Campos de Vetores

1. Def.: Um campo de vetores em $A \subset \mathbb{R}^n$ é uma função $F: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$. (Em geral, $A \subset \mathbb{R}^n$ será um subconj. aberto.)

Dizemos que o campo de vetores $F: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínuo, diferenciável ou de classe C^k no ponto $p \in A$ sse todas as suas funções coordenadas $F_i: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, diferenciáveis ou de classe C^k em $p \in A$, respect.

Para o caso particular em que $n = 2$ ou $n = 3$ usaremos as seguintes notações

<u>$n = 2$</u>

$$F: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto F(x,y) = \big(P(x,y), Q(x,y)\big)$$
$$= P(x,y)\cdot\hat{\imath} + Q(x,y)\cdot\hat{\jmath}$$

Aqui $\hat{\imath}$ e $\hat{\jmath}$ denotam os vetores $\hat{\imath} = (1,0)$ e $\hat{\jmath} = (0,1)$

F é contínuo, dif. ou de classe C^k sse as funções $P, Q: A \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ são respect. contínuas, dif., ou de classe C^k.

<u>$n = 3$</u>

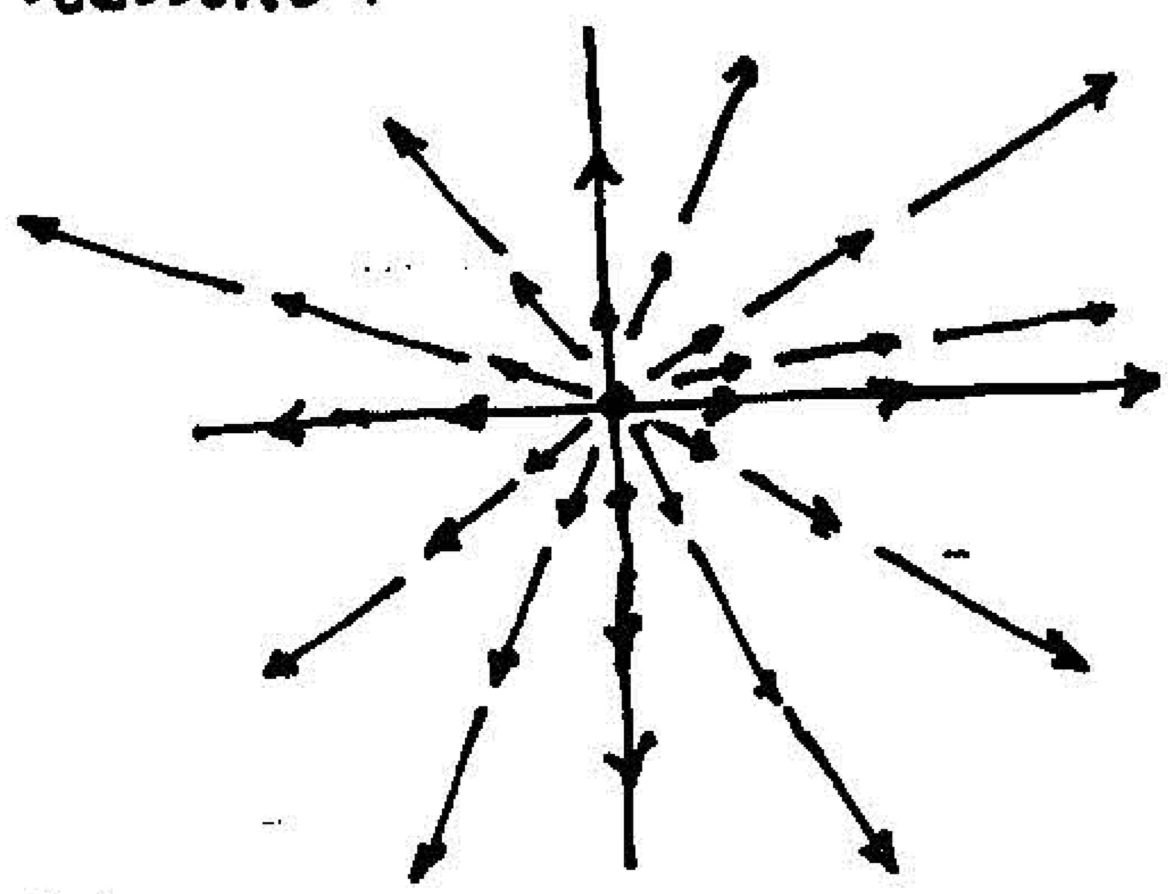
$$F: A \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = \big(P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)\big)$$

ou $$F(x,y,z) = P(x,y,z)\,\hat{\imath} + Q(x,y,z)\,\hat{\jmath} + R(x,y,z)\,\hat{k}$$

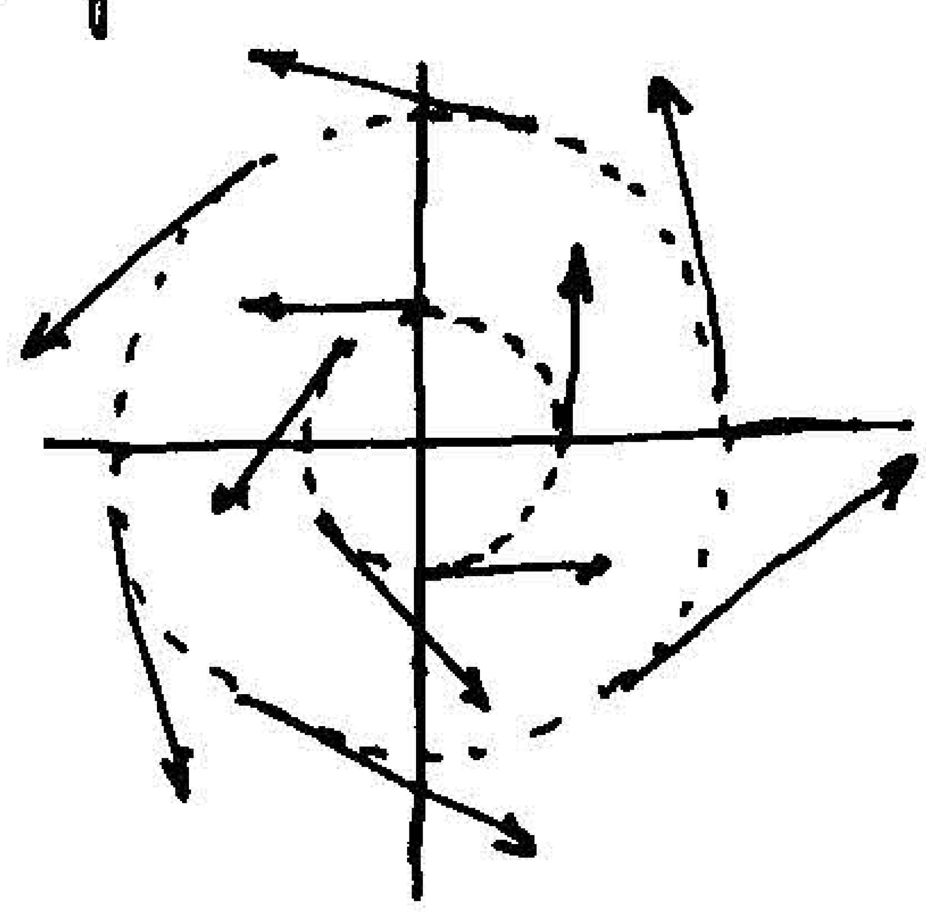
onde, neste caso, $\hat{i} = (1,0,0)$, $\hat{j} = (0,1,0)$ e $\hat{k} = (0,0,1)$.

2. Exemplos:

(i) o campo $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = x\,\hat{i} + y\,\hat{j}$ é representado abaixo.



(ii) o campo $\vec{F}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\vec{F}(x,y) = -y\,\hat{i} + x\,\hat{j}$ tem a seguin representação geométrica:



Note que:

$$\langle (x,y), \vec{F}(x,y) \rangle = 0$$

e

$$\|\vec{F}(x,y)\| = \|(-y,x)\| = \|(x,y)\|$$

(iii) o campo $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{k}{\|(x,y,z)\|^3}(x,y,z)$$

$$= \frac{kx}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{i} + \frac{ky}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\,\hat{j} + \frac{kz}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}$$

é dito campo radial de quadrado inverso, ele não é definido na origem e quanto mais afastado da origem menor é a norma de $\vec{F}$

$$\|\vec{F}(x,y,z)\| = \frac{|k|}{x^2+y^2+z^2} = \frac{|k|}{\|(x,y,z)\|^2}$$

A norma de $\vec{F}$ é inversamente proporcional ao quadrado da distância da origem ao ponto (x,y,z).

O campo elétrico gerado por uma partícula carregada é um campo radial de quadrado inverso. De fato,

<u>Lei de Coulomb</u>: A força que atua numa partícula de carga q na posição $x \in \mathbb{R}^3$, devido a uma carga Q situada na origem é um campo radial de quadrado inverso, com $k = \varepsilon \cdot Q \cdot q$, $\varepsilon > 0$.

Outro campo radial de quadrado inverso aparece quando consideramos a lei de gravitação universal de Newton, esta afirma que se uma partícula fixa de massa m_0 está localizada na origem, então a força exercida sobre uma partícula de massa m localizada no ponto $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ é um campo radial de quadrado inverso, com $k = -G\, m \cdot m_0$, onde G é a constante gravitacional ($G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N\ m^2/kg^2$)

$=$

3. Operadores Diferenciais:

Seja $\vec{F} = P\hat{\imath} + Q\hat{\jmath} + R\hat{k}$ um campo vetorial definido num aberto $A \subset \mathbb{R}^3$. Definimos:

<u>Divergente de F</u> como o campo escalar dado por

$$\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Se $\vec{F} = (P, Q)$ é de classe C^1 num aberto $A \subset \mathbb{R}^2$, então

$$\operatorname{div} \vec{F} := \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$$

<u>Rotacional de $\vec{F}$</u>:

$$\operatorname{rot} \vec{F} := \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

Considere o operador diferencial vetorial ∇ dado por

$$\nabla := \frac{\partial}{\partial x}\,\hat{i} + \frac{\partial}{\partial y}\,\hat{j} + \frac{\partial}{\partial z}\,\hat{k}$$
$$= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).$$

Por exemplo, se f é uma função escalar (ou campo escalar), então

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$ é o <u>gradiente de f</u>

O "produto vetorial" de ∇ pelo campo $\vec{F} = (P, Q, R)$ é

$$\nabla \times \vec{F} = \det\begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{pmatrix}$$
$$= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

ou seja, $\boxed{\nabla \times \vec{F} = \text{rot}\, \vec{F}}$

O "produto interno" de ∇ com o campo $\vec{F}$ é

$$\langle \nabla, \vec{F} \rangle = \nabla \cdot \vec{F} = \left\langle \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right), (P, Q, R) \right\rangle$$

$$= \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \text{div}\, \vec{F}$$

Logo $\boxed{\text{div}\, \vec{F} = \langle \nabla, \vec{F} \rangle}$

4. <u>Exemplos</u>

(i) Calcule o divergente e o rotacional do campo

$$\vec{F}(x,y,z) = yz\,\hat{i} + xz\,\hat{j} + xy\,\hat{k}$$

<u>Solução:</u>

$$\text{div}\, \vec{F} = \langle \nabla, \vec{F} \rangle = \frac{\partial}{\partial x}(yz) + \frac{\partial}{\partial y}(xz) + \frac{\partial}{\partial z}(xy)$$

$$= \underline{\underline{0}}$$

$$\text{rot}\, \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ yz & xz & xy \end{pmatrix} = (x - x)\,\hat{i} + (y - y)\,\hat{j} + (z - z)\,\hat{k}$$

$$= 0\,\hat{i} + 0\,\hat{j} + 0\,\hat{k} = (0, 0, 0) = \vec{0}$$

$\#$

(ii) calcule rot $\vec{F}$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = (z+\operatorname{sen} y)\,\hat{\imath} - (z - x\cos y)\,\hat{\jmath}$

Solução:

$$\operatorname{rot}\vec{F} = \nabla\times\vec{F} = \det\begin{pmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ z+\operatorname{sen} y & -(z-x\cos y) & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \big(0-(-1)\big)\,\hat{\imath} + (1-0)\,\hat{\jmath} + (\cos y + \cos y)\,\hat{k}$$

$$= \hat{\imath} + \hat{\jmath} + 2\cos y\ \hat{k}$$

Obs.

Se $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\,\hat{\imath} + Q(x,y)\,\hat{\jmath}$, então

$$\operatorname{rot}\vec{F} := \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\hat{k}$$

5. Exercício

Sejam f e $\vec{F}$ de classe C^2. Verifique as seguintes propriedades:

(i) $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$ $\quad\left(\nabla\times(\nabla f) = \vec{0}\right)$

(ii) $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{F}) = 0$ $\quad\left(\nabla\cdot(\nabla\times\vec{F}) = 0\right)$

(iii) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$ onde $\Delta f = \nabla^2 f$,

$$\left(\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)$$

(iv) $\nabla(f\cdot\vec{F}) = f\,\nabla\cdot\vec{F} + \nabla f\cdot\vec{F}$.

6. Campos Conservativos

Dizemos que $\vec{F}: A \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um campo conservativo ou gradiente se existe uma função $f: A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $\nabla f = \vec{F}$.

A função f é chamada potencial do campo $\vec{F}$.

Exemplos

(i) O campo $\vec{F}(x,y,z) = yz e^{xyz}\,\vec{i} + xz e^{xyz}\,\vec{j} + xy e^{xyz}\,\vec{k}$ é um campo conservativo já que para $f(x,y,z) = e^{xyz}$ temos

$$\nabla f = \vec{F}.$$

(ii) $\vec{F}(x,y) = (2xy,\, x^2+3y^2)$ é conservativo pois, se $f(x,y) = x^2 y + y^3 + C$, com $C \in \mathbb{R}$ $C = \text{cte.}$ então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + 3y^2 . \quad \text{Logo } \nabla f = \vec{F}.$$

7. Proposição:

(1) Para $n=3$, se $\text{rot}(\vec{F}) \neq 0$, então $\vec{F}$ não é conservativo

(2) Para $n=2$, se $\vec{F} = (P, Q)$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} \neq \frac{\partial P}{\partial y}$, então $\vec{F}$ não é conservativo.

Dem:

(1) Se $\vec{F}$ é um campo conservativo, então $\vec{F} = \nabla f$ e por 5(i) temos que

$$\text{rot}(\vec{F}) = \text{rot}(\nabla f) = \vec{0}$$

(2) Se $\vec{F} = (P, Q)$ é conservativo, então $\vec{F} = \nabla f$ para alguma função C^2. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q .$$

Daí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ,$$

mas $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ logo $\underline{\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}}$

Ou seja, $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x} \Rightarrow \vec{F}$ não conservativo.

\#

<u>Exemplos</u>

(i) $\vec{F}(x,y) = -2y\vec{i} + 2x\vec{j}$ não é conservativo. De fato

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2 . \quad \text{Logo} \quad \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} .$$

Note também que

$$\text{rot}(\vec{F}) = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\vec{k} = (2-(-2))\vec{k} = 4\vec{k} \neq \vec{0} .$$

(ii) $\vec{F}(x,y,z) = (2z-3y, 3x-z, y-2x)$ não é conservativo já que

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det\begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2z-3y & 3x-z & y-2x \end{bmatrix}$$

$$= \dots\dots = 2\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} \neq \vec{0} .$$

8. Determinação do Potencial de um campo conservativo

$n = 2$

Se $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é de classe C^1 e suas funções coord. P e Q satisfazem $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, então F é conservativo. O potencial de $\vec{F}$ é dado por:

$$\boxed{f(x,y) = \int P\,dx + \int \left[Q - \int \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\right] dy + C}$$

Exemplo:

$$\vec{F}(x,y) = (2xy,\ x^2 + 3y^2).$$

$\vec{F}$ está definido em todo $\mathbb{R}^2$ e, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$

$\left(\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x} \right)$

$$f(x,y) = \int 2xy\,dx + \int \left(x^2 + 3y^2 - \int 2x\,dx\right) dy + C$$

$$= x^2 y + \cancel{x^2 y} + y^3 - \cancel{x^2 y} + C$$

$$= x^2 y + y^3 + C$$

Também podemos proceder como segue-se:

Queremos encontrar $f(x,y)$ de modo que $\dfrac{\partial f}{\partial x} = P$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y} = Q$.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = P = 2xy$. Integrando c/r a x obtemos

$$f(x,y) = x^2 y + g(y) \quad \left(\begin{array}{l}\text{onde } g \text{ é uma função} \\ \text{que depende de } y.\end{array}\right)$$

Daí,

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) \,, \quad \text{mas } \frac{\partial f}{\partial y} = Q = x^2 + 3y^2 \,, \text{ logo}$$

$$x^2 + g'(y) = x^2 + 3y^2 \Rightarrow g'(y) = 3y^2$$

$$\Rightarrow g(y) = y^3 + C$$

$$\therefore \; f(x,y) = x^2 y + g(y) = x^2 y + y^3 + C$$

$n = 3$:

Se $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\vec{F} = (P, Q, R)$, é um campo de classe C e $\operatorname{rot}(\vec{F}) = 0$, então F é conservativo. Um potencial para $\vec{F}$ é dado por:

$$f(x,y,z) = M(x,y,z) + N(x,y,z) + L(x,y,z) + C$$

onde,

$$M(x,y,z) = \int P\,dx \,,$$

$$N(x,y,z) = \int \left[Q - \frac{\partial}{\partial y} \int P\,dx \right] dy = \int \left(Q - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dy$$

$$L(x,y,z) = \int \left[R - \frac{\partial}{\partial z} (M + N) \right] dz$$

<u>Exemplo</u>

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(y^2 \cos x,\ 2y\,\text{sen}\,x + e^{2z},\ 2y\,e^{2z}\right).$$

$\vec{F}$ está definido em todo R^3 e,

$$\text{rot}(\vec{F}) = \det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ y^2 \cos x & 2y\,\text{sen}\,x + e^{2z} & 2y\,e^{2z} \end{bmatrix}$$

$$= \left(2e^{2z} - 2e^{2z}\right)\vec{i} - (0-0)\vec{j} + (2y\cos x - 2y\cos x)\vec{k}$$

$$= \vec{0}$$

Logo $\vec{F}$ é conservativo.

$$M = \int y^2 \cos x\,dx = y^2\,\text{sen}\,x \qquad \boxed{M = y^2\,\text{sen}\,x}$$

$$\cancel{N = \int (2y\,\text{sen}\,x - 2y\,\text{sen}\,x)\,d}$$

$$N = \int \left(2y\,\text{sen}\,x + e^{2z} - 2y\,\text{sen}\,x\right)dy = \int e^{2z}\,dy$$

$$= y\,e^{2z}. \qquad \boxed{N = y\,e^{2z}}$$

$$L = \int \left[2y\,e^{2z} - \left(0 + 2y\,e^{2z}\right)\right]dz = \int 0 \cdot dz = 0$$

$$\boxed{L = 0}$$

Assim o potencial de $\vec{F}$ é

$$\boxed{f(x,y,z) = y^2\,\text{sen}\,x + y\,e^{2z} + C}$$

Podemos também fazer o seguinte:

Queremos $f = f(x,y,z)$ t.q. $\nabla f = \vec{F} = (P, Q, R)$, então

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = Q \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial z} = R \, .$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P = y^2 \cos x \Rightarrow f = y^2 \operatorname{sen} x + g(y,z)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} = 2y \operatorname{sen} x + \frac{\partial g}{\partial y} = \underbrace{2y \operatorname{sen} x + e^{2z}}_{Q}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = e^{2z} \Rightarrow g = y e^{2z} + h(z)$$

Daí

$$f = y^2 \operatorname{sen} x + y e^{2z} + h(z)$$

donde $\dfrac{\partial f}{\partial z} = 2y e^{2z} + \dfrac{dh}{dz} = \underbrace{2y e^{2z}}_{R}$

$$\therefore \frac{dh}{dz} = 0 \quad e \text{ logo } \quad h = cte = C \, .$$

Assim

$$\underbrace{f = y^2 \operatorname{sen} x + y e^{2z} + C}$$