Exercícios Resolvidos

Cálculo III

Prof. Pedro A. Hinojosa

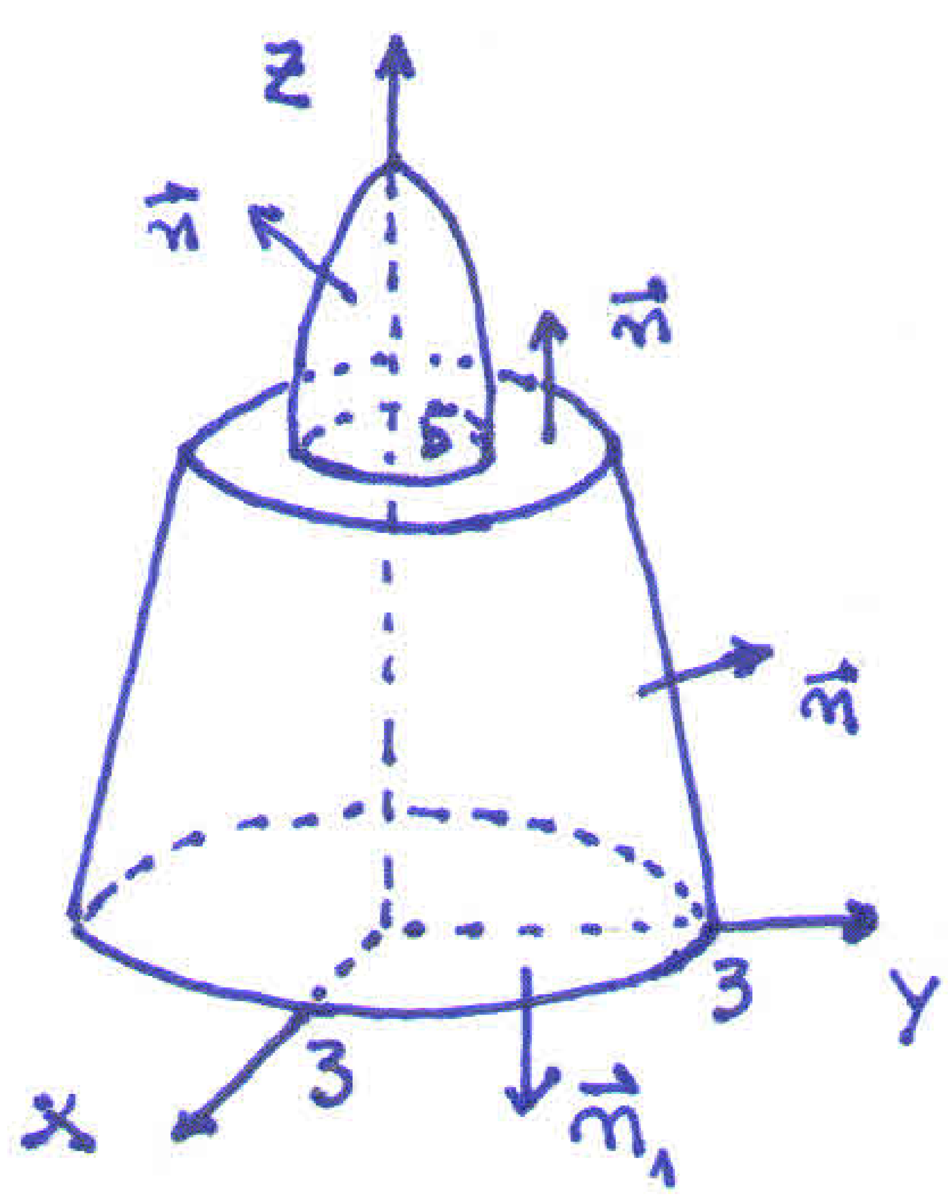
1. Calcule $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS$, onde

$\vec{F}(x,y,z) = x\vec{i} + (e^x \cos z - 2y)\vec{j} + (x^2+z)\vec{k}$ e

$$S: \begin{cases} z = 9 - x^2 - y^2, & 0 \leq z \leq 5 \\ z = 5, & 1 \leq x^2+y^2 \leq 4 \\ x^2+y^2 \leq 1, & z = 8 - 3(x^2+y^2) \end{cases}$$

com $\vec{n}$ exterior a S.

Solução:



S não é "fechada"

seja $S_1: \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$

orientada por $\vec{n}_1 = -\vec{k}$

Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ o sólido cuja fronteira é $S \cup S_1$, ou seja, $\partial W = S \cup S_1$.

Pelo Teor. de Gauss temos

$$\int_{\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_W \operatorname{div}(\vec{F})\, dV$$

Mas $\operatorname{div}\vec{F} = 1 - 2 + 1 = 0$, logo

$$\int_{\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_W 0 \cdot dV = 0 \,, \quad \text{como } \partial W = S \cup S_1 \,,$$

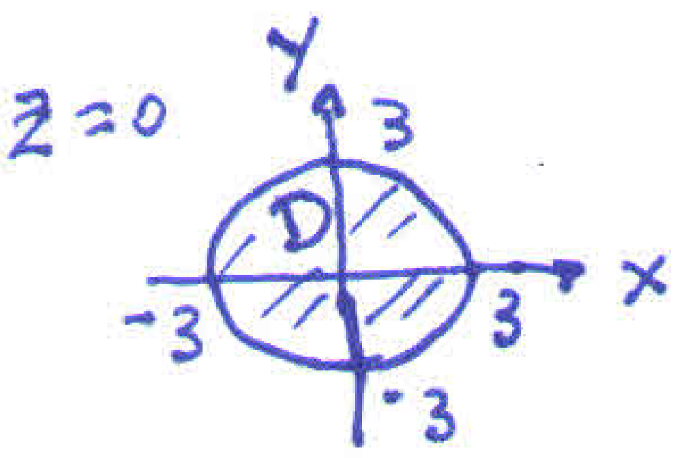
$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS + \int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS = 0 \,.$$

$$\vec{F}\cdot\vec{n}_1 = -x^2 - z \qquad (\vec{n}_1 = -\vec{k})$$

$$S_1 : \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \leq 9 \end{cases}$$

Logo, em S_1 $\vec{F}\cdot\vec{n}_1 = -x^2$

e $dS = dx\,dy$



$$\int_{S_1} \vec{F}\cdot\vec{n}_1\,dS = -\int_D x^2\,dx\,dy$$

Em coord. polares

$$D : \begin{cases} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 3 \end{cases}$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\,\text{sen}\,\theta$$
$$dx\,dy = r\,dr\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^3 (r\cos\theta)^2 \cdot r\,dr\,d\theta$$

$$= -\int_0^{2\pi}\int_0^3 r^3\cos^2\theta\,dr\,d\theta$$

$$= -\frac{3^4}{4}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta\,d\theta$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta$$

$$\int \cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta$$

$$= -\frac{81}{4}\left(\frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\,\text{sen}\,2\theta\right)\Big|_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{81}{4}\pi$$

$$\therefore \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{81}{4}\pi$$

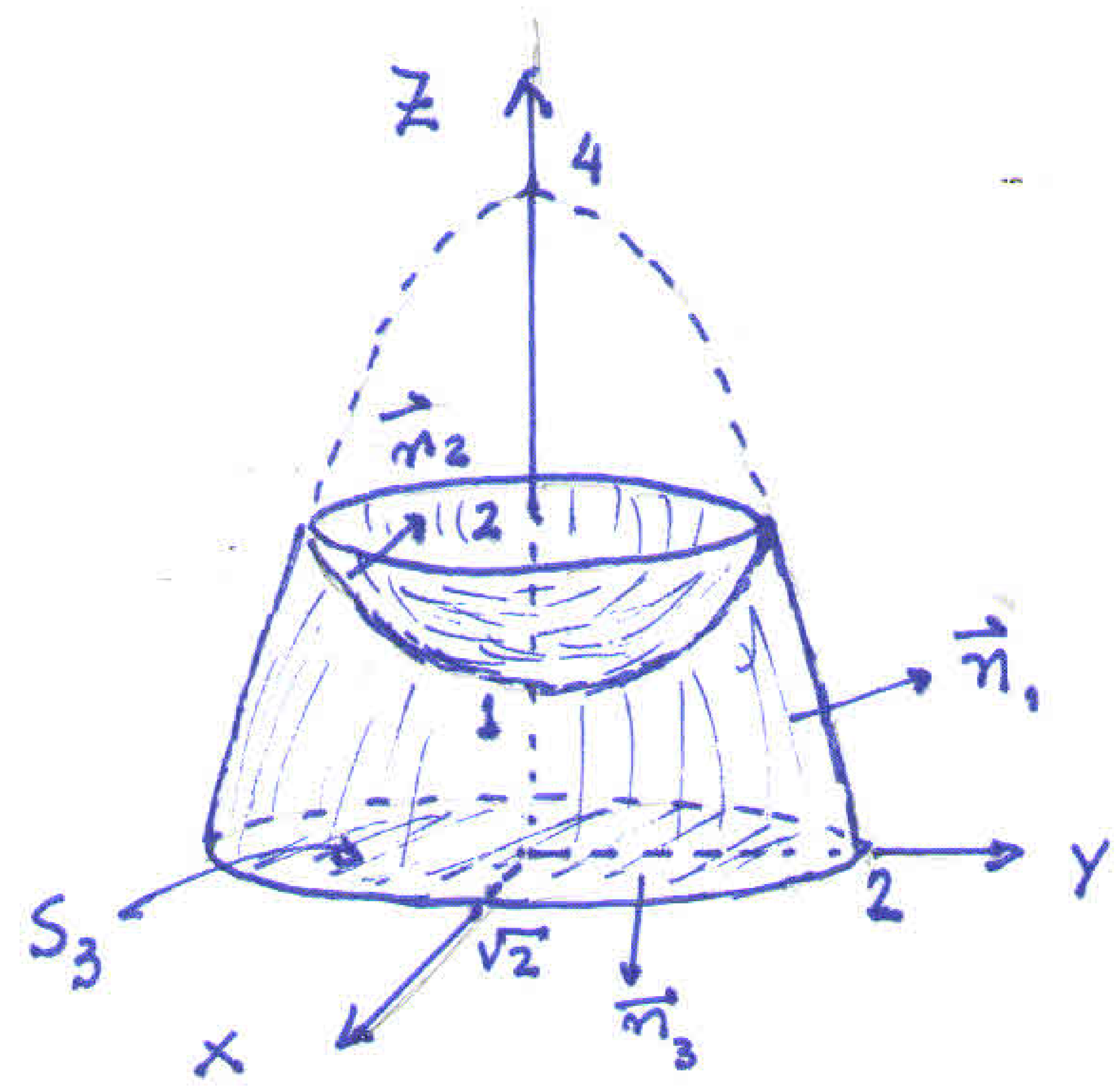
2. Calcule $\int_S \text{rot}(\vec{F}) \cdot \vec{n}\, dS$, onde

$$\vec{F} = (-y + ze^x)\vec{i} + (x + \cos(yz))\vec{j} + xy\vec{k}$$ e

$S = S_1 \cup S_2$ com $S_1: z = 4 - 2x^2 - y^2,\ 0 \leq z \leq 2$

e $S_2: z = 1 + x^2 + \frac{1}{2}y^2,\ 1 \leq z \leq 2$.

<u>Solução</u>:



Seja $S_3: z = 0,\ 2x^2 + y^2 \leq 4$ e seja W o sólido limitado por $S \cup S_3$ $\quad (\partial W = S \cup S_3 = S_1 \cup S_2 \cup S_3)$

Em S_3 consideramos a orientação dada por $\vec{n}_3 = -\vec{k}$.

Agora podemos aplicar o Teor. de Gauss.

$$\int_{\partial W = S \cup S_3} \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \int_W \text{div}(\text{rot}\, \vec{F})\, dV$$

Mas, $\text{div}(\text{rot}\, \vec{F}) = 0$, logo

$$\int_{S \cup S_3} \text{rot}\, \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = 0$$

$$\therefore \quad \int_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot n\, ds = -\int_{S_3} \text{rot}\,\vec{F}\cdot \vec{n}_3\, ds .$$

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -y+ze^x & x+\cos(yz) & xy \end{pmatrix}$$

$$= (x + y\,\text{sen}(yz))\vec{i} + (e^x - y)\vec{j} + 2\vec{k} .$$

$$\underline{\text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}_3 = -2}$$

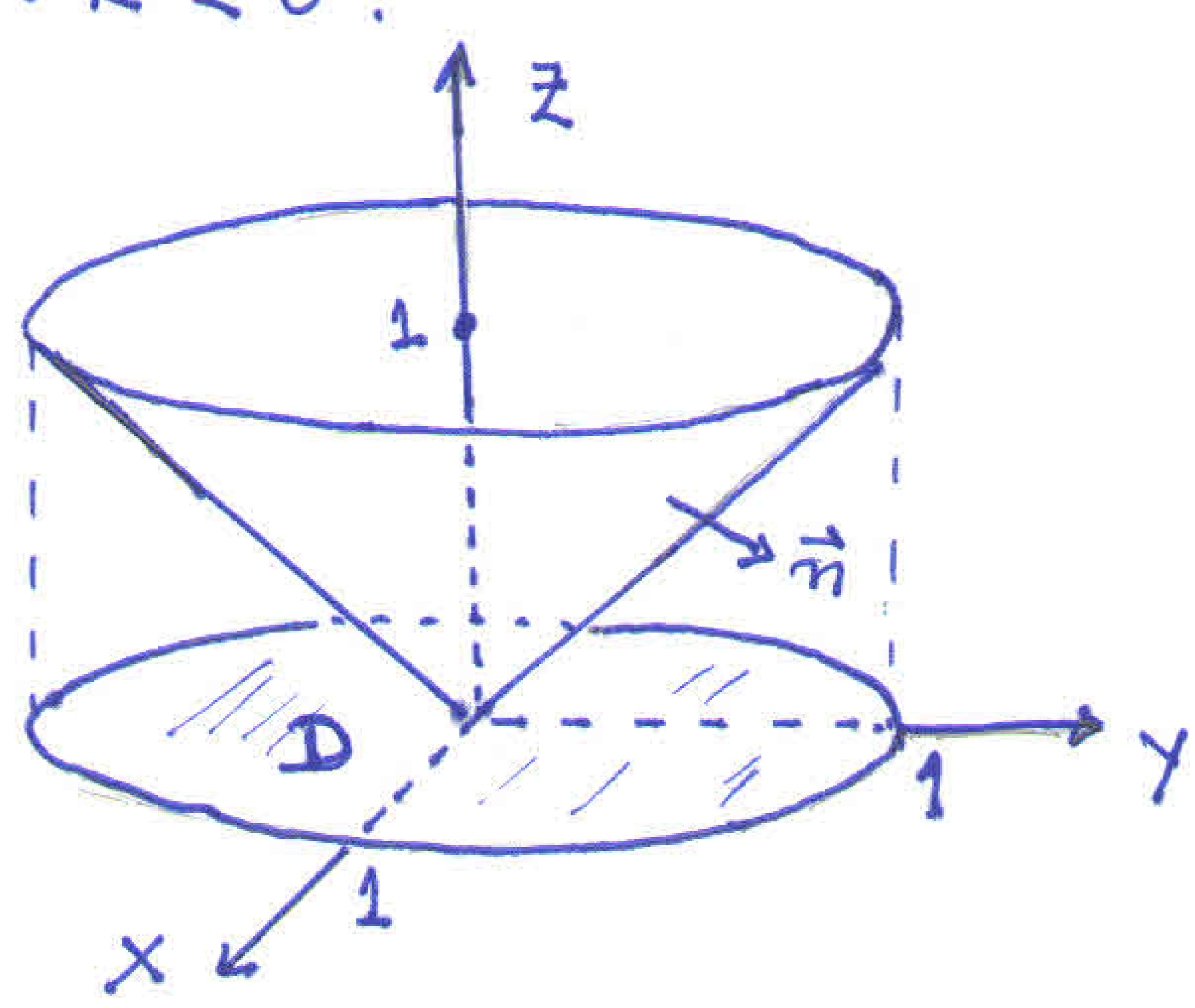
$$\therefore \quad -\int_{S_3} \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}_3\, ds = -\int_{S_3} -2\, ds = 2\,\text{área}(S_3)$$

$$= 2\pi\sqrt{2}\cdot 2 = 4\sqrt{2}\,\pi$$

Logo $\boxed{\int_S \text{rot}(\vec{F})\cdot\vec{n}\, ds = 4\sqrt{2}\,\pi}$

3. Calcule $\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$, onde $\vec{F} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + 3\vec{k}$ e S é a parte do cone $z = \sqrt{x^2+y^2}$ interior ao cilindro $x^2+y^2=1$ com $\vec{n}$ tal que $\vec{n}\cdot\vec{k} < 0$.

<u>Solução</u>:



$$D: \begin{cases} z = 0 \\ x^2+y^2 \le 1 \end{cases}$$

$z = \sqrt{x^2+y^2}$ e $x^2+y^2=1 \implies \underline{\underline{z=1}}$

As superf. se intersetam na circunf. $\begin{cases} z=1 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$

Podemos pensar S como um gráfico

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{com } (x,y) \in D,$$

assim, um vetor normal a S, apontando para baixo, é

$$\vec{N} = (z_x, z_y, -1) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right)$$

Logo, $\vec{n} = \dfrac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|}$ e $dS = \|\vec{N}\|\, dx\,dy$.

Daí,

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, dS = \int_D (2,5,3)\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, -1\right) dx\,dy$$

$$= \int_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy + \int_D \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy - 3\int_D dx\,dy$$

Agora note que a função $\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ é ímpar em relação a x e D é simétrico em relação ao eixo y, logo

$$\int_D \frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}\, dx\,dy = 0.$$

Analogamente, $\int_D \frac{5y}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy = 0$. Daí,

$$\int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds = -3\int_D dxdy = -3\,\text{área}(D) = -3\pi$$

---

4) Calcule

$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (y^2\cos x + z^3)\vec{i} + (2y\,\text{sen}x - 4)\vec{j} + (3xz^2+2)\vec{k}$

e C é a hélice $\begin{cases} x = \cos t \\ y = \text{sen}\,t \\ z = t \end{cases}$, $t \in [0, 2\pi]$

<u>Solução</u>

observe que:

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det\begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2\cos x + z^3 & 2y\,\text{sen}x - 4 & 3xz^2+2 \end{pmatrix}$$

$$= 0\vec{i} + (-3z^2+3z^2)\vec{j} + (2y\cos x - 2y\cos x)\vec{k}$$

$$= \vec{0}.$$

Além disso, $\vec{F}$ está definido em todo $\mathbb{R}^3$ que é um conjunto "simplesmente conexo". Logo $\vec{F}$ é conservativo. Assim, existe uma função $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ (potencial de $\vec{F}$) tal que $\nabla f = \vec{F}$. Então,

$$(*)\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = y^2\cos x + z^3 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2y\,\text{sen}x - 4 \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3xz^2+2 \end{cases}$$

integrando as eqs (*) obtemos:

$$(**)\quad \begin{cases} f(x,y,z) = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 + g_1(y,z) \\ f(x,y,z) = -4y + y^2 \operatorname{sen} x + g_2(x,z) \\ f(x,y,z) = xz^3 + 2z + g_3(x,y) \end{cases}$$

Olhando para as eqs. (**) vemos que ...

$g_1(y,z) = -4y + 2z$,

$g_2(x,z) = xz^3 + 2z$ e

$g_3(x,y) = y^2 \operatorname{sen} x - 4y$.

Assim, $f = y^2 \operatorname{sen} x + xz^3 - 4y + 2z$.

Pelo "Teorema Fundamental do Cálculo para Integrais de Linha" temos

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0))$$

onde $\gamma(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ é uma param. da hélice.

$\gamma(2\pi) = (1, 0, 2\pi)$, $\gamma(0) = (1, 0, 0)$

$$\therefore \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = f(1,0,2\pi) - f(1,0,0)$$

$$= (2\pi)^3 + 4\pi - 0$$

$$= 8\pi^3 + 4\pi$$