Exercícios Resolvidos

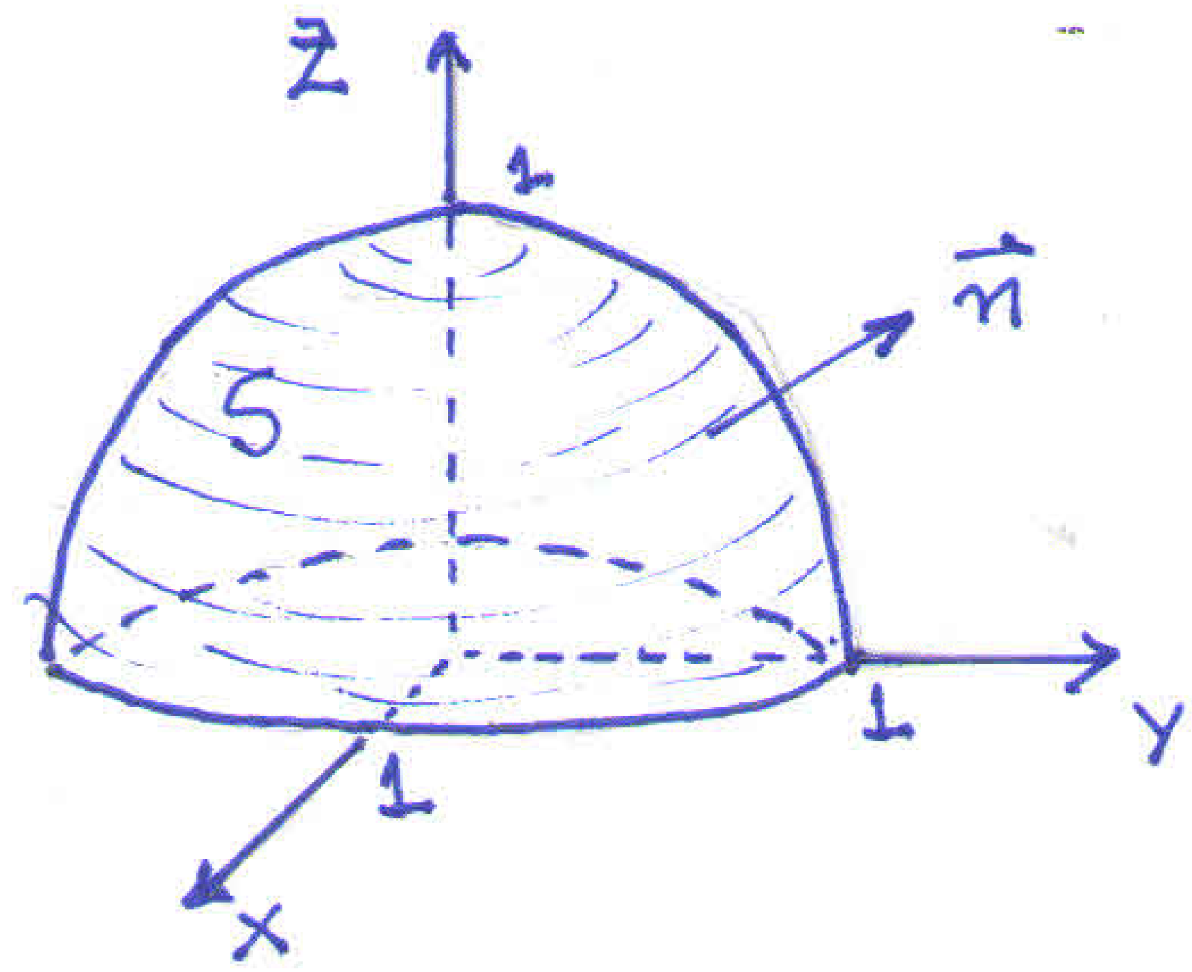
Cálculo III

Prof. Pedro A. Hinojosa

(1) Calcule o fluxo do campo $\vec{F} = (x-y-4)\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ através da semiesfera superior $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ z \geq 0 \end{cases}$

com campo normal $\vec{n}$ t.q. $\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$

Solução



$\vec{n}$ aponta "para cima" ($\vec{n}\cdot\vec{k} > 0$), logo

$\vec{n} = (x, y, z)$ (A esfera tem raio 1)

O fluxo é dado por:

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_S \left[x(x-y-4) + y^2 + z^2\right] dS$$

$$= \int_S (x^2+y^2+z^2 - xy - 4x)\, dS = \int_S (1 - xy - 4x)\, dS$$

$$= \int_S dS - \int_S (xy+4x)\, dS = \text{área}(S) - \int_S (xy+4x)\, dS$$

$$\left(\text{área}(S) = \frac{1}{2}\cdot 4\pi\cdot 1^2 = 2\pi\right)$$

Para calcular $\int_S (xy+4x)\,dS$ parametrizamos S.

Em coord. esféricas:

$$\begin{cases} x = \operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y = \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z = \cos\phi \end{cases}$$

com $(\phi,\theta) \in D : \begin{cases} 0 \leq \phi \leq \pi/2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$

$$\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\quad \varphi(\phi,\theta) = (\operatorname{sen}\phi\cos\theta, \operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, \cos\phi)$$

$$(dS = \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta.)$$

$$\int_S (xy+4x)\,dS = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} (\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 4\operatorname{sen}\phi\cos\theta)\operatorname{sen}\phi\, d\theta\, d\phi$$

$$= \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^3\phi\operatorname{sen}\theta\cos\theta\, d\theta\, d\phi + 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi} 4\operatorname{sen}^2\phi\cos\theta\, d\theta\, d\phi$$

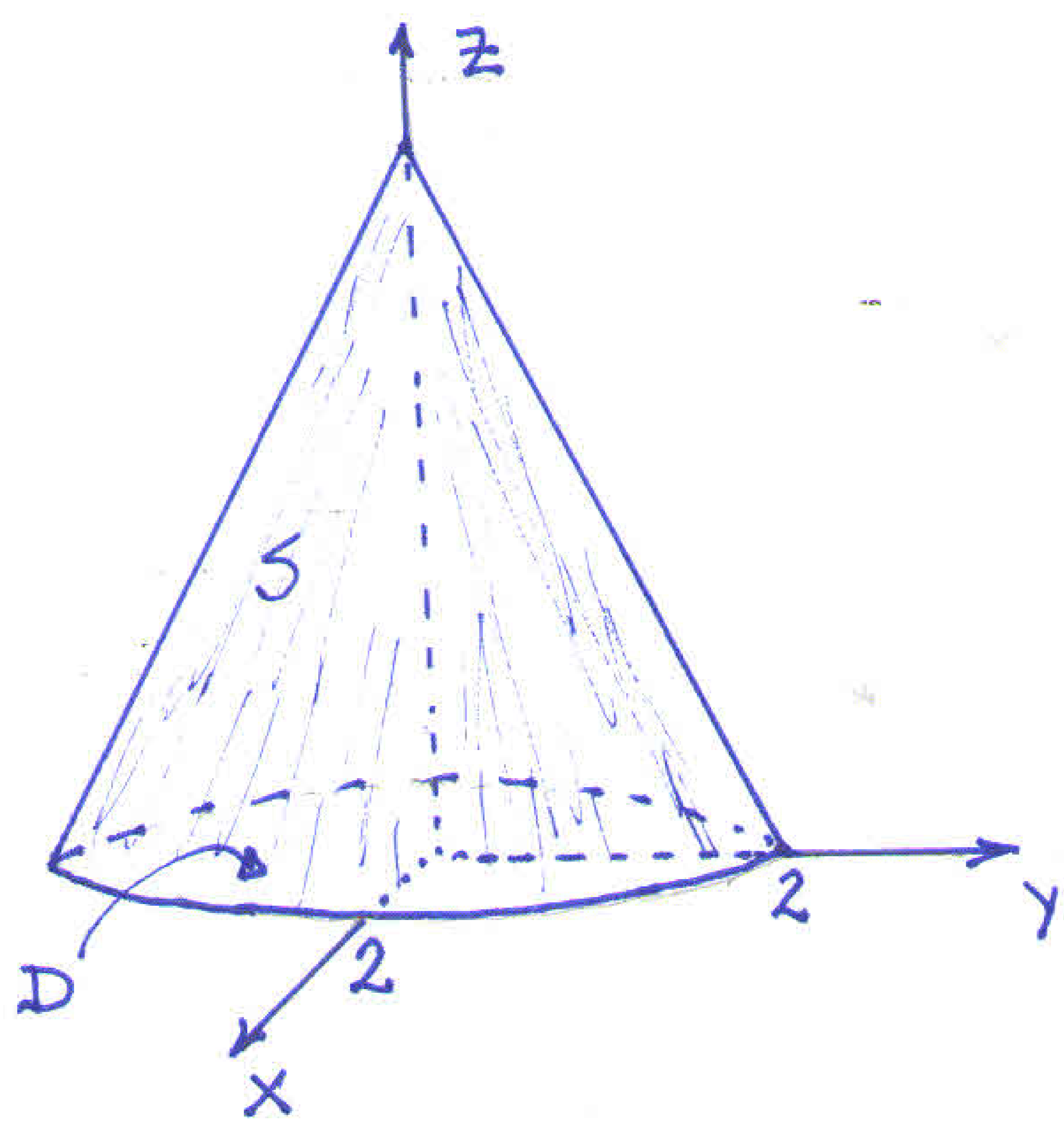
$$= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^3\phi \left(\cancelto{0}{\tfrac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\Big|_0^{2\pi}}\right) d\phi + 4\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\phi \left(\cancelto{0}{\operatorname{sen}\theta\Big|_0^{2\pi}}\right) d\phi$$

$$= 0$$

Logo $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 2\pi - 0 = 2\pi$

(2) Uma lâmina fina S tem a forma da superf. do cone dado por $z = 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}$, com $z \geq 0$. Em cada pto, a densidade é proporcional à distância desse pto ao eixo z. Verifique que o momento de inércia em relação ao eixo z é igual a $\frac{12}{5}M$, onde M é a massa de S.

Solução:



Parametrizamos S como um gráfico

$$\varphi : D \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \varphi(x,y) = \left(x, y, 4 - 2\sqrt{x^2+y^2}\right)$$

$D : x^2+y^2 \leq 4$.

$$\varphi_x = \left(1, 0, \frac{-2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), \quad \varphi_y = \left(0, 1, \frac{-2y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

$$\varphi_x \wedge \varphi_y = \left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1\right)$$

$$\| \varphi_x \wedge \varphi_y \| = \sqrt{1 + \frac{4x^2}{x^2+y^2} + \frac{4y^2}{x^2+y^2}} = \sqrt{5}.$$

$$\therefore \quad \boxed{dS = \sqrt{5}\, dx\,dy}$$

A distância de (x,y,z) ao eixo z é $\sqrt{x^2+y^2}$, logo a densidade em cada pto é dada por

$$\delta(x,y,z) = k\sqrt{x^2+y^2}.$$

A massa M é:

$$M = \int_S \delta(x,y,z)\,dS = \int_S k\sqrt{x^2+y^2}\,dS$$

$$= k\int_D \sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{5}\,dx\,dy = \sqrt{5}\,k\int_0^2\int_0^{2\pi} r\cdot r\,d\theta\,dr$$

$$\left(\text{Em coord polares: } D:\begin{cases}0\leq r\leq 2\\ 0\leq\theta\leq 2\pi\end{cases}\quad \begin{cases}x = r\cos\theta\\ y = r\,\text{sen}\,\theta\end{cases}\quad dx\,dy = r\,dr\,d\theta\right)$$

$$= 2\sqrt{5}\,k\pi\int_0^2 r^2\,dr$$

$$= 2\sqrt{5}\,k\pi\left(\frac{r^3}{3}\Big|_0^2\right) = \frac{16\sqrt{5}\,k\pi}{3}$$

$$\boxed{M = \frac{16\sqrt{5}\,k\pi}{3}}$$

O momento de inércia em relação ao eixo z é

$$I_z = \int_S (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\,dS = k\int_S (x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}\,dS$$

$$= \sqrt{5}\,k\int_0^2\int_0^{2\pi} r^2\cdot r\cdot r\,d\theta\,dr = 2\sqrt{5}\,k\pi\int_0^2 r^4\,dr$$

$$= 2\sqrt{5}\,k\pi\cdot\frac{32}{5} = \frac{64\sqrt{5}\,k\pi}{5} = \frac{16\sqrt{5}\,k\pi}{3}\cdot\frac{3\cdot 4}{5}$$

$$= \frac{12}{5}\cdot\frac{16\sqrt{5}\,k\pi}{3} = \frac{12}{5}M$$

(3) Seja $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 tal que $\nabla^2 f = x^2+y^2+z^2$. Calcule $\int_S \nabla f \cdot \vec{n}\, dS$, onde S é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$ com $\vec{n}$ exterior a S.

Solução

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ a região limitada por S $(\partial W = S)$.

Pelo teor. de Gauss $\left(\int_W div(\vec{F})dV = \int_{\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS \right)$

temos

$$\int_W div(\nabla f)\, dV = \int_S \nabla f \cdot \vec{n}\, dS$$

$$\left(div(\nabla f) = \nabla \cdot \nabla f = \nabla^2 f \right)$$

Logo $\int_S \nabla f \cdot \vec{n}\, dS = \int_W \nabla^2 f\, dV = \int_W (x^2+y^2+z^2) dV$

Em coord. esféricas $\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y = \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z = \rho \cos\phi \end{cases}$ $x^2+y^2+z^2 = \rho^2$, $J = \rho^2 \operatorname{sen}\phi$

W é dado por : $\begin{cases} 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0 \leq \phi \leq \pi \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$. Daí

$$\int_W (x^2+y^2+z^2) dV = \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho^2 \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\theta\, d\phi\, d\rho$$

$$\int_W (x^2+y^2+z^2)\,dV = \int_0^1\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \rho^4 \operatorname{sen}\phi \, d\theta\, d\phi\, d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 -\rho^4 \cos\phi \Big]_0^\pi d\rho$$

$$= 4\pi \int_0^1 \rho^4\, d\rho = 4\pi \cdot \frac{1}{5}$$

$$= 4\pi/5 .$$

$$\therefore \quad \boxed{\int_S \nabla f \cdot \vec{n}\, dS = \frac{4\pi}{5}}$$

④ Calcule o fluxo do campo

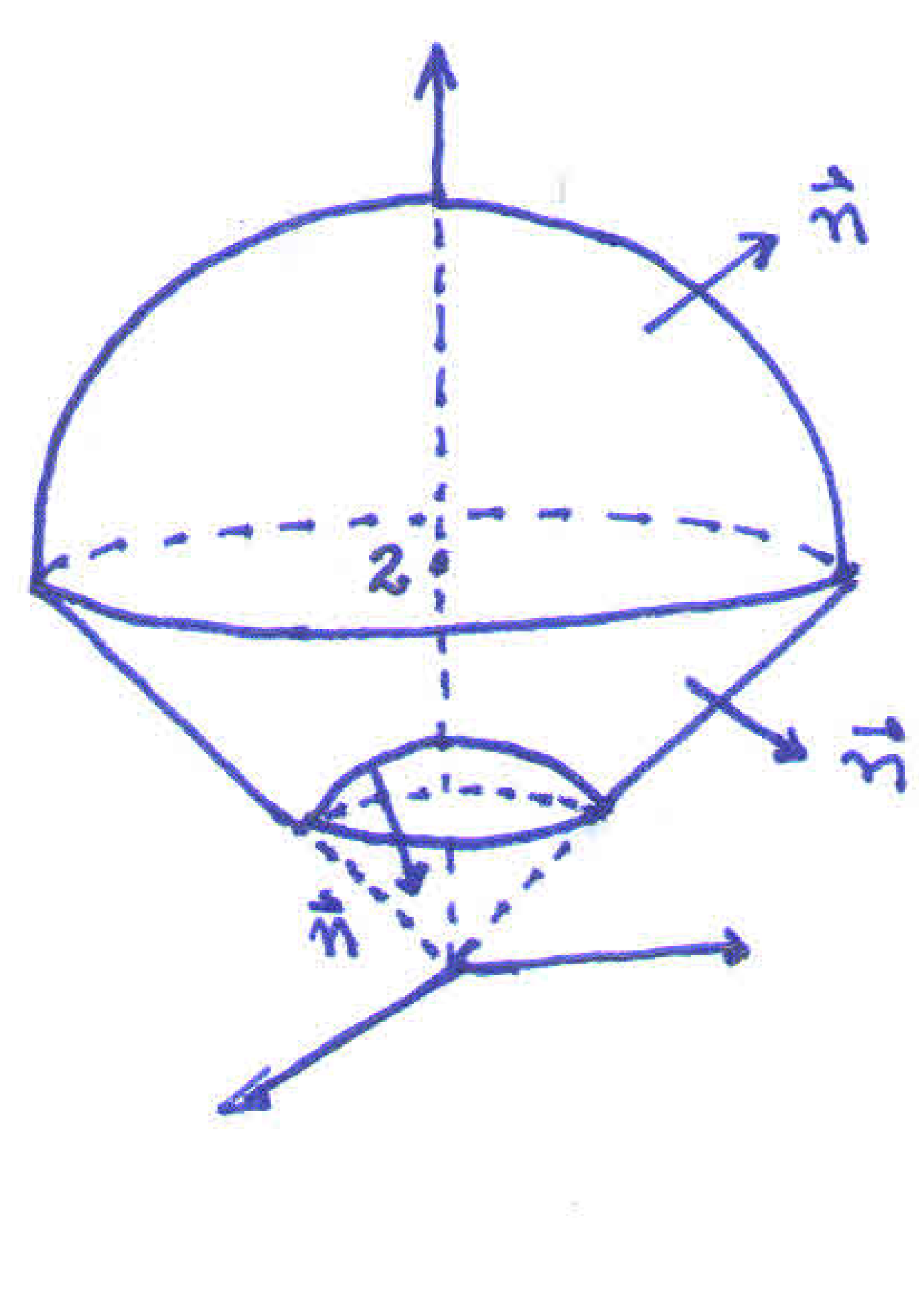
$$\vec{F} = \left(\frac{x^3}{3}+y\right)\vec{i} + \frac{y^3}{3}\vec{j} + \left(\frac{z^3}{3}+2\right)\vec{k}$$

através da superfície fronteira do sólido W definido por

$$W: \begin{cases} x^2+y^2+z^2 \geq 1 \\ x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4 \\ z \geq \sqrt{x^2+y^2} \end{cases}$$

com campo normal apontando para fora de W.

Solução:



Gauss: $\displaystyle\int_{S=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_W \operatorname{div}\vec{F}\, dV$.

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_W (x^2+y^2+z^2)\, dV$$

Em coord. esféricas:

$$W: \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq \phi \leq \pi/4 \\ 1 \leq \rho \leq 4\cos\phi \end{cases}$$

$$x^2+y^2+(z-2)^2 \leq 4$$

$$x^2+y^2+z^2-4z+\cancel{4} \leq \cancel{4}$$

$$\rho^{\cancel{2}} - 4\cancel{\rho}\cos\phi \leq 0$$

$$\rho \leq 4\cos\phi$$

$$\int_W (x^2+y^2+z^2)\, dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_1^{4\cos\phi} \rho^2\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \frac{1}{5}\rho^5 \operatorname{sen}\phi \Big|_{\rho=1}^{\rho=4\cos\phi} d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{2\pi}{5}\int_0^{\pi/4} (4^5\cos^5\phi - 1)\operatorname{sen}\phi\, d\phi$$

$$= \frac{2\pi}{5}\cdot 4^5\left(-\frac{\cos^6\phi}{6}\right)\Big|_0^{\pi/4} + \frac{2\pi}{5}\cos\phi\Big|_0^{\pi/4}$$

$$= \frac{2\pi}{5}\left[-\frac{4^5}{6}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 + \frac{4^5}{6}\right] + \frac{2\pi}{5}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$= \dots = \frac{\pi}{15}(890 + 3\sqrt{2})$$