3. Algumas Aplicações da Integral Dupla

DM – UFPB
Cálculo III
Prof.: Pedro A. Hinojosa

3.1 Massa Total

Considere uma lâmina "fina" com a forma de uma região elementar $D \subset \mathbb{R}^2$ e suponha que a massa sobre D se distribui com densidade dada por uma função $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, positiva é integrável. (f representa a massa por unidade de área em cada ponto $(x, y) \in D$).
Então a massa total de D é dada por

$$M(D) := \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

Em particular, se a lâmina é feita de material homogêneo (a densidade é constante), a massa total é o produto da densidade pela área de D.

3.2 Momento de Massa

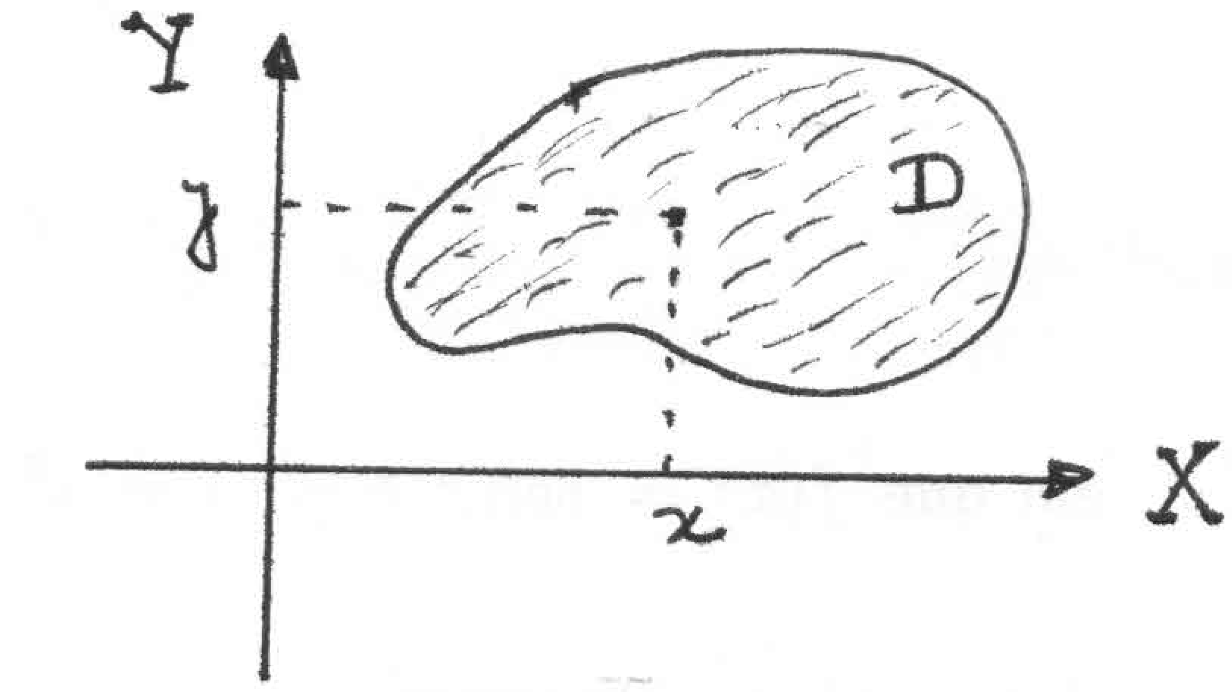
O momento de massa da lâmina D em relação a uma reta ℓ é dado por

$$M_\ell := \iint_D d(x,y) \cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

onde $d(x,y)$ é a distância do ponto $(x,y) \in D$ à reta l.

Em particular os momentos de massa da lâmina D em relação aos eixos X e Y são dados, respectivamente, por:

$$M_x = \iint_D y\, f(x,y)\, dx\, dy \quad , \quad M_y = \iint_D x\, f(x,y)\, dx\, dy$$



3.3- Centro de Massa

O centro de massa da lâmina D é dado por $(\bar{x}, \bar{y})$, onde

$$\boxed{\bar{x} = \frac{M_y}{M(D)} \quad , \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M(D)}}$$

Se $f(x,y) \equiv k > 0$, $(\bar{x}, \bar{y})$ é chamado centróide de D e corresponde ao centro geométrico da região D.

O centro de massa pode ser pensado como um ponto onde a massa da lâmina se concentra sem alterar seu momento em relação a qualquer eixo.

Se $f(x,y)$ não é constante, então o centro de massa de D pode não coincidir com o centróide de D.

3.4. Momento de Inércia

O momento de inércia da lâmina D em relação a uma reta l é

$$I_l := \iint_D d^2(x,y) \cdot f(x,y)\,dx\,dy$$

onde $d^2(x,y)$ é o quadrado da distância do ponto $(x,y) \in D$ à reta l.

Em particular, se l é o eixo X,

$$I_x = \iint_D y^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

se l é o eixo Y,

$$I_y = \iint_D x^2 f(x,y)\,dx\,dy$$

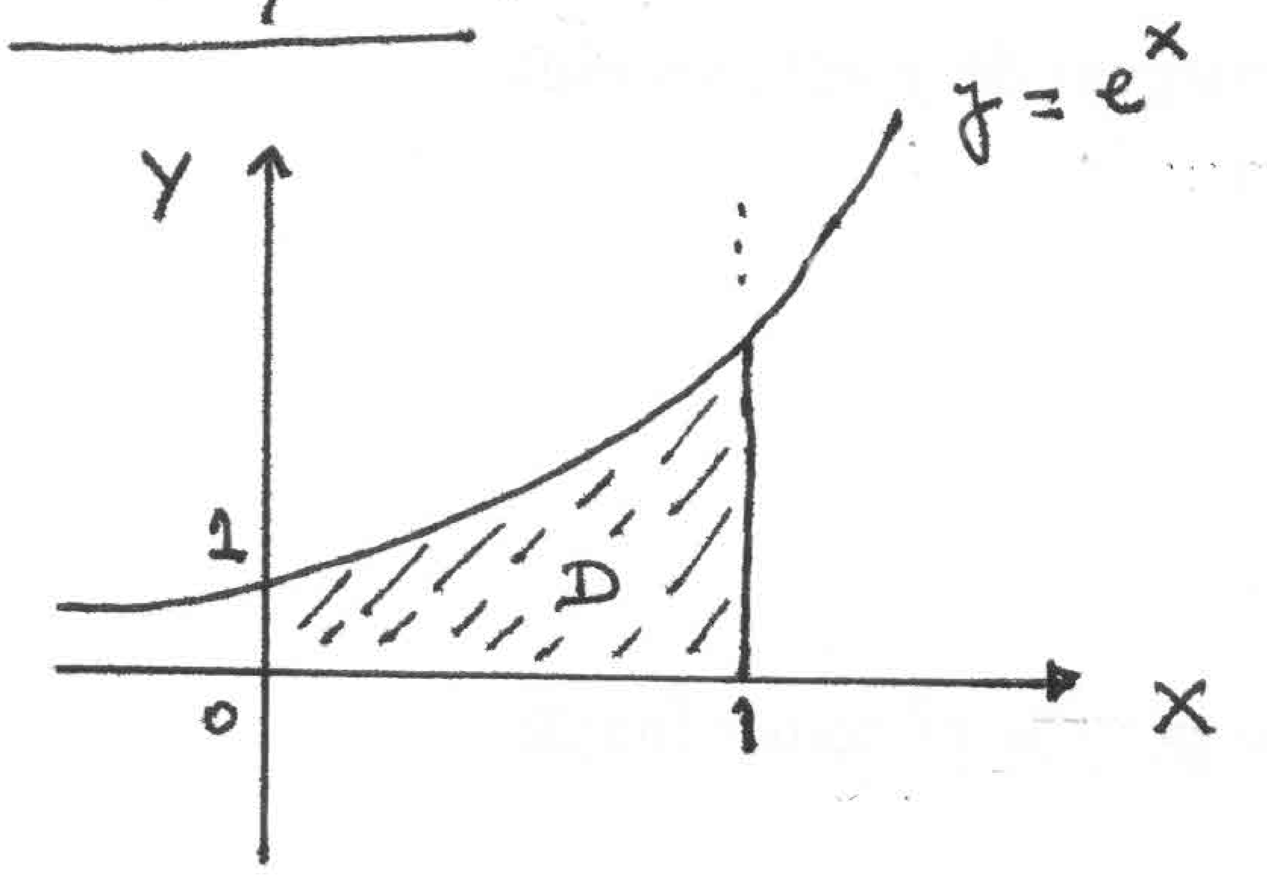
Define-se ainda, o momento de inércia polar em relação à origem como

$$I_0 := I_x + I_y = \iint_D (x^2+y^2) f(x,y)\,dx\,dy$$

3.5 Exemplos

(a) Determine o momento de inércia polar da região limitada pelas curvas $y = e^x$, $x = 1$, $y = 0$ e $x = 0$; se a densidade é dada por $f(x,y) = xy$.

Solução:



$$I_x = \iint_D y^2 \cdot xy \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{e^x} x y^3 \, dy \, dx$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{4} x y^4 \Big|_{y=0}^{y=e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{4} x e^{4x} dx$$

$$= \frac{1}{16} x e^{4x} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{16} e^{4x} dx \qquad \begin{cases} u = \frac{1}{4} x, & du = \frac{1}{4} dx \\ dv = e^{4x}, & v = \frac{1}{4} e^{4x} \end{cases}$$

$$= \dots = \frac{3}{64} e^4 - \frac{1}{64}$$

$$I_y = \iint_D x^2 \cdot xy \, dx dy = \int_0^1 \int_0^{e^x} x^3 y \, dy dx$$

$$= \int_0^1 x^3 \cdot \frac{y^2}{2} \Big|_{y=0}^{y=e^x} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} x^3 e^{2x} dx$$

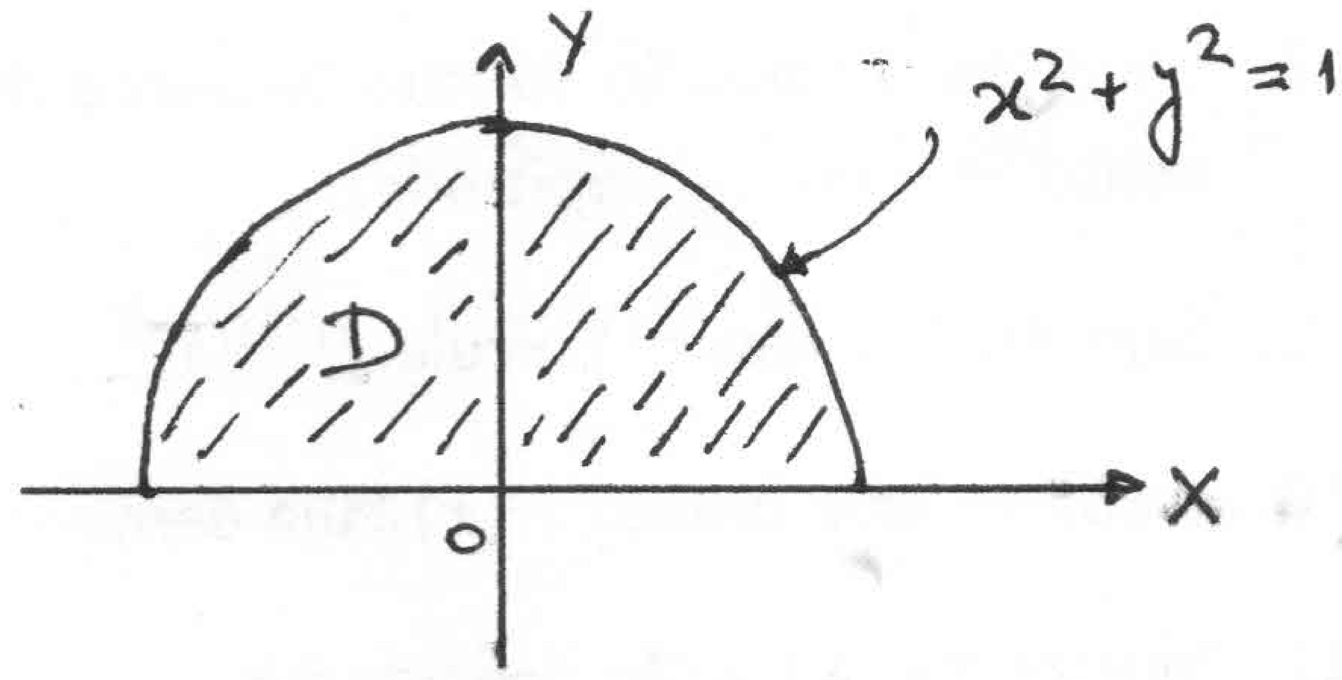
$$= \dots = e^2/16 + 3/16$$

$$I_o = I_x + I_y = \frac{3}{64}e^4 + \frac{e^2}{16} - \frac{1}{64} + \frac{3}{16}$$

$$I_o = \frac{1}{64}\left(3e^4 + 4e^2 + 11\right)$$

(b) Determine a massa de uma lâmina D que ocupa a região $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ se sua densidade em cada ponto é proporcional à distância do ponto à origem.

Solução



A densidade, no pto (x,y), é $f(x,y) = k\cdot\sqrt{x^2+y^2}$

$$M(D) = \iint_D k\sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy.$$

Passando para coord. polares, $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$

$x^2+y^2 = r^2$

temos

$$M(D) = k\int_0^1\int_0^{\pi} \sqrt{r^2}\,.\,r\,d\theta dr$$

$d\theta dr$

$$= k\int_0^1\int_0^{\pi} r^2\,d\theta\,dr = \pi k\int_0^1 r^2\,dr$$

$$= \frac{k\pi}{3}$$ unidades de massa.

//