

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Superfícies Discretas de Curvatura Média Constante. Estabilidade

Por
Lindeval Fernandes de Lima

sob orientação do
Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa Vera

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Março 2003
João Pessoa, Paraíba

Superfícies Discretas de Curvatura Média Constante. Estabilidade

por

Lindeval Fernandes de Lima

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UEPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. **Pedro A. Hinojosa Vera**
Orientador

Prof. Dr. **Levi Lopes de Lima**
Examinador

Prof. Dr. **Vicente F. de Sousa Neto**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março 2003

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: Março 2003

Autor: Lindeval Fernandes de Lima

Título: **Superfícies Discretas de Curvatura
Média Constante. Estabilidade**

Depto.: Matemática

Grau: M.Sc. Convocação: Março Ano: 2003

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

O AUTOR RESERVA OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO, E NEM A TESE NEM EXTENSIVAS EXTRAÇÕES DELA PODEM SER IMPRESSAS OU REPRODUZIDAS SEM A PERMISSÃO ESCRITA DO AUTOR.

O AUTOR ATESTA QUE A PERMISSÃO TEM SIDO OBTIDA PELO USO DE QUALQUER DIREITO AUTORAL DO MATERIAL EM QUE ESTA TESE APAREÇA(OU BREVES RESUMOS REQUERENDO APENAS O PRÓPRIO AGRADECIMENTO NO MATERIAL ESCRITO) E QUE TODOS OS TAIS USOS SEJAM CLARAMENTE AGRADECIDOS.

À Maria Pereira de Lima.

Índice

Lista de Figuras	vi
Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	x
1 Superfícies Mínimas e de Curvatura Média Constante	1
1.1 Introdução	1
1.2 Superfícies Mínimas	2
1.2.1 Exemplos	5
1.2.2 Estabilidade e Índice	8
1.3 Superfícies de Curvatura Média Constante	10
2 Superfícies Discretas	18
2.1 Introdução	18
2.2 Definições Básicas	18
2.3 Primeira Variação da Área	20
2.4 Exemplos	24
3 Estabilidade de Superfícies Discretas	35
3.1 Introdução	35
3.2 Segunda Variação da Área	36
Apêndice	47
Referências Bibliográficas	56

Lista de Figuras

1.1	catenóide	6
1.2	helicóide	6
1.3	Superfície Costa de gênero 1.	7
2.1	Conjunto geometricamente (independente (a) e dependente (b)). . .	19
2.2	Simplexos propriamente juntos.	20
2.3	Simplexos não propriamente juntos.	20
2.4	Triângulo com vértice $p(t)$ variando.	21
2.5	Volume de uma superfície discreta.	22
2.6	Catenóide	24
2.7	Propriedades das funções f, g, h	28
2.8	(a) - $star(p)$ da porção considerada no lema 2.18, e $star(p')$ é um quadrilátero planar. (b) - Helicóide discreto.	32
2.9	Cilindro discreto.	33
2.10	Superfície de Delaunay.	34
3.1	Superfície discreta formada pelo $star(\overline{pq})$	40

Resumo

Neste trabalho definimos superfícies discretas mínimas e de curvatura média constante usando uma caracterização variacional. Estas superfícies são pontos críticos do funcional àrea dentre as variações que preservam as condições de fronteira, as estruturas simpliciais, e no caso de curvatura média constante não nula, o volume. Encontramos fórmulas explícitas para exemplos completos, tais como o catenóide e o helicóide discretos mínimos.

Calculamos a primeira e segunda variações da área e definimos o operador de Jacobi discreto que nos permite falar de estabilidade para superfícies discretas, tanto mínimas quanto de curvatura média constante $H \neq 0$.

Abstract

In this work we define discrete minimal surfaces and discrete of constant mean curvature surfaces using a variational characterization. These surfaces are critical points for the area functional amongst smooth piecewise variations which preserve the boundary conditions, the simplicial structures, and (in the nonminimal case) the volume to one side of the surfaces. We then find explicit formulas for complete examples, such as discrete minimal catenoids and helicoids.

We calculate first and the second variations of the area and define the discrete Jacobi operator that in allows them to speak of stability for discrete surfaces, in such a way minimal how much of constant mean curvature $H \neq 0$.

Introdução

Subvariedades C^∞ e, em particular superfícies, com curvatura média constante (CMC) tem uma longa história de estudo. Trabalhos recentes neste campo mostram e confirmam toda uma maquinária geométrica e analítica desenvolvida durante centenas de anos. No entanto, superfícies não suaves são também objetos matemáticos naturais, embora exista menos ferramentas para o estudo delas. Neste trabalho consideraremos superfícies discretas como uma malha triangular com a topologia de um complexo simplicial que tem uma realização geométrica, em \mathbb{R}^3 , de classe, pelo menos, C^0 . Estes objetos têm sido levados mais à frente nas pesquisas geométricas pela computação gráfica. Definimos curvatura média constante (CMC) para superfícies discretas em \mathbb{R}^3 de maneira que tais superfícies sejam pontos críticos da área para variações que preservam volume, exatamente como no caso C^∞ . Superfícies discretas CMC têm diferentes interesses e similaridades com superfícies CMC C^∞ . Por exemplo, diferem pelo fato que gráficos mínimos suaves em \mathbb{R}^3 sobre um domínio limitado são estáveis, entretanto gráficos mínimos discretos podem ser altamente instáveis.

Veremos que um catenóide discreto tem uma descrição explícita em termos da função cosseno hiperbólico, exatamente como o catenóide suave tem; e um helicóide discreto pode ser descrito com a função seno hiperbólico, do mesmo modo que um helicóide suave. Existem também superfícies de Delaunay discretas que tem periodicidade translacional, exatamente como as superfícies de Delaunay suave têm.

Superfícies discretas têm espaço de variações admissíveis de dimensão finita, enquanto que no caso C^∞ , tal espaço tem dimensão infinita. Assim, no caso discreto, o estudo de operadores diferenciais lineares reduz-se à álgebra linear de matrizes e,

claro, é muito mais fácil trabalhar com estes operadores num espaço de dimensão finita o que se torna uma grande vantagem sobre as superfícies C^∞ . Isto também sugere um procedimento proveitoso para estudar o espectro do operador de Jacobi de superfícies C^∞ aproximando estas por superfícies discretas.

O presente trabalho é baseado no artigo “Discrete Minimal Surfaces of Constant Mean Curvature and their Index” da autoria de Rossman, W. & Polthier, K., que utilizam superfícies discretas para calcular (ou pelo menos fazer uma estimativa) o índice de superfícies suaves.

No capítulo 1 deste trabalho apresentamos alguns exemplos de superfícies mínimas e de curvatura média constante, estudamos a primeira e segunda variações da área e definimos o operador de Jacobi, que nos permite estudar os conceitos de estabilidade e índice de superfícies mínimas e de curvatura média constante para o caso C^∞ .

No capítulo 2, iniciamos com uma série de definições básicas, revemos, para as superfícies discretas mínimas e de curvatura média constante, os conceitos estudados no capítulo 1 para superfícies C^∞ . Calculamos a primeira variação da área e apresentamos como exemplos de superfícies discretas mínimas o catenóide e o helicóide, e como exemplos de superfícies discretas CMC, o cilindro e uma superfície de Delaunay.

No capítulo 3 calculamos a segunda variação da área e definimos o operador de Jacobi discreto, o que nos permite estudar estabilidade para as superfícies discretas.

Capítulo 1

Superfícies Mínimas e de Curvatura Média Constante

1.1 Introdução

Neste capítulo faremos um breve e introdutório estudo das superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 , assim também como das superfícies de curvatura média constante. Veremos que tais superfícies são soluções de um problema variacional envolvendo o funcional área. Para tanto vamos obter fórmulas para a primeira e segunda variações deste funcional.

No caso de superfícies mínimas a primeira variação nos explica o uso da palavra “mínima” e a segunda variação nos permitirá definir os conceitos de estabilidade e índice.

Para superfícies de curvatura média constante precisaremos introduzir o funcional volume, e veremos que estas superfícies são pontos críticos da área para variações que preservam o volume. Os conceitos de estabilidade e índice, embora levemente diferentes, são essencialmente os mesmos que para as superfícies mínimas.

1.2 Superfícies Mínimas

Sejam \mathcal{M} uma superfície compacta com bordo $\partial\mathcal{M}$ e $X : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. Uma variação de X é uma aplicação C^∞ , $F : \mathcal{M} \times I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $I = (-\varepsilon, \varepsilon)$, tal que:

- i) $F(x, 0) = X(x) \forall x \in \mathcal{M}$.
- ii) $F(\cdot, t) := F_t : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão.

Se além disso F verifica,

- iii) $F_t|_{\partial\mathcal{M}} = X|_{\partial\mathcal{M}}$,

dizemos que a variação fixa o bordo.

O campo $E := F_* \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0}$, onde $\frac{\partial}{\partial t}$ é o campo canônico ao longo de I , é chamado campo variacional de F . Note que a priori E é uma secção do fibrado $TM \oplus TM^\perp$, e é claro que se F fixa o bordo, então $E|_{\partial\mathcal{M}} \equiv 0$.

Ao longo deste texto consideraremos variações normais, isto é, variações em que $E \in TM^\perp$. Quando isto acontece, podemos pensar o campo variacional E na forma $E = fN$, onde $f : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e N é um campo unitário normal a \mathcal{M} .

Sejam

$$A(t) = \int_{\mathcal{M}} d\mathcal{M}_t \tag{1.1}$$

e

$$V(t) = -\frac{1}{3} \int_{\mathcal{M}} \langle F_t, N_t \rangle d\mathcal{M}_t, \tag{1.2}$$

onde $d\mathcal{M}_t$ é o elemento de volume de \mathcal{M} na métrica induzida por F_t e N_t é um campo unitário normal a \mathcal{M}_t .

$A(t)$ representa a área de $F_t(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^3$ e $V(t)$ é o volume algébrico de $F_t(\mathcal{M})$. $V(t)$ representa o volume, com sinal, de um cone construído sobre $F_t(\mathcal{M})$ com vértice na origem. Claramente, $V(t)$ depende da escolha de uma origem de \mathbb{R}^3 .

Definição 1.1. Dizemos que a variação F preserva volume se $V(t) = V(0)$ para todo $t \in I$.

Lema 1.2. *Sejam $X : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão e $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave por partes tal que $\int_{\mathcal{M}} f d\mathcal{M} = 0$. Então existe uma variação normal de X que preserva volume e cujo campo variacional é fN . Além disso, se $f|_{\partial\mathcal{M}} \equiv 0$, a variação pode ser escolhida de modo que fixe o bordo $\partial\mathcal{M}$.*

Demonstração: Seja $\varphi : \mathcal{M} \times I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável qualquer e considere a variação normal de X dada por

$$\begin{aligned} F : \mathcal{M} \times I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (p, t) &\rightsquigarrow F(p, t) = X(p) + \varphi(p, t)N \end{aligned}$$

Definamos as funções ψ e g por

$$\begin{cases} \psi(p, t) := (p, \varphi(p, t)), \\ g(p, t) := X(p) + tN, \end{cases}$$

de modo que o diagrama abaixo comute

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} \times I & \xrightarrow{\psi} & \mathcal{M} \times \mathbb{R} \\ & \searrow F=g \circ \psi & \downarrow g \\ & & \mathbb{R}^3 \end{array}$$

Seja $G(p, t) := \det(dg(p, t))$. Calculemos o volume $V(t)$,

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{\mathcal{M}} \int_0^t F^*(dx \wedge dy \wedge dz) \\ &= \int_{\mathcal{M} \times [0, t]} (\psi^* \circ g^*) dx \wedge dy \wedge dz \\ &= \int_{\mathcal{M} \times [0, t]} G(p, \varphi(p, t)) \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\mathcal{M} \wedge dt \\ &= \int_{\mathcal{M}} \left(\int_0^t G \frac{\partial \varphi}{\partial t} dt \right) d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

Agora tome φ solução do problema de valor inicial:

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{f(p)}{G(p, \varphi(p, t))}, \\ \varphi(p, 0) = 0. \end{cases}$$

Então, em $t = 0$ temos $\frac{\partial \varphi}{\partial t} \Big|_{t=0} = f(p)$ e $G(p, t) = 1$ e como $\int_{\mathcal{M}} f d\mathcal{M} = 0$ por hipótese, obtemos

$$V(t) = 0 \quad \forall t \in I.$$

Assim a variação F preserva volume e o campo variacional é $\frac{\partial F}{\partial t} \Big|_{t=0} = f(p)N$. \square

Denotemos por \mathfrak{F} o conjunto das funções reais sobre \mathcal{M} que são suaves, isto é:

$$\mathfrak{F} := \{f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}; f \in C_0^\infty\}. \quad (1.3)$$

• Fórmula da Primeira Variação da Área

Teorema 1.3 (Primeira Variação da Área). *Sejam $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície, $D \subset \mathbb{R}^2$ um aberto, $x : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}$ uma parametrização de \mathcal{M} e $X : D \times I \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma variação normal de x , ou seja, $X(p, t) = x(p) + tf(p)N(p)$, onde $p = (u, v) \in \bar{D}$ e $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável. Seja $A(t)$ a área de $X_t(D)$. Então,*

$$A'(0) = -2 \int_{\bar{D}} f H d\mathcal{M}. \quad (1.4)$$

Demonstração: Ver apêndice.

Definição 1.4. *Dada uma superfície \mathcal{M} , dizemos que \mathcal{M} é mínima se, e somente se, a sua curvatura média $H(p)$ é zero para todo ponto $p \in \mathcal{M}$.*

A palavra “mínima”, neste caso, está relacionada com o seguinte problema proposto por Lagrange em 1760: dada uma curva Γ fechada e simples, achar a superfície de área mínima que tem Γ como fronteira.

Suponha que exista uma solução \mathcal{M} para o problema e considere a variação normal F_t de \mathcal{M} , $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ dada por uma função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{\Gamma} \equiv 0$, ou seja, a variação fixa a fronteira. Como a área de \mathcal{M} é mínima, temos então que $A(t) \geq A(0)$, para todo $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e para toda variação F_t . Sendo assim, $A'(0) = 0$, para qualquer $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f|_{\Gamma} \equiv 0$.

Pela fórmula da primeira variação da área, $A'(0) = -2 \int_{\mathcal{M}} fHd\mathcal{M}$, a condição $A'(0) = 0$, para toda f , equivale ao fato que $H = 0$ em \mathcal{M} . De fato, se $H = 0$, então $A'(0) = 0$ para toda f . Para mostrarmos que a recíproca é verdadeira, suponhamos que $A'(0) = 0$ para toda f , e que existe um certo $p \in \mathcal{M}$ tal que $H(p) > 0$. Escolhamos f tal que $f(p) = H(p)$, $f \geq 0$, e que $f = 0$ fora de um pequeno domínio $D \subset \mathcal{M}$ em torno de p . Para tal f temos

$$A'(0) = - \int_{\mathcal{M}} fHd\mathcal{M} < 0,$$

contradizendo o fato de ser $A'(0) = 0$, o que mostra que $H(p) = 0$ para todo $p \in \mathcal{M}$.

Concluimos que, se existe uma superfície \mathcal{M} de área mínima com bordo Γ , então $H = 0$ em \mathcal{M} .

1.2.1 Exemplos

Encontrar exemplos de superfícies mínimas, não é, em princípio, uma tarefa fácil. Mesmo para o caso mais simples em que a superfície é gráfico de uma função diferenciável $z = f(x, y)$. Neste caso pode-se mostrar (veja apêndice) que a condição $H = 0$ é equivalente à equação

$$(1 + f_y^2)f_{xx} + 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy} = 0, \quad (1.5)$$

conhecida como equação das superfícies mínimas.

Somente alguns anos depois de Lagrange ter obtido a equação (1.5), Meusnier mostrou que ela era equivalente ao fato que $k_1 + k_2 = 0$, onde k_1 e k_2 são as curvaturas principais, e obteve duas soluções não triviais desta equação :

- **Catenóide:** Como a equação (1.5) é complicada, e é razoável supor que ela tenha muitas soluções, o que Meusnier fez foi verificar se existiam soluções com propriedades adicionais que simplificassem o problema. Por exemplo, verificou a existência de uma superfície que, além de ser mínima, fosse de rotação. Neste caso a superfície é determinada pela curva geratriz e a minimalidade da superfície impõe condições

adicionais à curva geratriz. Meusnier mostrou que a única superfície mínima de rotação, a menos de movimentos rígidos de \mathbb{R}^3 , era o catenóide (ver figura 1.1).

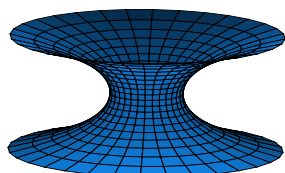


Figura 1.1: catenóide

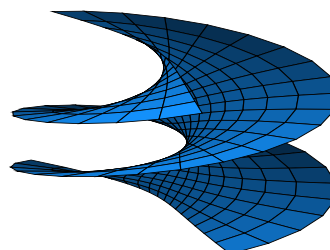


Figura 1.2: helicóide

• **Helicóide:** Meusnier também encontrou outro tipo de solução, por exemplo, adicionando à equação (1.5) a condição que as “curvas de nível” $f(x, y) = k$ sejam retas, obteve uma outra solução, que neste caso, é um helicóide (figura 1.2).

Scherk também tentou, sem sucesso, determinar todas as superfícies mínimas regradas, isto é, aquelas que têm uma linha reta passando por cada um de seus pontos. Este problema foi resolvido, finalmente, por Catalan, em 1842, que provou ser o helicóide a única superfície mínima regrada em \mathbb{R}^3 .

Representação de Weierstrass: Uma solução satisfatória para a equação de Lagrange só foi obtida por Weierstrass em 1866, aproximadamente cem anos após a definição de superfícies mínimas. O resultado fundamental de Weierstrass é o seguinte: Seja \mathcal{M} uma superfície mínima. Então existem um domínio aberto e simplesmente conexo $D \subset \mathbb{C}$ e duas funções, f holomorfa e g meromorfa, definidas em D , com $f(\xi) \neq 0$ para todo $\xi \in D$ de modo que um domínio de \mathcal{M} pode ser representado parametricamente por

$$\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^{\xi} (1 - g^2) f d\xi, \\
y &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^{\xi} i(1 + g^2) f d\xi, \\
z &= \operatorname{Re} \int_{\xi_0}^{\xi} g f d\xi,
\end{aligned} \tag{1.6}$$

onde $\xi_0 \in D$ e as integrais são calculadas ao longo de qualquer curva unindo ξ_0 a $\xi \in D$. Reciprocamente, dadas f e g , e se as integrais acima estão bem definidas, (1.6) representa parametricamente uma superfície mínima. A parametrização dada pelas equações (1.6) é usualmente chamada a *representação de Weierstrass*.

Com esta representação podemos obter outras superfícies mínimas. De fato, usando esta representação, e um amplo conhecimento sobre superfícies de Riemann e funções elípticas, em 1984, Costa obteve o primeiro exemplo de uma superfície mínima completa, mergulhada em \mathbb{R}^3 e de gênero 1, hoje conhecida como superfície de Costa (figura 1.3).

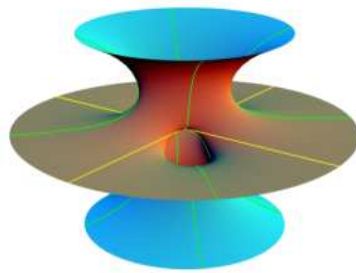


Figura 1.3: Superfície Costa de gênero 1.

A seguir, as expressões correspondentes de f e g para algumas superfícies mínimas conhecidas.

$$\text{Catenóide} : D \subset \mathbb{C} - 0, g(\xi) = \xi, f(\xi) = 1/\xi^2,$$

$$\text{Helicóide} : D \subset \mathbb{C} - 0, g(\xi) = \xi, f(\xi) = i/\xi^2,$$

$$\text{Sherk} : D = \{\xi \in \mathbb{C}; |\xi| < 1\}, g(\xi) = \xi, f(\xi) = \frac{4}{1 - \xi^2},$$

$$\text{Enneper} : D = \mathbb{C}, g(\xi) = \xi, f(\xi) = 1.$$

Maiores detalhes sobre a representação de Weierstrass podem ser encontrados em [3] e [12].

• Fórmula da Segunda Variação da Área

Seja \mathcal{M} uma superfície mínima, $D \subset \mathcal{M}$ um domínio limitado de \mathcal{M} , e $f : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável definida em \bar{D} , tal que $f|_{\partial D} \equiv 0$. Considere a variação normal dada por f . Então temos que

$$A''(0) = - \int_D (f \Delta f - 2K f^2) dA, \quad (1.7)$$

onde K é a curvatura gaussiana de \mathcal{M} e dA é o elemento de área.

A equação (1.7) é denominada fórmula da segunda variação da área. Ao leitor interessado na demonstração de (1.7), ver referência [11].

1.2.2 Estabilidade e Índice

Sejam \mathcal{M} uma superfície mínima e $D \subset \mathcal{M}$ um domínio limitado de \mathcal{M} . Dizemos que D é estável se $A''(0) > 0$, para toda variação normal de \mathcal{M} que fixa o bordo ∂D de D . Isto significa que D é um ponto (crítico da área) de mínimo relativo para toda variação normal.

A procura de condições para a estabilidade foi de grande interesse aos primeiros investigadores em superfícies mínimas. Porém, um resultado satisfatório só foi obtido em 1974 por J.L. Barbosa e M. P. do Carmo [1], conforme teorema a seguir.

Teorema 1.5 (Barbosa, do Carmo). *Seja \mathcal{M} uma superfície mínima orientável em \mathbb{R}^3 , compacta e com bordo $\partial\mathcal{M}$, e seja $g : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{S}^2$ a sua aplicação normal de Gauss. Se a área de $g(\mathcal{M})$ for menor que 2π , então \mathcal{M} é estável.*

O resultado do teorema acima é o melhor possível no sentido que existem superfícies mínimas não estáveis cuja imagem esférica tem área $2\pi + \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é dado arbitrariamente. Uma aplicação do teorema acima é que gráficos mínimos, isto é, superfícies mínimas que são gráficos de funções diferenciáveis $z = f(x, y)$, são estáveis. Por outro lado, um teorema de Bernstein afirma que se um gráfico mínimo está definido em todo o plano xy , então tal gráfico é um plano. É de notável surpresa que o teorema de Bernstein possa ser estendido substituindo gráfico por estável, como no teorema a seguir.

Teorema 1.6 (M. do Carmo, C.K. Peng, Fischer-Colbrie, R. Shoen). *As únicas superfícies mínimas orientáveis do \mathbb{R}^3 que são estáveis e completas são os planos.*

Os teoremas 1.5 e 1.6 nos dão um entendimento razoável da estabilidade de superfícies mínimas em \mathbb{R}^3 e levantam a seguinte questão: suponha que uma superfície mínima não é estável. Como fazer para medir a sua não estabilidade?

Se \mathcal{M} não é estável, então existe uma função $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ com $f|_{\partial\mathcal{M}} = 0$ tal que $A''(0) < 0$. Agora observe que a equação $A''(0) = -\int_D (f\Delta f - 2Kf^2)dA$ define uma função de f

$$\begin{aligned} A''(0) : \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightsquigarrow A''(0)(f) = -\int_D (f\Delta f - 2Kf^2)dA. \end{aligned} \tag{1.8}$$

Denotaremos esta função por

$$\begin{aligned} I : \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ I(f) &= A''(0)(f). \end{aligned}$$

Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} L : \mathfrak{F} &\longrightarrow \mathfrak{F} \\ f &\rightsquigarrow L(f) = \Delta f - 2Kf. \end{aligned} \tag{1.9}$$

É claro que L é uma aplicação linear simétrica cuja forma quadrática associada é exatamente a aplicação $I : \mathfrak{F} \rightarrow \mathbb{R}$.

A aplicação linear L é chamada de **operador de Jacobi**.

Como é usual, define-se o índice da forma quadrática I como a dimensão do maior subespaço de \mathfrak{F} no qual I é negativa. O índice de I nos fornece uma medida da não estabilidade de \mathcal{M} . Tal índice é chamado o índice de Morse, $Ind(\mathcal{M})$, da superfície mínima \mathcal{M} .

É possível mostrar que o operador L é diagonalizável, ou seja, existe uma sequência $\{\lambda_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ de valores próprios de L tal que $Lf + \lambda f = 0$, e

$$\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \cdots \leq \lambda_n \cdots \nearrow +\infty, \quad (1.10)$$

Além disso, os auto-espacos associados têm dimensão finita, dessa forma podemos escrever

$$I(f) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (f_i, f_i), \quad (1.11)$$

sendo f_i uma função própria associada ao autovalor λ_i , ou seja, $f_i \in S_i$, onde

$$S_i = \{f \in \mathfrak{F} : Lf_i + \lambda_i f_i = 0\}.$$

Decorre daí que $ind(\mathcal{M})$ é o número de valores próprios negativos do operador L . Uma conseqüência de (1.10) é que o índice de uma superfície mínima compacta com bordo é finito. Além disso, sabemos que se $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, então $\lambda_i \geq \tilde{\lambda}_i$ para todo i . Logo, se $\mathcal{M} \subset \tilde{\mathcal{M}}$, então $Ind(\mathcal{M}) \leq Ind(\tilde{\mathcal{M}})$.

• **Índice de algumas superfícies mínimas.**

Superfície	Índice
Catenóide	1
Enneper	1
Jorge-Meeks(n-noid)	2n-3
Costa	1
Costa (gênero k)	2k+3 ($k < 37$)

Tabela 1.1: Índice de algumas superfícies mínimas.

1.3 Superfícies de Curvatura Média Constante

Seja $x : \mathcal{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície \mathcal{M}^2 orientável no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 e $D \subset \mathcal{M}$ um domínio relativamente compacto com bordo suave ∂D . A condição de x ter curvatura média constante $H = H_0 \neq 0$ é conhecida por ser equivalente ao fato de x ser ponto crítico de um problema variacional.

De maneira precisa, x tem curvatura média constante não nula, se e somente se, x é ponto crítico do funcional área $A(t)$ para toda variação que preserva volume.

Problemas variacionais do tipo acima são chamados de problemas isoperimétricos. Um procedimento padrão para encontrar pontos críticos de tais problemas é, em analogia com o método dos multiplicadores de Lagrange, olhar para os pontos críticos de $J(t) = A(t) + \lambda V(t)$ com λ constante, para variações de suporte compacto. Quando $\lambda = nH_0$, os pontos críticos para ambos os problemas são os mesmos, (veja [2]).

A proposição a seguir nos dá uma caracterização variacional das superfícies de curvatura média constante.

Proposição 1.7. *Seja $x : \mathcal{M}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão. As sentenças a seguir são equivalentes:*

- i) x tem curvatura média constante $H_0 \neq 0$.
- ii) Para cada domínio relativamente compacto $D \subset \mathcal{M}$ com fronteira suave, e cada variação $x^t : \bar{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ que preserva o volume e fixa o bordo ∂D , $A'_D(0) = 0$.
- iii) Para cada $D \subset \mathcal{M}$ como em (ii) e cada variação (não necessariamente preservando volume) que fixa a fronteira ∂D , $J'_D(0) = 0$.

A proposição acima (ver [2]) estabelece que, em relação à primeira variação, os problemas variacionais (ii) e (iii) são equivalentes, e que os pontos críticos de ambos os problemas determinam superfícies com curvatura média constante não nula em \mathbb{R}^3 .

No entanto, quando se estuda a segunda variação de tais pontos críticos, as equivalências acima não acontecem.

Sejam $x : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante $H_0 \neq 0$, $x^t : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma variação de $\bar{D} \subset \mathcal{M}$ que fixa o bordo ∂D e fN a componente normal do campo variacional de x^t . Denotemos por $\|B\|^2 = \sum_i k_i^2$ o quadrado da norma da segunda forma fundamental B de x . Nestas condições, Barbosa e do Carmo [2] provam o seguinte

Lema 1.8. $J_D''(0)$ depende somente de f e é dado por

$$J_D''(0)(f) = \int_D (-f\Delta f - \|B\|^2 f^2) dM. \quad (1.12)$$

Denotemos por \mathfrak{F}_D o conjunto das funções reais sobre \mathcal{M} que são suaves e têm média zero, isto é:

$$\mathfrak{F}_D := \left\{ f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}; f \in C^\infty \text{ e } \int_D f = 0 \right\}.$$

Proposição 1.9. $A_D''(0) \geq 0$ para toda variação que preserva volume e fixa a fronteira ∂D , se e somente se, $J_D''(0)(f) \geq 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}_D$.

Demonstração: Assuma que $J_D''(0)(f) \geq 0$ para todo $f \in \mathfrak{F}_D$.

Seja $x^t : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma variação que preserva volume e fixa o bordo ∂D , e seja fN a componente normal do campo variacional de x^t . Claramente $f = 0$ sobre ∂D , e como

$$\int_D f dM = V'(0),$$

temos que $f \in \mathfrak{F}_D$. Como x^t preserva volume,

$$J_D''(0) = A_D''(0) + nH_0V_D''(0) = A_D''(0).$$

Pelo lema 1.8, $J_D''(0)$ depende somente de f e, por hipótese, $J_D''(0) \geq 0$. Assim, $A_D''(0) \geq 0$ para a variação x^t .

Reciprocamente, suponha que $A_D''(0) \geq 0$ para toda variação que preserva volume e fixa o bordo ∂D . Seja $f \in \mathfrak{F}_D$ e seja $y_t : \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ a variação que preserva volume

dada pelo lema 1.2. Para tal variação, $V_D''(0) = 0$ e $J_D''(0)(f) = A_D''(0) \geq 0$, como queríamos demonstrar. \square

• **Estabilidade**

Para definir uma noção de estabilidade para imersões $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ com curvatura média constante não nula, escolheremos o problema variacional (ii) da proposição 1.7 que será usado para caracterizar tais imersões.

Definição 1.10. *Seja $x : \mathcal{M}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante não nula e seja $D \subset \mathcal{M}$ um domínio relativamente compacto com bordo ∂D suave. Dizemos que o domínio D é estável se $A_D''(0) \geq 0$, para toda variação que preserva volume e fixa o bordo ∂D . A imersão x , ou a superfície \mathcal{M} , é dita estável se todo domínio $D \subset \mathcal{M}$ é estável.*

Obtemos diretamente, como corolário da proposição 1.9, uma condição para estabilidade.

Corolário 1.11. *$D \subset \mathcal{M}$ é estável, se e somente se, $J_D''(0)(f) \geq 0$ para toda $f \in \mathfrak{F}_D$.*

Mostremos agora que a esfera $S^2(1) \subset \mathbb{R}^3$ é estável. Seja $D \subset S^2$ um domínio em S^2 . Dada $f \in \mathfrak{F}_D$, podemos estendê-la a uma função suave por partes $\bar{f} : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tomando $\bar{f} \equiv 0$ em $S^2 \setminus D$.

Denotemos por $\mu_1(S^2)$ o primeiro autovalor do problema

$$\Delta g + \mu g = 0, \quad \int_{S^2} g \, dS = 0.$$

É conhecido (ver referência [6]) que $\mu_1(S^2) = 2$ e que

$$\mu_1(S^2) \leq \left(\int_{S^2} |\nabla g|^2 \, dM \right) \left(\int_{S^2} g^2 \, dM \right)^{-1}, \quad (1.13)$$

para toda $g : S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suave que satisfaz $\int_{S^2} g \, dM = 0$; onde ∇g denota o gradiente de g na métrica induzida pela inclusão $S^2 \subset \mathbb{R}^3$.

Usando em (1.12) o teorema de Stokes e o fato que $\|B\|^2 = 2$, obtemos para f ,

$$J_D''(0)(f) = \int_D (|\nabla f|^2 - 2f^2) d\mathcal{M}.$$

Como (1.13) é satisfeita para a extensão \bar{f} , concluímos que

$$\begin{aligned} J_D''(0)(f) &= \int_D (|\nabla f|^2 - 2f^2) d\mathcal{M} \\ &\stackrel{(1.13)}{\geq} (\mu_1(S^2) - 2) \int_D f^2 d\mathcal{M} = 0, \end{aligned}$$

para toda $f \in \mathfrak{F}_D$. Sendo assim, S^2 é estável.

• Operador de Jacobi

Nesta secção daremos início ao estudo do espectro da segunda variação para superfícies de curvatura média constante. Em particular, determinaremos explicitamente os autovalores e autofunções do operador de Jacobi para porções do catenóide.

Seja $x : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de uma superfície compacta \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 . Seja \vec{N} um campo de vetores unitário normal a $x(\mathcal{M})$. Sejam F_t uma variação normal de x e $E(t) = fN(t)$ o campo variacional de F_t , com $f \in \mathfrak{F}_D$.

Sejam $A(t)$ e H a área e a curvatura média, respectivamente, da imersão F_t . A fórmula da primeira variação da área, equação (1.4), neste caso é

$$A'(0) = -2 \int_{\mathcal{M}} \langle HN, fN \rangle dA,$$

e se H é constante, então

$$A'(0) = -2H \int_{\mathcal{M}} f dA.$$

Se $V(t)$ é o volume de F_t , como definido em (1.2), então sabemos que

$$V'(0) = \int_{\mathcal{M}} f dA,$$

ou seja, a variação preserva volume se e somente se f tem média zero.

Assim, para variações que preservam volume, $A'(0) = 0$ e portanto, para tais variações, x é um ponto crítico do funcional área.

A fórmula da segunda variação da área para variações F_t que preservam volume, veja [11], é dada por

$$A''(0) := \left. \frac{d^2}{dt^2} A(t) \right|_{t=0} = \int_{\mathcal{M}} \{|\nabla f|^2 - (4H^2 - 2K)f^2\} dA,$$

onde K é a curvatura gaussiana de \mathcal{M} .

De maneira análoga ao caso de superfícies mínimas definimos o operador de Jacobi como sendo

$$L := -\Delta - 4H^2 + 2K. \quad (1.14)$$

Note que, também neste caso, temos $A''(0) = A''(0)(f) = \int_{\mathcal{M}} f L f dA$.

Existem duas maneiras de definirmos o índice de uma superfície de curvatura média constante: o índice geométrico de \mathcal{M} , denotado por $Ind(\mathcal{M})$, definido como o índice do operador de Jacobi L sobre o espaço \mathfrak{F}_D , e o índice algébrico de \mathcal{M} , denotado por $Ind_U(\mathcal{M})$, definido como o índice do operador L sobre o espaço C_0^∞ .

Note que para L definido no espaço de funções \mathfrak{F}_D , a variação preserva volume, e quando L está definido no espaço C_0^∞ a variação não necessariamente preserva volume.

Temos, por [10], que $Ind_U(\mathcal{M}) \geq Ind(\mathcal{M}) \geq Ind_U(\mathcal{M}) - 1$. Como é geometricamente mais natural, queremos calcular $Ind(\mathcal{M})$, mas $Ind_U(\mathcal{M})$ é mais acessível para cálculos que $Ind(\mathcal{M})$, e eles diferem apenas por 1.

• **Autovetores de L para o retângulo.** Considere o retângulo mínimo

$$M = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq x_0, 0 \leq y \leq y_0\}$$

com coordenadas naturais $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, e considere funções sobre M com condições de fronteira de Dirichlet. Dessa forma, a equação (1.14) se reduz a $L\phi = -\Delta\phi$, sendo

$$\lambda_{m,n} = \frac{m^2\pi^2}{x_0^2} + \frac{n^2\pi^2}{y_0^2}, \quad \phi_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{x_0 y_0}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{x_0} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{y_0}, \quad (m, n) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+,$$

respectivamente, autovalores e autofunções da equação

$$\Delta\phi + \lambda\phi = 0. \quad (1.15)$$

De fato, verificamos que

$$\begin{aligned} \Delta\phi_{m,n} &= \frac{\partial^2\phi_{m,n}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi_{m,n}}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{2m\pi}{x_0\sqrt{x_0y_0}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{y_0} \cos \frac{m\pi x}{x_0} \right\} + \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{2n\pi}{y_0\sqrt{x_0y_0}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{x_0} \cos \frac{n\pi y}{y_0} \right\} \\ &= -\frac{2m^2\pi^2}{x_0^2\sqrt{x_0y_0}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{y_0} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{x_0} - \frac{2n^2\pi^2}{y_0^2\sqrt{x_0y_0}} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{y_0} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{x_0}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n}\phi_{m,n} &= \left\{ \frac{m^2\pi^2}{x_0^2} + \frac{n^2\pi^2}{y_0^2} \right\} \frac{2}{\sqrt{x_0y_0}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{x_0} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{y_0} \\ &= \frac{2m^2\pi^2}{x_0^2\sqrt{x_0y_0}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{x_0} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{y_0} + \frac{2n^2\pi^2}{y_0^2\sqrt{x_0y_0}} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{x_0} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{y_0}, \end{aligned} \quad (1.17)$$

sendo assim, a soma das equações (1.16) e (1.17) verificam a equação (1.15).

• **Autovetores de L para o catenóide.** Considere o catenóide dado pela aplicação conforme

$$\Phi : (x, y) \in \mathcal{R} \longrightarrow (\cos x \cosh y, \operatorname{sen} x \cosh y, y) \in \mathbb{R}^3,$$

com $\mathcal{R} = S^1 \times [y_0, y_1]$. É fácil verificar que a métrica, o operador de Laplace-Beltrami, e a curvatura gaussiana para o catenóide são

$$ds^2 = \cosh^2 y \cdot (dx^2 + dy^2), \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad K = -\cosh^{-4} y.$$

Lema 1.12. *O catenóide Φ tem uma base L^2 de auto-funções para seu operador de Jacobi $L = -\Delta + 2K$ da forma $\operatorname{sen}(mx)f(y)$ ou $\cos(mx)f(y)$, para $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. A função f é uma solução da equação diferencial ordinária de segunda ordem*

$$f_{yy} = (m^2 - \lambda \cosh^2 y - 2 \cosh^{-2} y)f, \quad (1.18)$$

com autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$ de L e condições de fronteira de Dirichlet $f(y_0) = f(y_1) = 0$.

Além disso, os autovalores λ e autofunções de L são determinados pelas soluções da equação (1.18) com $f(y_0) = f(y_1) = 0$.

Demonstração: É conhecido que L , com respeito às condições de fronteira de Dirichlet, tem um espectro discreto em \mathbb{R} , e que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\ker(L - \lambda)$ é um espaço de funções suaves de dimensão finita. Dessa forma, uma base ortonormal do espaço L^2 sobre \mathcal{R} (com respeito à métrica ds^2) pode ser obtida como um conjunto de autofunções suaves de L satisfazendo as condições de fronteira de Dirichlet.

Defina o operador simétrico $D = i\frac{\partial}{\partial x}$. Note que D é simétrico, de fato, para funções u e v que são 2π -periódicas em x , temos

$$\left\langle \frac{\partial u}{\partial x}, v \right\rangle_{L^2} + \left\langle u, \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle_{L^2} = \int_{\mathcal{R}} (u_x \bar{v} + u \bar{v}_x) \cosh^2 y dx dy = 0,$$

o que implica dizer que o operador $\frac{\partial}{\partial x}$ é simétrico, e assim D é simétrico.

Note que $DL = LD$, assim $D : \ker(L - \lambda) \rightarrow \ker(L - \lambda)$. Como D é simétrico, ele tem uma base de autofunções em cada espaço de dimensão finita $\ker(L - \lambda)$. Assim, podemos escolher um conjunto de funções que é simultaneamente uma base L^2 de autofunções para os operadores D e L . Desde que as autofunções de D são da forma $e^{mx} f(y)$, com $m \in \mathbb{Z}$, a primeira parte do lema está provada.

Qualquer autofunção $\text{sen}(mx)f(y)$ de L satisfaz

$$\begin{aligned} L(\text{sen}(mx)f(y)) &= \lambda \text{sen}(mx)f(y) \\ &= \frac{m^2 \text{sen}(mx)f(y)}{\cosh^2 y} - \frac{\text{sen}(mx)f_{yy}(y)}{\cosh^2 y} - \frac{2 \text{sen}(mx)f(y)}{\cosh^4 y}, \end{aligned}$$

e um cálculo similar acontece para qualquer autofunção $\cos(mx)f(y)$. Sendo assim, f satisfaz (1.18). \square

Capítulo 2

Superfícies Discretas

2.1 Introdução

Neste capítulo, temos como objetivo principal a construção de superfícies discretas mínimas (catenóide e helicóide), e de curvatura média constante (cilindro e superfície de Delaunay). Para isso iniciamos com algumas definições básicas, demonstramos a fórmula da primeira variação da área e posteriormente definimos a curvatura média H de uma superfície discreta através de uma relação entre o gradiente da área e o gradiente do volume da superfície discreta.

2.2 Definições Básicas

Nesta secção damos uma série de definições necessárias para definirmos o conceito de superfície discreta.

Definição 2.1. *Seja $A = \{a_0, \dots, a_k\}$ um conjunto de $k + 1$ pontos em \mathbb{R}^n . Dizemos que A é geometricamente independente se, e somente se, não existe um hiperplano de dimensão $k - 1$ que contenha o conjunto A .*

Exemplo 2.2. *O conjunto $\{a_0, a_1, a_2\}$ na figura 2.1 é geometricamente independente, pois o único hiperplano em \mathbb{R}^2 contendo estes três pontos é o plano inteiro.*

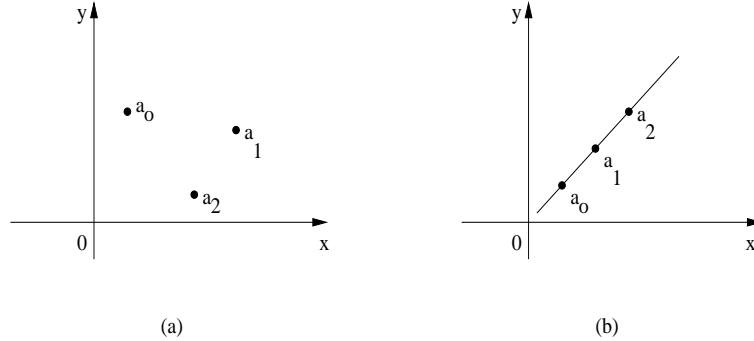


Figura 2.1: Conjunto geometricamente (independente (a) e dependente (b)).

Definição 2.3. Seja $\{a_0, \dots, a_k\}$ um conjunto geometricamente independente em \mathbb{R}^n . O simplexo geométrico de dimensão k ou k -simplexo, σ^k , gerado por $\{a_0, \dots, a_k\}$ é o conjunto de todos os pontos x em \mathbb{R}^n para os quais existem números reais não negativos $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ tais que

$$x = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i \quad e \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1.$$

Os números $\lambda_0, \dots, \lambda_k$ são ditos coordenadas baricêntricas do ponto x . Os pontos a_0, \dots, a_k são chamados vértices de σ^k .

Definição 2.4. Sejam σ^n um n -simplexo e $k < n$. Um k -simplexo σ^k diz-se uma face do simplexo σ^n se, e somente se, cada vértice de σ^k é um vértice de σ^n .

Definição 2.5. Dizemos que dois simplexos σ^m e σ^n são propriamente juntos se, e somente se, $\sigma^m \cap \sigma^n = \emptyset$ ou $\sigma^m \cap \sigma^n$ é uma face comum a ambos os simplexos (ver figura 2.2).

Definição 2.6. Um complexo simplicial é uma família finita K de simplexos geométricos que são propriamente juntos e têm a propriedade que cada face de um membro de K é também um membro de K .

O maior inteiro positivo r tal que K contém um r -simplexo diz-se a dimensão do complexo simplicial K .

A união dos membros de K com a topologia de subespaço euclidiano é denotada por $|K|$ e é chamada realização geométrica de K , ou poliedro associado a K .

Um complexo simplicial consistindo de um número finito de triângulos diz-se uma superfície simplicial.

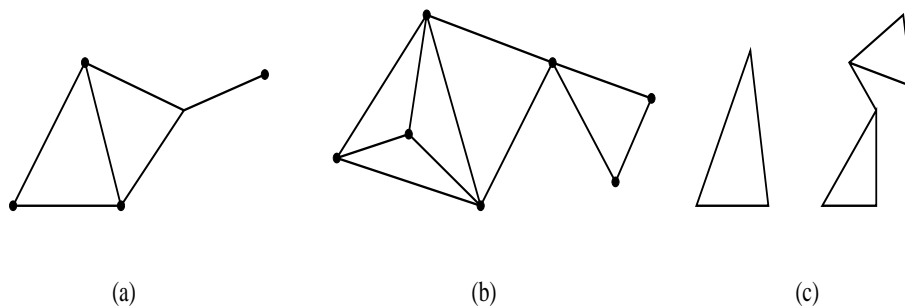


Figura 2.2: Simplexos propriamente juntos.

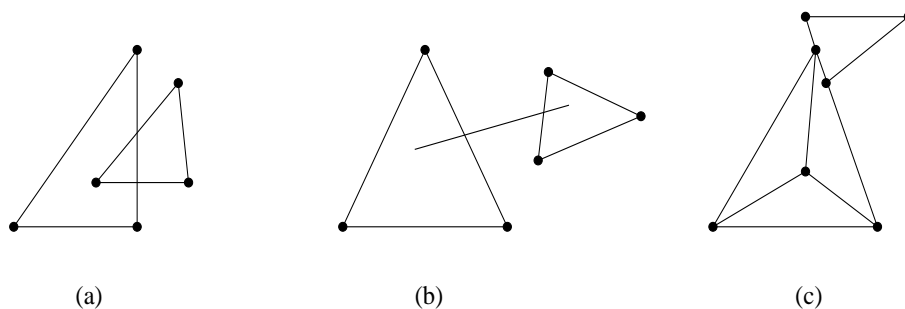


Figura 2.3: Simplexos não propriamente juntos.

Definição 2.7 (Superfície Discreta). Uma superfície discreta em \mathbb{R}^3 é uma malha triangular \mathcal{T} que tem a topologia de uma superfície simplicial K tal que $|K|$ é pelo menos de classe C^0 .

Note que a realização geométrica $|K|$ de uma superfície discreta \mathcal{T} é determinada pelo conjunto de vértices $\mathcal{V} = \{p_1, \dots, p_m\} \subset \mathbb{R}^3$. Assim pode-se identificar \mathcal{T} com o par (K, \mathcal{V}) .

Os simplexos de dimensão 0,1 e 2 de K representam respectivamente vértices, arestas e triângulos da superfície discreta \mathcal{T} .

Definição 2.8. *Sejam \mathcal{T} uma superfície discreta com vértices num conjunto \mathcal{V} e $T = (p, q, r)$ um triângulo de \mathcal{T} com vértices $p, q, r \in \mathcal{V}$. Denotaremos por $star(p)$ o conjunto de triângulos em \mathcal{T} que contém p como vértice e por $star(\overline{pq})$ o conjunto de triângulos de \mathcal{T} que têm o segmento \overline{pq} como aresta, isto é:*

$$star(p) := \{T \in \mathcal{T} : T \text{ é um triângulo que tem } p \text{ como vértice}\}, \quad (2.1)$$

$$star(\overline{pq}) := \{T \in \mathcal{T} : T \text{ é um triângulo que tem } \overline{pq} \text{ como aresta}\}. \quad (2.2)$$

A área de uma superfície discreta é dada por

$$área(\mathcal{T}) := \sum_{T \in \mathcal{T}} área(T),$$

onde $área(T)$ denota a área euclidiana do triângulo $T \subset \mathbb{R}^3$.

2.3 Primeira Variação da Área

Definição 2.9. *Seja $\mathcal{V} = \{p_1, \dots, p_m\}$ o conjunto de vértices de uma superfície discreta \mathcal{T} . Uma variação $\mathcal{T}(t)$ de \mathcal{T} é uma variação C^2 dos vértices p_i ,*

$$p_i(t) : [0, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3, \text{ com } p_i(0) = p_i, \forall i = 1, \dots, m.$$

A retidão das arestas e a planitude dos triângulos são preservados com o movimento dos vértices.

Lema 2.10. *Sejam \mathcal{T} uma superfície discreta e $\mathcal{T}(t)$ uma variação de \mathcal{T} . Então, em cada vértice p de \mathcal{T} , o gradiente da área é dado por:*

$$\nabla_p área(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} \sum_{T=(p,q,r) \in star(p)} J(r-q), \quad (2.3)$$

onde J é uma rotação anti-horária de $\frac{\pi}{2}$ no plano de cada triângulo orientado T .

Demonstração: Sejam T o triângulo $\Delta p(t)qr$ e $s(t)$ um ponto pertencente à aresta \overline{rq} , dado por

$$s(t) = r + \left\langle p(t) - r, \frac{q - r}{\|q - r\|} \right\rangle \frac{q - r}{\|q - r\|}.$$

como na figura 2.4 abaixo.

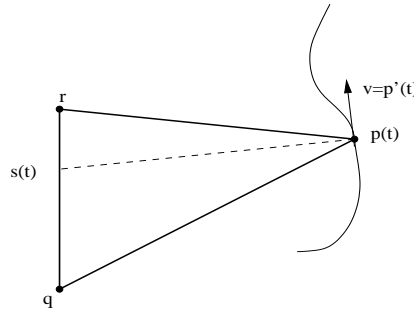


Figura 2.4: Triângulo com vértice $p(t)$ variando.

A área do triângulo T é dada por

$$\text{área}(T) = \frac{\|p(t) - s(t)\| \cdot \|q - r\|}{2}. \quad (2.4)$$

Seja $\alpha(t)$ a curva definida por:

$$\alpha(t) := p(t) - s(t),$$

então

$$\alpha(t) = p(t) - r - \left\langle p(t) - r, \frac{q - r}{\|q - r\|} \right\rangle \frac{q - r}{\|q - r\|}.$$

Assim, em $t = 0$, temos:

$$\alpha(0) = p - r - \overbrace{\left\langle p - r, \frac{q - r}{\|q - r\|} \right\rangle \frac{q - r}{\|q - r\|}}^{s(0)}, \quad \text{donde:}$$

$$\begin{aligned} p - s(0) &= \lambda J(q - r), \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= \frac{\|\alpha(0)\|}{\|q - r\|} J(q - r). \end{aligned}$$

E $\alpha'(0) = p'(0) - \left\langle p'(0), \frac{q-r}{\|q-r\|} \right\rangle \frac{q-r}{\|q-r\|}$. Assim, derivando (2.4) em $t = 0$, temos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} \acute{a}rea(T) \right|_{t=0} &= \frac{\|q-r\|}{2\|\alpha(0)\|} \left\langle p' - \left\langle p', \frac{q-r}{\|q-r\|} \right\rangle \frac{q-r}{\|q-r\|}, \frac{\alpha(0)}{\|q-r\|} J(q-r) \right\rangle \\ &= \frac{\|q-r\|}{2\|\alpha(0)\|} \left\langle p', \frac{\|\alpha(0)\|}{\|q-r\|} J(q-r) \right\rangle \\ &= \left\langle p', \frac{J(q-r)}{2} \right\rangle. \end{aligned} \quad (2.5)$$

A primeira derivada da \acute{a}rea de cada tri\angulo, pela regra da cadeia, \acute{e} dada por

$$\left. \frac{d}{dt} \acute{a}rea(T) \right|_{t=0} = \langle p', \nabla_p \acute{a}rea(T) \rangle. \quad (2.6)$$

Comparando as equa\c{c}es (2.5) e (2.6), obtemos

$$\langle p', \nabla_p \acute{a}rea(T) \rangle = \frac{1}{2} \langle p', J(q-r) \rangle,$$

donde

$$\nabla_p \acute{a}rea(T) = \frac{1}{2} J(q-r).$$

Logo,

$$\nabla_p \acute{a}rea(\mathcal{T}) = \frac{1}{2} \sum_{T=(p,q,r) \in \text{star}(p)} J(q-r).$$

□

O volume de uma superf\i{c}ie discreta \mathcal{T} (ver figura 2.5) \acute{e} dado por:

$$vol(\mathcal{T}) := \frac{1}{6} \sum_{T=(p,q,r) \in \mathcal{T}} \langle p, q \wedge r \rangle = \frac{1}{3} \sum_{T=(p,q,r) \in \mathcal{T}} \langle \vec{N}, p \rangle \acute{a}rea(T),$$

onde p \acute{e} um dos tr\ê{s} v\acute{e}rtices do tri\angulo T e \vec{N} \acute{e} o vetor normal orientado de T ; isto \acute{e},

$$\vec{N} = \frac{(q-p) \wedge (r-p)}{|(q-p) \wedge (r-p)|}.$$

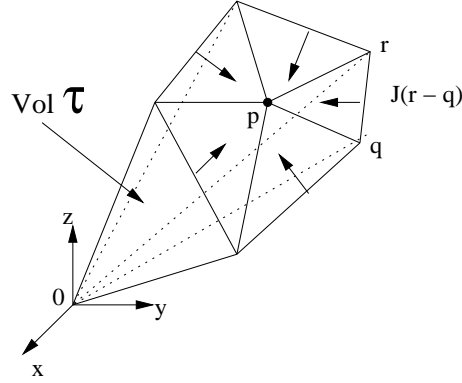


Figura 2.5: Volume de uma superfície discreta.

Segue-se que

$$\nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}) = \frac{1}{6} \sum_{T=(p,q,r) \in \mathcal{T}} q \wedge r \quad (2.7)$$

e, pela regra da cadeia,

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\mathcal{T}) = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle v, \nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}) \rangle. \quad (2.8)$$

Observação 2.11. *Note que:*

$$\nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}) = \sum_{T=(p,q,r) \in \text{star}(p)} \frac{2\text{área}(T)\vec{N} + p \wedge (r - q)}{6}.$$

Portanto, se p é um vértice interior, então a fronteira de $\text{star}(p)$ é fechada e logo

$\sum_{T \in \text{star}(p)} p \wedge (r - q) = 0$. Sendo assim, quando p é um vértice interior, na equação

(2.7), podemos substituir $q \wedge r$ por $2\text{área}(T)\vec{N}$.

No caso C^∞ , uma superfície mínima é ponto crítico do funcional área para variações que fixam a fronteira, e uma superfície de curvatura média constante é ponto crítico do funcional área para variações que preservam volume e fixam a fronteira. Definiremos superfície discreta de curvatura média constante de modo que sejam preservadas as mesmas propriedades variacionais para os mesmos tipos de variações. Assim, consideramos variações $\mathcal{T}(t)$ de \mathcal{T} que fixam a fronteira $\partial\mathcal{T}$ e que, além disso, no caso não

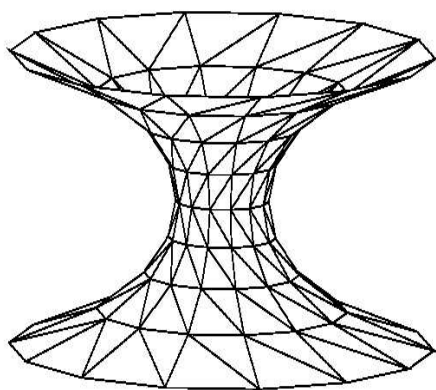
mínimo, preservam volume. Tais variações serão chamadas de *variações admissíveis*. A condição para que uma superfície discreta seja ponto crítico para alguma variação admissível é expressa na definição seguinte.

Definição 2.12. Dizemos que uma superfície discreta \mathcal{T} tem curvatura média constante H se $\nabla_p \text{área}(\mathcal{T}) = H \nabla_p \text{vol}(\mathcal{T})$ para todo p vértice interior de \mathcal{T} . Se $H = 0$, então a superfície diz-se mínima.

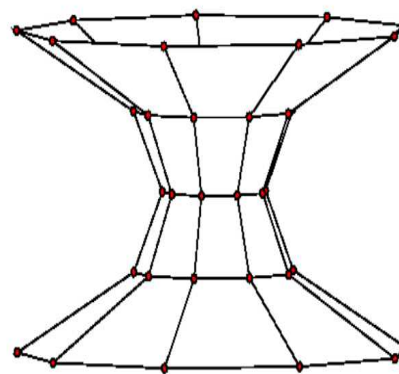
2.4 Exemplos

- **Catenóide** Para derivar uma fórmula para o catenóide mínimo discreto completo e mergulhado, escolhemos os vértices sobre meridianos poligonais planares e os meridianos colocados de modo que o traço da superfície tenha simetria diedral. Verificaremos que os vértices que estão em um meridiano discreto ficam igualmente espaçados sobre a curva cosseno hiperbólico. Este catenóide discreto convergirá uniformemente em regiões compactas para um catenóide suave quando a malha é refinada.

Iniciamos com um lema que prepara a construção dos meridianos verticais do catenóide mínimo discreto (figura 2.6(b)).



(a) - Catenóide discreto com malha triangular.



(b) - Construção dos meridianos verticais.

Figura 2.6: Catenóide

Lema 2.13. *Suponha que temos quatro vértices dados por $p = (d, 0, e)$, $q_1 = (d \cos \theta, -d \sin \theta, e)$, $q_2 = (a, 0, b)$, e $q_3 = (d \cos \theta, d \sin \theta, e)$, para números reais a, b, c, e , e um ângulo θ tal que $b \neq e$. Então existe uma escolha de números reais x, y e um quarto vértice $q_4 = (x, 0, y)$ tal que a superfície discreta formada pelos quatro triângulos (p, q_1, q_2) , (p, q_2, q_3) , (p, q_3, q_4) , e (p, q_4, q_1) é mínima se, e somente se, $2ad > \frac{(e-b)^2}{1 + \cos \theta}$.*

Além disso, quando x e y existem, eles são únicos e são da forma

$$\begin{aligned} x &= \frac{2(1 + \cos \theta)d^3 + (a + 2d)(e - b)^2}{2ad(1 + \cos \theta)(e - b)^2}, \\ y &= 2e - b. \end{aligned}$$

Demonstração: Ver apêndice.

O lema a seguir mostra que a mesma condição dada no lema anterior é necessária e suficiente para que dois pontos estejam sobre a curva \cosh . Que estas condições sejam as mesmas é de fundamental importância na demonstração do teorema 2.15 onde mostramos a existência de catenóides discretos.

Lema 2.14. *Dados dois pontos (a, b) e (d, e) em \mathbb{R}^2 com $b \neq e$, e um ângulo θ com $|\theta| < \pi$, então existe $r \in \mathbb{R}$ tal que estes dois pontos estão sobre a curva*

$$\gamma(t) = \left(r \cosh \left[\frac{t}{e-b} \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{1}{r^2} \frac{(e-b)^2}{1 + \cos \theta} \right) \right], t \right), \quad t \in \mathbb{R}$$

se, e somente se, $2ad > \frac{(e-b)^2}{1 + \cos \theta}$.

Demonstração: Seja $\hat{\delta} = \frac{e-b}{\sqrt{1 + \cos \theta}}$, sem perda de generalidade, podemos supor que $0 < a \leq d$ e que $e > 0$, de modo que $-e \leq b < e$.

• **Afirmção 1:** Existe $r \in \mathbb{R}$ tal que os pontos (a, b) e (d, e) estão sobre a curva $\gamma(t)$ se, e somente se,

$$\operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{\hat{\delta}^2}{r^2} \right) = \operatorname{arccosh} \left(\frac{d}{r} \right) - \operatorname{sign}(b) \operatorname{arccosh} \left(\frac{e}{r} \right). \quad (2.9)$$

• **Prova da Afirmação 1:** Suponha que exista $r \in \mathbb{R}$ tal que os pontos (a, b) e (d, e) estão sobre a curva $\gamma(t)$. Então,

$$r \cosh \left[\frac{b}{e-b} \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2} \right) \right] = a, \quad (2.10)$$

e

$$r \cosh \left[\frac{e}{e-b} \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2} \right) \right] = d. \quad (2.11)$$

Das equações (2.10) e (2.11) obtemos, respectivamente

$$\operatorname{sign}(b) \operatorname{arccosh} \left(\frac{a}{r} \right) = \frac{b}{e-b} \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2} \right), \quad (2.12)$$

e

$$\operatorname{arccosh} \left(\frac{d}{r} \right) = \frac{e}{e-b} \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2} \right), \quad (2.13)$$

onde

$$\operatorname{sign}(b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \geq 0 \\ -1, & \text{se } b < 0. \end{cases}$$

Fazendo a diferença entre as equações (2.12) e (2.13) obtemos a equação (2.9).

Para a recíproca, basta observar que se os pontos (a, b) e (d, e) satisfazem a equação 2.9, então eles estão sobre alguma translação vertical da curva $\gamma(t)$.

• **Afirmação 2:** Fixado $r \in (0, a]$, a equação (2.9) tem solução se, e somente se,

$$\left(\frac{d}{r} + \sqrt{\frac{d^2}{r^2} - 1} \right) \left(\frac{a}{r} + \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} \right) = 1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2} + \frac{\widehat{\delta}}{r} \sqrt{2 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2}}, \quad \text{quando } b \leq 0 \quad (2.14)$$

ou

$$\left(\frac{d}{r} + \sqrt{\frac{d^2}{r^2} - 1} \right) \left(\frac{a}{r} - \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} \right) = 1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2} + \frac{\widehat{\delta}}{r} \sqrt{2 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2}}, \quad \text{quando } b \geq 0. \quad (2.15)$$

• **Prova da Afirmação 2:** Suponhamos que a equação (2.9) tem solução. Vamos considerar o caso em que $b \leq 0$, o caso $b \geq 0$ é análogo.

Para $b \leq 0$, a equação (2.9) se escreve na forma

$$\operatorname{arccosh}\left(\frac{d}{r}\right) + \operatorname{arccosh}\left(\frac{a}{r}\right) = \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2}\right). \quad (2.16)$$

Aplicando \cosh a ambos os lados da equação acima, obtemos

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2} &= \cosh\left\{\operatorname{arccosh}\left(\frac{d}{r}\right) + \operatorname{arccosh}\left(\frac{a}{r}\right)\right\} \\ &= \frac{ad}{r^2} + \sqrt{\frac{d^2}{r^2} - 1}\sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} \\ &= \left(\frac{d}{r} + \sqrt{\frac{d^2}{r^2} - 1}\right)\left(\frac{a}{r} + \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1}\right) - \frac{d}{r}\sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} - \frac{a}{r}\sqrt{\frac{d^2}{r^2} - 1}. \end{aligned}$$

Da equação (2.16), tomando \sinh , obtem-se

$$\frac{d}{r}\sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1} + \frac{a}{r}\sqrt{\frac{d^2}{r^2} - 1} = \frac{\widehat{\delta}}{r}\sqrt{2 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r}},$$

donde resulta a equação (2.9). A recíproca é elementar.

Sejam $f, g, h : (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ as funções definidas, respectivamente, por;

$$\begin{aligned} f(r) &= 1 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r^2} + \frac{\widehat{\delta}}{r}\sqrt{2 + \frac{\widehat{\delta}^2}{r}}, \\ g(r) &= \left(\frac{d}{r} + \sqrt{\frac{d^2}{r^2} - 1}\right)\left(\frac{a}{r} + \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1}\right), \\ h(r) &= \left(\frac{d}{r} + \sqrt{\frac{d^2}{r^2} - 1}\right)\left(\frac{a}{r} - \sqrt{\frac{a^2}{r^2} - 1}\right). \end{aligned}$$

Observe que $f(r)$ corresponde à expressão à direita na igualdade da equação (2.14), e $g(r)$ e $h(r)$ às expressões à esquerda nas igualdades das equações (2.14) e (2.15), respectivamente.

- **Afirmção 3:** Para $r \in (0, a]$, o sistema de equações

$$\begin{cases} f(r) = g(r) \\ f(r) = h(r) \end{cases} \quad (2.17)$$

tem solução se, e somente se, $2ad > \frac{(e-b)^2}{1 + \cos \theta}$.

- **Prova da Afirmção 3:** A função $f : (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ (ver figura 2.7) tem as seguintes propriedades:

1. É decrescente.
2. $f(a) > 0$.
3. $f(r) > 2\delta^2/r^2$.
4. Quando $r \rightarrow 0$, f aproxima-se assintoticamente de $2\delta^2/r^2$.

E com relação às funções $g, h : (0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ (ver figura 2.7) temos:

1. $g(a) = h(a)$.
2. g é decrescente.
3. h é crescente.
4. $\lim_{r \rightarrow 0} h(r) = \frac{d}{a}$.
5. $g(r) < \frac{4ad}{r^2}$.
6. Quando $r \rightarrow 0$ g aproxima-se assintoticamente de $\frac{4ad}{r^2}$.

A afirmação 3 segue-se diretamente destas propriedades. De fato, suponha que $f = g$. Como $f > \frac{2\widehat{\delta}^2}{r^2}$ temos que $g > \frac{2\widehat{\delta}^2}{r^2}$. Resolvendo esta desigualdade obtemos $2ad > \widehat{\delta}^2$.

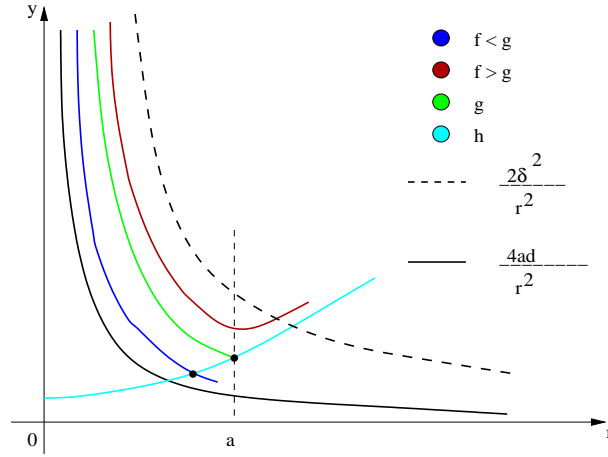


Figura 2.7: Propriedades das funções f, g, h .

Agora se $f = h$, usando novamente o fato que $f > \frac{2\widehat{\delta}^2}{r^2}$, obtemos a desigualdade $2ad > \widehat{\delta}^2$.

Reciprocamente, queremos mostrar que se $2ad > \widehat{\delta}^2$, então existe $r_0 \in (0, a]$ tal que o sistema (2.17) tem solução.

Primeiro notemos que:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{g(r)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 + \widehat{\delta}^2 + \widehat{\delta} \sqrt{2r^2 + \widehat{\delta}^2}}{ad + d\sqrt{a^2 - r^2} + \sqrt{d^2 - a^2} \sqrt{a^2 - r^2}} = \frac{2\widehat{\delta}^2}{4ad}.$$

Mas, por hipótese, $\widehat{\delta}^2 < 2ad$. Logo:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{g(r)} < 1. \quad (2.18)$$

Conforme as propriedades das funções f, g e h , se $f < g$, então necessariamente existe $r_0 \in (0, a]$ tal que $f(r_0) = h(r_0)$ e assim o sistema (2.17) tem solução .

Agora se $f > g$, então $\frac{f}{g} > 1$, donde $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{f(r)}{g(r)} \geq 1$. Isto contradiz a equação (2.18). De modo que existe $r' > 0$ tal que $f(r') \leq g(r')$.

A partir das afirmações 1,2 e 3 concluímos a demonstração do lema. □

Agora derivamos uma fórmula explícita para catenóides mínimos discretos, especificando os vértices ao longo de um meridiano poligonal planar. O traço da superfície

terá simetria diedral de ordem $k \geq 3$. A superfície é recoberta por trapezóides isósceles como uma grade \mathbb{Z}^2 , e cada trapezóide pode ser triangulado em dois triângulos escolhendo uma diagonal do trapezóide como aresta interior. Uma ou outra diagonal pode ser escolhida, pois não afetará a minimalidade do catenóide.

O catenóide discreto tem dois fatores surpreendentes. Primeiro, os vértices de um meridiano estão sobre a curva γ do lema 2.14 (exatamente como a curva perfil do catenóide suave está sobre a curva \cosh), e não existe a priori razão para se esperar por isso.

Segundo, a distância vertical entre os vértices ao longo dos meridianos é constante.

Teorema 2.15. *Existe uma família a 4-parâmetros de catenóides mínimos discretos e mergulhados $C = C(\theta, \delta, r, z_0)$ com simetria rotacional diedral e meridianos planares. Se assumirmos que o eixo de simetria diedral é o eixo z e que um meridiano está no plano xz , então, módulo uma translação vertical, o catenóide está completamente descrito pelas seguintes propriedades:*

1. O ângulo diedral é $\theta = \frac{2\pi}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 3$.
2. Os vértices do meridiano no plano xz interpolam a curva dada por $x(z) = r \cosh\left(\frac{1}{r}az\right)$, com $a = \frac{r}{\delta} \operatorname{arccosh}\left(1 + \frac{\delta^2}{r^2(1 + \cos \theta)}\right)$, onde o parâmetro $r > 0$ representa o raio da “cintura” da curva \cosh , e $\delta > 0$ é a distância vertical (constante) entre vértices adjacentes do meridiano.
3. Para um dado valor inicial $z_0 \in \mathbb{R}$ arbitrário, a curva perfil tem vértices da forma $(x_j, 0, z_j)$ com

$$z_j = z_0 + j\delta \text{ e } x_j = x(z_j),$$

onde $x(z)$ é o meridiano do item 2 acima.

4. Os trapezóides planares do catenóide podem ser triangulados independentemente um do outro.

Demonstração: Pelo lema (2.13), se temos três vértices consecutivos (x_{n-1}, z_{n-1}) , (x_n, z_n) e (x_{n+1}, z_{n+1}) ao longo do meridiano no plano xz , eles satisfazem a fórmula

de recursão

$$x_{n+1} = \frac{(x_{n-1} + 2x_n)\widehat{\delta}^2 + 2x_n^3}{2x_nx_{n-1} - \widehat{\delta}^2}, \quad z_{n+1} = z_n + \delta,$$

onde $\delta = z_n - z_{n-1}$ e $\widehat{\delta} = \frac{\delta}{\sqrt{1 + \cos \theta}}$. De fato, olhando para a expressão de x e y no lema (2.13), fazendo $x_{n+1} = x$ e $y_{n+1} = y$; obtemos

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \frac{2(1 + \cos \theta)x_n^3 + (x_{n-1} + 2x_n)\widehat{\delta}^2(1 + \cos \theta)}{2x_{n-1}x_n(1 + \cos \theta) - \widehat{\delta}^2(1 + \cos \theta)} \\ &= \frac{(x_{n-1} + 2x_n)\widehat{\delta}^2 + 2x_n^3}{2x_{n-1}x_n - \widehat{\delta}^2}. \end{aligned}$$

Como visto no lema (2.13), a distância vertical entre (x_{n-1}, z_{n-1}) e (x_n, z_n) é a mesma que entre (x_{n+1}, z_{n+1}) e (x_n, z_n) , assim podemos considerar δ e $\widehat{\delta}$ constantes que independem de n . Vimos que para a existência da superfície, o lema (2.13) requer que $2x_nx_{n-1} > \widehat{\delta}^2$, de modo que todos os x_n devem ter o mesmo sinal. Assim podemos supor $x_n > 0$ para todo n . É claro que, nestas condições, a superfície é mergulhada.

Além disso, a condição $2x_nx_{n-1} > \widehat{\delta}^2$ implica que

$$2x_{n+1}x_n = \frac{2x_n(x_{n-1} + 2x_n)\widehat{\delta}^2 + 4x_n^4}{2x_nx_{n-1} - \widehat{\delta}^2} > \frac{2x_nx_{n-1} - \widehat{\delta}^2}{2x_nx_{n-1} - \widehat{\delta}^2} > \widehat{\delta}^2,$$

portanto x_j está definido, indutivamente, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Assim, a superfície é completa. Podemos checar facilmente que a função $x(z)$ do teorema também satisfaz esta fórmula de recursão, no sentido que se $x_j = x(z_j)$, então x_j satisfaz esta fórmula de recursão. Agora para concluir a demonstração do teorema basta notar que, dados dois pontos iniciais (x_{n-1}, z_{n-1}) e (x_n, z_n) com $z_n > z_{n-1}$, existe r tal que estes dois pontos estão sobre a curva $x(z)$ com δ e θ dados pelo lema (2.14), se e somente se, $2x_nx_{n-1} > \widehat{\delta}^2$. \square

Corolário 2.16. *Existe uma família a 2-parâmetros de catenóides discretos $C_1(\theta, z_0)$ cujos vértices interpolam o catenóide suave com meridiano $x = \cosh z$.*

Demonstração: Como o catenóide suave tem meridiano $x = \cosh z$, então o raio r da cintura da curva \cosh é igual a 1. Além disso, o parâmetro a deve ser escolhido

igual a 1, isto é possível se θ e δ estão relacionados por $1 + \cos \theta + \widehat{\delta}^2 = (1 + \cos \theta) \cosh \delta$. O parâmetro z_0 , que dá o deslocamento vertical dos vértices ao longo do catenóide suave, pode ser escolhido arbitrariamente. Note que se $z_0 = 0$, obtemos um catenóide discreto que é simétrico com respeito à reflexão horizontal. \square

Corolário 2.17. *Fixados r e z_0 , a curva perfil do catenóide discreto $C(\theta, \delta, r, z_0)$ aproxima-se da curva perfil, $x = r \cosh \frac{z}{r}$ do catenóide C^∞ , uniformemente em subconjuntos compactos de \mathbb{R}^3 quando δ , e θ se aproximam de zero.*

Demonstração: Isto é consequência direta da representação explícita do meridiano. Pelo teorema (2.15), temos que

$$x(z) = r \cosh \left(\frac{1}{\delta} \operatorname{arccosh} \left(1 + \frac{\delta^2}{r^2(1 + \cos \theta)} \right) z \right). \quad (2.19)$$

E é fácil verificar que, $\lim_{\delta \rightarrow 0} x(z) = r \cosh \frac{\sqrt{2} z}{r\sqrt{1 + \cos \theta}}$.

Então, fazendo $\theta \rightarrow 0$, Obtemos a curva perfil $x = r \cosh \frac{z}{r}$. \square

• **Helicóide.** Vamos agora obter um outro exemplo de superfície discreta mínima. O helicóide discreto. Na configuração C^∞ , o catenóide e o helicóide são superfícies conjugadas e existe uma deformação isométrica do catenóide para o helicóide (veja [12]). Assim, primeiro faremos uma deformação similar do catenóide discreto no teorema (2.15) para um helicóide discreto mínimo.

Os helicóides consistirão de quadriláteros planares, triangulados por quatro triângulos coplanares. Cada quadrilátero é o *star*, (veja figura 2.8(a)) de um único vértice, e nenhuma das arestas da fronteira é vertical ou horizontal, sendo que um par de vértices opostos da fronteira tem mesma coordenada z e as quatro arestas da fronteira consistem de dois pares de arestas adjacentes que têm o mesmo comprimento.

Inicialmente vamos obter uma representação explícita para que o *star* de um vértice particular seja mínimo, isto nos ajudará a descrever o helicóide.

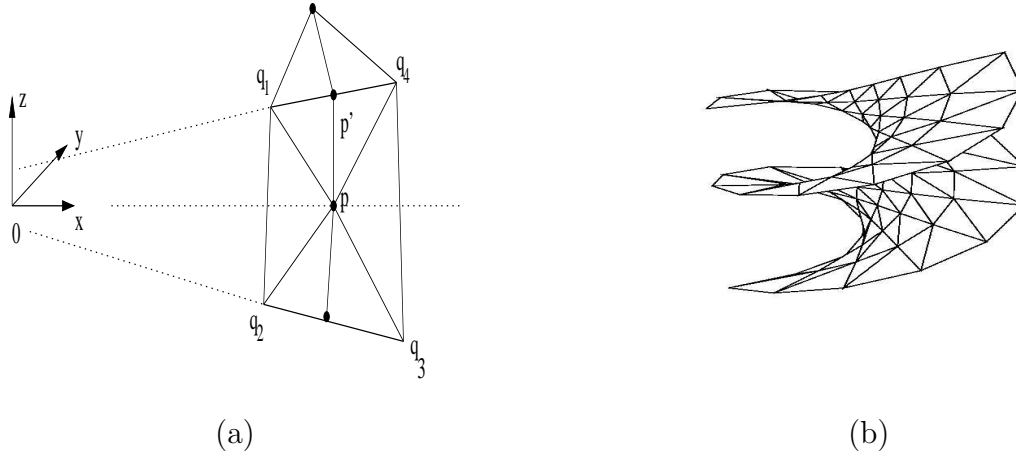


Figura 2.8: (a) - $\text{star}(p)$ da porção considerada no lema 2.18, e $\text{star}(p')$ é um quadrilátero planar. (b) - Helicóide discreto.

Lema 2.18. *Seja p um ponto tal que $\text{star}(p)$ consiste de quatro vértices q_1, q_2, q_3, q_4 e quatro triângulos $\Delta_i = (p, q_i, q_{i+1})$, $i \in \{1, 2, 3, 4\}(\text{mod } 4)$. Suponhamos ainda, que $p = (u, 0, 0)$, $q_1 = (b \cos \theta, b \sin \theta, 1)$, $q_2 = (b \cos \theta, -b \sin \theta, -1)$, com $\theta \in (0, \pi/2)$ e $b < u < t$.*

Se

$$t = -b(1 + 2u^2 \sin^2 \theta) + 2u\sqrt{1 + b^2 \sin^2 \theta}\sqrt{1 + u^2 \sin^2 \theta}$$

ou

$$b = -t(1 + 2u^2 \sin^2 \theta) + 2u\sqrt{1 + t^2 \sin^2 \theta}\sqrt{1 + u^2 \sin^2 \theta},$$

então $\nabla_p \text{área} \equiv 0$.

Demonstração: Ver apêndice.

Teorema 2.19. *Existe uma família de helicóides discretos mínimos mergulhados, como mostrado na figura 2.8(b). Os vértices, indexados por $i, j \in \mathbb{Z}$, são dados por*

$$\frac{r \sinh(x_0 + j\delta)}{\sin \theta} (\cos(i\theta), \sin(i\theta), 0) + (0, 0, ir); \quad \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), r, \delta \in \mathbb{R}.$$

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos assumir $r = 1$. Dessa forma, para um dado i , os vértices são pontos sobre a curva $\{s(\cos(i\theta), \sin(i\theta), i) | s \in \mathbb{R}\}$.

Escolhamos x_0 e δ tal que o $(j - 2)$ -ésimo vértice seja dado, na curva acima, para $s = s_{j-2}$ onde

$$s_{j-2} = \frac{\sinh(x_0 + (j - 2)\delta)}{\sen\theta},$$

e o $(j - 1)$ -ésimo vértice, para $s = s_{j-1}$ com

$$s_{j-1} = \frac{\sinh(x_0 + (j - 1)\delta)}{\sen\theta}.$$

Usando o lema 2.18 vemos que o j -ésimo vértice é obtido, na curva acima, para $s = s_j$ onde

$$s_j = -s_{j-2}(1 + 2s_{j-1}^2 \sen^2\theta) + 2s_{j-1}\sqrt{1 + s_{j-2}^2 \sen^2\theta}\sqrt{1 + s_{j-1}^2 \sen^2\theta},$$

donde

$$s_j = \sinh(x_0 + j\delta) / \sen\theta.$$

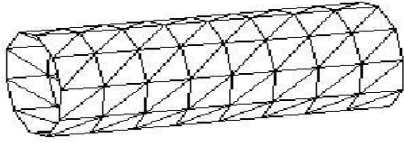
O lema 2.18 nos dá uma fórmula similar para determinarmos s_{j-3} em termos de s_{j-2} e s_{j-1} . Agora veja que os vértices cujo *star* é um quadrilátero planar podem ser movidos livremente dentro desse quadrilátero sem perturbar a minimalidade da superfície. Isto demonstra o teorema. \square

• **Cilindro e Superfície de Delaunay.** Descreveremos algumas maneiras para encontrar análogos discretos de cilindros e superfícies de Delaunay. A estratégia para construir superfícies de curvatura média constante segue da definição (2.12); posicionamos o vértice p tal que $\nabla_p \text{área } \mathcal{T}$ seja um múltiplo constante de $\nabla_p \text{vol } \mathcal{T}$.

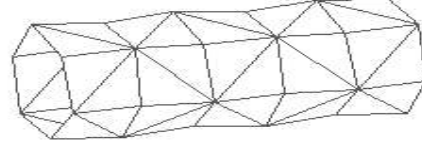
Um cilindro de curvatura média constante (ver figura 2.9(a)) é obtido escolhendo-se números reais positivos e , a e $k \geq 3 \in \mathbb{Z}$, e escrevendo os vértices na forma

$$P_{j,l} = (a \cos(\frac{2\pi j}{k}), a \sen(\frac{2\pi j}{k}), el), \quad j, l \in \mathbb{Z}.$$

Fazemos então uma grade de faces retangulares e cortamos as faces por diagonais com pontos finais $P_{j,l}$ e $P_{j+1,l+1}$. Esta superfície discreta tem curvatura média constante $H = a^{-1}(2 \cos(\frac{\pi}{k}))^{-1}$. É interessante notar que H independe do valor de e .



(a)



(b)

Figura 2.9: Cilindro discreto.

Outra forma de construir um cilindro discreto (ver figura 2.9(b)) é escolher números reais positivos e , a e b , um inteiro $k \geq 3$, e vértices da forma

$$p_{j,l} = (a \cos(2\pi j/k), a \sin(2\pi j/k), el) \text{ quando } j+l \text{ é par, e}$$

$$p_{j,l} = (b \cos(2\pi j/k), b \sin(2\pi j/k), el) \text{ quando } j+l \text{ é ímpar,}$$

para $j, l \in \mathbb{Z}$.

Criamos uma grade de faces na forma de quadriláteros e cortamos as faces por diagonais com pontos finais $p_{j,l}$ e $p_{j+1,l+1}$ se $j+l$ é par e por diagonais com pontos finais $p_{j,l+1}$ e $p_{j+1,l}$ se $j+l$ é ímpar. Por simetria, verificamos que $\nabla_{p_{j,l}} \text{área}$ e $\nabla_{p_{j,l}} \text{vol}$ são paralelos em cada vértice e para cada valor de e , podemos mostrar a existência dos valores a e b de modo que H tem o mesmo valor em todos os vértices. Dessa forma, obtemos um cilindro discreto.

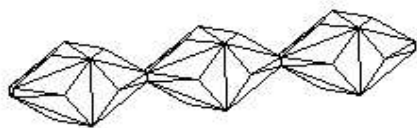
Produziremos agora um terceiro exemplo: uma superfície de Delaunay (ver figura 2.10(a) e 2.10(b)) é obtida escolhendo vértices na forma

$$p_{j,l} = (a \cos(2\pi j/k), a \sin(2\pi j/k), el) \text{ quando } l \text{ é par, e}$$

$$p_{j,l} = (b \cos(2\pi j/k), b \sin(2\pi j/k), el) \text{ quando } l \text{ é ímpar,}$$

para $j, l \in \mathbb{Z}$.

Criamos uma grade de faces trapezoidais isósceles e colocamos um vértice extra em cada uma das faces trapezoidais. A seguir conectamos este vértice extra por arestas aos outros quatro vértices. Pondo os vértices da superfície tão simétricos quanto possível de modo que a definição 2.9 seja satisfeita, as superfícies equivalentes aos exemplos acima (figura 2.10) são produzidas.



(a)



(b)

Figura 2.10: Superfície de Delaunay.

Capítulo 3

Estabilidade de Superfícies

Discretas

3.1 Introdução

Neste capítulo daremos início ao estudo da estabilidade para superfícies discretas. Para isso vamos considerar a segunda variação da área para superfícies discretas de curvatura média constante \mathcal{T} , como na definição 2.12, definimos o operador de Jacobi e o índice da superfície discreta como o índice deste operador. Iniciamos com algumas notações da teoria dos elementos finitos e com uma fórmula explícita para a segunda variação da área.

Notação da teoria dos elementos finitos. Considere uma função vetorial $v_{p_j} \in \mathbb{R}^3$ definida sobre os n vértices interiores $\mathcal{V}_{int} = \{p_1, \dots, p_n\}$ de \mathcal{T} , isto é; $v : \mathcal{V}_{int} \rightarrow \mathbb{R}^3, p_j \rightsquigarrow v(p_j) = v_{p_j}$. Estendamos esta função à fronteira de \mathcal{T} , assumindo $v_p = \vec{0} \in \mathbb{R}^3$ para cada vértice p da fronteira. Os vetores v_{p_j} , representam campos variacionais de variações que fixam a fronteira, da forma

$$p_j(t) = p_j + tv_{p_j} + \mathcal{O}(t^2), \quad (3.1)$$

isto é, $p'_j(0) = v_{p_j}$.

Agora definimos o vetor $\vec{v} \in \mathbb{R}^{3n}$ por

$$\vec{v} = (v_{p_1}, \dots, v_{p_n}). \quad (3.2)$$

Note que o vetor \vec{v} pode ser naturalmente estendido para uma função contínua sobre \mathcal{T} e também ser pensado como um campo variacional, de uma variação que fixa a fronteira e mantém a retidão das arestas e a planitude dos triângulos de \mathcal{T} . De fato \vec{v} pertence ao espaço:

$$S_h := \{v : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}^3; v \in C^0(\mathcal{T}), v \text{ é linear sobre cada } T \in \mathcal{T} \text{ e } v|_{\partial\mathcal{T}} = 0\}.$$

Este espaço é chamado S_h , como na teoria dos elementos finitos. Note que qualquer função componente de alguma função $v \in S_h$ tem norma H^1 limitada.

Para cada triângulo $T = (p, q, r) \in \mathcal{T}$ e cada $v \in S_h$,

$$v|_T = v_p\psi_p + v_q\psi_q + v_r\psi_r, \quad (3.3)$$

onde $\psi_p : \mathcal{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função sobre \mathcal{T} que é 1 em p e é 0 em todos os outros vértices de \mathcal{T} e se estende linearmente em \mathcal{T} de maneira única. As funções ψ_{p_j} formam uma base para o espaço S_h .

3.2 Segunda Variação da Área

Como antes, cada variação que preserva volume e fixa a fronteira será chamada de *variação admissível*.

Lema 3.1. *Seja \mathcal{T} uma superfície discreta compacta, de curvatura média constante H e com conjunto de vértices \mathcal{V} . Então, para cada variação admissível,*

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \right|_{t=0} = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p \text{área}(\mathcal{T}))' - H(\nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}))' \rangle. \quad (3.4)$$

Demonstração: Derivando a equação (2.6), temos

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \right|_{t=0} = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p'', \nabla_p \text{área}(\mathcal{T}) \rangle + \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p \text{área}(\mathcal{T}))' \rangle. \quad (3.5)$$

Agora, usando a definição 2.12, temos

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \right|_{t=0} = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p'', H \nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}) \rangle + \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p \text{área}(\mathcal{T}))' \rangle. \quad (3.6)$$

Para uma superfície mínima discreta, o primeiro termo do lado direito da equação (3.6) é nulo, e a equação (3.4) é satisfeita. Caso a superfície seja de curvatura média constante $H \neq 0$, a variação $p(t)$ preserva volume, logo pela equação (2.7) temos

$$\frac{d}{dt} \text{vol}(\mathcal{T}) = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', \nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}) \rangle = 0,$$

o que implica

$$\sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p'', \nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}) \rangle + \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}))' \rangle = 0.$$

Da equação (3.5) obtemos

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \right|_{t=0} = - \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', H (\nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}))' \rangle + \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p \text{área}(\mathcal{T}))' \rangle,$$

donde

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \right|_{t=0} = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p \text{área}(\mathcal{T}))' - H (\nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}))' \rangle,$$

como queríamos demonstrar. □

Definição 3.2. *Uma superfície mínima discreta ou de curvatura média constante \mathcal{T} diz-se estável se $\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \right|_{t=0} \geq 0$ para cada variação admissível.*

Para uma variação admissível, como na equação (3.1), com $\vec{v} \in \mathbb{R}^{3n}$, como na equação (3.2), a segunda variação da área $\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \right|_{t=0}$ define uma forma bilinear que pode ser representada por uma matriz simétrica $Q \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, ou seja, podemos pensar $\left. \frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \right|_{t=0}(\vec{v}) = \vec{v}^t Q \vec{v}$, onde \vec{v}^t é o transposto do vetor \vec{v} .

Agora, vamos decompor $\frac{d^2}{dt^2} \text{área}(\mathcal{T}) \Big|_{t=0}(\vec{v})$ na soma de dois termos,

$$\vec{v}^t Q^a \vec{v} := \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle v_p, (\nabla_p \text{área}(\mathcal{T}))' \rangle \quad e \quad -H\vec{v} Q^V \vec{v} := - \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle v_p, (\nabla_p \text{vol}(\mathcal{T}))' \rangle. \quad (3.7)$$

Para tanto enunciaremos duas proposições que nos darão condições de determinar as componentes das matrizes Q^a e Q^V satisfazendo (3.7), dando assim as componentes de $Q = Q^a - HQ^V$.

Proposição 3.3. *A hessiana da função área(\mathcal{T}) : $S_h \rightarrow \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica que pode ser representada, na base $\{\psi_{pj}\}$ do espaço S_h , pela matriz $3n \times 3n$, Q^a . Esta matriz pode ser considerada como uma grade $n \times n$ com entradas $Q_{i,j}^a$ 3×3 , para cada par de vértices interiores $p_i, p_j \in \mathcal{V}_{int}$ da superfície \mathcal{T} , de forma que, para cada variação admissível com campo variacional \vec{v} ,*

$$\vec{v}^t Q^a \vec{v} = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle v_p, (\nabla_p \text{área}(\mathcal{T}))' \rangle.$$

A matriz de entrada $Q_{i,j}^a$ é nula se os vértices p_i, p_j não são adjacentes, e para p_i e p_j adjacentes e diferentes,

$$Q_{i,j}^a = \frac{1}{2} \sum_{\substack{T = (p_i, p_j, r) \in \text{star}(\overline{p_i p_j}), \\ \vec{e}_{ij} := p_i - p_j}} \frac{\vec{e}_{ij} \cdot J^t(\vec{e}_{ij}) - J(\vec{e}_{ij}) \cdot \vec{e}_{ij}^t}{|\vec{e}_{ij}|^2} - \cot \theta_T \vec{N}_T \cdot \vec{N}_T^t,$$

onde θ_T é o ângulo interior, no vértice r , do triângulo $T = (p_i, p_j, r)$ e \vec{N}_T denota o vetor normal unitário do triângulo $T = (p, q, r)$.

Além disso, quando temos só um vértice interior, então

$$Q_{i,j}^a = \frac{1}{4} \sum_{T=(p_i, q, r) \in \text{star}(p_i)} \frac{|r - q|^2}{\text{área}(T)} \vec{N}_T \vec{N}_T^t,$$

Demonstração: Ver Apêndice.

Proposição 3.4. *A hessiana da função $\text{vol}(\mathcal{T}) : S_h \mapsto \mathbb{R}$ é uma forma bilinear simétrica que pode ser representada, na base $\{\psi_{p_j}\}$ do espaço S_h , pela matriz $3n \times 3n$, Q^V . Esta matriz pode ser considerada como uma grade $n \times n$ com entradas $Q_{i,j}^V$ para cada par de vértices interiores $p_i, p_j \in \mathcal{V}_{int}$ da superfície \mathcal{T} , de forma que*

$$\vec{v}^t Q^V \vec{v} = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle v_p, (\nabla_p \text{vol})' \rangle,$$

para cada variação admissível com campo variacional \vec{v} .

Temos $Q_{i,i}^V = 0$, e $Q_{i,j}^V = 0$ quando os vértices p_i e p_j não são adjacentes, e

$$Q_{i,j}^V = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 0 & r_{2,3} - r_{1,3} & r_{1,2} - r_{2,2} \\ r_{1,3} - r_{2,3} & 0 & r_{2,1} - r_{1,1} \\ r_{2,2} - r_{1,2} & r_{1,1} - r_{2,1} & 0 \end{pmatrix}$$

para p_i e p_j adjacentes e distintos, onde (p_i, p_j, r_k) , com $r_k = (r_{k,1}, r_{k,2}, r_{k,3})$ $k = 1, 2$, são triângulos que pertencem ao $\text{star}(\overline{p_i p_j})$ e (p_i, p_j, r_2) é propriamente orientado e (p_i, p_j, r_1) não .

Demonstração: Desenvolvendo o somatório $\sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p V)' \rangle$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p V)' \rangle &= \sum_{p \in \mathcal{V}_{int}} \langle v_p, \frac{1}{6} \sum_{(p,q,r) \in \text{star}(p)} (q \times r)' \rangle \\ &= \frac{1}{6} \sum_{p \in \mathcal{V}_{int}} \left(\sum_{q \text{ adjacente a } p, q \neq p} \langle v_p, v_q \times r \rangle \right) \\ &= \frac{1}{6} \sum_{p \in \mathcal{V}_{int}} \left(\sum_{q \text{ adjacente a } p, q \neq p} \langle v_p \times v_q, r_2 - r_1 \rangle \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{p \in \mathcal{V}} \langle p', (\nabla_p V)' \rangle = \sum_{p \in \mathcal{V}_{int}} \left(\sum_{q \text{ adjacente a } p, q \neq p} v_p^t (Q_{pq}^V) v_q \right),$$

onde (p, q, r_2) é o triângulo orientado do $\text{star}(\overline{pq})$, (p, q, r_1) é o triângulo não orientado de $\text{star}(\overline{pq})$ (ver figura 3.2) e Q_{pq}^V é uma matriz 3×3 definida como na proposição anterior.

Sendo assim, $Q_{pp}^V = 0$, e o fato de Q_{pq}^V ser assimétrica em p e q implica que Q^V é simétrica. \square

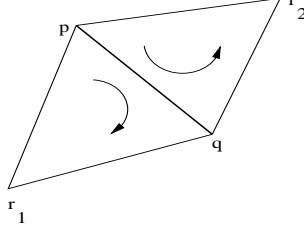


Figura 3.1: Superfície discreta formada pelo $star(\overline{pq})$

O resultado a seguir trata da estabilidade de superfícies discretas que possuem apenas um vértice interior.

Corolário 3.5. *Se uma superfície discreta \mathcal{T} de curvatura média constante tem somente um vértice interior, então ela é estável.*

Demonstração: Denotemos este vértice interior por p_1 , como p_1 é o único vértice interior, $star(p_1) = \mathcal{T}$. Neste caso, Q^a e Q^V são matrizes 3×3 e pelas proposições 3.3 e 3.4, $Q^V = 0$ e para algum vetor $u_p \in \mathbb{R}^3$ em p temos que $u_p^t Q^a u_p$ é igual a

$$\frac{1}{4} \sum_{T=(p,q,r) \in \mathcal{T}} \frac{|r-q|^2}{\text{área}(T)} u_p^t \vec{N} \vec{N}^t u_p = \frac{1}{4} \sum_{T=(p,q,r) \in \mathcal{T}} \frac{|r-q|^2}{\text{área}(T)} \langle u_p, \vec{N} \rangle^2 \geq 0.$$

Assim $(\text{área}(\mathcal{T}))''(0) \geq 0$ para toda variação admissível, de modo que, \mathcal{T} é estável. \square

• **Operador de Jacobi.** Agora que conhecemos explicitamente a matriz Q da segunda variação, podemos definir, de forma análoga ao caso suave, o operador de Jacobi discreto para uma superfície discreta \mathcal{T} compacta e de curvatura média constante.

Encontraremos uma matriz, para o operador de Jacobi discreto, que tem os autovalores e autofunções da segunda variação da área de \mathcal{T} .

Começamos com um lema no qual explicitamos o produto interno de L^2 , sobre o espaço S_h , com respeito à base $\{\psi_{p_1}, \dots, \psi_{p_n}\}$.

Lema 3.6. Em S_h , o produto interno L^2 sobre \mathcal{T} , é dado por

$$\langle u, v \rangle_{L^2} := \int_{\mathcal{T}} \langle u, v \rangle dA = \sum_{T \subset \mathcal{T}} \int_T \langle u|_T, v|_T \rangle dA \quad u, v \in S_h.$$

e pode ser representado pela matriz $3n \times 3n$ positiva definida

$$S = (\langle \psi_{p_i}, \psi_{p_j} \rangle_{L^2} I_{3 \times 3})_{i,j=1}^n,$$

ou seja, $\langle u, v \rangle_{L^2} = \vec{u}^t S \vec{v}$, onde $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^{3n}$ são os campos de vetores associados a u e v respectivamente. A matriz S consiste de blocos $S_{i,j}$, de ordem 3×3 , em uma grade $n \times n$ com

$$S_{j,j} = \sum_{T \in \text{star}(p_j)} \frac{\text{área}(T)}{6} I_{3 \times 3}, \quad S_{i,j} = \sum_{T \in \text{star}(p_j)} \frac{\text{área}(T)}{12} I_{3 \times 3}$$

onde p_i e p_j são vértices adjacentes e $S_{i,j} = 0$ quando p_i e p_j não são adjacentes.

Demonstração: Note que, para cada triângulo $T \subset \mathcal{T}$,

$$\int_T \psi_p^2 dA = \frac{\text{área}(T)}{6}, \quad \int_T \psi_p \psi_q dA = \frac{\text{área}(T)}{12}$$

onde p e q são vértices distintos quaisquer em T . Usando a equação (3.3) temos, para duas funções quaisquer $u, v \in S_h$;

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \sum_{p_j \in \mathcal{V}_{int}} \left(\langle u_{p_j}, v_{p_j} \rangle \sum_{T \in \text{star}(p_j)} \frac{\text{área}(T)}{6} + \sum_{p_i \in \mathcal{V}_{int}} \langle u_{p_j}, v_{p_j} \rangle \sum_{T \in \text{star}(\overline{p_i p_j})} \frac{\text{área}(T)}{12} \right).$$

Assim, os blocos $S_{i,j}$ são como no lema. □

Definiremos a seguir o operador de Jacobi discreto $L_h : S_h \rightarrow S_h$ associado à fórmula da segunda variação da área para a superfície \mathcal{T} .

Definição 3.7. Para cada $v \in S_h$ denotemos por \vec{v} o campo de vetores associado. Definimos o operador de Jacobi discreto L_h como:

$$L_h : S_h \rightarrow S_h, v \rightsquigarrow L_h(v) = S^{-1} Q \vec{v}.$$

Como $L_h(S_h) \subset S_h$, podemos considerar o problema de autovalores para L_h . Também queremos que L_h seja linear e simétrico. Com estas propriedades, a escolha acima de L_h é canônica, de fato.

Proposição 3.8. $L_h : S_h \longrightarrow S_h$ é o único operador linear tal que $\int_{\mathcal{T}} u^t L_h v dA$ é simétrico em u e v e

$$\int_{\mathcal{T}} v^t L_h v dA = v^t Q v$$

para todo $v \in S_h$.

Demonstração: Note que

$$\begin{aligned} L_h(u + \lambda v) &= S^{-1}Q(\vec{u} + \lambda\vec{v}) \\ &= S^{-1}(Q\vec{u} + Q(\lambda\vec{v})) \\ &= S^{-1}Q\vec{u} + \lambda S^{-1}Q\vec{v} \\ &= L_h u + \lambda L_h v, \end{aligned}$$

logo L_h é linear.

Agora, veja que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} u^t L_h v dA &= \langle u, L_h v \rangle_{L^2} \\ &= \vec{u}^t S L_h \vec{v} \\ &= \vec{u}^t S (S^{-1} Q \vec{v}) \\ &= \vec{u}^t Q \vec{v}, \end{aligned}$$

para todo $u, v \in S_h$.

Assim, como que Q é simétrica, $\int_{\mathcal{T}} u^t L_h v dA$ é simétrico em u e v .

A unicidade de L_h com as propriedades acima é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{T}} u^t L_h v dA &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathcal{T}} (u + v)^t L_h (u + v) dA - \int_{\mathcal{T}} u^t L_h u dA - \int_{\mathcal{T}} v^t L_h v dA \right) \\ &= \frac{1}{2} \left((\vec{u} + \vec{v})^t Q (\vec{u} + \vec{v}) - \vec{u}^t Q \vec{u} - \vec{v}^t Q \vec{v} \right). \end{aligned}$$

Veja que, para cada $u \in S_h$, $\int_{\mathcal{T}} u^t L_h v dA$ é unicamente determinado, de modo que, para cada $v \in S_h$, $L_h v$ é único. \square

Como $S^{-1}Q$ é auto-adjunta com respeito ao produto interno de L^2 , todos os seus autovalores são reais. Assim podemos definir:

Definição 3.9. *O espectro da segunda variação da área de $\mathcal{T}(t)$ em $t = 0$ é o conjunto de autovalores de $S^{-1}Q$.*

Usando a representação explícita $S^{-1}Q$ para o operador de Jacobi discreto L_h , é possível descrever um procedimento para estudar o espectro deste operador na fórmula da segunda variação para superfícies C^∞ de curvatura média constante. A grosso modo, a idéia é a seguinte.

Considere uma sequência $\{\mathcal{T}_i\}_{i=1}^\infty$ de superfícies discretas de curvatura média constante. Se esta sequência converge para uma superfície compacta, suave, de curvatura média constante $\phi : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^3$, então pela estimativa padrão da teoria dos elementos finitos (veja [9]) conclui-se que os autovalores e autovetores do operador L_h de \mathcal{T}_j convergem para autovalores e autofunções do operador de Jacobi L de ϕ (convergência na norma L^2 para autofunções).

Apêndice

• Demonstração do Teorema 1.3

Para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, a aplicação

$$\begin{aligned} X^t : D &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (u, v) &\longmapsto X^t(u, v) = X(u, v, t), \end{aligned}$$

parametriza uma superfície em \mathbb{R}^3 e

$$\begin{aligned} \frac{\partial X^t}{\partial u} &= x_u + tfN_u + tf_uN, \\ \frac{\partial X^t}{\partial v} &= x_v + tfN_v + tf_vN. \end{aligned}$$

Dessa forma, denotando por E^t, F^t, G^t os coeficientes da primeira forma fundamental de x^t , obtemos

$$\begin{aligned} E^t &= E + tf(\langle x_u, N_v \rangle + \langle x_u, N_u \rangle) + t^2 f^2 \langle N_u, N_u \rangle + t^2 f_u f_u, \\ F^t &= F + tf(\langle x_u, N_v \rangle + \langle x_v, N_u \rangle) + t^2 f^2 \langle N_u, N_v \rangle + t^2 f_u f_v, \\ G^t &= G + tf(\langle x_u, N_v \rangle + \langle x_v, N_v \rangle) + t^2 f^2 \langle N_v, N_v \rangle + t^2 f_v f_v. \end{aligned}$$

Agora, usando o fato que

$$\begin{aligned} \langle x_u, N_u \rangle &= -l, \\ \langle x_u, N_v \rangle &= -2m, \\ \langle x_v, N_v \rangle &= -n, \end{aligned}$$

e que a curvatura média H é

$$H = \frac{1}{2} \frac{En - 2mF + Gl}{EG - F^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} E^t G^t - (F^t)^2 &= EG - F^2 - 2tf(En - 2Fm + Gl) + R \\ &= (EG - F^2)(1 - 4tfH) + R, \end{aligned}$$

onde R é uma função tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{R}{t} = 0$.

Note que tomando valores de ε arbitrariamente pequenos, X^t é uma superfície regular parametrizada. Além disso, a área $A(t)$ de $x^t(\bar{D})$ é

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{D}} \sqrt{E^t G^t - (F^t)^2} dudv \\ &= \int_{\bar{D}} \sqrt{1 - 4tfH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2} dudv, \end{aligned}$$

onde $\bar{R} = R/(EG - F^2)$.

Sendo assim, tomando ε pequeno, $A(t)$ é uma função diferenciável e sua derivada em $t = 0$ é

$$\begin{aligned} A'(0) &= -2 \int_{\bar{D}} fH \sqrt{EG - F^2} dudv \\ &= -2 \int_{\bar{D}} fH d\mathcal{M}. \end{aligned}$$

□

• Demonstração da Equação (1.5)

Consideremos uma superfície \mathcal{M} em \mathbb{R}^3 que é gráfico de uma função $Z = f(x, y)$ de classe C^2 .

Para tais superfícies o elemento de área é dado por

$$d\mathcal{M} = \sqrt{EG - F^2} dx \wedge dy,$$

onde

$$\begin{aligned} E &= \langle (1, 0, f_x), (1, 0, f_x) \rangle, \\ F &= \langle (1, 0, f_x), (0, 1, f_y) \rangle, \\ G &= \langle (0, 1, f_y), (0, 1, f_y) \rangle, \end{aligned}$$

daí, $EG - F^2 = 1 + f_x^2 + f_y^2$. Assim, o elemento de área dM é dado por

$$dM = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx \wedge dy.$$

Se $Z = f(x, y)$ é uma solução do problema de Lagrange, consideremos a família a 1-parâmetro de funções

$$Z_t(x, y) = f(x, y) + t\eta(x, y),$$

onde $\eta \in C^2$ e $\eta|_{\partial U} \equiv 0$.

Definimos a área $A(t)$ como

$$A(t) = \int_{\bar{U}} (1 + (Z_t)_x^2 + (Z_t)_y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} A(t) &= \int_{\bar{U}} [1 + (f_x + t\eta_x)^2 + (f_y + t\eta_y)^2]^{\frac{1}{2}} dx dy \\ &= \int_{\bar{U}} [1 + f_x^2 + 2tf_x\eta_x + t^2\eta_x^2 + f_y^2 + 2tf_y\eta_y + t^2\eta_y^2]^{\frac{1}{2}} dx dy \\ &= \int_{\bar{U}} [1 + f_x^2 + f_y^2 + 2t(f_x\eta_x + f_y\eta_y) + t^2(\eta_x + \eta_y)]^{\frac{1}{2}} dx dy. \end{aligned}$$

Sejam, $p = f_x$, $q = f_y$ e $w = (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$, então :

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} &= \int_{\bar{U}} \frac{1}{2} [1 + p^2 + q^2 + \dots]^{-\frac{1}{2}} [2(p\eta_x + q\eta_y) + 2t(n_x + n_y)] dx dy \\ &= \int_{\bar{U}} [1 + p^2 + q^2 + \dots]^{-\frac{1}{2}} [p\eta_x + q\eta_y + t(n_x + n_y)] dx dy. \end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
A'(0) &= \int_{\bar{U}} \frac{p\eta_x + q\eta_y}{w} dx dy \\
&= \int_{\bar{U}} \left(\frac{p}{w} \eta_x + \frac{q}{w} \eta_y \right) dx dy \\
&= \int_{\bar{U}} \frac{p}{w} \eta_x dx dy + \int_{\bar{U}} \frac{q}{w} \eta_y dx dy \\
&= \frac{p}{w} \eta \Big|_{\partial \bar{U}} - \int_{\bar{U}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{w} \right) dx dy + \frac{q}{w} \eta_y \Big|_{\partial \bar{U}} - \int_{\bar{U}} \frac{\partial}{\partial y} \frac{q}{w} \eta dx dy.
\end{aligned}$$

Como, por hipótese, $\eta|_{\partial \bar{U}} \equiv 0$, obtemos:

$$A'(0) = - \int_{\bar{U}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{w} \right) \right] \eta dx dy.$$

Como $z = f(x, y)$ representa um mínimo, temos que $A(0)$ é um mínimo da função $A(t)$. Assim, $A'(0) = 0$.

Isto ocorre para toda função η escolhida sob a única restrição de que $\eta|_{\partial \bar{U}} \equiv 0$.

Daí,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{w} \right) = 0,$$

o que implica

$$f_{xx} + f_{yy} + f_x^2 f_{yy} + f_y^2 f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} = 0$$

ou

$$(1 + f_y^2) f_{xx} + (1 + f_x^2) f_{yy} - 2f_x f_y f_{xy} = 0,$$

como queríamos demonstrar. □

• Demonstração do Lema 2.13

Primeiro notemos que a condição $b \neq e$ é necessária. Se $b = e$ então podemos escolher $y = b$ de modo que existe uma família a 1-parâmetro de escolhas de x , obtendo dessa forma, uma superfície planar trivial.

Sejam $c = \cos\theta$ e $s = \sin\theta$.

Da condição $\nabla_p \text{area}(\text{starp}) = 0$ e da equação (2.3), obtemos

$$\frac{1}{2} [J(q_2 - q_1) + J(q_3 - q_2) + J(q_4 - q_3) + J(q_1 - q_4)] = 0. \quad (3.8)$$

Calculemos cada J separadamente.

$$J(q_2 - q_1) = \frac{(q_2 - q_1) \times (p - q_1)}{\|(q_2 - q_1) \times (p - q_1)\|} \times (q_2 - q_1),$$

onde

$$(q_2 - q_1) \times (p - q_1) = (ds(e - b), (e - b)d(1 - c), ds(a - d)),$$

e

$$\begin{aligned} \|(q_2 - q_1) \times (p - q_1)\| &= \sqrt{d^2 s^2 (e - b)^2 + (e - b)^2 d^2 (1 - c)^2 + d^2 s^2 (a - d)^2} \\ &= \sqrt{(e - b)^2 2d^2 (1 - c) + d^2 s^2 (a - d)^2} \\ &= \sqrt{(e - b)^2 2d^2 (1 - c) + d^2 s^2 (a - d)^2}. \end{aligned}$$

Calculemos agora o produto vetorial $[(q_2 - q_1) \times (p - q_1)] \times (q_2 - q_1)$.

$$\begin{aligned} [(q_2 - q_1) \times (p - q_1)] \times (q_2 - q_1) &= \left((b - e)^2 (d - c) - d^2 s^2 (a - d), \right. \\ &\quad ds(e - b)^2 + ds(a - d)(a - dc), \\ &\quad \left. d^2 s^2 - (b - e)d(1 - c)(a - dc) \right). \end{aligned}$$

Assim,

$$J(q_2 - q_1) = \left(\frac{(b - e)^2 d(1 - c) - d^2 s^2 (a - d)}{\sqrt{(e - b)^2 2d^2 (1 - c) + d^2 s^2 (a - d)^2}}, \right. \\ \frac{ds(b - e)^2 + ds(a - d)(a - dc)}{\sqrt{(e - b)^2 2d^2 (1 - c) + d^2 s^2 (a - d)^2}}, \\ \left. \frac{d^2 s^2 (e - b) - (b - e)(d - dc)(a - dc)}{\sqrt{(e - b)^2 2d^2 (1 - c) + d^2 s^2 (a - d)^2}} \right).$$

De forma análoga encontramos

$$J(q_3 - q_2) = \left(\frac{(b-e)^2 d(1-c) + d^2 s^2 (d-a)}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (a-d)^2}}, \right. \\ \frac{-(b-e)^2 ds - ds(d-a)(dc-a)}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (a-d)^2}}, \\ \left. \frac{d^2 s^2 (e-b) - (e-b)d(1-c)(dc-a)}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (a-d)^2}} \right),$$

$$J(q_4 - q_3) = \left(\frac{(y-e)^2 d(1-c) + d^2 s^2 (d-x)}{\sqrt{(y-e)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}}, \right. \\ \frac{-(y-e)^2 ds + ds(d-x)(x-dc)}{\sqrt{(y-e)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}}, \\ \left. \frac{-d^2 s^2 (y-e) - (y-e)d(1-c)(x-dc)}{\sqrt{(y-e)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}} \right),$$

$$J(q_1 - q_4) = \left(\frac{(y-e)^2 d(1-c) + d^2 s^2 (d-x)}{\sqrt{(y-e)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}}, \right. \\ \frac{(y-e)^2 ds + ds(d-x)(dc-x)}{\sqrt{(y-e)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}}, \\ \left. \frac{d^2 s^2 (e-y) - (e-y)d(1-c)(dc-x)}{\sqrt{(y-e)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}} \right)$$

Agora, de acordo com a equação (3.8) temos:

$$\left(\frac{(b-e)^2 d(1-c) - d^2 s^2 (a-d)}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-a)^2}} + \frac{(y-e)^2 d(1-c) + d^2 s^2 (d-x)}{\sqrt{(e-y)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}}, \right. \\ \left. 0, \right. \\ \left. \frac{(e-b)[d^2 s^2 + (d-dc)(a-dc)]}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (a-d)^2}} + \frac{(y-e)[-d^2 s^2 - d(1-c)(x-dc)]}{\sqrt{(e-y)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}} \right) \\ = (0, 0, 0)$$

Efetuando as somas das parcelas de cada coordenada de $\nabla_p \text{area}(\mathcal{T})$ vemos que a segunda coordenada se anula, ou seja,

$$\frac{(b-e)^2 d(1-c) + d^2 s^2 (d-a)}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (a-d)^2}} + \frac{(y-e)^2 d(1-c) + d^2 s^2 (d-x)}{\sqrt{(e-y)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}} = 0,$$

$$\frac{(e-b)[d^2 s^2 + (d-dc)(a-dc)]}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (a-d)^2}} + \frac{(e-y)[d^2 s^2 + d(1-c)(dc-x)]}{\sqrt{(e-y)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (d-x)^2}} = 0.$$

Usando as definições

$$c_1 := \frac{(b-e)^2 d(1-c) + d^2 s^2 (d-a)}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (a-d)^2}},$$

$$c_2 := \frac{d^2 s^2 (e-b) - (b-e)(d-dc)(a-dc)}{\sqrt{(e-b)^2 2d^2(1-c) + d^2 s^2 (a-d)^2}},$$

vemos que a primeira e terceira componentes de $\nabla_p \text{area}(\mathcal{T})$ se anulam se

$$c_1 = \frac{y^2(1-c) - (x-1)s^2}{\sqrt{2y^2(1-c) + (x-1)^2 s^2}} \quad e \quad c_2 = \frac{-(x-1)y - 2y}{\sqrt{2y^2(1-c) + (x-1)^2 s^2}}, \quad (3.9)$$

onde foram aplicadas uma translação e uma homotetia em torno da origem para termos $d = 1$, $e = 0$.

Dividindo c_1 por c_2 , obtemos

$$x - 1 = \frac{c_2 y(1-c) + 2c_1 y}{c_2 s^2 - c_1 y} y. \quad (3.10)$$

Desse modo x é determinado por y . Resta determinar se podemos encontrar y tal que $c_2 s^2 - c_1 y \neq 0$.

Se $x - 1$ é escolhido como na equação (3.10), então a primeira condição de minimalidade da equação (3.9) acontece se, e somente se, a segunda também acontece. Assim só precisamos inserir o valor de $x - 1$ na primeira condição de minimalidade e verificar soluções para y .

Quando $c_1 \neq 0$, a condição é dada por

$$1 = \frac{c_2 s^2 - c_1 y}{|c_2 s^2 - c_1 y|} \frac{y}{|y|} \frac{-(1-c)y^2 - 2s^2}{\sqrt{2(1-c)c_2^2 s^4 + 4c_1^2 s^2 + (2(1-c)c_1^2 + s^2(1-c)^2 c_2^2)y^2}}.$$

Como $-(1-c)y^2 - 2s^2 < 0$, a equação acima acontece se, e somente se, $c_2s^2 - c_1y$ e y têm sinais opostos. Assim, a equação se torna

$$1 = \frac{(1-c)y^2 + 2s^2}{\sqrt{2(1-c)c_2^2s^4 + 4c_1^2s^2 + (2(1-c)c_1^2 + s^2(1-c)^2c_2^2)y^2}},$$

que simplificando resulta

$$1 = \frac{\sqrt{(1-c)y^2 + 2s^2}}{\sqrt{(1-c)c_2^2s^2 + 2c_1^2}}.$$

Notemos que pela equação acima, y^2 é unicamente determinado, sendo $y = \pm b$. Quando $y < 0$, encontramos que $c_2s^2 - c_1y < 0$, o que é impossível. Quando $y > 0$, temos $c_2s^2 - c_1y < 0$ se, e somente se, $2a(1+c) > b^2$.

De fato, temos:

$$\begin{aligned} c_2s^2 - c_1y &= (ab + b)s^2 - [(a-1)s^2 - b^2(1-c)]y < 0 \\ \Leftrightarrow & bs^2(a+1) - (a-1)s^2y + b^2(1-c)y < 0 \\ \Leftrightarrow & bs^2(a+1) + bs^2(a-1) - b^3(1-c) < 0 \\ \Leftrightarrow & bs^2(2a) < b^3(1-c) \text{ e como } (1-c) \neq 0 \text{ e } b \neq 0, \\ \Leftrightarrow & 2a(1+c) > b^2 \end{aligned}$$

E quando $y = -b$ e $2a(1+c) > b^2$, temos a condição de minimalidade quando

$$x = \frac{2 + 2c + ab^2 + 2b^2}{2a + 2ac - b^2}.$$

Invertendo as transformações, voltamos ao caso geral onde d e e não são necessariamente 1 e 0, e as equações para x e y tomam a forma como está no lema.

Quando $c_1 = 0$, temos $(a-1)(1+c) = b^2$ e $(x-1)(1+c) = y^2$, assim em particular, temos $a > 1$ e $2a(1+c) > b^2$. O lado direito da equação (3.9) implica $y = -b$ e $x = a$. Novamente invertendo as transformações, temos que x e y são da forma do lema para o caso $c_1 = 0$. \square

• **Demonstração do Lema 2.18**

Consideremos as conormais $J_1 = J(q_2 - q_1)$, $J_2 = J(q_3 - q_2)$, $J_3 = J(q_4 - q_3)$, $J_4 = J(q_1 - q_4)$, onde J denota uma rotação orientada pelo ângulo $\pi/2$ no triângulo orientado Δ_j contendo a aresta sendo rotacionada. Como

$$\nabla \text{area}(\text{starp}) = \frac{1}{2}[J_1 + J_2 + J_3 + J_4], \quad (3.11)$$

então, calculando cada parcela da equação (3.11) separadamente, obtemos

$$\begin{aligned} J_1 &= J(q_2 - q_1), \\ q_2 - q_1 &= (0, -2b\text{sen}\theta, -2), \\ p - q_1 &= (u - b\cos\theta, -b\text{sen}\theta, -1). \end{aligned}$$

Fazendo o produto vetorial entre $(q_2 - q_1)$ e $(p - q_1)$, obtemos

$$\begin{aligned} (q_2 - q_1) \times (p - q_1) &= (0, 2b\cos\theta - 2u, 2b\text{sen}\theta(u - 2b\cos\theta)), \\ [(q_2 - q_1) \times (p - q_1)] \times (q_2 - q_1) &= (4(1 + b^2\text{sen}^2\theta)(u - b\cos\theta), 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|(q_2 - q_1) \times (p - q_1)\| &= 2\sqrt{(1 + b^2\text{sen}^2\theta)(u - b\cos\theta)^2} \\ &= 2(u - b\cos\theta)\sqrt{1 + b^2\text{sen}^2\theta}. \end{aligned}$$

Assim,

$$J_1 = (2\sqrt{1 + b^2\text{sen}^2\theta}, 0, 0).$$

De forma análoga, obtemos

$$\begin{aligned} J_2 &= \left(\frac{u(t-b)\text{sen}^2\theta}{\sqrt{1+u^2\text{sen}^2\theta}}, \frac{u(t-b)\text{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{1+u^2\text{sen}^2\theta}}, \frac{t-b}{\sqrt{1+u^2\text{sen}^2\theta}} \right), \\ J_3 &= (-2\sqrt{1+t^2\text{sen}^2\theta}, 0, 0), \\ J_4 &= \left(-\frac{u(t-b)\text{sen}^2\theta}{\sqrt{1+u^2\text{sen}^2\theta}}, -\frac{u(t-b)\text{sen}\theta\cos\theta}{\sqrt{1+u^2\text{sen}^2\theta}}, -\frac{t-b}{\sqrt{1+u^2\text{sen}^2\theta}} \right). \end{aligned}$$

Note que,

$$\langle J_4, (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0) \rangle = 0,$$

$$\det(J_4, (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, 0), (u - b \cos \theta, -b \operatorname{sen} \theta, -1)) = 0,$$

e

$$\|J_4\|^2 = (t - b)^2.$$

Veja que a primeira componente de J_4 (e também de J_2) é,

$$\frac{u(t - b) \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{1 + u^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}.$$

Por simetria, a segunda e terceira componentes de J_2 e J_4 são iguais, mas de sinais contrários, então a segunda e terceira componentes de $J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ são nulas.

Assim, para que a condição de minimalidade aconteça em p , é necessário que a primeira componente de $J_1 + J_2 + J_3 + J_4$ também seja zero, isto é, temos

$$\frac{u(t - b) \operatorname{sen}^2 \theta}{\sqrt{1 + u^2 \operatorname{sen}^2 \theta}} + \sqrt{1 + b^2 \operatorname{sen}^2 \theta} - \sqrt{1 + t^2 \operatorname{sen}^2 \theta} = 0,$$

e a solução desta equação com respeito a b ou t está de acordo com o lema. Assim, para esta solução, $\nabla_p \text{área}(\mathcal{T})$ é nulo. \square

• Demonstração da Proposição 3.3

Se \vec{v} e \vec{w} são campos variacionais para algum par de variações admissíveis, podemos definir uma forma bilinear $Q^a(\vec{v}, \vec{w}) :=$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{T=(p,q,r) \in \mathcal{T}} -\langle v_p \times w_r - v_r \times w_p + v_q \times w_p - v_p \times w_q + v_r \times w_q - v_q \times w_r, \vec{N} \rangle \\ & + \frac{1}{2|T|} \langle v_p \times (r - q) + v_q \times (p - r) + v_r \times (q - p), w_p \times (r - q) + w_q \times (p - r) \\ & + w_r \times (q - p) \rangle - \frac{1}{2|T|} \langle v_p \times (r - q) + v_q \times (p - r) + v_r \times (q - p), \vec{N} \rangle. \\ & \langle w_p \times (r - q) + w_q \times (p - r) + w_r \times (q - p), \vec{N} \rangle. \end{aligned}$$

Usando $\vec{N}' = \frac{(q-p) \times (r'-p') + (q'-p') \times (r-p)}{2|T|} - \frac{\vec{N}}{2|T|} \langle ((q-p) \times (r'-p') + (q'-p') \times (r-p)), \vec{N}' \rangle$, temos que $Q^a(\vec{v}, \vec{v}) = \sum_{p \in \mathcal{V}} \langle v_p, (\nabla_p \text{área } T)' \rangle$. Q^a é bilinear, e os dois últimos termos de Q^a são simétricos em \vec{v} e \vec{w} . O primeiro termo também é simétrico em \vec{v} e \vec{w} , se $v_p \times w_r - v_r \times w_p = w_p \times v_r - w_r \times v_p$, $v_q \times w_p - v_p \times w_q = w_q \times v_p - w_p \times v_q$, e $v_r \times w_q - v_q \times w_r = w_r \times v_q - w_q \times v_r$.

Agora, somente resta determinar uma forma explícita para Q^a . Para um dado vértice interior p , suponha \vec{v} e \vec{w} não nulos somente em p , isto é, que $\vec{v}^t = (0^t, \dots, 0^t, v_p^t, \dots, 0^t)$ e $\vec{w}^t = (0^t, \dots, 0^t, w_p^t, \dots, 0^t)$. Então

$$\begin{aligned} Q^a(\vec{v}, \vec{w}) &= Q_{pp}^a(v_p, w_p) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{T=(p,q,r) \in \text{star}(p)} \frac{1}{|T|} \langle v_p \times (r-q), w_p \times (r-q) \rangle \\ &\quad - \frac{1}{|T|} \langle v_p \times (r-q), \vec{N} \rangle \langle w_p \times (r-q), \vec{N} \rangle \\ &= \frac{1}{4} \sum_{T=(p,q,r) \in \text{star}(p)} \frac{1}{|T|} v_p^t (|r-q|^2 I - (r-q)(r-q)^t \\ &\quad - ((r-q) \times \vec{N})((r-q) \times \vec{N})^t) w_p \\ &= \frac{1}{4} \sum_{T=(p,q,r) \in \text{star}(p)} \frac{|r-q|^2}{|T|} v_p^t (\vec{N} \vec{N}^t) w_p, \end{aligned}$$

assim Q_{pp}^a é da forma da proposição.

Agora suponha $\vec{v}^t = (0^t, \dots, 0^t, v_p^t, \dots, 0^t)$ e $\vec{w}^t = (0^t, \dots, 0^t, v_q^t, \dots, 0^t)$ para vértices interiores p e q distintos. Se p e q não são conectados por alguma aresta da superfície, então claramente $Q^a(\vec{v}, \vec{w}) = 0$, assim assumamos que p e q são adjacentes. Note que $\text{star}(\overline{pq})$ contém dois triângulos (p, q, r_j) para $j = 1, 2$ e precisamente um deles é propriamente orientado. Note também que o vetor normal \vec{N} de um triângulo muda de sinal quando a orientação do triângulo é invertida, e temos a seguinte equação:

$$\begin{aligned}
Q^a(\vec{v}, \vec{w}) &= Q_{pp}^a(v_p, w_p) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{T=(p,q,r_k) \ k=1,2} \langle v_p \times w_q \rangle \\
&+ \frac{1}{2|T|} \langle v_p \times (r_k - q), w_q \times (p - r_k) \rangle \\
&- \frac{1}{2|T|} \langle v_p \times (r_k - q), \vec{N} \rangle \langle w_q \times (p - r_k), \vec{N} \rangle \\
&= \frac{1}{4} \sum_{T=(p,q,r) \in \text{star}(p)} \frac{1}{|T|} v_p^t ((p - r_k)(q - r_k))^t \\
&- ((r - q) \times \vec{N}) ((r - q) \times \vec{N})^t w_p \\
&= \frac{1}{4} \sum_{T=(p,q,r) \in \text{star}(p)} \frac{|r - q|^2}{|T|} v_p^t (\vec{N} \vec{N}^t) w_p.
\end{aligned}$$

Para um triângulo (p, q, r) , podemos checar que

$$(p - r)(q - r)^t - (q - r)(p - r)^t = \frac{2|(p, q, r)|}{|p - q|^2} ((p - q)(J(p - q))^t - J(p - q)(p - q)^t),$$

assim Q_{pp}^a é da forma como na proposição . □

Referências Bibliográficas

- [1] Barbosa & Carmo, do. *Stability of minimal surfaces*, Bull of A.M.S. **80** (1974), 581-583.
- [2] Barbosa & Carmo, do. *Stability of Hipersurfaces with Constant Mean Curvature*. Math. Z., **185**, 1984, 339-353.
- [3] Barbosa & Colares. *Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* . IMPA, 1980.
- [4] Carmo, do & Peng, C. K. *Stable complete minimal surfaces in \mathbb{R}^3 are planes*, Bull. A.M.S. **1**(1979), 903-906.
- [5] Carmo, do. *Diferential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice Hall, 1976.
- [6] Chavel, I. *Eigenvalues in Riemannian Geometry*, Academic Express, 1984.
- [7] Colbrie, Fischer & R. Shoen, *The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds*, Comm. Pure and Appl. Math. **33** (1980), 199-211.
- [8] Fischer-Colbrie, D. *On complete minimal surfaces with finite Morse index in three manifolds*. *Invent. Math.* **82**:121-132, 1985.
- [9] Fix, G. & Strang, G. *An analysis of the finite element method*. Prentice-Hall, 1973.
- [10] Lima, L. L. & Rossmann, W. *On the index of constant mean curvature 1 surfaces in hyperbolic space*. *Indiana Math. J.* 47(2):685-723, 1998.

- [11] Lawson, H. Blaine *Lectures on Minimal Submanifolds*. 1980.
- [12] Osserman, R. *A Survey of Minimal Surfaces*. Dover, 1986.
- [13] Polthier, K. *Computational Aspects of Discrete Minimal Surfaces*. September 2002.
- [14] Polthier, K. & Pinkall, U. *Computing discrete minimal surfaces and their conjugates*. *Experim. Math.*, **2**(1):15-36,1993.
- [15] Rossmann, W. & Polthier, K. *Discrete Minimal Surfaces of Constant Mean Curvature and their Index*. 1999.