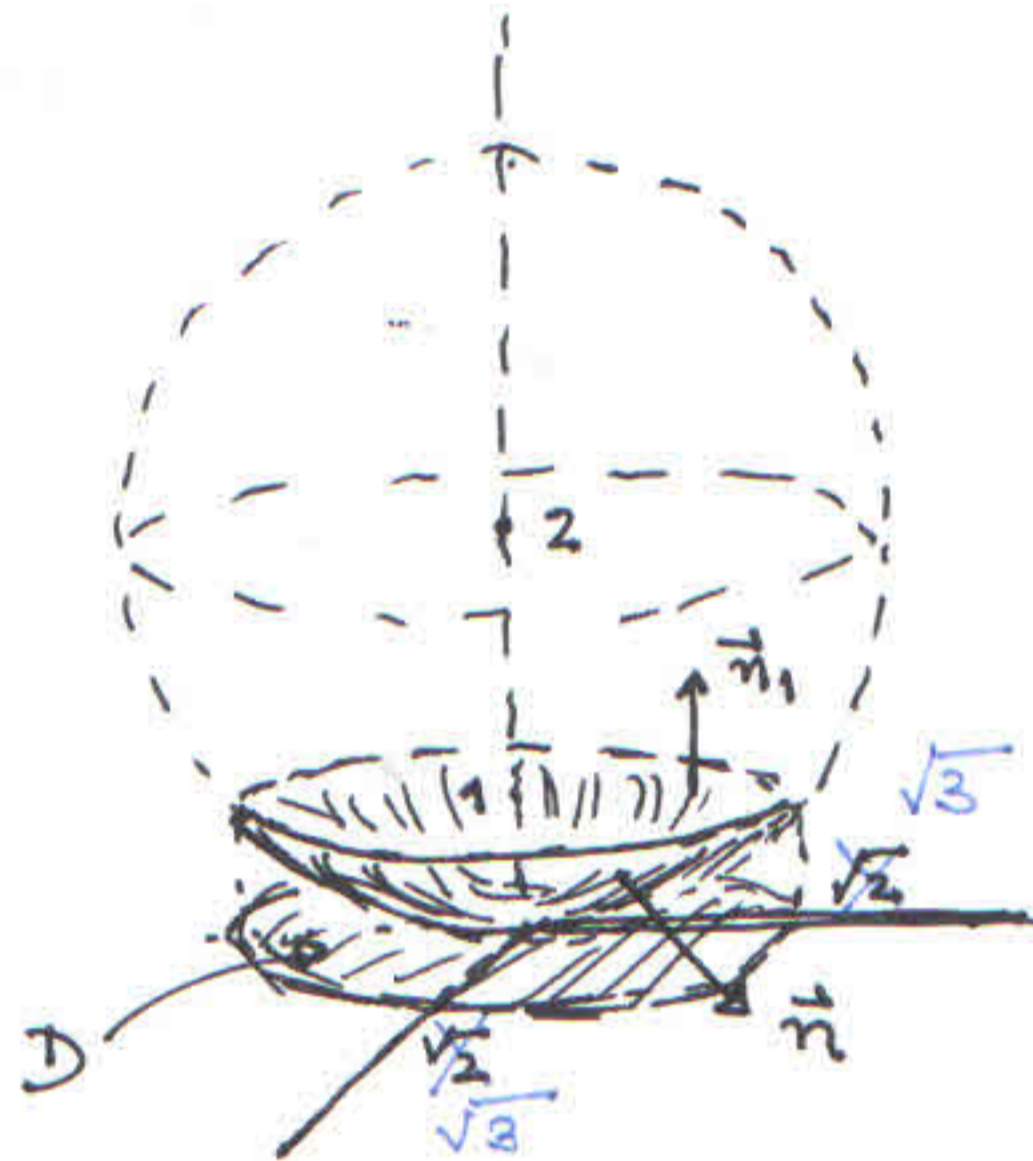
$$S: \begin{cases} z \leq 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0 \end{cases}$$

Solução

Considere $\tilde{S} = S \cup S_1$, onde

S_1 é dada por:

$$S_1: \begin{cases} z = 1 \\ (x, y) \in D: x^2 + y^2 \leq 2 \end{cases}$$



S_1 orientada por $\vec{n}_1 = (0, 0, 1) = \vec{k}$ e

$$dS_1 = \sqrt{1 + (z_x)^2 + (z_y)^2} \, dx \, dy = \sqrt{1 + 0 + 0} \, dx \, dy = dx \, dy$$

$$\left\{ dS_1 = dx \, dy \right\}$$

Seja W o sólido limitado por \tilde{S} ($\partial W = \tilde{S}$)

Pelo Teor. de Gauss, temos

$$\iint_{\tilde{S} = \partial W} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\tilde{S} = \iiint_W \text{div}(\text{rot} \vec{F}) \, dV$$

$$\text{div}(\text{rot} \vec{F}) = 0 \quad \checkmark$$

$$\therefore \iint_{\tilde{S}} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, d\tilde{S} = 0$$

$$\therefore \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = - \iint_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS_1$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ e^x - y & xz + y^2 & 2yz \end{vmatrix} = (2z - x, 0, z + 1)$$

(Em S_1 temos $z = 1$). Logo

$$\iint_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 = \iint_D (2 - x, 0, 2) \cdot (0, 0, 1) \, dx \, dy$$

$$= \iint_D 2 \, dx \, dy = 2 \text{área}(D)$$

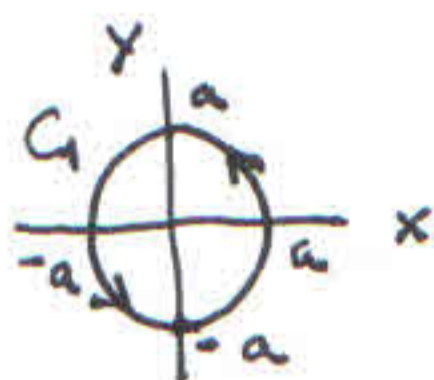
$$= 2\pi \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right)^2 = \frac{6}{4}\pi$$

$$\therefore \left\{ \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = \begin{matrix} -\frac{6}{4}\pi \\ -6\pi \end{matrix} \right.$$

② $\vec{F}(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2} \vec{i} + \frac{x}{x^2+y^2} \vec{j}$ definido em $D = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

Calcule:

(a) $\oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{n}$, onde $C_1: x^2+y^2 = a^2$, $a > 0$ orientada positivamente



Solução

Note que a região limitada por C_1 não está contida em D ($(0,0) \notin D$)... Não podemos aplicar o Teor. de Green.

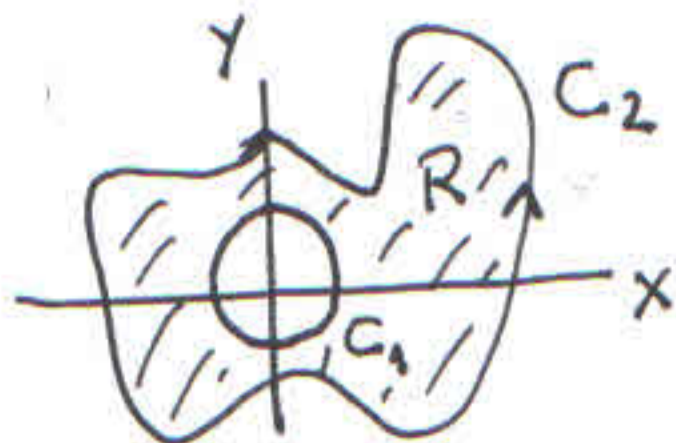
Parametrizamos C_1 por: $\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$

Então $dx = -a \sin t dt$, $dy = a \cos t dt$

$$\begin{aligned} \oint_{C_1} \vec{F} \cdot d\vec{n} &= \oint_{C_1} \frac{-y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{-a \sin t}{a^2} (-a \sin t) + \frac{a \cos t}{a^2} (a \cos t) \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

(b) $\oint_{C_2} \vec{F} \cdot d\vec{n}$, onde C_2 é uma curva fechada, C^1 por partes, que envolve a origem e está orientada positivamente.

Solução:



Também não podemos aplicar o Teor. de Green, $(0,0)$ está na região limitada por C_2 .

Não podemos usar a definição pois não conhecemos a equação da curva C_2 .

Isolamos $(0,0)$ pela circunf. C_1 da parte (a)

$C_1: x^2 + y^2 = a^2$ com a suficientemente pequeno para que

$$C_1 \cap C_2 = \emptyset \quad (C_1 \text{ dentro da região limitada por } C_2)$$

Seja R a região limitada por C_1 e C_2 , $\partial R = C_1 \cup C_2$

R não contém $(0,0)$ logo podemos aplicar o Teor de Green em R

$$\oint_{\partial R^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} \\ Q &= \frac{-y}{x^2+y^2} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2xy}{x^2+y^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Logo $\oint_{\partial R^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Daí $\int_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} + \int_{C_1^-} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$

$$\int_{C_2^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1^+} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 2\pi$$

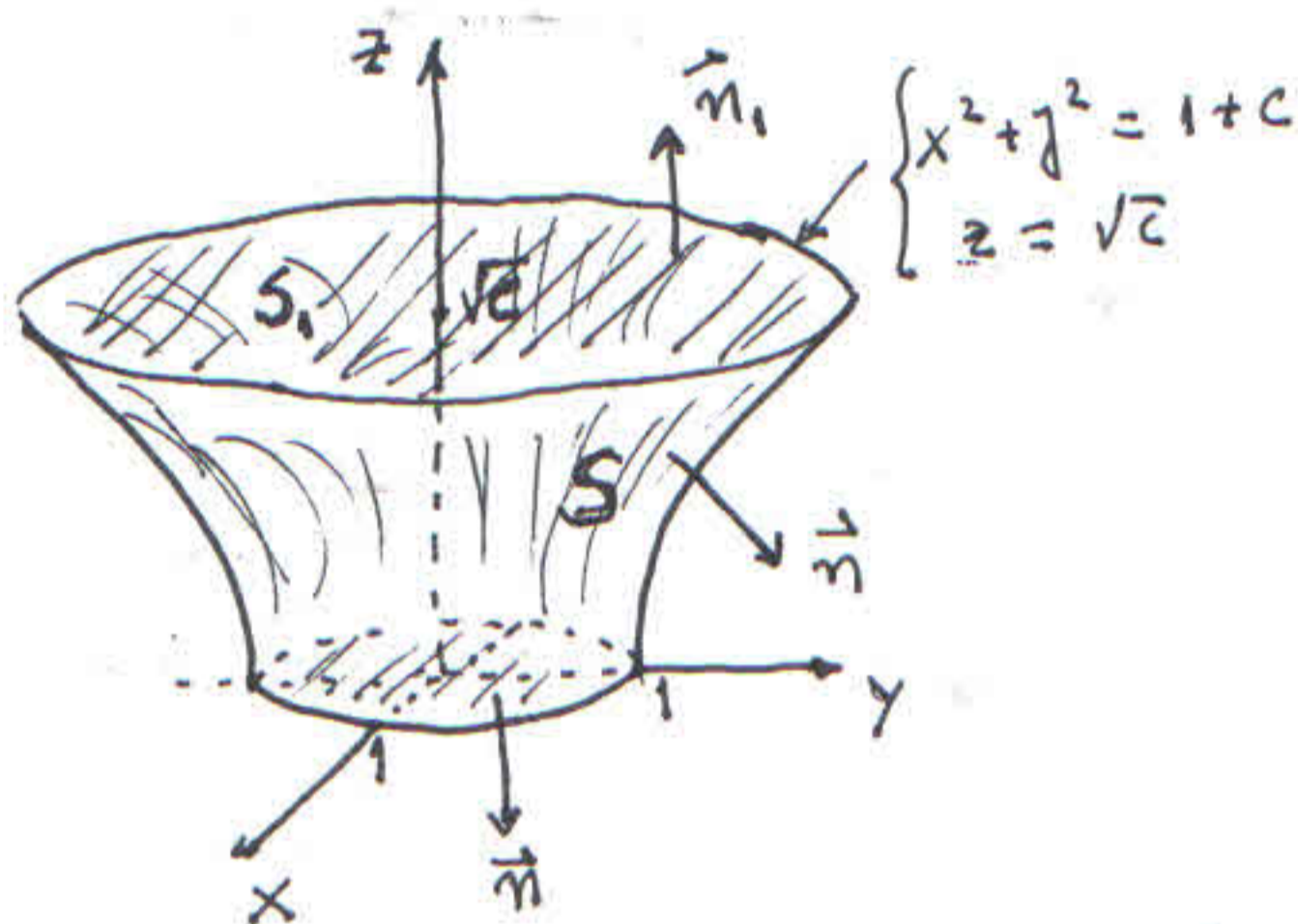
$$\textcircled{3} \quad \vec{F}(x,y,z) = \left(-\frac{c}{2}z + ze^x, \frac{cx}{2} - ze^y, xz \right), \quad c > 0$$

S : $\left\{ \begin{array}{l} \text{união do hiperboloide de uma folha } x^2 + y^2 - z^2 = 1, 0 \leq z \leq \sqrt{c} \\ \text{com o disco } x^2 + y^2 \leq 1, z = 0 \end{array} \right.$

Calcular o valor de c sabendo $\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = -6\pi$

onde \vec{n} é o campo normal apontando para fora de S .

Solução:



$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 - z^2 = 1 \\ z = \sqrt{c} \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1 + c$$

A interseção do hiperboloide com o plano $z = \sqrt{c}$ é a circunf. $x^2 + y^2 = 1 + c$ no plano $z = \sqrt{c}$

Para aplicar o Teor. de Gauss "fechamos" S com S_1 ,

S_1 : Parte do plano $z = \sqrt{c}$ limitada pela circunf. $x^2 + y^2 = 1 + c$

$$S_1: \begin{cases} z = \sqrt{c} \\ x^2 + y^2 \leq 1 + c \end{cases}$$

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ a região t.q. $\partial W = S \cup S_1$.

Pelo Teor. de Gauss, temos

$$\iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS + \iint_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 = \iiint_W \text{div}(\text{rot}(\vec{F})) \, dV$$

$$\text{div}(\text{rot}(\vec{F})) = 0 \quad \text{e} \quad \iint_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n} \, dS = -6\pi$$

então

$$\iint_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 = 6\pi \dots \dots (*)$$

Por outro lado,

$$\text{rot}(\vec{F}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{cy}{2} + ze^x & \frac{cx}{2} - ze^x & xz \end{vmatrix}$$

$$= (x + e^z, e^x - z, \frac{c}{2} + \frac{c}{2})$$

$$= (x + e^z, e^x - z, c)$$

$$\vec{n}_1 = \vec{k} = (0, 0, 1)$$

$$dS_1 = dx dy$$

$$S_1: \begin{cases} z = \sqrt{c} \\ (x, y) \in D : x^2 + y^2 \leq (\sqrt{1+c})^2 \end{cases}$$

$$\text{Logo } \iint_{S_1} \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}_1 \, dS_1 = \iint_D (x + e^z, e^x - z, c) \cdot (0, 0, 1) \, dx dy$$

$$= \iint_D c \, dx dy = c \cdot \text{área}(D) = c \cdot \pi(1+c)$$

Portanto, substituindo em (*).

$$\pi c(1+c) = 6\pi, \text{ donde } \underline{c=2} \text{ ou } \underline{c=-3}$$

e como $c > 0$, temos $c=2$

$$(4) \quad S: \varphi(u, v) = (u, v, 2u+v), \quad (u, v) \in D: \begin{cases} 0 \leq u \leq 1 \\ 0 \leq v \leq u \end{cases}$$

$$\delta(x, y, z) = x + y + z \quad (\text{densidade})$$

Determinar a massa de S .

Solução:

$$\begin{aligned} M &= \iint_S \delta(x, y, z) dS = \iint_S (x + y + z) dS \\ &= \iint_D (u + v + (2u + v)) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv \\ &= \iint_D (3u + 2v) \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| du dv \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} = (1, 0, 2), \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (0, 1, 1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} = (-2, -1, 1), \quad \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right\| = \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{6}$$

$$\begin{aligned} \text{Logo } M &= \sqrt{6} \iint_D (3u + 2v) du dv = \sqrt{6} \int_0^1 \int_0^u (3u + 2v) dv du \\ &= \sqrt{6} \int_0^1 (3uv + v^2) \Big|_{v=0}^{v=u} du = \sqrt{6} \int_0^1 (3u^2 + u^2) du = \sqrt{6} \int_0^1 4u^2 du \\ &= 4\sqrt{6} \frac{u^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{4\sqrt{6}}{3} \end{aligned}$$