Exercícios Resolvidos — Cálculo III

Prof. Pedro A. Hinojosa

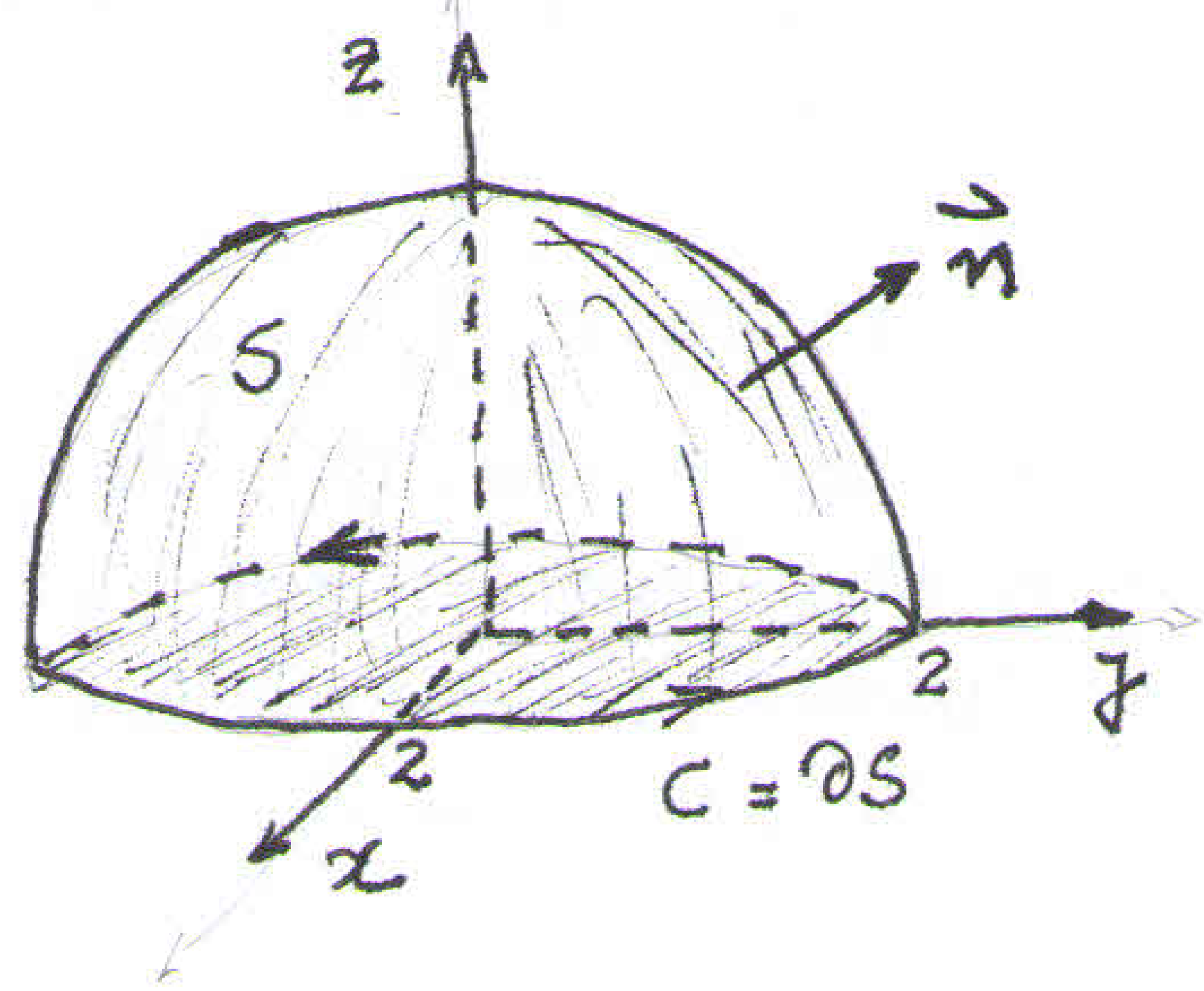
(1) Use o Teor de Stokes para calcular

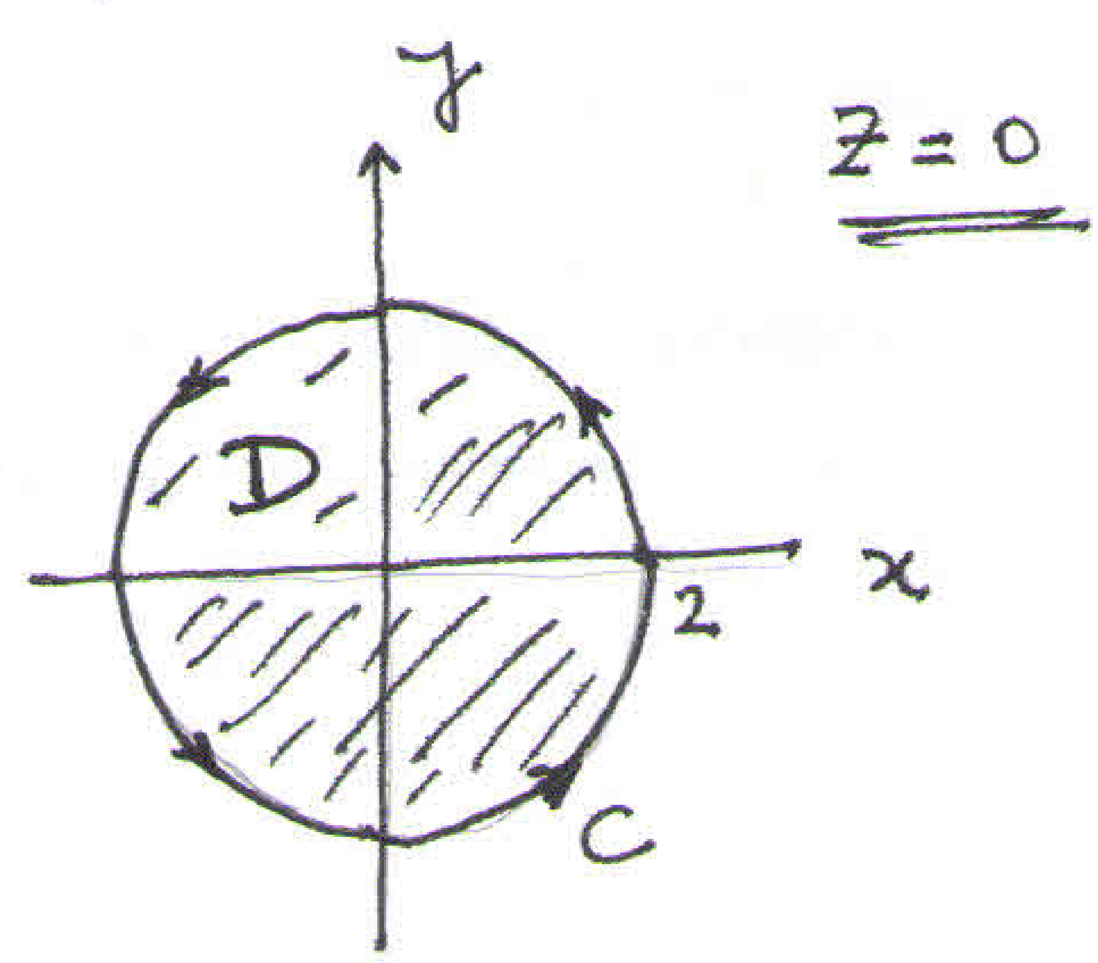
$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$$

onde $\vec{F}(x,y,z) = x^2 e^{yz}\,\vec{i} + y^2 e^{x^2}\,\vec{j} + z^2 e^{xy}\,\vec{k}$

e S é a parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$ acima do plano XY. (com normal $\vec{n}$ exterior)

Solução:





Pelo Teor. de Stokes

$$\iint_S \text{rot}\,\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{C=\partial S} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

note que, neste caso, $\vec{F}$ é de classe C^1 e a orientação de ∂S é compatível com a orientação de S.

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C \left(x^2 e^{yz}dx + y^2 e^{x^2}dy + z^2 e^{xy}dz\right)$$

C é dada por $\{x^2+y^2=4,\ z=0\}$, logo $dz=0$

Daí

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_C x^2 e^{y\cdot 0}\,dx + y^2 e^{x^2}\,dy$$

Usando o Teor. de Green na última integral obtemos,

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_D \left(2xy^2 e^{x^2} - 0\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D 2xy^2 e^{x^2}\,dx\,dy$$

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy$$

$$P = x^2\ ,\quad Q = y^2 e^{x^2}$$

Agora note que a função $f(x,y) = 2xy^2 e^{x^2}$ é ímpar na variável x e D é um domínio simétrico em relação ao eixo Y. Portanto,

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

$$f(x,y) = 2xy\,e^{x^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f(-x,y) = -2xy\,e^{x^2} = -f(x,y)$$

Daí

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

e logo

$$\iint_S \operatorname{rot}\vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = 0$$

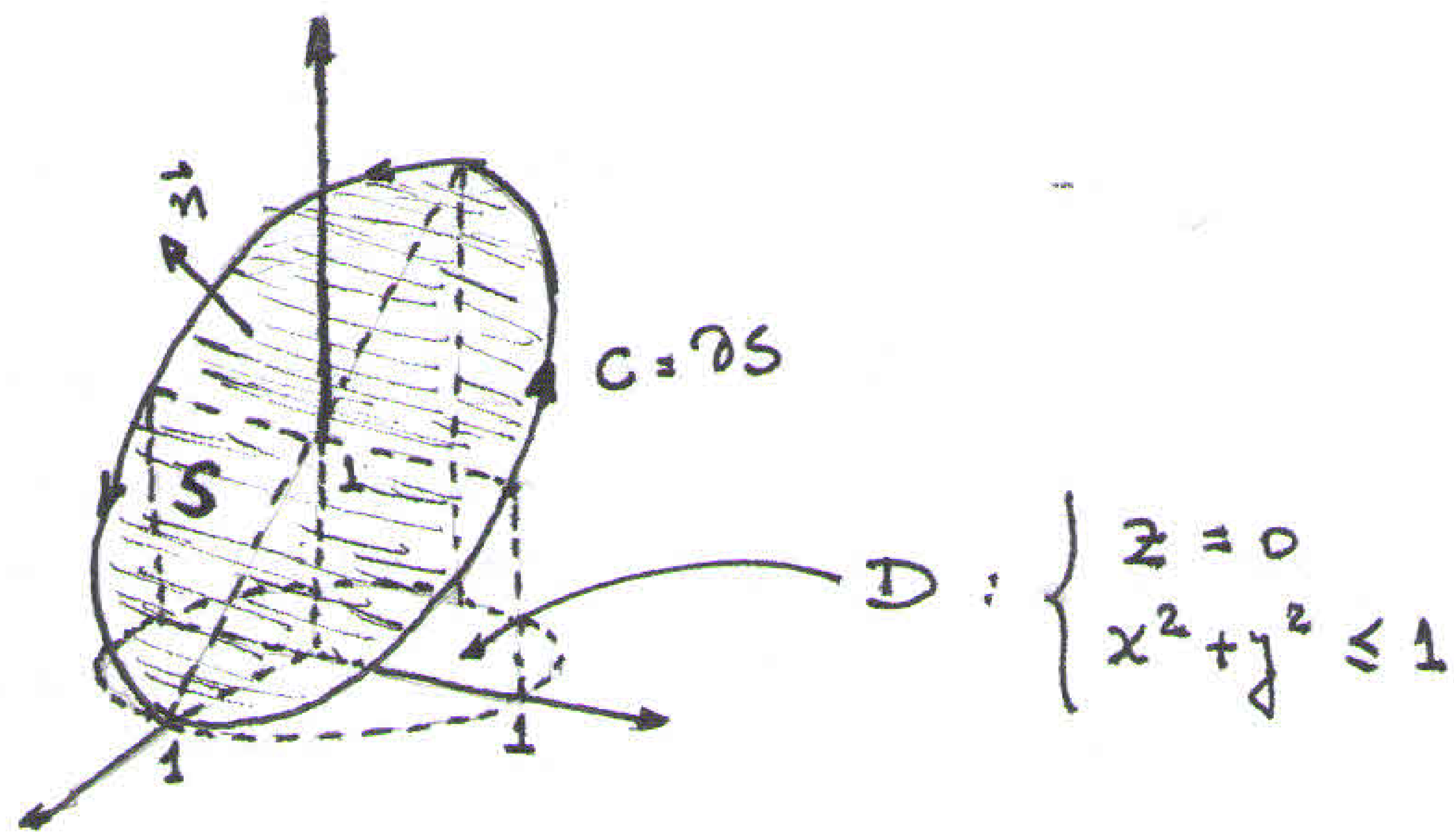
2 Use o Teor. de Stokes para calcular

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}, \quad \text{onde}$$

$$\vec{F}(x,y,z) = (y-z)\vec{i} + (z-x)\vec{j} + (x-y)\vec{k} \quad \text{e}$$

C é a curva interseção do cilindro $x^2+y^2=1$ com o plano $x+z=1$

<u>Solução</u>:



S é a parte do plano $x+z=1$ que se projeta sobre o plano XY no domínio D.

(1, 0, 1) é normal ao plano $x+z=1$ e aponta para "cima"

Logo $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

$$\text{rot}\,\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = \ldots = (-2,-2,-2)$$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S \text{rot}\,\vec{F} \cdot \vec{n}\, dS = \iint_D \frac{-4}{\sqrt{2}}\, dx\,dy$$

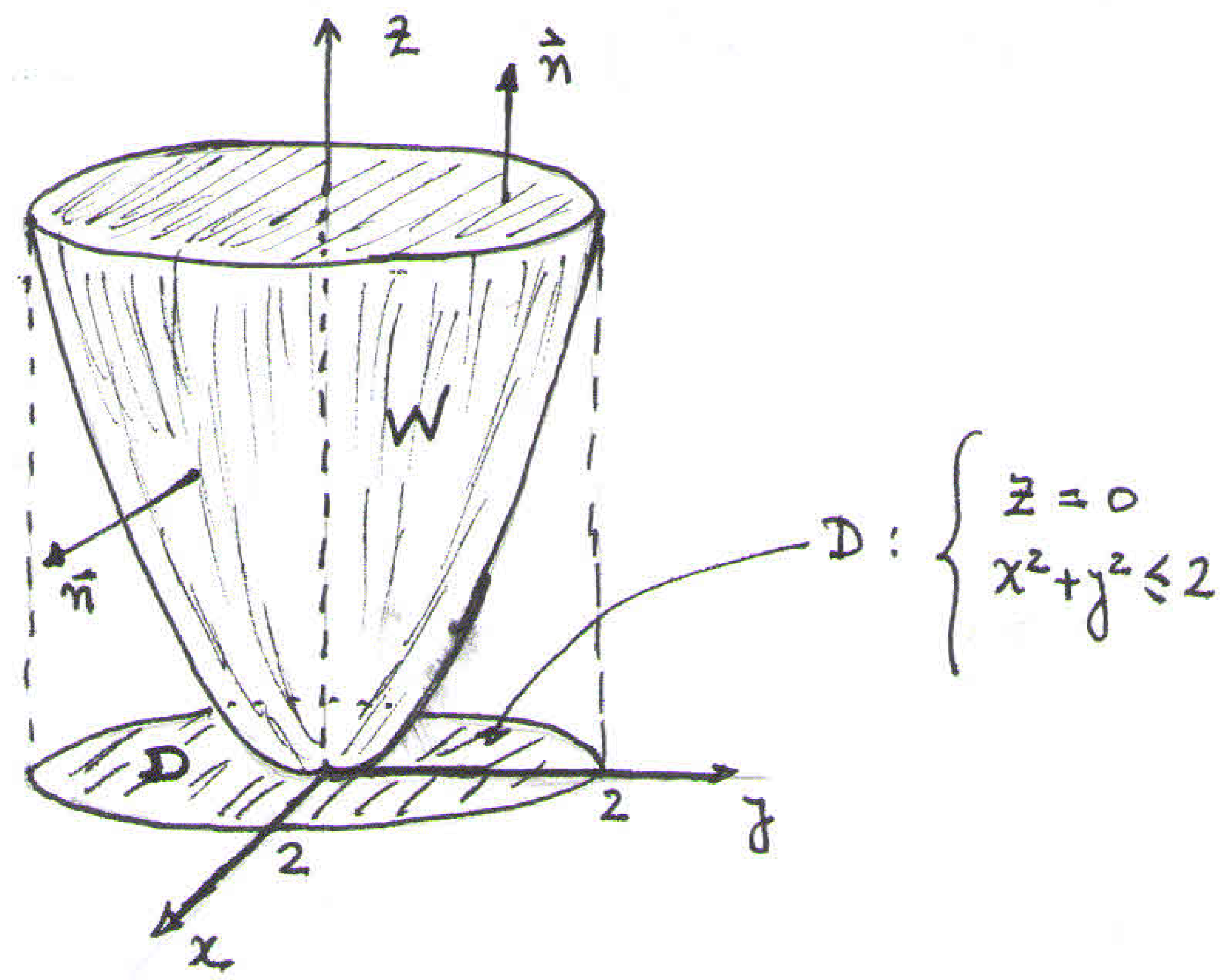
$$= -\frac{4}{\sqrt{2}} \iint_D dx\,dy = -\frac{4}{\sqrt{2}}\,\text{área}(D) = -\frac{4}{\sqrt{2}} \cdot \pi$$

3 Use o Teor. da divergência para obter o fluxo do campo $\vec{F}$ através da superf. S (S orientada positivamente), onde

$$\vec{F}(x,y,z) = (xy^2 + \cos z)\vec{i} + (x^2y + \operatorname{sen} z)\vec{j} + e^y\,\vec{k}$$

e S é a fronteira do sólido W limitado pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e pelo plano $z = 4$.

Solução:



$$\operatorname{div}\vec{F} = y^2 + x^2$$

Passamos ~~pa~~ para coord. cilíndricas

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \\ z = z \end{cases} \qquad x^2+y^2 = r^2 \qquad dV = r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$W_{r,\theta,z}: \begin{cases} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ r^2 \leq z \leq 4 \end{cases}$$

$$\iint_{S=\partial W} \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\,dV$$

$$\iiint_W \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint_W (x^2+y^2)\,dV = \iiint_{W_{r,\theta,z}} r^2 \cdot r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \int_0^2\int_0^{2\pi}\int_{r^2}^4 r^3\,dz\,d\theta\,dr = \ldots\ldots = \frac{32\pi}{3}$$