Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Existência e Não Existência de Superfícies com Curvatura Média Constante em $\mathbb{H}^n$

Por
Gilson de Souza Costa

sob orientação do
Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

junho - 2007
João Pessoa, Paraíba

Existência e Não Existência de Superfícies com Curvatura Média Constante em $\mathbb{H}^n$

por

Gilson de Souza Costa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. **Pedro A. Hinojosa**
Orientador

Prof. Dr. **Everaldo Souto de Medeiros**
Examinador

Prof. Dr. **José Nelson Bastos Barbosa**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

junho - 2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAíBA

Data: **junho - 2007**

Autor: **Gilson de Souza Costa**

Tìtulo: **Existência e Não Existência de Superfícies com Curvatura Média Constante em $\mathbb{H}^n$**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **junho** Ano: **2007**

Aos meus pais Jesulino e Joana

e a minha esposa Rita de Cássia.

Agradecimentos

Considero que a elaboração de uma dissertação é um produto coletivo embora sua redação, responsabilidade e stress seja predominantemente individual. Muitos contribuíram para que este trabalho chegasse a bom termo. A todos eles registro minha gratidão:

- A Deus que em sua fonte de luz e bondade, me possibilitou a vida, a saúde e a inteligência.

- Aos meus pais, por terem sido o contínuo apoio em todos estes anos, ensinando-me, principalmente, a importância da construção e coerência de meus próprios valores.

- Ao meu orientador, Prof. Dr. Pedro Hinojosa por ter aceito me orientar e pelo constante incentivo, sempre indicando a direção a ser tomada nos momentos de maior dificuldade.

- Aos professores Everaldo Souto de Medeiros e José Nelson Bastos Barbosa por participarem da banca examinadora.

- Aos meus amigos do Mestrado, em especial a Anderson, e a todos que, de alguma maneira, contribuíram, não só para a realização desta dissertação, como para tornar menos sofrido cada dia de trabalho.

- Pela colaboração e troca de idéias contínuas, um muito obrigado "do peito"ao meu amigo Naldisson dos Santos, que sempre acreditou em minha proposta de trabalho, me encorajando a continuar nos momentos mais difíceis, sempre com muita paciência e compreensão.

- Aos professores, em especial àqueles que tiveram influência direta sobre este trabalho: Andrade, Everaldo, Fernando Xavier, Marivaldo, Nelson Nery e Rodrigo Ristow (professores do mestrado) e João P. Attie (professor da graduação).

- À professora e amiga Erinalva Calasans da Silva, pela seriedade, competência, entusiasmo e paciência durante todo este tempo, agradeço a orientação precisa, os diálogos construtivos e o incentivo.

- Ao Conselho Nacional de Pesquisa - CNPq - pela bolsa concedida durante a realização deste mestrado.

- E de maneira muito especial a minha companheira e amiga Rita de Cássia Silva Costa por todo o seu apoio, incentivo, compreensão, carinho, amor e principalmente por ter estado ao meu lado em todos os momentos.

Índice

Resumo

Neste trabalho estudamos um problema de Dirichlet para a equação de curvatura média prescrita no Espaço Hiperbólico. A solução deste problema representa uma hipersuperfície com a curvatura média mencionada, no espaço Hiperbólico que é gráfico de uma função u definida num domínio Ω tomando valores pre-determinados φ no bordo desse domínio. Em 1969, J. Serrin relacionou a solubilidade desse problema, no Espaço Euclidiano, com a curvatura média do bordo do domínio. No caso do Espaço Hiperbólico encontramos uma condição "tipo Serrin" sob a qual mostramos existência e unicidade para o problema citado acima. Mostramos também que se tal condição não for satisfeita, o problema não tem solução.

Palavras-Chave:

Espaço Hiperbólico; Curvatura média; Problema de Dirichlet; Equações Elípticas.

Abstract

In this work we study a Dirichlet problem for the equation of prescribed mean curvature in the Hyperbolic Space. The solution of this problem is a hyper-surface in the Hyperbolic space, with the mentioned mean curvature. This hyper-surface is a graphic of one function u defined on a domain Ω taking prescribed values φ in the boundary of that domain. In 1969, J.Serrin related the solubility of that problem, in the Euclidean Space , with the mean curvature of the boundary of the domain. In the case of the Hyperbolic Space we found a condition " type Serrin " under which we showed existence and uniqueness for the problem mentioned. We also showed that if such condition does not satisfied, then the problem does not have solution.

Key words:

Hyperbolic space; Mean curvature; Dirichlet Problem; Elliptic equation.

Introdução

Em 1969, J. Serrin [19] estabeleceu um critério para solucionar o problema de Dirichlet para equação da curvatura média constante em um domínio limitado no espaço euclidiano, mais precisamente, ele provou que, dados $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado de classe C^2, H' a curvatura média da fronteira de Ω, H uma constante e φ uma função contínua arbitrária sobre o bordo de Ω tais que $n\,|H| \leq (n-1)H'$ sobre o bordo de Ω, então existe um gráfico sobre Ω com curvatura média H atingindo valores de fronteira φ sobre o bordo de Ω, isto é, o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{W(u)}\right) &= nH \text{ em } \Omega, \\ u &= \varphi \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem solução. Aqui Du representa o gradiente euclidiano de u e $W(u) = (1+|Du|^2)^{1/2}$.

Vários matemáticos deram respostas a problemas desta natureza para o caso hiperbólico, dentre eles temos: Harold Rosenberg (ver [14]); Nelli e Spruck (ver [17]); Lucas Barbosa e Ricardo Sa Earp que deram atenção ao caso em que a condição de fronteira é nula; Jorge H. de Lira em [9] e Nitsche em [18] que estudaram o problema de Dirichlet para gráficos radiais; e muitos outros.

Este trabalho está baseado principalmente no artigo [13] de Elias M. Guio e Ricardo Sa Earp, onde eles resolvem o seguinte problema de Dirichlet: dadas as funções $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$ e $H \in C^2(\overline{\Omega})$, onde Ω é um domínio limitado em um hiperplano $\mathbb{P} \subset \mathbb{H}^n$. Se a condição

$$n\,|H(y)| \leq (n-1)H'(y) + x_n(y)D_n d(y), \ \forall\, y \in \partial\Omega, \qquad \text{(condição tipo “Serrin”)},$$

for satisfeita, então o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{W(u)}\right) & = & \dfrac{n}{x_n}\left(H+\dfrac{D_n u}{W(u)}\right) \text{ em } \Omega \\ u & = & \varphi \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

tem uma única solução, ou seja, existe uma função u definida em Ω cujo gráfico tem curvatura média hiperbólica H atingindo valores de fronteira φ sobre o bordo de Ω. Aqui, $x_n(y)D_n d(y)$ é a n-ésima componente do vetor normal unitário euclidiano da fronteira de Ω e H' é a curvatura média do bordo de Ω.

O principal resultado de unicidade obtido por Lucas Barbosa e Ricardo Sa Earp, (ver [3] e [4]) dá uma motivação forte pára estudar o problema de Dirichlet acima.

Esta dissertação está escrita da seguinte forma:

No Capítulo 1 damos algumas definições e resultados importantes para o desenvolvimento dos capítulos posteriores, a seguir, no Capítulo 2 estabelecemos uma estimativa a priori global para o gradiente e a altura de uma família de soluções u^t, $t \in [0,1]$, do problema de Dirichlet para a equação da curvatura média no espaço hiperbólico. O teorema principal, que é um resultado de existência e unicidade para a equação mencionada é demonstrada no Capítulo 3. Veremos que a existência será obtida a partir da teoria do grau de Leray-Schauder e a unicidade a partir do princípio do máximo para operadores quase-lineares. E por último, no Capítulo 4 provamos um resultado de não-existência quando a condição tipo "Serrin" para o espaço hiperbólico não é satisfeita, ou seja, mostramos que a condição de fronteira usada é a melhor possível.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste capítulo enunciaremos algumas definições e resultados indispensáveis para o desenvolvimento deste trabalho, não demonstraremos os resultados aqui apresentados, citamos apenas as referências bibliográficas onde os mesmos podem ser encontrados.

Estudaremos a equação da curvatura média para Gráficos Horizontais no Espaço Hiperbólico. Esta é uma equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem quase linear e para mostrarmos a existência da solução, usaremos alguns resultados da teoria do Grau de Leray-Schauder, que apresentaremos na Seção 1.4.

O Espaço Hiperbólico será denotado por $\mathbb{H}^n$ e para representá-lo usaremos o modelo do semi-espaço, ou seja,

$$\mathbb{H}^n = \{x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

munido da métrica $g_{ij}(x) = \dfrac{\delta_{ij}}{x_n^2}$, onde $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $\delta_{ij} = 1$, $i = j \in \{1, ..., n\}$.

É importante ressaltarmos que $\mathbb{H}^n$ é uma variedade Riemanniana de dimensão n, completa, simplesmente conexa e com curvatura seccional constante igual a -1.

O modelo do Espaço Hiperbólico acima é conhecido como o Modelo do Semi-Espaço de Poincaré. Existem vários outros modelos para este espaço. Mais informações podem ser encontrado em [5],[8] e [11].

Ainda neste capítulo apresentamos a equação da curvatura média para gráficos horizontais e algumas ferramentas de EDP's que usaremos para desenvolver os próximos capítulos.

1.2 A Equação da Curvatura Média

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. O gráfico de u indicado por $G(u)$ é o subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$ dado por

$$G(u) = \{(x_0, ..., x_{n-1}, u(x_0, ..., x_{n-1})) \in \mathbb{R}^{n+1}; (x_0, ..., x_{n-1}) \in \overline{\Omega}\}.$$

Sabemos que $G(u)$ é uma hipersuperfície regular em $\mathbb{R}^{n+1}$. Alem disso, esta hipersuperfície tem curvatura média h se, e somente se, u verifica a equação

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{W(u)}\right) = nh, \tag{1.1}$$

onde Du representa o gradiente Euclidiano de u, $W(u) = (1 + |Du|^2)^{1/2}$, $|Du|^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (D_i u)^2$ e $D_i u = \dfrac{\partial u}{\partial x_i}$. (veja [2]).

No Espaço Hiperbólico há várias maneiras de definir o gráfico de uma função. Estaremos particularmente interessados no chamado Gráfico Horizontal o qual é descrito como se segue.

Considere um hiperplano $\mathbb{P}$ totalmente geodésico no espaço hiperbólico $\mathbb{H}^{n+1}$. Sem perda de generalidade, podemos supor $\mathbb{P} := \{x_0 = 0\}$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado com fronteira suave e $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. O gráfico horizontal de u em $\mathbb{H}^{n+1}$ é dado por

$$G_h(u) := \left\{(u(x_1, ..., x_n), x_1, ..., x_n) \in \mathbb{H}^{n+1}; (x_1, ..., x_n) \in \overline{\Omega}\right\}. \tag{1.2}$$

Sabe-se que $G_h(u)$ tem curvatura média H em $\mathbb{H}^{n+1}$ se, e somente se, u satisfaz a equação (veja [2]),

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{W(u)}\right) = \frac{n}{x_n}\left(H + \frac{D_n u}{W(u)}\right) \tag{1.3}$$

onde Du e $W(u)$ são dados como antes.

Desenvolvendo div $\left(\dfrac{Du}{W(u)}\right)$, a equação (1.3) pode ser escrita na seguinte forma:

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u + b(x,u,Du) = 0, \tag{1.4}$$

onde

$$\begin{aligned} a^{ij}(x,u,Du) &= (1+|Du|^2)\delta_{ij} - D_i u D_j u \\ b(x,u,Du) &= \frac{nD_n u(1+|Du|^2)}{x_n} - \frac{nH(1+|Du|^2)^{3/2}}{x_n}. \end{aligned}$$

1.3 Alguns Resultados de EDP's

Nesta seção veremos algumas definições e resultados básicos de equações diferenciais parciais elípticas lineares e quase-lineares de segunda ordem, as quais serão usadas para desenvolver os capítulos seguintes. Para um estudo mais detalhado indicamos [2] e [15].

Consideraremos EDP's lineares de segunda ordem na forma:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}D_{ij}u + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu = 0, \tag{1.5}$$

onde a^{ij}, b_i e c são funções reais contínuas definidas em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, a matriz (a^{ij}) é simétrica e $u \in C^2(\Omega)$.

A matriz (a^{ij}) podemos associar a seguinte forma quadrática:

$$Q_L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \longmapsto Q_L(\xi) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}\xi_i\xi_j.$$

Diremos que L é elíptico em Ω quando a forma quadrática Q_L é definida positiva para todos os pontos de Ω, ou seja, quando os autovalores da matriz $(a^{ij}(x))$ são todos positivos. O operador L é dito uniformemente elíptico em Ω quando existe uma constante $\theta > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \theta\,|\xi|^2\,;\ \forall\ \xi \in \mathbb{R}^n; \forall\ x \in \Omega.$$

Consideremos agora operadores Q quase-lineares de segunda ordem na forma:

$$Q(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u + b(x,u,Du),$$

onde $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$, $u \in C^2(\Omega)$ e as funções $a^{ij}(x,z,p), i,j = 1,...,n$ e $b(x,z,p)$ estão definidas em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Fixado $Y \subset \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, diremos que Q é elíptico em Y se os autovalores da matriz (a^{ij}) são não nulos e têm todos o mesmo sinal.

Como os autovalores da matriz $(a^{ij}(x))$ da equação (1.4) são 1 e $(1+|Du|^2)$ com multiplicidade $n-1$, temos que (1.4) é uma equação diferencial parcial elíptica quase-linear de segunda ordem.

Os resultados seguintes serão usados na demonstração do teorema principal exposto no Capítulo 3. As demonstrações dos referidos resultados podem ser encontradas, por exemplo, em [2] e [15].

Teorema 1.1. *(ver [15]). Seja L, como em (1.5), um operador linear, uniformemente elíptico, com $c \leq 0$, definido em um domínio limitado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de classe $C^{2,\alpha}$. Suponha que f e os coeficientes de L pertencem a $C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ e que $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então, o problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu &= f \quad em \quad \Omega \\ u &= \varphi \quad sobre \quad \partial\Omega \end{cases}$$

possui uma única solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Teorema 1.2. *(ver [15]) Sejam L um operador elíptico em um domínio limitado Ω, com $c \leq 0$ e $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$.*
a) Se $Lu \geq 0$ em Ω, então $\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+$, onde $u^+ = max\{u,0\}$.
b) Se $Lu \leq 0$ em Ω, então $\inf_{\Omega} u \geq \inf_{\partial\Omega} u^-$, onde $u^- = min\{u,0\}$.
c) Se $Lu = 0$ em Ω, então $\sup_{\Omega} |u| = \sup_{\partial\Omega} |u|$.

O teorema abaixo é uma formulação do princípio do máximo para equações elípticas, e será o argumento principal para mostrar o resultado de não-existência dado no Capítulo 4.

Teorema 1.3. *(ver [15]) Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado,* $\Gamma \subset \partial\Omega$ *um aberto de classe* C^1, $u \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega \cup \Gamma)$ *e* $v \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$. *Seja* Q *um operador elíptico quase-linear tal que*

$$\begin{cases} Q(u) & \geq & Q(v) \text{ em } \Omega, \\ u & \leq & v \text{ sobre } \partial\Omega - \Gamma, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} & = & -\infty \text{ sobre } \Gamma. \end{cases}$$

Então, $u \leq v$ *em* Ω.

1.4 Grau de Leray-Schauder

Para demonstrar o Teorema 3.1, usaremos a Teoria do Grau de Leray - Schauder. Agora, devido à complexidade do assunto daremos, nesta seção, apenas uma noção e as principais propriedades desta teoria. Inicialmente recordaremos a definição do grau de Brouwer. Para um estudo mais detalhado, indicamos [1], [7] e [16].

Sejam $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado, $\varphi : \overline{X} \to \mathbb{R}^n$ uma função contínua e $x_0 \notin \varphi(\partial X)$ um valor regular de φ.

Nosso objetivo consiste em obtermos informações, tais como: existência, multiplicidade e natureza do conjunto de soluções em X da equação:

$$\varphi(x) = x_0. \tag{1.6}$$

Uma ferramenta utilizada para obtermos as informações acima, é o Grau de Brouwer, que é definido como a função:

$$d(\cdot, X, x_0) : \left\{\varphi \in C^1(\overline{X}, \mathbb{R}^n); x_0 \notin \varphi(\partial X)\right\} \to \mathbb{Z},$$

dada por

$$d(\varphi, X, x_0) = \sum_{x \in \varphi^{-1}(x_0)} sgn\,(det\varphi'(x)), \tag{1.7}$$

onde a função sinal, sgn, é definida por

$$sgn(t) = \begin{cases} 1, & \text{se} \quad t > 0 \\ 0, & \text{se} \quad t = 0 \\ -1, & \text{se} \quad t < 0. \end{cases}$$

Note que a soma dada na equação (1.7) é finita. De fato, é fácil mostrar que se $x_0 \notin \varphi(\partial X)$ é um valor regular de φ, então o conjunto $\varphi^{-1}(x_0)$ é finito, de modo que a definição do grau de Brouwer dada em (1.7) é consistente.

Para o estudo da equação (1.6) em espaços de dimensão infinita utiliza-se uma teoria mais geral, proveniente do Grau de Brouwer, conhecida como Grau de Leray-Schauder. Uma propriedade importante do grau que permite relacionar espaços de dimensão finita e infinita é dada no teorema abaixo e cuja demonstração pode ser encontrada em [16].

Teorema 1.4. *Sejam B um espaço de Banach real, $F \subset B$ um subspaço fechado, $\dim F < \infty$, $\Omega \subset B$ aberto e limitado, $T : \overline{\Omega} \to F$ compacta, $\varphi = I - T$, $x_0 \in F$ e $x_0 \notin \varphi(\partial\Omega)$. Então $d(\varphi, \Omega, x_0) = d(\varphi_{|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, x_0)$.*

Sejam B um espaço de Banach real, $\Omega \subset B$ um conjunto aberto, limitado e $T : \overline{\Omega} \to B$ uma aplicação compacta. Então, existe $K \subset B$ compacto, tal que $T(\overline{\Omega}) \subset K$.

Seja $\phi : \overline{\Omega} \to B$, $\phi = I - T$, uma perturbação da identidade. Sejam $x_0 \in B$ com $x_0 \notin \phi(\partial\Omega)$ e F um subespaço de B de dimensão finita tal que $T(\overline{\Omega}) \subset F$ e $x_0 \in F$.

Define-se o grau de Leray-Schauder de ϕ com relação a Ω, no ponto x_0, como sendo o número inteiro

$$D(\phi, \Omega, x_0) = d(\phi_{|_{\overline{\Omega}\cap F}}, \Omega \cap F, x_0). \tag{1.8}$$

Observe que, pelo Teorema 1.4, a definição acima é consistente. Além disso, em dimensão finita, o Grau de Leray-Schauder e o Grau de Brouwer coincidem.

Os dois teoremas abaixo dão propriedades importantes do grau e serão usados, no Capítulo 3, na demonstração do teorema principal. Suas demonstrações podem ser vistas em [1], [7] e [16].

Teorema 1.5. *A aplicação* $D(\cdot, \Omega, x_0)$ *definida por (1.8), satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *(Existência) Se* $D(\phi, \Omega, x_0) \neq 0$*, então existe* $y \in \Omega$ *tal que* $\phi(y) = x_0$*;*

2. *(Normalização) Se* $x_0 \in \Omega$*, então* $D(I, \Omega, x_0) = 1$*.*

Teorema 1.6. *(Invariânça por Homotopia) Sejam* $J \subset \mathbb{R}$ *um intervalo fechado e não vazio,* $\Omega \subset B$ *um conjunto aberto e limitado de um espaço de Banach* B *e* $h : \overline{\Omega} \times J \to B$ *uma aplicação compacta. Suponha que* $y : J \to B$ *seja uma curva contínua, tal que, para todo* $\lambda \in J$ *e todo* $x \in \partial\Omega$*, tem-se* $y(\lambda) \neq x - h(x, \lambda)$*.*

Então $D(I - h(\cdot, \lambda), \Omega, y(\lambda))$ *está bem definido e independe de* $\lambda \in J$*.*

Capítulo 2

Estimativas da Altura e do Gradiente

2.1 Introdução

Nosso objetivo neste capítulo é obter estimativas a priori e globais da altura e do gradiente de uma família de soluções, u^t com $t \in [0,1]$, do problema de Dirichlet para equação da curvatura média no espaço hiperbólico. Este capítulo foi dividido em duas seções, na Seção 2.2 vamos construir duas funções $w_t^{\pm}$ (conhecidas como barreiras) e em seguida usá-las para estabelecer a estimativa a priori do gradiente no bordo, já na Seção 2.3 vamos obter a estimativa da altura.

Usaremos as seguintes notações: para todo $t \in [0,1]$,

$$Q_t(u^t) := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, Du^t; t) D_{ij} u^t + b(x, Du^t; t) = 0,$$

onde

$$\begin{aligned} a^{ij}(x, Du^t; t) &= (1 + \left|Du^t\right|^2)\delta_{ij} - D_i u^t D_j u^t \quad \text{e} \\ b(x, Du^t; t) &= -\frac{n D_n u^t (1 + |Du^t|^2)}{x_n} - \frac{t n H (1 + |Du^t|^2)^{3/2}}{x_n}, \end{aligned}$$

H' denotará a curvatura média da fronteira de Ω, $d = d(x, \partial\Omega)$ é a distância hiperbólica de $x \in \Omega$ a fronteira de Ω, $x_n(y)D_n d(y)$ é a n-ésima componente do vetor normal unitário euclidiano da fronteira de Ω, com $y \in \partial\Omega$, Du representa o gradiente euclidiano de u,

$$|\varphi|_2 = max\left\{\sup_\Omega |\varphi|, \sup_\Omega |D\varphi|, \sup_\Omega |D\varphi|^2\right\} \quad \text{e} \quad |H|_1 = max\left\{\sup_\Omega |H|, \sup_\Omega |DH|\right\}.$$

2.2 Estimativas do Gradiente na Fronteira

O próximo resultado produz a estimativa a priori do gradiente na fronteira de Ω para a família de soluções u^t citada acima.

Teorema 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C^3, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $H \in C^1(\overline{\Omega})$. Assuma a condição*

$$n\,|H(y)| \leq (n-1)H'(y) + x_n(y)D_n d(y), \forall\ y \in \partial\Omega. \tag{2.1}$$

Seja $u^t \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, $t \in [0,1]$, uma solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q_t(u^t) &= 0 \quad em \quad \Omega \\ u^t &= t\varphi \quad sobre \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Então, existe $c_1 = c_1(n, \Omega, \inf_\Omega x_n, \sup_\Omega x_n, \sup_\Omega |u|, |\varphi|_2, |H|_1)$ tal que

$$\sup_{\partial\Omega} \left|Du^t\right| \leq c_1.$$

Demonstração: Para obter a estimativa a priori usaremos a técnica de barreira, a qual vai ser construida em termos da função distância $d(x) = d(x, \partial\Omega)$. Seja $\Gamma = \left\{x \in \overline{\Omega}, d(x) < d_o\right\}$ para algum $d_o > 0$. Pelo Lema 14.16 de [15], $d \in C^2(\Gamma)$.

Vamos construir duas barreiras $w_t^\pm \in C^2(\Gamma \cap \Omega) \cap C^1(\Gamma \cap \overline{\Omega})$ tais que

$$\begin{cases} \pm Q(w^\pm) &\leq \ 0 \quad em \quad \mathcal{N} \cap \Omega \\ \pm w^\pm &\geq \ \pm u^t \quad sobre \quad \partial(\mathcal{N} \cap \Omega), \end{cases} \tag{2.3}$$

onde $u^t \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ é solução do problema(2.2) e $\mathcal{N}$ é uma vizinhança da fronteira de Ω contida em Γ. Queremos encontrar duas funções $w_t^\pm$ na forma

$$w_t^\pm = \pm\psi(d) + t\varphi$$

onde $\psi \in C^2([0,\infty))$ satisfaz:

i) $\psi(0) = 0$, $\psi' > 0$ e $\psi'' < 0$;

ii) $\psi(a) \geq M = \sup_\Omega |\varphi| + \sup_\Omega \left|u^t\right|$, a uma constante a ser determinada;

iii) $\psi'(d)d \leq 1$;

iv) $\psi' |Dd| \geq \mu$, onde $\mu \geq 3|D(t\varphi)| + 8$ (constante fixada).

Vamos trabalhar com $w_t^+ = \psi(d) + t\varphi$ e chamaremos de barreira superior. Por questão de notação adotaremos as seguintes convenções:

$$w = w_t^+, \quad Q = Q_t, \quad u = u^t, \quad a^{ij}(x, Dw) = a^{ij}(x, Dw; t) \quad \text{e}$$

$$\xi = \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, Dw; t)(D_i w - D_i(t\varphi))(D_j w - D_j(t\varphi)).$$

Como os auto-valores da matriz $a^{ij}(x, Dw)$ são 1 e $(1 + |Dw|^2)$ com multiplicidade $n-1$, temos

$$|Dw - D(t\varphi)|^2 \leq \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, Dw)(D_i w - D_i(t\varphi))(D_j w - D_j(t\varphi)) = \xi.$$

Calculemos $Q_t(w_t^+)$ em Γ. Com a notação acima,

$$\begin{aligned} Q(w) &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, Dw) D_{ij} w + b(x, Dw; t) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, Dw) \left(\psi'' D_i d D_j d + \psi' D_{ij} d + D_{ij}(t\varphi)\right) + b(x, Dw, t). \end{aligned}$$

Usando $\psi'' \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, Dw) D_i d D_j d = \dfrac{\psi''}{\psi'^2}\xi$, temos

$$Q(w) = \psi' \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, Dw) D_{ij} d + \sum_{i,j=1}^n a^{ij}(x, Dw) D_{ij}(t\varphi) + b(x, Dw, t) + \frac{\psi''}{\psi'^2}\xi.$$

Queremos majorar $Q(w)$ por uma expressão que é múltiplo de ξ por uma constante. Para isso vamos analisar separadamente cada parcela de $Q(w)$.

Estimativa de $A := \psi' \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,Dw)D_{ij}d$.

$$\begin{aligned}
A &= \psi' \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x,Dw)D_{ij}d \\
&= \psi' \sum_{i,j=1}^{n} ((1+|Dw|^2)\delta_{ij} - D_iwD_jw)D_{ij}d \\
&= \psi'(1+|Dw|^2)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d - \psi' \sum_{i,j=1}^{n} \left(\psi' D_id + D_i(t\varphi)\right)\left(\psi' D_jd + D_j(t\varphi)\right)D_{ij}d \\
&= \psi'(1+|Dw|^2)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d - \psi'^3 \sum_{i,j=1}^{n} D_idD_jdD_{ij}d + \\
&\quad -2\psi'^2 \sum_{i,j=1}^{n} D_idD_j(t\varphi)D_{ij}d - \psi' \sum_{i,j=1}^{n} D_i(t\varphi)D_j(t\varphi)D_{ij}d.
\end{aligned}$$

vamos majorar a segunda parcela de A, $-\psi'^3 \sum_{i,j=1}^{n} D_idD_jdD_{ij}d$.

Temos que $|Dd|^2 = \frac{1}{x_n^2}$, ou seja, $(D_1d)^2 + ... + (D_nd)^2 = \frac{1}{x_n^2}$. Derivando esta expressão em relação a i-ésima coordenada e multiplicando por D_id, $i = 1, ..., n$, ao somar todas as parcelas, teremos

$$\sum_{i,j=1}^{n} D_idD_jdD_{ij}d = \frac{-D_nd}{x_n^3}. \tag{2.4}$$

Desenvolvendo $|Dw|^2$, obtemos

$$\frac{\psi'(1+|Dw|^2)D_nd}{x_n} - \frac{\psi' D_nd}{x_n}\left(2\psi' DdD(t\varphi) + |D(t\varphi)|^2 + 1\right) = \frac{\psi'^3 D_nd}{x_n^3}. \tag{2.5}$$

Por outro lado, temos: $|D_nd| \leq \frac{1}{x_n}$, $|Dw - D(t\varphi)| \geq 1 + |D(t\varphi)|$, $|\psi' Dd| = |Dw - D(t\varphi)|$ e $|Dw - D(t\varphi)| = \frac{\psi'}{x_n}$ segue que,

$$\left|\frac{\psi' D_nd}{x_n}\left(2\psi' DdD(t\varphi) + |D(t\varphi)|^2 + 1\right)\right| \leq \frac{\psi'}{x_n}|D_nd|\left(2|\psi' Dd||D\varphi| + |D\varphi|^2 + 1\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; |Dw - D(t\varphi)| \frac{1}{x_n} \left(2\,|Dw - D(t\varphi)|\,|D\varphi| + \right. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \,|D\varphi|^2 + 1\right) \\
&= \; \frac{|Dw - D(t\varphi)|^2}{x_n} \left(2\,|D\varphi| + \frac{|D\varphi|^2 + 1}{|Dw - D(t\varphi)|}\right) \\
&\leq \; \frac{|Dw - D(t\varphi)|^2}{x_n} \left(2\,|D\varphi| + \frac{|D\varphi|^2 + 1}{|D\varphi| + 1}\right) \\
&\leq \; \frac{|Dw - D(t\varphi)|^2}{x_n} \left(2\,|D\varphi| + \frac{(|D\varphi| + 1)^2}{|D\varphi| + 1}\right) \\
&= \; \frac{|Dw - D(t\varphi)|^2}{x_n} (3\,|D\varphi| + 1).
\end{aligned}
$$

Assim, a partir de (2.4) e (2.5), para a segunda parcela de A temos:

$$
-\psi'^3 \sum_{i,j=1}^{n} D_i d D_j d D_{ij} d \leq \frac{\psi'(1 + |Dw|^2) D_n d}{x_n} + \frac{|Dw - D(t\varphi)|^2}{x_n} (3\,|D\varphi| + 1). \tag{2.6}
$$

Agora analisaremos a terceira parcela de A, $\psi'^2 \sum_{i,j=1}^{n} D_i d D_j (t\varphi) D_{ij} d$.

$$
\begin{aligned}
\left| \psi'^2 \sum_{i,j=1}^{n} D_i d D_j (t\varphi) D_{ij} d \right| &= \psi' \left| \sum_{i,j=1}^{n} \psi' D_i d D_j (t\varphi) D_{ij} d \right| \\
&\leq \psi' \sum_{i,j=1}^{n} |\psi' D_i d|\,|D_j \varphi|\,|D_{ij} d| \\
&= \psi' \sum_{i,j=1}^{n} |(D_i w - D_i(t\varphi))|\,|D_j \varphi|\,|D_{ij} d| \\
&\leq n^2 \psi'\,|Dw - D(t\varphi)|\,|D\varphi|\,L \\
&= n^2 x_n\,|Dw - D(t\varphi)|^2\,|D\varphi|\,L,
\end{aligned}
$$

onde $L = \sup_{\Gamma} \{|D_{ij} d|\,;\; i, j = 1, ..., n\}$.

Assim,

$$\left|\psi'^2 \sum_{i,j=1}^{n} D_i d D_j(t\varphi) D_{ij} d\right| \leq n^2 x_n \left|Dw - D(t\varphi)\right|^2 \left|D\varphi\right| L. \tag{2.7}$$

Consideremos agora a quarta parcela de A, $\psi' \sum_{i,j=1}^{n} D_i(t\varphi) D_j(t\varphi) D_{ij} d$.

Como $|Dw - D(t\varphi)| \geq 1$ e $|Dw - D(t\varphi)|\, x_n = \psi'$ temos,

$$\begin{aligned}
\left|\psi' \sum_{i,j=1}^{n} D_i(t\varphi) D_j(t\varphi) D_{ij} d\right| &\leq \psi' \sum_{i,j=1}^{n} |D_i\varphi|\, |D_j\varphi|\, |D_{ij} d| \\
&\leq n^2 \psi' \left|D\varphi\right|^2 L \\
&= n^2 x_n \left|Dw - D(t\varphi)\right| \left|D\varphi\right|^2 L \\
&\leq n^2 x_n \left|Dw - D(t\varphi)\right|^2 \left|D\varphi\right|^2 L.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\left|\psi' \sum_{i,j=1}^{n} D_i(t\varphi) D_j(t\varphi) D_{ij} d\right| \leq n^2 x_n \left|Dw - D(t\varphi)\right|^2 \left|D\varphi\right|^2 L. \tag{2.8}$$

Agora, de (2.6), (2.7) e (2.8), segue que

$$\begin{aligned}
A &\leq \psi'(1 + |Dw|^2) \sum_{i=1}^{n} D_{ii} d + \left\{ \frac{\psi'(1 + |Dw|^2) D_n d}{x_n} + \frac{|Dw - D(t\varphi)|^2}{x_n} (3\,|D\varphi| + 1) \right\} \\
&\quad + \left\{ 2n^2 x_n \left|Dw - D(t\varphi)\right|^2 \left|D\varphi\right| L \right\} + \left\{ n^2 x_n \left|Dw - D(t\varphi)\right|^2 \left|D\varphi\right|^2 L \right\} \\
&= \psi'(1 + |Dw|^2) \left(\sum_{i=1}^{n} D_{ii} d + \frac{D_n d}{x_n} \right) + \\
&\quad + \left|Dw - D(t\varphi)\right|^2 \left[\left(2n^2 x_n \left|D\varphi\right| + n^2 x_n \left|D\varphi\right|^2 \right) L + \frac{1 + 3\,|D\varphi|}{x_n} \right].
\end{aligned}$$

Estimativa de $B := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, Dw) D_{ij}(t\varphi)$

$$
\begin{aligned}
B &= \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, Dw) D_{ij}(t\varphi) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left((1+|Dw|^2)\delta_{ij} - D_i w D_j w\right) D_{ij}(t\varphi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left((1+|Dw|^2) - (D_i w)^2\right) D_{ii}(t\varphi) - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} D_i w D_j w D_{ij}(t\varphi) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n}(1+|Dw|^2)\,|D_{ii}\varphi| + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n} |Dw|^2\,|D_{ij}\varphi| \\
&\leq (1+|Dw|^2)\sum_{i=1}^{n}|D_{ii}\varphi| + (1+|Dw|^2)\sum_{\substack{i,j=1 \\ i\neq j}}^{n}|D_{ij}\varphi| \\
&= (1+|Dw|^2)\sum_{i,j=1}^{n}|D_{ij}\varphi|\,.
\end{aligned}
$$

Logo, $B \leq (1+|Dw|^2)R$, onde $R = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} |D_{ij}\varphi|$.

Estimativa de $C := b(x, Dw; t) = -\dfrac{nD_n w(1+|Dw|^2)}{x_n} - \dfrac{ntH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}$. Vamos decompor o termo $(1+|Dw|^2)^{3/2}$.

$$
(1+|Dw|^2)^{3/2} = (1+|Dw|^2)\left(\psi'\,|Dd| + |D(t\varphi)| + O(1)\right),
$$

onde $O(1)$ representa um termo que é limitado por uma constante quando $|Dw| \to \infty$. Assim,

$$
\begin{aligned}
C &= -\frac{nD_n w(1+|Dw|^2)}{x_n} - \frac{ntH}{x_n}(1+|Dw|^2)\left(\psi'\,|Dd| + |D(t\varphi)| + O(1)\right) \\
&= -\frac{n(\psi' D_n d + D_n(t\varphi))(1+|Dw|^2)}{x_n} - \frac{ntH\psi'}{x_n}\,|Dd|\,(1+|Dw|^2) + \\
&\quad -\frac{nt(1+|Dw|^2)}{x_n}\left(H\,|D(t\varphi)| + HO(1)\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq -\frac{n\psi' D_n d(1+|Dw|^2)}{x_n} + \frac{n\,|D_n\varphi|\,(1+|Dw|^2)}{x_n} - \frac{ntH\psi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2) + \\
&\quad + \frac{n(1+|Dw|^2)}{x_n}\left(|H|\,|D\varphi| + |H|\,O(1)\right) \\
&\leq \frac{\psi'(1+|Dw|^2)}{x_n^2}(-nx_nD_nd - tnH) + \\
&\quad + \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n}\left(n\,|D\varphi| + n\,|H|\,|D\varphi| + n\,|H|\,O(1)\right).
\end{aligned}
$$

Combinando as estimativas A, B e C, obtemos:

$$
\begin{aligned}
Q(W) &\leq \psi'(1+|Dw|^2)\left(\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d + \frac{D_nd}{x_n}\right) + \\
&\quad + |Dw - D(t\varphi)|^2\left[\left(2n^2x_n\,|D\varphi| + n^2x_n\,|D\varphi|^2\right)L + \frac{1+3\,|D\varphi|}{x_n}\right] + \\
&\quad + (1+|Dw|^2)R + \frac{\psi'(1+|Dw|^2)}{x_n^2}(-nx_nD_nd - tnH) + \\
&\quad + \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n}\left(n\,|D\varphi| + n\,|H|\,|D\varphi| + n\,|H|\,O(1)\right) + \frac{\psi''}{\psi'^2}\xi \\
&= \frac{1}{x_n^2}\psi'(1+|Dw|^2)\left(x_n^2\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d - (n-1)x_nD_nd - tnH\right) + \\
&\quad + |Dw - D(t\varphi)|^2\left(\frac{1+3\,|D\varphi|}{x_n} + \left(2n^2x_n\,|D\varphi| + n^2x_n\,|D\varphi|^2\right)L\right) + \\
&\quad + (1+|Dw|^2)\left(\frac{nHO(1)}{x_n} + R + \frac{n\,|H|\,|D\varphi|}{x_n} + \frac{n\sup_\Omega |D\varphi|}{x_n}\right) + \frac{\psi''}{\psi'^2}\xi.
\end{aligned}
$$

Agora, de $(1+|Dw|^2) \leq \mu\xi$ e $|Dw - D(t\varphi)|^2 \leq \xi$, obtemos

$$
\begin{aligned}
Q(W) &\leq \left[\frac{1}{x_n^2}\psi'\mu\left(x_n^2\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d - (n-1)x_nD_nd - tnH\right) + \right. \\
&\quad + \frac{1+3\,|D\varphi|}{x_n} + \left(2n^2x_n\,|D\varphi| + n^2x_n\,|D\varphi|^2\right)L + \\
&\quad \left. + \left(\frac{nHO(1)}{x_n} + R + \frac{n\,|H|\,|D\varphi|}{x_n} + \frac{n}{x_n}\sup_\Omega |D\varphi|\right)\mu + \frac{\psi''}{\psi' 2}\right]\xi.
\end{aligned}
$$

Considere a parcela

$$x_n^2(x)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(x) - (n-1)x_n(x)D_nd(x) - tnH(x).$$

Temos a seguinte igualdade, (ver capítulo 1 de [12]),

$$\begin{aligned} x_n^2(x)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(x) - (n-2)x_n(x)D_nd(x) &= \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\text{tgh}\theta - k_i}{1-k_i\ \text{tgh}\theta} \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{1-k_i\ \text{tgh}\theta} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\text{tgh}\theta}{1-k_i\ \text{tgh}\theta} \end{aligned}$$

onde $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$ são as curvaturas principais hiperbólicas da fronteira de Ω em y, $y = y(x)$ é o ponto da fronteira de Ω mais próximo de x e $\theta = d(x)$.

Seja H' a curvatura média da fronteira de Ω em y. Temos

$$-(n-1)H'(y) \geq -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{1-k_i\ \text{tgh}\theta}$$

pois, usando o fato que a função $\dfrac{-k_i}{1-k_i\ \text{tgh}\theta}$ é não-crescente na variável θ , $0 \leq \theta \leq d_o$ e $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{n-1} = H'(y)$, ou seja, $(n-1)H'(y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} k_i$, segue que

$$-(n-1)H'(y) = -\sum_{i=1}^{n-1} k_i = -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{1-k_i\ \text{tgh}\theta|_{\theta=0}} \geq -\sum_{i=1}^{n-1}\frac{k_i}{1-k_i\ \text{tgh}\theta}.$$

Portanto,

$$x_n^2(x)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(x) - (n-2)x_n(x)D_nd(x) \leq -(n-1)H'(y) + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{\text{tgh}\theta}{1-k_i\ \text{tgh}\theta}.$$

Como $(1-k_i\ \text{tgh}\theta)^{-1}$ está limitado para $0 \leq \theta \leq d_o$, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^{n-1}\frac{\text{tgh}\theta}{1-k_i\ \text{tgh}\theta} = \theta O(1)$$

para todo $0 \leq \theta \leq d_o$. Assim

$$x_n^2(x)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(x) - (n-2)x_n(x)D_nd(x) \leq -(n-1)H'(y) + \theta O(1).$$

De (2.1) temos

$$tn\,|H(y)| \leq (n-1)H'(y) + x_n(y)D_n d(y)\ \forall\ y\ \in\ \partial\Omega$$

ou seja, $-(n-1)H'(y) \leq tnH(y) + x_n(y)D_n d(y)\ \forall\ y\ \in\ \partial\Omega$ e portanto,

$$\begin{aligned} x_n^2(x)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(x) - (n-2)x_n(x)D_n d(x) &= x_n^2(x)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(x) - (n-1)x_n(x)D_n d(x) \\ &\quad + x_n(x)D_n d(x) \\ &\leq -(n-1)H'(y) + \theta O(1) \\ &\leq tnH(y) + x_n(y)D_n d(y) + \theta O(1). \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} x_n^2(x)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(x) - (n-1)x_n(x)D_n d(x) - tnH(x) &\leq tn\left(H(y) - H(x)\right) + \theta O(1) + \\ &\quad + x_n(y)D_n d(y) - x_n(x)D_n d(x) \\ &\leq n\,|H(y) - H(x)| + \theta O(1) + \\ &\quad + |x_n(y)D_n d(y) - x_n(x)D_n d(x)| \\ &\leq K_1\,|x-y| + \theta O(1) + K_2\,|x-y| \\ &\leq K_1\theta + \theta O(1) + K_2\theta \\ &= K\theta + \theta O(1) \\ &= \left(K + O(1)\right)\theta, \end{aligned}$$

dessa forma,

$$\begin{aligned} Q(w) \;\leq\; & \left[\frac{(K+O(1))\psi'\theta\mu}{x_n^2} + \frac{1+3\,|D\varphi|}{x_n} + \left(2n^2x_n\,|D\varphi| + n^2x_n\,|D\varphi|^2\right)L + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n\,|H|}{x_n} + R + \frac{n\,|H|\,|D\varphi|}{x_n} + \frac{n\sup\limits_{\Omega}|D\varphi|}{x_n}\right)\mu + \frac{\psi''}{\psi'^2}\right]\xi. \end{aligned}$$

Sendo $\theta = d(x)$, por $iii)$ temos

$$\begin{aligned} Q(w) \;\leq\; & \left[\frac{(K+O(1))\mu}{x_n^2} + \frac{1+3\,|D\varphi|}{x_n} + \left(2n^2x_n\,|D\varphi| + n^2x_n\,|D\varphi|^2\right)L + \right. \\ & \left. + \left(\frac{n\,|H|}{x_n} + R + \frac{n\,|H|\,|D\varphi|}{x_n} + \frac{n\sup\limits_{\Omega}|D\varphi|}{x_n}\right)\mu + \frac{\psi''}{\psi'^2}\right]\xi. \end{aligned}$$

Tomando

$$\begin{aligned}
\nu_0 &= \left(\frac{K+O(1)}{\inf\limits_{\Omega} x_n^2} + \frac{n\,|H| + n \sup\limits_{\Omega} |H|\,|D\varphi| + n \sup\limits_{\Omega} |D\varphi|}{\inf\limits_{\Omega} x_n} + R \right) \mu + \\
&\quad + \sup\limits_{\Omega} \frac{1+3\,|D\varphi|}{x_n} + \left(2n^2 \sup\limits_{\Omega} x_n\,|D\varphi| + n^2 \sup\limits_{\Omega} x_n\,|D\varphi|^2 \right) L,
\end{aligned}$$

segue que

$$Q(w) \le \left(\nu_0 + \frac{\psi''}{\psi'^2} \right) \xi.$$

Considerando $\nu = max\,\{\nu_o, 1\}$, temos

$$Q(w) \le \left(\nu + \frac{\psi''}{\psi'^2} \right) \xi.$$

Para que w satisfaça (2.3), tome

$$\psi(d) = \frac{1}{\nu} ln(1+kd),\ 0 \le d \le a,$$

sendo k suficientemente grande de modo a garantir que $a \le d_o$.

Observe que ψ satisfaz as condições $i),\ ii),\ iii)$ e $iv)$ citadas anteriormente. De fato,

$i)$ $\psi(0) = \frac{1}{\nu} ln(1) = 0,\ \psi'(d) = \frac{k}{\nu(1+kd)} > 0$ e $\psi''(d) = -\frac{k^2}{\nu(1+kd)^2} < 0.$

$ii)$ Tome $a = \frac{e^{\nu M} - 1}{k}$, daí

$$\psi(a) = \frac{1}{\nu} ln(1+ka) = \frac{1}{\nu} ln \left(1 + k \frac{e^{\nu M} - 1}{k} \right) = \frac{1}{\nu} ln e^{\nu M} = M \frac{1}{\nu} ln e^{\nu} = M.$$

$iii)$ Sendo a função $\psi'(d)d$ crescente , segue que

$$\psi'(d)d \le \psi'(a)a = \frac{ka}{\nu(1+ka)} \le 1.$$

$iv)$ Temos que

$$\begin{aligned}
\psi'\,|Dd| &= \frac{\psi'}{x_n} \ge \frac{\psi'}{\sup\limits_{\Omega} x_n} \\
&\ge \frac{\psi'(a)}{\sup\limits_{\Omega} x_n} = \frac{k}{\nu(1+ka) \sup\limits_{\Omega} x_n}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{k}{\nu\left(1+k\left(\frac{e^{\nu M}-1}{k}\right)\right)\sup\limits_{\Omega} x_n} \\
&= \frac{k}{\nu e^{\nu M}\sup\limits_{\Omega} x_n} \geq \mu, \quad \text{desde que} \quad k \geq \mu\nu e^{\nu M}\sup_{\Omega} x_n .
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$
\frac{\psi''}{\psi'^2}+\nu = -\frac{k^2}{\nu(1+kd)^2}.\frac{\nu^2(1+kd)^2}{k^2}+\nu = 0.
$$

Assim, a barreira superior w satisfaz

$$
\begin{cases} Q(w) & \leq & 0 \;\; em \;\; \mathcal{N}\cap\Omega \\ w & \geq & u \;\; sobre \;\; \partial(\mathcal{N}\cap\Omega) \end{cases}
$$

e pelo princípio do máximo

$$
u(x) \leq w(x) = w^{+}(x) = \psi(d(x)) + t\varphi(x), \;\forall\, x\in\mathcal{N}. \tag{2.9}
$$

De forma análoga, obtemos a barreira inferior w_t^-, isto é,

$$
w^{-}(x) = -\psi(d(x)) + t\varphi(x) \leq u(x), \quad \forall\, x \;\in \mathcal{N} \tag{2.10}
$$

De posse das barreiras superior e inferior, obtemos a estimativa do gradiente na fronteira de Ω.

Seja $x_0 \in \partial\Omega$ e υ um vetor unitário euclidiano tal que $\langle\upsilon,\eta\rangle > 0$ onde η é a normal unitária euclidiana interior a fronteira de Ω em x_0. Usando $\psi(d(x_0)) = 0$, $t\varphi(x_0) = u(x_0)$, (2.9) e (2.10) obtemos,

$$
-\psi\left(d(x_0+\epsilon\upsilon)\right) - \psi(d(x_0)) + t\left(\varphi(x_0+\epsilon\upsilon)-\varphi(x_0)\right) \leq u(x_0+\epsilon\upsilon)-u(x_0) \quad \text{e}
$$

$$
u(x_0+\epsilon\upsilon)-u(x_0) \leq \psi(d(x_0+\epsilon\upsilon)) - \psi(d(x_0)) + t\left(\varphi(x_0+\epsilon\upsilon)-\varphi(x_0)\right).
$$

Para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno temos

$$
\frac{-\psi(d(x_0+\epsilon\upsilon)) - \psi(d(x_0))}{\epsilon} + t\frac{\varphi(x_0+\epsilon\upsilon)-\varphi(x_0)}{\epsilon} \leq \frac{u(x_0+\epsilon\upsilon)-u(x_0)}{\epsilon} \quad \text{e}
$$

$$\frac{u(x_0+\epsilon\upsilon)-u(x_0)}{\epsilon} \leq \frac{\psi(d(x_0+\epsilon\upsilon))-\psi(d(x_0))}{\epsilon} + t\frac{\varphi(x_0+\epsilon\upsilon)-\varphi(x_0)}{\epsilon},$$

fazendo $\epsilon \to 0^+$, obtemos

$$-\psi'(0)Dd(x_0)\cdot\upsilon + tD\varphi(x_0)\cdot\upsilon \leq Du(x_0)\cdot\upsilon \leq \psi'(0)Dd(x_0)\cdot\upsilon + tD\varphi(x_0)\cdot\upsilon,$$

e portanto

$$|Du(x_0)\cdot\upsilon| \leq |\psi'(0)Dd(x_0)\cdot\upsilon| + |tD\varphi(x_0)\cdot\upsilon|.$$

Note que $|Dd(x_0)| = \dfrac{1}{x_n(x_0)} > 0$. Assim, tomando $\upsilon = \dfrac{Dd(x_0)}{|Dd(x_0)|}$ e aplicando a desigualdade de Schwarz, deduzimos que

$$|Du(x_0)| \leq \frac{\psi'(0)}{\inf\limits_{\Omega} x_n} + \sup_{\Omega}|D\varphi|, \forall\, x_0 \in \partial\Omega,$$

ou seja,

$$\sup_{\partial\Omega}|Du| \leq c_1, \qquad c_1 = c_1(n,\Omega,\inf_{\Omega} x_n, \sup_{\Omega} x_n, \sup_{\Omega}|u|, |\varphi|_2, |H|_1).$$

Donde a estimativa desejada. □

2.3 Estimativa da Altura

Nesta seção veremos dois resultados que serão usados para dar condições de aplicar a teoria do grau e garantir a existência de solução para teorema principal, dado no Capítulo 3.

Teorema 2.2. *(Estimativa da Altura) Sejam $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio limitado, $H \in C^1(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$ e $u^t \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\overline{\Omega})$, com $t \in [0,1]$, solução do problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Q_t(u^t) &= 0 \quad em \quad \Omega \\ u^t &= t\varphi \quad em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

Então, $\sup\limits_{\Omega}|u^t| \leq c_2$ onde c_2 é uma constante que independe de t.

Demonstração: Provaremos o teorema no caso em que $|H(x)| \leq 1$. Construiremos duas funções w_1 e w_2 que sejam supersolução e subsolução, respectivamente, do problemade Dirichlet (2.2).

Como $\overline{\Omega}$ é um compacto de $\mathbb{H}^n$, podemos considerar uma bola $B_r(p) \subset \mathbb{H}^n$, $p = p(0, ...0, r)$ tal que $\partial B_r(p) \cap \partial_\infty \mathbb{H}^n = (0, ..., 0)$, onde $\partial_\infty \mathbb{H}^n := \{x_n = 0\} \cup \{\infty\}$ e $\overline{\Omega} \subset B_r(p)$. $\partial B_r(p)$ é uma horosfera que será dividida em duas partes e transladada convenientemente a fim de obter uma supersolução e uma subsolução para o problema de Dirichlet mencionado.

Para cada $t \in [0, 1]$, considere a função

$$w_1^t = t \sup_{\Omega} |\varphi| + (r^2 - (x_1 + ... + x_{n-1}^2 + (x_n - r)^2))^{1/2}, x \in B_r(p).$$

A função w_1^t translada a primeira parte da horosfera.

Lema 2.3. *w_1^t é uma supersolução do problemade Dirichlet (2.2), ou seja, $Q_t(w_1^t) \leq 0$ em Ω.*

Demonstração: Usaremos a seguinte notação:

$$w := w_1^t \quad \text{e} \quad X^{1/2} := (r^2 - (x_1 + ... + x_{n-1}^2 + (x_n - r)^2))^{1/2}.$$

Primeiro mostraremos que: $1 + |Dw|^2 = \dfrac{r^2}{X}$, $\quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_{ii} w = -\frac{n}{X^{1/2}} + \frac{1}{X^{1/2}} - \frac{r^2}{X^{3/2}}$ e $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_i w D_j w D_{ij} w = \frac{r^2}{X^{3/2}} - \frac{r^4}{X^{5/2}}$.

Temos que,

$$D_i w = -\frac{x_i}{X^{1/2}}, \ i \in \{1, ..., n-1\} \quad \text{e} \quad D_n w = \frac{-(x_n - r)}{X^{1/2}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
|Dw|^2 &= (D_1w)^2 + ... + (D_nw)^2 \\
&= \left(-\frac{x_1}{X^{1/2}}\right)^2 + ... + \left(-\frac{(x_n - r)}{X^{1/2}}\right)^2 \\
&= \frac{x_1^2 + ... + (x_n - r)^2}{X} \\
&= \frac{(-r^2 + (x_1^2 + ... + (x_n - r)^2)) + r^2}{X} \\
&= -1 + \frac{r^2}{X},
\end{aligned}$$

logo

$$(1 + |Dw|^2) = \frac{r^2}{X}. \tag{2.11}$$

Agora, de

$$D_{ii}w = -\frac{1}{X^{1/2}} - \frac{x_i^2}{X^{3/2}},\ i \in \{1, ..., n-1\} \quad \text{e} \quad D_{nn}w = -\frac{1}{X^{1/2}} - \frac{(x_n - r)^2}{X^{3/2}},$$

segue que

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} D_{ii}w &= -\frac{n}{X^{1/2}} - \frac{x_1^2}{X^{3/2}} - ... - \frac{(x_n - r)^2}{X^{3/2}} \\
&= -\frac{n}{X^{1/2}} - \frac{1}{X^{1/2}}\left(\frac{x_1^2 + ... + (x_n - r)^2}{X}\right) \\
&= -\frac{n}{X^{1/2}} - \frac{1}{X^{1/2}}\left(-1 + \frac{r^2}{X}\right) \\
&= -\frac{n}{X^{1/2}} + \frac{1}{X^{1/2}} - \frac{r^2}{X^{3/2}}
\end{aligned}$$

logo,

$$\sum_{i=1}^{n} D_{ii}w = -\frac{n}{X^{1/2}} + \frac{1}{X^{1/2}} - \frac{r^2}{X^{3/2}}. \tag{2.12}$$

Para calcular $\displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_iwD_jwD_{ij}w$ observe que, (para $i, j \in \{1, ..., n-1\}$),

$$D_iw = -\frac{x_i}{X^{1/2}}; \quad D_{ii}w = -\frac{1}{X^{1/2}} - \frac{x_i^2}{X^{3/2}}; \quad D_nw = \frac{-(x_n - r)}{X^{1/2}};$$
$$D_{nn}w = -\frac{1}{X^{1/2}} - \frac{(x_n - r)^2}{X^{3/2}}; \quad D_{ij}w = -\frac{x_ix_j}{X^{3/2}},\ i \neq j.$$

Fixando $i = 1$ e tomando $j \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} D_1 w D_j w D_{1j} w &= D_1 w D_1 w D_{11} w + D_1 w D_2 w D_{12} w + ... + D_1 w D_n w D_{1n} w \\
&= -\frac{x_1}{X^{1/2}} \left(-\frac{x_1}{X^{1/2}}\right) \left(-\frac{1}{X^{1/2}} - \frac{x_1^2}{X^{3/2}}\right) + \\
&\quad + \left(-\frac{x_1}{X^{1/2}}\right) \left(-\frac{x_2}{X^{1/2}}\right) \left(-\frac{x_1 x_2}{X^{3/2}}\right) + \\
&\quad + \ . \ . \ . + \left(-\frac{x_1}{X^{1/2}}\right) \left(-\frac{(x_n - r)}{X^{1/2}}\right) \left(-\frac{x_1 (x_n - r)}{X^{3/2}}\right) \\
&= -\frac{x_1^2}{X^{3/2}} - \frac{x_1^4}{X^{5/2}} - \frac{x_1^2 x_2^2}{X^{5/2}} - \ . \ . \ . - \frac{x_1^2 (x_n - r)^2}{X^{5/2}} \\
&= -\frac{x_1^2}{X^{3/2}} - \frac{x_1^2}{X^{3/2}} \left(\frac{x_1^2 + \ . \ . \ . + (x_n - r)^2}{X}\right) \\
&= -\frac{x_1^2}{X^{3/2}} - \frac{x_1^2}{X^{3/2}} \left(-1 + \frac{r^2}{X}\right).
\end{aligned}$$

Analogamente, para $i = 2$ e $j \in \{1, ..., n\}$, obtemos:

$$\sum_{j=1}^{n} D_2 w D_j w D_{2j} w = -\frac{x_2^2}{X^{3/2}} - \frac{x_2^2}{X^{3/2}} \left(-1 + \frac{r^2}{X}\right).$$

No caso de $i = n$ e $j \in \{1, ..., n\}$, temos

$$\sum_{j=1}^{n} D_n w D_j w D_{nj} w = -\frac{(x_n - r)^2}{X^{3/2}} - \frac{(x_n - r)^2}{X^{3/2}} \left(-1 + \frac{r^2}{X}\right).$$

Observe que ao variar i de 1 a n e somar todas as parcelas, obteremos

$$\begin{aligned}
\sum_{i,j=1}^{n} D_i w D_j w D_{ij} w &= \left[-\frac{x_1^2}{X^{3/2}} - \frac{x_1^2}{X^{3/2}} \left(-1 + \frac{r^2}{X}\right)\right] + \left[-\frac{x_2^2}{X^{3/2}} - \frac{x_2^2}{X^{3/2}} \left(-1 + \frac{r^2}{X}\right)\right] + \\
&\quad + \ . \ . \ . + \left[-\frac{(x_n - r)^2}{X^{3/2}} - \frac{(x_n - r)^2}{X^{3/2}} \left(-1 + \frac{r^2}{X}\right)\right] \\
&= \left(-\frac{x_1^2}{X^{3/2}} - \frac{x_2^2}{X^{3/2}} - \ . \ . \ . - \frac{(x_2 - r)^2}{X^{3/2}}\right) + \\
&\quad + \left(-\frac{x_1^2}{X^{3/2}} - \frac{x_2^2}{X^{3/2}} - \ . \ . \ . - \frac{(x_2 - r)^2}{X^{3/2}}\right) \left(-1 + \frac{r^2}{X}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{X^{1/2}}\left(\frac{x_1^2 + \quad . \quad . \quad . + (x_n - r)^2}{X}\right) + \\
&\quad -\frac{1}{X^{1/2}}\left(\frac{x_1^2 + \quad . \quad . \quad . + (x_n - r)^2}{X}\right)\left(-1 + \frac{r^2}{X}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{X^{1/2}}\left(-1 + \frac{r^2}{X}\right) - \frac{1}{X^{1/2}}\left(-1 + \frac{r^2}{X}\right)\left(-1 + \frac{r^2}{X}\right) \\
&= \frac{r^2}{X^{3/2}} - \frac{r^4}{X^{5/2}},
\end{aligned}
$$

e portanto,

$$
\sum_{i,j=1}^{n} D_i w D_j w D_{ij} w \quad = \quad \frac{r^2}{X^{3/2}} - \frac{r^4}{X^{5/2}}. \tag{2.13}
$$

Agora, de (2.11), (2.12) e (2.13) temos

$$
\begin{aligned}
Q_t(w) &= (1 + |Dw|^2)\sum_{i=1}^{n} D_{ii} w - \sum_{i,j=1}^{n} D_i w D_j w D_{ij} w + \\
&\quad -\frac{n}{x_n}(1 + |Dw|^2) D_n w - \frac{tnH(x)}{x_n}(1 + |Dw|^2)^{3/2} \\
&= \frac{r^2}{X}\left(-\frac{n}{X^{1/2}} + \frac{1}{X^{1/2}} - \frac{r^2}{X^{3/2}}\right) - \frac{r^2}{X^{3/2}} + \frac{r^4}{X^{5/2}} + \\
&\quad + \frac{n}{x_n}\frac{(x_n - r)}{X^{1/2}}\frac{r^2}{X} - \frac{tnH(x)}{x_n}\frac{r^3}{X^{3/2}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{nr^3}{x_n X^{-3/2}} - \frac{tnH(x)}{x_n}\frac{r^3}{X^{3/2}} \\
&= \frac{nX^{-3/2} r^3}{x_n}(-1 - tH).
\end{aligned}
$$

Sendo $|H(x)| \leq 1$, temos

$$
-1 - tH \leq -1 + t, \ \forall \ t \in [0,1],
$$

dessa forma,

$$Q_t(w) \leq \frac{nX^{-3/2}r^3}{x_n}(-1+t) \leq 0.$$

$\square$

Pelo teorema 10.1 de [15], $u^t(x) \leq w(x), \ \forall\, x \in \Omega$, logo

$$\sup_\Omega u^t(x) \leq \sup_\Omega |\varphi| + r. \tag{2.14}$$

Considere agora a função w_2^t definida por

$$w_2^t(x) = -t\sup_\Omega|\varphi| - (r^2 - (x_1 + ... + x_{n-1}^2 + (x_n - r)^2))^{1/2}.$$

A função w_2^t translada a segunda parte da horosfera.

Lema 2.4. *w_2^t é uma subsolução do problemade Dirichlet (2.2), ou seja, $Q_t(w_2^t) \geq 0$ em Ω.*

Demonstração: Denotando $w_2^t = w$ e X como antes, temos

$$|Dw|^2 = -1 + X^{-1}r^2, \qquad (1+|Dw|^2)^{1/2} = \frac{r}{X^{1/2}} \quad \text{e} \quad D_n w = \frac{x_n - r}{X^{1/2}}.$$

Usando raciocínio análogo ao da construção da supersolução, obteremos:

$$Q_t(w) = \frac{nX^{-3/2}r^3}{x_n}(1 - tH).$$

Sendo $|H(x)| \leq 1$, segue que $1 - t\,|H(x)| \geq 1 - t, \ \forall\, t \in [0,1]$, assim,

$$Q_t(w) \geq \frac{nX^{-3/2}r^3}{x_n}(1-t) \geq 0.$$

$\square$

Pelo Teorema 10.1 de [15], $w(x) \leq u^t(x)\ \forall\, x \ \in \Omega$, logo

$$-\sup_\Omega|\varphi| - r \leq \sup_\Omega u^t. \tag{2.15}$$

De (2.14) e (2.15) obtemos

$$\sup_\Omega \left|u^t\right| \leq c_2, \quad c_2 = c_2(\sup_\Omega|\varphi|, \Omega).$$

□

As estimativas $\sup_{\partial\Omega} \left|Du^t\right| \leq c_1$ e $\sup_{\Omega} \left|u^t\right| \leq c_2$ dadas nos Teoremas 2.1 e 2.2, junto à Proposição 5.2 de [3] ou ao Lema 3.1 de [?], nos permitem mostrar que $\sup_{\Omega} \left|Du^t\right| \leq c_3$. Agora, usando as estimativas de Ladyzhenskaya e Ural'tseva, (ver Teorema 13.2 ou Teorema 13.7 de [15]), temos a estimativa de Hölder, $\sup_{\Omega} \left|Du^t\right|_{\beta} \leq c_4$, com $\beta \in (0,1)$. Assim temos o seguinte teorema:

Teorema 2.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^3$, $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$ e $H \in C^2(\overline{\Omega})$. Assuma que H satisfaz a condição (2.1) e para $t \in [0,1]$, $u = u^t \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução do problemade Dirichlet*

$$\begin{cases} Q_t(u^t) & = & 0 \quad em \quad \Omega \\ u^t & = & t\varphi \quad sobre \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

então

$$\sup_{\Omega} \left|u^t\right|_{1,\beta} = \sup_{\Omega} \left|u^t\right| + \sup_{\Omega} \left|Du^t\right|_{\beta} + \sup_{\Omega} \left|Du^t\right|_{\beta} \leq c, \tag{2.16}$$

onde c é uma constante que independe de t.

Capítulo 3

Resultado de Existência e Unicidade

3.1 Introdução

Seja Ω um domínio limitado em um hiperplano $\mathbb{P} \subset \mathbb{H}^n$, dada as funções $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$ e $H \in C^2(\overline{\Omega})$, queremos saber se existe uma função $u \in C^2(\overline{\Omega})$ tal que $u|_{\partial\Omega} = \varphi$ e cujo gráfico horizontal tenha curvatura média hiperbólica H, ou seja, queremos saber se o problema de Dirichlet,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{W(u)}\right) & = & \dfrac{n}{x_n}\left(H + \dfrac{D_n u}{W(u)}\right) \quad em \;\; \Omega \\ u & = & \varphi \;\; sobre \;\; \partial\Omega \end{array} \right. \tag{3.1}$$

tem solução.

Para mostrar que o problema acima tem solução, usaremos a teoria do grau. Vamos linearizar o problema de modo a poder aplicar os resultados enunciados no Capítulo 1.

Consideremos neste capítulo, $Q_t(u^t)$, H', $x_n(y)D_n d(y)$ e $d = d(x, \partial\Omega)$ como no Capítulo 2.

3.2 Resultado Principal

Desenvolvendo o termo div $\left(\dfrac{Du}{W(u)}\right)$, a primeira equação do problema de Dirichlet (3.1) pode ser reescrita na forma

$$\sum_{i,j=1}^{n}((1+|Du|^2)\delta_{ij}-D_iuD_ju)D_{ij}u-\frac{nD_nu(1+|Du|^2)}{x_n}-\frac{nH(1+|Du|^2)^{3/2}}{x_n}=0.$$

Para $t\in[0,1]$, considere a família de problemas de Dirichlet,

$$\left\{\begin{array}{rcl} Q_t(u^t) & := & \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x,Du^t;t)D_{ij}u^t+b(x,Du^t;t)=0 \;\; em \;\; \Omega \\ u^t & = & t\varphi \;\; sobre \;\; \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3.2}$$

onde $a^{ij}(x,Du^t;t)$ e $b(x,Du^t;t)$ são como no Capítulo 2, ou seja,

$$\begin{array}{rcl} a^{ij}(x,Du^t;t) & = & (1+\left|Du^t\right|^2)\delta_{ij}-D_iu^tD_ju^t \quad \text{e} \\ b(x,Du^t;t) & = & -\dfrac{nD_nu^t(1+|Du^t|^2)}{x_n}-\dfrac{tnH(1+|Du^t|^2)^{3/2}}{x_n}. \end{array}$$

Pelo Teorema 1.1, para cada $v\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $\beta\in(0,1)$ e $t\in[0,1]$, o problema linear elíptico de segunda ordem

$$\left\{\begin{array}{rcl} \sum_{i,j=1}^{n}a^{ij}(x,Dv;t)D_{ij}u^t-\frac{n\left(1+|Dv|^2\right)}{x_n}D_nu^t-\frac{tnH\left(1+|Dv|^2\right)^{3/2}}{x_n} & = & 0 \;\; \text{em } \Omega \\ u^t & = & t\varphi \;\; \text{sobre } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{3.3}$$

possui uma única solução $u^t\in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$.

Assim, para cada função $v\in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e para cada $t\in[0,1]$ temos bem definida a aplicação

$$T_t:\; C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{2,\beta}(\overline{\Omega}),\; T_t(v)=u^t,$$

onde u^t é a única solução de (3.3).

Lema 3.1. *A aplicação $T_t:\; C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \longrightarrow C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ definida acima é compacta.*

Demonstração: Seja A um conjunto limitado em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, vamos mostrar que $T_t(A)$ é pré-compacto em $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$. Para cada $v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ temos $T_t(v) = u^t$, pelo Teorema 6.6 de [15], cada função u^t é limitada na norma $C^{2,\beta}$, dessa forma, T_t aplica conjuntos limitados de $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ em conjuntos limitados em $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, e estes, pelo Teorema de Arzelá-Ascoli, são pré-compacto em $C^2(\overline{\Omega})$ e em particular em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Assim, T_t é compacta. □

Lema 3.2. *A aplicação T_t é contínua.*

Demonstração: Seja $\{v_m\}_{m\in N}$ uma sequência em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ tal que $v_m \to v$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Vamos mostrar que $T_t v_m \to T_t v$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Como $\{T_t v_m\}$ é um conjunto pré-compacto em $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, em particular em $C^2(\overline{\Omega})$, a sequência $\{T_t v_m\}$ possui uma subsequência $\{T_t\overline{v}_m\}$ convergente em $C^2(\overline{\Omega})$, digamos $T_t\overline{v}_m \to u \in C^2(\overline{\Omega})$.

Vamos mostrar que $u = T_t(v)$. Consideremos a primeira equação de (3.3) na forma $\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, Dv; t)D_{ij}u + b(x, Dv, D_n u; t) = 0$. Usando o fato que os coeficientes do operador elíptico da equação (3.3) são contínuos, temos $\lim_{m\to\infty}(D_{ij}\{T_t\overline{v}_m\}) = D_{ij}(\lim_{m\to\infty}\{T_t\overline{v}_m\})$ e sendo $T_t\overline{v}_m$ a única solução de (3.3) temos,

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, D\overline{v}_m; t)D_{ij}\{T_t\overline{v}_m\} + b(x, D\overline{v}_m, D_n\{T_t\overline{v}_m\}; t) = 0.$$

Tomando limite, obtemos

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, D\overline{v}_m; t)D_{ij}\{T_t\overline{v}_m\} + b\left(x, D\overline{v}_m, D_n\{T_t\overline{v}_m\}; t\right)\right) = 0,$$

donde

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, Dv; t)D_{ij}\left(\lim_{m\to\infty}\{T_t\overline{v}_m\}\right) + b\left(x, Dv, D_n\left(\lim_{m\to\infty}\{T_t\overline{v}_m\}\right); t\right) = 0,$$

logo

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, Dv; t)D_{ij}u + b(x, Dv, u; t) = 0.$$

Pela unicidade das soluções, temos, $u = T_t(v)$, ou seja, $\lim_{m\to\infty} \{T_t\overline{v}_m\} = T_t(v)$ e portanto T_t é contínua. $\square$

Enunciaremos agora o resultado principal deste trabalho, que é um Teorema que garante existência e unicidade de solução do problema de Dirichlet para equação da curvatura média no espaço hiperbólico.

Teorema 3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega \in C^3$, $\varphi \in C^3(\overline{\Omega})$ e $H \in C^2(\overline{\Omega})$. Suponha que $n\,|H(y)| \leq (n-1)H'(y) + x_n(y)D_n d(y), \forall\ y \in \partial\Omega$. Então o problema de Dirichlet (3.1) possui uma única solução $u \in C^2(\overline{\Omega})$.*

Demonstração: Pela definição da aplicação T_t, uma função $v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ é solução do problema (3.2) se, e somente se, v é ponto fixo de T_t. Portanto, se mostrarmos que T_t possui um ponto fixo, teremos mostrado existência de solução para o problema (3.2). A existência de ponto fixo será obtida usando a teoria do grau.

Considere o conjunto

$$C := \left\{v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega}); |v|_{1,\beta} < \overline{c}\right\},$$

onde $\overline{c} > c$ e c é a constante do Teorema 2.3.

Claramente, pela definição do conjunto C e o Teorema 2.3, a equação $u^t - T_t u^t = 0$ não tem solução em ∂C. Assim, o grau

$$D(I - T_t, C, 0)$$

está bem definido e pela propriedade de invariança por homotopia, Teorema 1.6, $D(I - T_t, C, 0)$ é uma constante que independe de t. Seja

$$l := D(I - T_t, C, 0).$$

Pelo Teorema 1.5 (parte 1), a equação $u^t - T_t u^t = 0$ terá solução se $l \neq 0$. Agora, pelo Princípio do Máximo, Teorema 1.2, a única solução de (3.3), no caso em que $t = 0$, é $u^0 \equiv 0$. Assim, $T_0 \equiv 0$, com isso, usando o Teorema 1.5 (parte 2) temos,

$$D(I - T_0, C, 0) = D(I, C, 0) = 1.$$

Logo,

$$D(I - T_t, C, 0) = D(I - T_0, C, 0) = D(I, C, 0) = 1.$$

Daí, para cada $t \in [0, 1]$ a equação $u^t - T_t u^t = 0$ tem solução $u^t \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, ou seja, a aplicação T_t possui ponto fixo $u^t \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, agora u^1 é solução do problema (3.2) de modo que $u^1 \in C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, (veja Teorema 1.2). Em particular $u^1 \in C^2(\overline{\Omega})$.

Vamor supor que existam duas soluções u_1 e u_2 do problema (3.2). Como vimos no Capítulo 1, seção 1.3, o operador Q é eliptico e temos $Q(u_1) = Q(u_2)$ em Ω e $u_1 = u_2$ na fronteira de Ω, logo, pelo taorema 10.1 de [15] segue que $u_1 = u_2$ em Ω. Portanto o Teorema 3.3 tem solução, e esta é única.

$\square$

Capítulo 4

Resultado de Não-Existência

4.1 Introdução

Neste Capítulo vamos mostrar que a condição de fronteira

$$n\,|H(y)| \leq (n-1)H'(y) + x_n(y)D_n d(y), \forall\ y \in \partial\Omega,$$

usada no teorema de existência é ótima. Para isso usaremos o Teorema 1.4.

Lembrando que, como antes, H' denotará a curvatura média da fronteira de Ω, $d = d(x, \partial\Omega)$ é a distância hiperbólica de $x \in \Omega$ ao bordo de Ω, Du representa o gradiente euclidiano de u e $x_n(y)D_n d(y)$ é a n-ésima componente do vetor normal unitário euclidiano da fronteira de Ω, com $y \in \partial\Omega$. Consideremos também,

$$Q(u) := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x, Du)D_{ij}u + b(x, Du) = 0,$$

com

$$\begin{aligned} a^{ij}(x, Du) &= (1 + |Du|^2)\delta_{ij} - D_i u D_j u \\ b(x, Du) &= -\frac{nD_n u(1 + |Du|^2)}{x_n} - \frac{nH(1 + |Du|^2)^{3/2}}{x_n}. \end{aligned}$$

4.2 Não Existência de Solução

O resultado abaixo diz que não existe uma extensão de φ a Ω satisfazendo a equação da curvatura média H no espaço hiperbólico, cujo gráfico tenha curvatura média H.

Teorema 4.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{H}^n$ um domínio limitado de classe C^2, $\varphi \in C^{\infty}(\overline{\Omega})$ e $H \in C^0(\overline{\Omega})$. Assuma a condição*

$$(n-1)H'(y) + x_n(y)D_n d(y) < n\,|H(y)| \tag{4.1}$$

onde H:

(i) não muda de sinal em Ω e $n \geq 3$ ou,

(ii) não muda de sinal em Ω, $n = 2$ e $diam(\Omega) < \dfrac{\ln 3}{2}$ ou,

(iii) $|H| \geq 1$ em Ω.

Então, em qualquer dos três casos acima, o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q(u) &= 0 \text{ em } \Omega \\ u &= \varphi \text{ sobre } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

não tem solução.

Demonstração: Demonstraremos o resultado acima aplicando o Teorema 1.4 em duas partes de Ω, a primeira numa vizinhança de y, ($y \in \partial\Omega$, fixo) e a outra no complementar desta vizinhança. Em ambas as partes obteremos uma supersolução para o problema de Dirichlet (4.2), isto é, obteremos uma função w tal que $Q(w) \leq 0$.

Primeira parte da demonstração.

Sejam $y \in \partial\Omega$ (fixo), $\delta = diam(\Omega)$ o diâmetro hiperbólico de Ω, $a \in (0, \delta)$ e $\Omega_1 := \{x \in \Omega;\ a < d(x) < \delta\}$ onde $d(x) = dist(x, y)$ é a distância de $x \in \Omega$ a $y \in \partial\Omega$. Considere a função w definida em Ω_1 por

$$\omega(x) = \sup_{\partial\Omega - B_a(y)} u + \psi(d)$$

onde $\psi \in C^2((a,\delta))$ é uma função a ser determinada, satisfazendo as seguintes condições:

$$\psi(\delta) = 0, \quad \psi' \leq 0, \quad \psi'(a) = -\infty, \quad \psi'' \geq 0 \quad \text{e} \quad Q(w) \leq 0.$$

Ou seja, vamos determinar a função ψ de modo que w seja uma supersolução para o problema (4.2) em Ω_1.

Temos que

$$\begin{aligned} Q(w) &= \sum_{i,j=1}^{n}((1+|Dw|^2)\delta_{ij} - D_iwD_jw)D_{ij}w + \\ &\quad -\frac{nD_nw(1+|Dw|^2)}{x_n} - \frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}. \end{aligned}$$

Analisaremos o seguinte termo:

$$\mathcal{M} := \sum_{i,j=1}^{n}((1+|Dw|^2)\delta_{ij} - D_iwD_jw)D_{ij}w = (1+|Dw|^2)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}w - \sum_{i,j=1}^{n} D_iwD_jwD_{ij}w.$$

De $\quad D_iw = \psi' D_id, \quad D_{ii}w = \psi''(D_id)^2 + \psi' D_{ii}d \quad$ e $\quad D_{ij}w = \psi'' D_idD_jd + \psi' D_{ij}d$, obtemos,

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= (1+|Dw|^2)\left(\psi''\sum_{i=1}^{n}(D_id)^2 + \psi'\sum_{i=1}^{n}D_{ii}d\right) + \\ &\quad -\psi'^2\sum_{i,j=1}^{n}D_idD_jd\,(\psi''D_idD_jd + \psi'D_{ij}d) \\ &= (1+|Dw|^2)\psi''\,|Dd|^2 + (1+|Dw|^2)\psi'\sum_{i=1}^{n}D_{ii}d + \\ &\quad -\psi'^2\psi''\,|Dd|^4 - \psi'^3\sum_{i,j=1}^{n}D_idD_jdD_{ij}d. \end{aligned}$$

Usando $\quad |Dd| = \dfrac{1}{x_n}, \quad \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} D_idD_jdD_{ij}d = \frac{-D_nd}{x_n^3} \quad$ e $\quad (1+|Dw|^2)\dfrac{\psi''}{x_n^2} - \dfrac{\psi'^2\psi''}{x_n^4} = \dfrac{\psi''}{x_n^2}$ segue que

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= (1+|Dw|^2)\frac{\psi''}{x_n^2}+(1+|Dw|^2)\psi'\sum_{i=1}^n D_{ii}d-\frac{\psi'^2\psi''}{x_n^4}+\frac{\psi'^3D_nd}{x_n^3}\\ &= (1+|Dw|^2)\psi'\sum_{i=1}^n D_{ii}d+\frac{\psi''}{x_n^2}+\frac{\psi'^3D_nd}{x_n^3}.\end{aligned}$$

Logo, (usando que $D_nw=\psi'D_nd$)

$$\begin{aligned}Q(w) &= (1+|Dw|^2)\psi'\sum_{i=1}^n D_{ii}d+\frac{\psi''}{x_n^2}+\frac{\psi'^3D_nd}{x_n^3}+\\ &\quad -\frac{n\psi'D_nd(1+|Dw|^2)}{x_n}-\frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n} \qquad (4.3)\\ &= \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\psi'\left(x_n^2\sum_{i=1}^n D_{ii}d-nx_nD_nd+2x_nD_nd-2x_nD_nd\right)+\\ &\quad +\frac{\psi''}{x_n^2}+\frac{\psi'^3D_nd}{x_n^3}-\frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}\\ &= \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\psi'\left(x_n^2\sum_{i=1}^n D_{ii}d-(n-2)x_nD_nd\right)+\\ &\quad -\frac{2\psi'D_nd(1+|Dw|^2)}{x_n}+\frac{\psi''}{x_n^2}+\frac{\psi'^3+D_nd}{x_n^3}-\frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}.\end{aligned}$$

De $x_n^2\sum_{i=1}^n D_{ii}d-(n-2)x_nD_nd=\frac{n-1}{\mathrm{tgh}d}$ e $-\frac{\psi'D_nd(1+|Dw|^2)}{x_n}+\frac{\psi'^3D_nd}{x_n^3}=-\frac{\psi'D_nd}{x_n}$ obtemos

$$\begin{aligned}Q(w) &= \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\psi'\frac{n-1}{\mathrm{tgh}d}-\frac{\psi'D_nd(1+|Dw|^2)}{x_n}+\\ &\quad -\psi'\frac{D_nd}{x_n}+\frac{\psi''}{x_n^2}-\frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}\\ &\le \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\psi'\frac{n-1}{\mathrm{tgh}d}-\frac{\psi'\,|D_nd|\,(1+|Dw|^2)}{x_n}+\\ &\quad -\psi'\frac{|D_nd|}{x_n}+\frac{\psi''}{x_n^2}-\frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}.\end{aligned}$$

De $|D_nd|\le\frac{1}{x_n}$ e $\psi'\le 0$ segue que $-\psi'\frac{|D_nd|}{x_n}\le-\psi'\frac{|D_nd|}{x_n}(1+|Dw|^2)$, assim,

$$Q(w) \leq \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\psi'\left(\frac{n-1}{\text{tgh}d}-2\right)+\frac{\psi''}{x_n^2}-\frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}. \tag{4.4}$$

Assumiremos que a função H é não-negativa (a análise no outro caso é semelhante), e usando o fato que $\dfrac{\psi''}{x_n^2}=\dfrac{\psi''}{\psi'^2}\,|Dw|^2 \leq \dfrac{\psi''}{\psi'^2}(1+|Dw|^2)$ chegamos a seguinte desigualdade:

$$\begin{aligned} Q(w) &\leq \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left(\psi'\frac{n-1-2\ \text{tgh}d}{\text{tgh}d}+x_n^2\frac{\psi''}{\psi'^2}\right) \\ &\leq \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left(\frac{\mu_1\psi'}{\text{tgh}d}+\frac{\mu_2\psi''}{\psi'^2}\right), \end{aligned}$$

onde $\mu_1=\inf\limits_{\Omega}(n-1-2\ \text{tgh}d)$ e $\mu_2=\sup\limits_{\Omega} x_n^2$.

Caso (i). Para $n\geq 3$, μ_1 é sempre positivo. Defina

$$\psi(d)=\mu^{-1/2}\int_d^\delta\left(\ln\frac{\text{senh}t}{\text{senh}a}\right)^{-1/2}dt, \quad \text{onde} \quad \frac{\mu_1}{\mu_2}=\mu=\mu(diam(\Omega),\ \inf_\Omega x_n,\ \sup_\Omega x_n, n).$$

Pelo Teorema fundamental do cálculo, temos

$$\psi'(d)=-\mu^{-1/2}\left(\ln\frac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{-1/2} \quad \text{e} \quad \psi''(d)=\frac{\mu^{-1/2}}{2}\left(\ln\frac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{-3/2}\frac{\cosh d}{\text{senh}d},$$

assim,

$$\frac{\psi'}{\text{tgh}d}=-\frac{\mu^{-1/2}}{\left(\ln\dfrac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{1/2}\text{tgh}d} \quad \text{e} \quad \frac{\psi''}{\psi'^2}=\frac{\mu^{1/2}\cosh d}{2\left(\ln\dfrac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{1/2}\text{senh}d},$$

portanto,

$$\begin{aligned} Q(w) &\leq \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left(\frac{\mu_1\psi'}{\text{tgh}d}+\frac{\mu_2\psi''}{\psi'^2}\right) \\ &= \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left(-\frac{\mu_1\mu^{-1/2}}{\left(\ln\dfrac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{1/2}\text{tgh}d}+\frac{\mu_2\mu^{1/2}\cosh d}{2\left(\ln\dfrac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{1/2}\text{senh}d}\right) \end{aligned}$$

$$= \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left(\frac{-2\mu_1\mu^{-1/2}\ \text{senh}d + \mu_2\mu^{1/2}\ \text{tgh}d\cosh d}{2\left(\ln\dfrac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{1/2}\ \text{senh}d\ \text{tgh}d}\right)$$

$$= \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left(\frac{-2\mu_1\mu^{-1/2} + \mu_2\mu^{1/2}}{2\left(\ln\dfrac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{1/2}\ \text{tgh}d}\right)$$

$$= \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left(\frac{-\mu_1^{1/2}\mu_2^{1/2}}{2\left(\ln\dfrac{\text{senh}d}{\text{senh}a}\right)^{1/2}\ \text{tgh}d}\right) \leq 0,$$

ou seja, a função ψ definida acima satisfaz $Q(w) \leq 0$ em Ω_1.

Pelo Teorema 1.3, $u(x) \leq w(x), \forall\ x\ \in \Omega_1$. Em particular, considerando o fato que $\psi' \leq 0$, temos

$$\sup_{\partial B_a(y)\cap\Omega} u \leq w(x) = \sup_{\partial\Omega - B_a(y)} u + \psi(a). \tag{4.5}$$

Caso (ii). Neste caso temos que $diam(\Omega) < \dfrac{\ln 3}{2}$, isto é, $d < \dfrac{\ln 3}{2}$. Assim, $\text{tgh}d < \text{tgh}\left(\dfrac{\ln 3}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$, logo, $-2\ \text{tgh}d > -1$. Como $n = 2$, temos que $\mu_1 = \inf_{\Omega}(n-1-2\ \text{tgh}d) = \inf_{\Omega}(1-2\ \text{tgh}d) > 0$. Portanto chegamos a mesma conclusão do item (i).

Caso (iii). De (4.4) temos

$$Q(w) \leq \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\psi'\left(\frac{n-1}{\text{tgh}d} - 2\right) + \frac{\psi''}{x_n^2} - \frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}.$$

De $H \geq 1$ segue que

$$-\frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n} \leq -\frac{n(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n} \leq -\frac{n\,|Dw|\,(1+|Dw|^2)}{x_n} \leq \frac{n\psi'(1+|Dw|^2)}{x_n^2},$$

logo

$$
\begin{aligned}
Q(w) &\le \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\psi'\left(\frac{n-1}{\text{tgh}d}+n-2\right)+\frac{\psi''}{x_n^2}\\
&\le \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\psi'\left(\frac{n-1}{\text{tgh}d}+n-2\right)+\frac{\psi''(1+|Dw|^2)}{\psi'^2}\\
&= \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left[\psi'\left(\frac{n-1}{\text{tgh}d}+n-2\right)+\frac{x_n^2\psi''}{\psi'^2}\right]\\
&\le \frac{(1+|Dw|^2)}{x_n^2}\left(\frac{\mu_1\psi'}{\text{tgh}d}+\frac{\mu_2\psi''}{\psi'^2}\right),
\end{aligned}
$$

onde $\mu_1 = \inf_\Omega (n-1+(n-2)\ \text{tgh}(d)) > 0$ e $\mu_2 = \sup_\Omega x_n^2$.

Como no caso (i), definimos:

$$\psi(d) = \mu^{-1/2}\int_d^\delta \left(ln\frac{\text{senh}t}{\text{senh}a}\right)^{-1/2} dt, \quad \text{onde} \quad \frac{\mu_1}{\mu_2} = \mu = \mu(diam(\Omega),\ \inf_\Omega x_n,\ \sup_\Omega x_n, n).$$

Já vimos que, com ψ definida dessa forma, a função w satisfaz $Q(w) \le 0$ em Ω_1. Portanto,

$$\sup_{\partial B_a(y)\cap\Omega} u \le w(x) = \sup_{\partial\Omega - B_a(y)} u + \psi(a),$$

e assim mostramos que existe uma função w tal que $Q(w) \le 0$. Com isso temos a primeira parte da demonstração.

Segunda parte da demonstração.

Agora trabalharemos em Ω_2, complementar de Ω_1 menos a bola de centro y e raio ϵ, $\Omega_2 = \{x \in \Omega;\ \epsilon < d(x) < a\}$. De (4.1), podemos assumir que existe $\eta > 0$ tal que

$$(n-1)H'(y) + x_n(y)D_nd(y) \le nH(y) - 5\eta. \tag{4.6}$$

Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície quádrica de classe C^2 satisfazendo:

(i) $H_S(y) \le H'(y) + \eta$;

(ii) $S \cap B_a(y) \subset \overline{\Omega}$.

Considere a função distância $d(x) = dist(x, S)$, d de classe C^2 (se necessário tome a suficientemente pequeno). Queremos encontrar uma função w em Ω_2 definida por

$$w := \sup_{\partial B_a(y)\cap\Omega} u + \phi(d)$$

onde $\phi \in C^2((\epsilon, a))$, $\epsilon \in (0, a)$, tal que $\phi(a) = 0$, $\phi' \leq 0$, $\phi'(\epsilon) = -\infty$, $\phi'' \geq 0$ e $Q(w) \leq 0$ em Ω_2.

Calculemos $Q(w)$.

Por um raciocínio análogo à primeira parte da demonstração, ver (4.3), temos

$$Q(w) = \phi'(1+|Dw|^2)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d + \frac{\phi'^3 D_n d}{x_n^3} + \frac{\phi''}{x_n^2} - \frac{nD_n w(1+|Dw|^2)}{x_n} - \frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}.$$

Da identidade $\quad \dfrac{\phi'^3 D_n d}{x_n^3} = \dfrac{\phi'(1+|Dw|^2)}{x_n} D_n d - \dfrac{\phi' D_n d}{x_n}, \quad$ obtemos

$$\begin{aligned}
Q(w) &= \phi'(1+|Dw|^2)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d + \frac{\phi'(1+|Dw|^2)}{x_n} D_n d + \frac{\phi''}{x_n^2} + \\
&\quad -\frac{\phi' D_n d}{x_n} - \frac{n\phi' D_n d(1+|Dw|^2)}{x_n} - \frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n} \\
&= \frac{\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)\left(x_n^2\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d + x_n D_n d - n x_n D_n d\right) + \\
&\quad + \frac{\phi''}{x_n^2} - \frac{\phi'}{x_n} D_n d - \frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n} \\
&= \frac{\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)\left(x_n^2\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d - (n-1) x_n D_n d\right) + \\
&\quad + \frac{\phi''}{x_n^2} - \frac{\phi'}{x_n} D_n d - \frac{nH(1+|Dw|^2)^{3/2}}{x_n}.
\end{aligned}$$

Sendo $(1+|Dw|^2)^{3/2} = \dfrac{-\phi'}{x_n}(1+|Dw|^2) + \phi'(1+|Dw|^2)o(1)$, quando $|Dw| \to \infty$, $\dfrac{-\phi'}{x_n} D_n d \leq \dfrac{-\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)$ e $\dfrac{\phi''}{x_n^2} \leq \dfrac{\phi''}{x_n^2}\dfrac{(1+|Dw|^2)}{|Dw|^2} = (1+|Dw|^2)\dfrac{\phi''}{\phi'^2}$, deduzimos que

$$Q(w) \le \frac{\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)\left(x_n^2\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d - (n-1)x_nD_nd + \right.$$
$$\left. + nH - (n\sup_{\Omega}|H|+1)o(1) + \sup_{\Omega} x_n^2\frac{\phi''}{\phi'^3}\right).$$

Seja S_t a superfície paralela a S a uma distância hiperbólica t. Já inferimos que a curvatura média H_{S_t} satisfaz

$$x_n^2\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d - (n-2)x_nD_nd = -(n-1)H_{S_t}, \quad \text{ou seja,} \quad H_{S_t} = \{x \in \Omega; d(x) = t\}.$$

Sendo $H = H(x)$ contínua em $\overline{\Omega}$ e $d = d(x)$ de classe C^2 em Ω, deduzimos que

i) $|H(x) - H(y)| < \dfrac{\eta}{n}$;

ii) $\left| x_n^2(x)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(x) - x_n^2(y)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(y)\right| < \eta$;

iii) $|x_n^2(x)D_nd(x) - x_n^2(y)D_nd(y)| < \dfrac{\eta}{n-1}$, para $x \in \Omega_1$ e $y \in \partial\Omega$.

Assim

$$Q(w) \le \frac{\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)\left(x_n^2(y)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(y) - (n-1)x_n(y)D_nd(y) + \right.$$
$$\left. + nH(y) - 3\eta + o(1) + \sup_{\Omega} x_n^2\frac{\phi''}{\phi'^3}\right).$$

Agora, pela construção de S temos que
$x_n^2(y)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}d(y) - (n-2)x_n(y)D_nd(y) = -(n-1)H_S(y)$. Assim,

$$\begin{aligned} Q(w) &\le \frac{\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)\left(-(n-1)H_S(y) - x_n(y)D_nd(y) + \right. \\ &\qquad \left. + nH(y) - 3\eta + o(1) + \sup_{\Omega} x_n^2\frac{\phi''}{\phi'^3}\right) \\ &\le \frac{\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)\left(-(n-1)H'(y) - x_n(y)D_nd(y) + \right. \\ &\qquad \left. + nH(y) - 4\eta + o(1) + \sup_{\Omega} x_n^2\frac{\phi''}{\phi'^3}\right), \end{aligned}$$

de (4.6) segue que

$$\begin{aligned} Q(w) &\leq \frac{\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)\left(5\eta - 4\eta + o(1) + \sup_{\Omega} x_n^2 \frac{\phi''}{\phi'^3}\right) \\ &= \frac{\phi'}{x_n^2}(1+|Dw|^2)\left(\eta + o(1) + \sup_{\Omega} x_n^2 \frac{\phi''}{\phi'^3}\right). \end{aligned}$$

Definindo $\phi(d) := k\left((a-\epsilon)^{1/2} - (d-\epsilon)^{1/2}\right)$, $\epsilon < d < a$, temos que $\phi'(d) = \dfrac{-k}{2(d-\epsilon)^{1/2}}$ e $\phi''(d) = \dfrac{k}{4(d-\epsilon)^{3/2}}$, logo $\dfrac{\phi''}{\phi'^3} = \dfrac{-2}{k^2}$. Agora,

$$\eta + o(1) + \sup_{\Omega} x_n^2 \frac{\phi''}{\phi'^3} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \eta + o(1) \geq \sup_{\Omega} x_n^2 \frac{-2}{k^2}.$$

Assim, tomando k suficientemente grande e considerando $\phi' \leq 0$, obtemos que $Q(w) \leq 0$ em Ω_2. Pelo Teorema 1.3, temos

$$u(x) \leq \sup_{\partial B_a(y)\cap\Omega} u + \phi(d(x)),\ \forall\, x \in \Omega_2.$$

Usando $\phi' \leq 0$ obtemos

$$u(x) \leq \sup_{\partial B_a(y)\cap\Omega} u + \phi(\epsilon) = \sup_{\partial B_a(y)\cap\Omega} u + k(a-\epsilon)^{1/2},\ \forall\, x \in \Omega_2. \tag{4.7}$$

Combinando (4.5) e (4.7) e fazendo $\epsilon \to 0$, obtemos a estimativa

$$u(y) \leq \sup_{\partial B_a(y)\cap\Omega} u + \phi(\epsilon) = \sup_{\partial\Omega - B_a(y)} u + \psi(a) + k(a)^{1/2},\ \forall\, x \in \Omega_2.$$

A estimativa acima mostra que u não pode ser arbitrariamente pré-determinada em $\partial\Omega$, ou seja, existe $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Q(u) = 0 & \text{em } \Omega \\ u = \varphi & \textit{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

não tem solução.

Para finalizar note que quando H é não positiva ou satisfaz $H \geq -1$ em Ω, basta tomar $-w$ no lugar de w que chegaremos a mesma conclusão de não-existência.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] Amann, H. - *Lectures on Some Fixed Point Theorems*, Monografias de matemática, IMPA.

[2] Barbosa, J. L. M. e Earp, R. S. - *Geometric Methods and Nonlinear Analysis in Hiperbolic Space.* X Escola de Geometria Diferencial - UFMG, 1998.

[3] Barbosa, J. L. M. e Earp, R. S. - *Prescribed mean curvature hypersurfaces in* $\mathbb{H}^{n+1}$ *with convex planar baudary,*. II Séminaire de théorie spectrale , Grenoble, v. 16, 43-79 (1998).

[4] Barbosa, J. L. M. e Earp, R. S. - *Prescribed mean curvature hypersurfaces in* $\mathbb{H}^{n+1}(-1)$ *with convex planar baudary.* I, Geom. Dedicata 71 (1998), 61-74.

[5] Barbosa, J. L. M. - *Geometria Hiperbólica.* 20^o Colóquio Brasileiro de Matématica - IMPA, 1995.

[6] Brezis, H. - *Análisis Funcional, Teoría e Aplicaciones.* Alianza Editora.Madrid, Paris, 1984.

[7] Costa, D. G. - *Tópicos em Análise não-linear e Aplicações às Equações Difereniciais.* CNPq-IMPA, 1986.

[8] da Silva, R. de C. J. - *Superfícies com Curvatura Média Constante e Bordo Planar em* $\mathbb{R}^3$ *e em* $\mathbb{H}^3$. Dissertação de Mestrado, UFPB, João Pessoa, 2006.

[9] de Lira, J. H. - *Radial graphs with constant mean curvature in the hyperbolic space.* Geom. Dedicata 93 (2002), 11-23.

[10] do Carmo, M. P. - *Differential Geometry of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall Eaglewood Cliffs, 1976.

[11] do Carmo, M. P. - *Geometria Riemanniana.* 2.ª edição, Projeto Euclides - IMPA, 1988.

[12] Guio, E. M. - *Estimativas a priori do gradiente, existência e não existência, para uma equação da curvatura média no espaço hiperbólico.* tese de doutorado, PUC-Rio, 2003.

[13] Guio, E. M. e Earp, R. S. - *Existince and Non-Existence for a Mean Curvature Equation in Hyperbolic Space.* 1991 Math. Subject Classification. 35J25, 53A10.

[14] Rosemberg, H. - *Hypersurfaces of constant curvature in space forms,* Bull. Sc. math. 2^o série 117 (1993), 211-239.

[15] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S. - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order.* Springer-Verlag, 1983.

[16] Deimling, K. - *Nonlinear Functional Analysis.* Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York Tokyo

[17] Nelli, B. - *On the Existence and Uniqueness of Constant Mean Curvature Hyperfurfaces in Hyperbolic Space,* Geom. Analysis and the Calculus of Variations, 253-266, Internat. Press, Cambridge, MA (1996).

[18] Nitsche, P. A. - *Existence of Prescribed Mean Curvature Graph in Hyperbolic Space.* Manuscripta Math. 108 (2002), 349-367.

[19] Serrin, J. - *The Problem of Dirichlet for Quasilinear Elliptic Differential Equation with Many Independent Variables.* Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 264 (1969), 413-496.