

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

**Superfícies com Curvatura Média Constante e
Bordo Planar em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3 .**

Por
Rita de Cássia Jerônimo da Silva

sob orientação do
Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Junho 2006
João Pessoa, Paraíba

Superfícies com Curvatura Média Constante e Bordo Planar em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3 .

por

Rita de Cássia Jerônimo da Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. **Pedro A. Hinojosa**
Orientador

Prof. Dr. **Isaac Costa Lázaro**
Examinador

Prof. Dr. **Pedro A. Gomes Venegas**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Junho 2006

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: **Junho 2006**

Autor: **Rita de Cássia Jerônimo da Silva**

Título: **Superfícies com Curvatura Média
Constante e Bordo Planar em \mathbb{R}^3 e
em \mathbb{H}^3 .**

Depto.: **Matemática**

Grau: **M.Sc.** Convocação: **Junho** Ano: **2006**

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

O AUTOR RESERVA OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO, E NEM A TESE NEM EXTENSIVAS EXTRAÇÕES DELA PODEM SER IMPRESSAS OU REPRODUZIDAS SEM A PERMISSÃO ESCRITA DO AUTOR.

O AUTOR ATESTA QUE A PERMISSÃO TEM SIDO OBTIDA PELO USO DE QUALQUER DIREITO AUTORAL DO MATERIAL EM QUE ESTA TESE APAREÇA(OU BREVES RESUMOS REQUERENDO APENAS O PRÓPRIO AGRADECIMENTO NO MATERIAL ESCRITO) E QUE TODOS OS TAIS USOS SEJAM CLARAMENTE AGRADECIDOS.

*À minha família e aos professores
José Cleodon Aranha (in memoriam),
Abdoral de Souza Oliveira e
Pedro Antônio Hinojosa Vera.*

Agradecimentos

- *A Deus Criador, fonte de toda misericórdia, por ter me dado força e perseverança para atingir meus objetivos.*
- *À minha família pelo amor, carinho e apoio constante.*
- *Ao meu orientador Professor Pedro Antonio Hinojosa Vera, pela dedicação e paciência.*
- *Aos professores que ajudaram durante minha formação acadêmica.*
- *Aos amigos que durante todo tempo estiveram ao meu lado.*
- *Ao CNPq - Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - pelo apoio financeiro e à Universidade Federal da Paraíba, em particular, à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática, por ter proporcionado a oportunidade.*

Índice

Agradecimentos	v
Lista de Figuras	vii
Resumo	viii
Abstract	ix
Introdução	x
1 Preliminares	1
1.1 Introdução	1
1.2 O Espaço Hiperbólico	1
1.2.1 Superfícies Umbílicas do Espaço Hiperbólico	4
1.3 Princípio do Máximo	7
1.4 Fórmula do Fluxo	11
2 Discos com Área Limitada em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3	15
2.1 Introdução	15
2.2 Preliminares	16
2.3 Discos com Área Limitada em \mathbb{R}^3	21
2.4 Discos com Área Limitada em \mathbb{H}^3	28
3 Simetria de Superfícies com Bordo Simétrico em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3	33
3.1 Introdução	33
3.2 Simetria de Superfícies com Bordo Simétrico em \mathbb{R}^3	34
3.3 Simetria de Superfícies com Bordo Simétrico em \mathbb{H}^3	42
Referências Bibliográficas	45

Lista de Figuras

1.1	Geodésicas no Modelo do Semi-Espaço	2
1.2	Geodésicas no Modelo da Bola	3
1.3	Geodésicas no Modelo de Lorentz	4
1.4	Planos Geodésicos	5
1.5	Esferas Hiperbólicas	5
1.6	Horoesferas	6
1.7	Hipersuperfícies Equidistantes	6
2.1	Cálculo do $\cosh r$	18
2.2	Disco imerso em \mathbb{R}^3	21
2.3	Disco imerso em \mathbb{H}^3	28
3.1	Superfície Σ	34

Resumo

Neste trabalho consideramos imersões isométricas de um disco em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3 , com curvatura média constante não-nula e bordo circular. Em ambos os casos mostramos que se a área da imersão é menor do que ou igual à área da calota esférica maior, então a imersão é umbílica. Em \mathbb{R}^3 apresentamos estimativas globais para a área e para o volume da imersão que não dependem da curvatura média.

Depois consideramos superfícies mergulhadas, ainda com curvatura média constante, em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3 , cujo bordo é uma curva de Jordan contida num plano. Mostramos que se a superfície não intercepta o exterior do domínio planar limitado pela curva do bordo, então ela está totalmente contida num dos semi-espacos determinados pelo plano que contém o bordo. E em \mathbb{R}^3 , mostramos que, neste caso, a superfície herda as simetrias do seu bordo.

Palavras-Chave: espaço euclidiano, espaço hiperbólico, superfícies com bordo, curvatura média constante, fórmula do fluxo, princípio do máximo, bordo circular, calotas esféricas, área, volume, simetrias.

Abstract

In this work we consider isometric immersions from a disc in \mathbb{R}^3 and in \mathbb{H}^3 , with non zero constant mean curvature and circular boundary. In both cases we show that if the area of the immersion is less than or equal to the area of the big spherical cap, then the immersion is umbilical. In \mathbb{R}^3 we present global estimates for the area and for the volume of the immersion which do not depend on the mean curvature.

Later we consider embedded surfaces still non zero constant mean curvature, in \mathbb{R}^3 and in \mathbb{H}^3 , whose boundary is a Jordan curve contained in a plane. We show that if the surface does not intersect the exterior of the planar domain limited for the curve of the boundary, then it is totally contained in one of the half-spaces determined by the plane of the boundary. Moreover in \mathbb{R}^3 , we show that, in this case, the surface inherits the symmetries of boundary.

Key words: Euclidean space, Hyperbolic space, surfaces with boundary, constant mean curvature, flux formula, maximum principle, circular boundary, spherical caps, area, volume, symmetries.

Introdução

Superfícies compactas com curvatura média constante, imersas ou mergulhadas em espaços tridimensionais, têm sido bastante estudadas sobretudo nas últimas décadas. Uma superfície com curvatura média constante imersa, por exemplo em \mathbb{R}^3 , pode ser vista como uma superfície onde a pressão exterior e as forças de tensão estão balanceadas. Por esta razão, estas superfícies podem ser pensadas como bolhas ou películas de sabão, dependendo se considerarmos superfícies fechadas, isto é compactas sem bordo, ou compactas com bordo não vazio.

No caso das superfícies fechadas, até aproximadamente 20 anos atrás, os únicos exemplos conhecidos com curvatura média constante H , eram as esferas redondas. Até este momento eram conhecidos dois teoremas: o teorema de Hopf [10], o qual afirma que a esfera é o único exemplo com gênero zero, e o teorema de Alexandrov [1], que assegura que a esfera é o único exemplo mergulhado. Em 1986, Wente [18] construiu outros exemplos não mergulhados com gênero 1. Mais tarde, Kapouleas [11] fez o mesmo para gênero maior do que 2.

Em contraste com as superfícies fechadas, a estrutura das superfícies compactas, com bordo não vazio e com curvatura média constante H , é ainda quase desconhecida, até mesmo no caso mais simples quando o bordo é um círculo unitário. Heinz em [8] encontrou uma condição necessária para a existência destas superfícies nesta situação: $|H| \leq 1$. Os únicos exemplos conhecidos são as duas calotas esféricas com raio $1/|H|$ (não congruentes se $|H| < 1$) e algumas superfícies não mergulhadas com gênero maior do que 2 cuja existência foi provada por Kapouleas em [11]. A falta de exemplos e a analogia com os casos sem bordo levaram ao surgimento da questão da unicidade dos

exemplos umbílicos.

Por outro lado, se uma superfície compacta com curvatura média constante H e com bordo circular está imersa em \mathbb{H}^3 , a situação é bem diferente. Existe uma família de superfícies umbílicas compactas com curvatura média constante H , onde H parte do zero, cresce até o máximo da curvatura do círculo (maior do que 1) e decresce até 1. Neste caso, é natural também questionarmos se as superfícies umbílicas são os únicos possíveis exemplos com bordo circular. Hoje em dia, este problema é conhecido como a conjectura da calota esférica e ainda permanece sem solução:

1. Um disco imerso com curvatura média constante $H \neq 0$ e com bordo circular é uma calota esférica.
2. Uma superfície compacta mergulhada com curvatura média constante $H \neq 0$ e com bordo circular é uma calota esférica.

Este trabalho baseia-se nos seguintes artigos *Constant Mean Curvature Discs with Bounded Area* por López, R. e Montiel, S. [15], *Constant Mean Curvature Surfaces with Circular Boundary in \mathbb{R}^3* por Hinojosa, P. A. [9], *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary in the Hyperbolic Space* por López, R. [14] e *Symmetry of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature with Symmetric Boundary* por Koiso, M. [12]; onde se mostra que, sob determinadas condições, esta conjectura pode ser verdadeira.

Com relação ao item 1 da conjectura acima, em \mathbb{R}^3 , usando [15], mostramos que se a imersão não é umbílica, então a sua área deve ser grande. Um resultado análogo será provado em \mathbb{H}^3 seguindo [14]. Além disso, agora usando [9], mostramos que, em \mathbb{R}^3 , é possível encontrarmos estimativas globais para a área e o volume da imersão que não dependem da curvatura média H .

Com relação ao item 2, da conjectura mencionada, usando [12], mostramos que se uma superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 , compacta, com curvatura média constante $H \neq 0$, com bordo igual a uma curva de Jordan contida em um plano, não intercepta o exterior do domínio planar limitado pela curva do bordo, então ela está totalmente contida em um dos semi-espacos determinados pelo plano que contém o bordo. Em \mathbb{H}^3 , a

situação é análoga, veja [14]. Ainda em \mathbb{R}^3 , veremos em que condições a superfície herda as simetrias de seu bordo.

O presente trabalho está dividido em 3 capítulos. No primeiro, apresentamos alguns resultados preliminares, iniciamos com o Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^n e seus modelos mais conhecidos, lembramos também as superfícies umbílicas de \mathbb{H}^3 . Logo em seguida, fazemos uma exposição dos Princípios do Máximo no Interior e no Bordo para a equação da curvatura média para gráficos horizontais no Espaço Hiperbólico. Concluimos este capítulo apresentando a Fórmula do Fluxo e a Fórmula do Balanço.

No capítulo 2 consideramos uma imersão isométrica, com curvatura média constante $H \neq 0$, $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ou $\phi : D \rightarrow \mathbb{H}^3$, onde D é um disco bidimensional contido num plano totalmente geodésico, tal que, em \mathbb{R}^3 , $\phi(\partial D) = S^1$ e, em \mathbb{H}^3 , $\phi(\partial D)$ é um círculo de raio ρ . Seguindo [15] e [14], em ambos os casos mostramos, com a ajuda de uma desigualdade isoperimétrica obtida por Barbosa e do Carmo [2], que se a área da imersão ϕ é menor do que ou igual a área da calota esférica maior, então a imersão ϕ é umbílica. Ainda em \mathbb{R}^3 , seguindo [9], utilizamos uma fórmula tipo Minkowski para obter estimativas para a área e para o volume da imersão ϕ que não dependem da curvatura média H .

No capítulo 3 tratamos de superfícies compactas com curvatura média constante $H \neq 0$, com bordo planar e mergulhadas em \mathbb{R}^3 ou em \mathbb{H}^3 . Em \mathbb{R}^3 , baseados em [12], mostramos que se a superfície, não intercepta o exterior do domínio planar limitado pela curva do bordo, então ela está totalmente contida em um dos semi-espacos determinados pelo plano que contém o bordo. Depois, utilizando o Princípio da Reflexão de Alexandrov [1], veremos que se a superfície possui bordo simétrico, então herda as simetrias de seu bordo. No entanto, em \mathbb{H}^3 , baseados em [14] mostramos que se a superfície possui bordo contido num plano geodésico, numa hipersuperfície equidistante ou numa horoesfera e ela não intercepta o exterior do domínio planar limitado pela curva do bordo, então a superfície está totalmente contida num dos semi-espacos determinados pelo plano que contém o bordo.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Iniciamos este capítulo apresentando alguns modelos do Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^n e as superfícies umbílicas em \mathbb{H}^3 , com os respectivos valores da curvatura média.

Na seção (1.3), fazemos uma exposição do Princípio do Máximo para a equação da curvatura média para gráficos horizontais no Espaço Hiperbólico. Estudamos duas situações, uma quando duas hipersuperfícies se tangenciam em pontos interiores e outra quando esta tangência ocorre em pontos dos bordos.

Finalizamos este capítulo na seção (1.4) onde exibimos a Fórmula do Fluxo para hipersuperfícies com curvatura média constante $H \neq 0$ em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3 e, logo em seguida, apresentamos a Fórmula do Balanço.

1.2 O Espaço Hiperbólico

Nesta seção, estudamos uma variedade Riemanniana de dimensão n , completa, simplesmente conexa, com curvatura seccional constante e igual a -1 : o Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^n . Mas, lembramos que estaremos sempre lidando com \mathbb{R}^3 e com \mathbb{H}^3 . Estas variedades Riemannianas diferem apenas pelas suas respectivas métricas, que são conformes.

Vamos iniciar apresentando três de seus modelos mais conhecidos, juntamente com suas principais características.

O Modelo do Semi-Espaço de Poincaré.

Neste modelo, temos o Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^n representado pelo semi-espaço superior do \mathbb{R}^n dado por

$$\mathbb{H}^n = \mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_n > 0\}$$

com a métrica $g_{ij}(x) = \frac{\delta_{ij}}{x_n^2}$, onde $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 1$ $i, j = 1, \dots, n$.

As geodésicas neste modelo são as semi-retas e os semi-círculos que intersectam o plano $\{x_n = 0\}$ ortogonalmente (Figura 1.1).

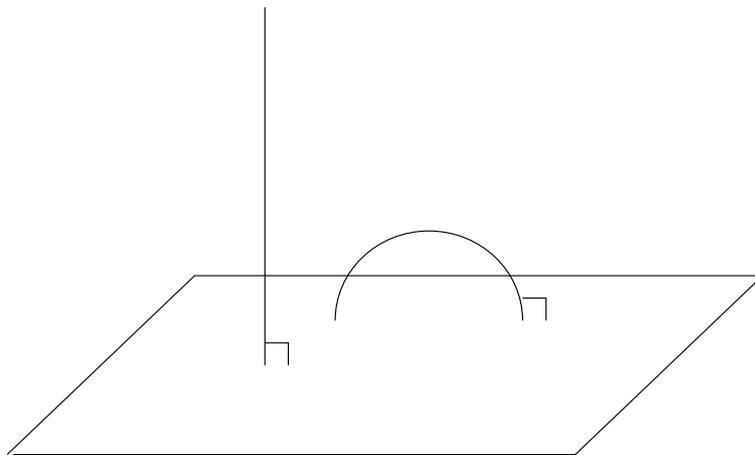


Figura 1.1: Geodésicas no Modelo do Semi-Espaço

O Modelo da Bola (Beltrami).

Neste modelo, o Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^n é representado pela bola $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ de raio unitário e centro na origem

$$\mathbb{B}^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$$

com a métrica $g_{ij}(x) = \frac{4\delta_{ij}}{(1 - |x|^2)^2}$.

As geodésicas neste modelo são os diâmetros ou os arcos de círculos ortogonais ao bordo da bola \mathbb{B}^n (Figura 1.2).

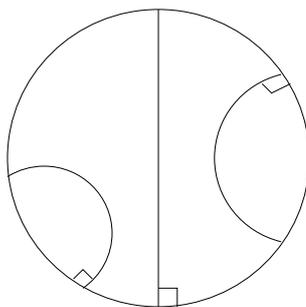


Figura 1.2: Geodésicas no Modelo da Bola

O Modelo do Hiperbolóide ou Modelo de Lorentz.

Para apresentarmos este modelo, consideremos no espaço vetorial \mathbb{R}^{n+1} , com a pseudo-métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$, definida por

$$\langle x, y \rangle = -x_0y_0 + x_1y_1 + \dots + x_{n-1}y_{n-1} + x_ny_n, \quad (1.1)$$

onde $x = (x_0, \dots, x_n)$ e $y = (y_0, \dots, y_n)$ são vetores em \mathbb{R}^{n+1} . Esta pseudo-métrica é induzida pela forma quadrática

$$Q(x_0, \dots, x_n) = -(x_0)^2 + \sum_{i=1}^n (x_i)^2.$$

O produto interno definido pela equação (1.1) é chamado produto interno de Lorentz e $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ é chamado Espaço de Lorentz e indicado por \mathbb{L}^{n+1} . Dado um número real $r > 0$, considere a hipersuperfície

$$\{x \in \mathbb{L}^{n+1}; \langle x, x \rangle = -1/r^2\}.$$

Essa hipersuperfície (hiperbolóide de duas folhas) tem duas componentes conexas. Escolhemos a componente conexa correspondente a $x_n > 0$ e pomos

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{L}^{n+1}; x_0 > 0 \text{ e } \langle x, x \rangle = -1/r^2\},$$

com a métrica induzida pelo produto interno Lorentziano. Devemos notar que esta métrica em \mathbb{H}^n é de fato Riemanniana.

As geodésicas neste modelo são interseções de planos passando pela origem de \mathbb{L}^{n+1} com \mathbb{H}^n , ou seja, ramos de hipérbolés (Figura 1.3).

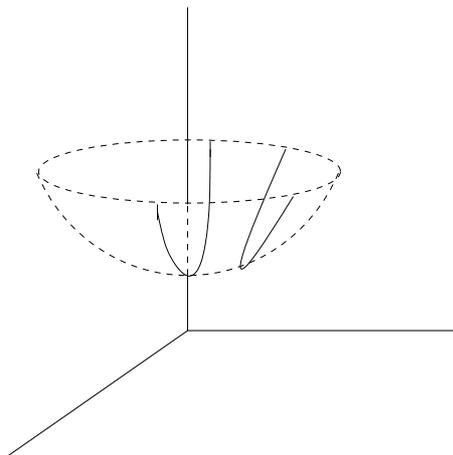


Figura 1.3: Geodésicas no Modelo de Lorentz

1.2.1 Superfícies Umbílicas do Espaço Hiperbólico

Utilizamos o modelo do semi-espço de Poincaré para o \mathbb{H}^3 e identificamos as superfícies completas e umbílicas de \mathbb{H}^3 .

- **Superfícies totalmente geodésicas ou planos geodésicos.**

No modelo do semi-espço, são identificados como os planos euclidianos verticais e os hemisférios euclidianos da forma

$$\mathbb{P}(a) = \{(x, y, z) \in \mathbb{H}^3; x^2 + y^2 + z^2 = a^2\}, \text{ com } a > 0,$$

que intersectam ortogonalmente o plano XY. A curvatura média destas superfícies é $H = 0$ (Figura 1.4).

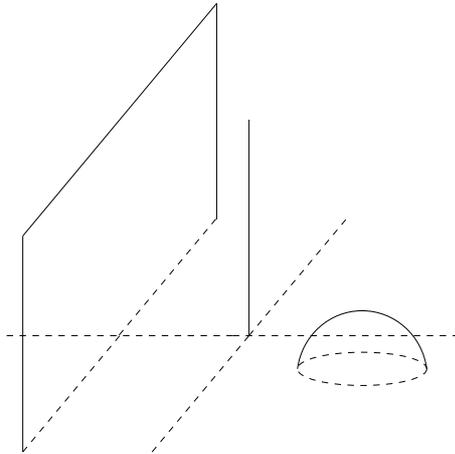


Figura 1.4: Planos Geodésicos

- **Esferas Hiperbólicas.**

São esferas euclidianas que estão totalmente contidas em \mathbb{H}^n . A curvatura média destas superfícies satisfaz $|H| > 1$, sendo $H > 0$ quando a orientação é escolhida de modo que o vetor \vec{H} aponte para o interior da esfera (Figura 1.5).

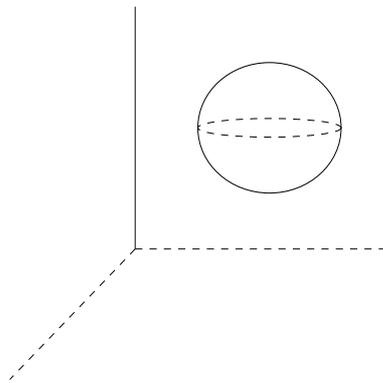


Figura 1.5: Esferas Hiperbólicas

- **Horoesferas.**

São os planos horizontais $L(a) = \{z = a\}$ para todo $a > 0$ e as esferas euclidianas em \mathbb{R}_+^3 tangentes ao plano XY. A curvatura média destas superfícies satisfaz $|H| = 1$. Se considerarmos a horoesfera como $L(a)$, $H > 0$ quando a orientação é escolhida de tal forma que \vec{H} aponte para cima. Nas esferas, $H > 0$ quando a orientação é

escolhida de modo que \vec{H} aponta para o interior da esfera (Figura 1.6).

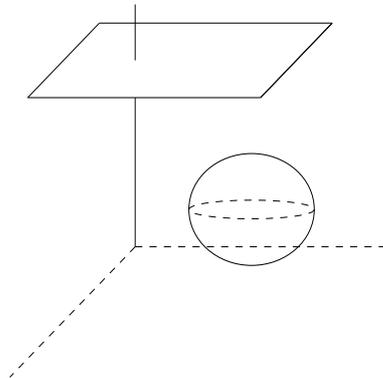


Figura 1.6: Horoesferas

• **Hipersuperfícies Equidistantes.** São os planos euclidianos inclinados transversais ao plano XY e as calotas esféricas euclidianas incluídas em \mathbb{R}_+^3 que não são hemisférios e cujo bordo é um círculo euclidiano no plano XY. A curvatura média destas superfícies satisfaz $0 \leq |H| < 1$. Portanto, se o centro euclidiano está em \mathbb{R}_+^3 , $H > 0$ quando a orientação é escolhida de modo que \vec{H} aponta para o interior. Se o centro euclidiano está em $\{z < 0\}$, então $H > 0$ quando a orientação é escolhida de tal forma que \vec{H} aponta para o exterior (Figura 1.7).

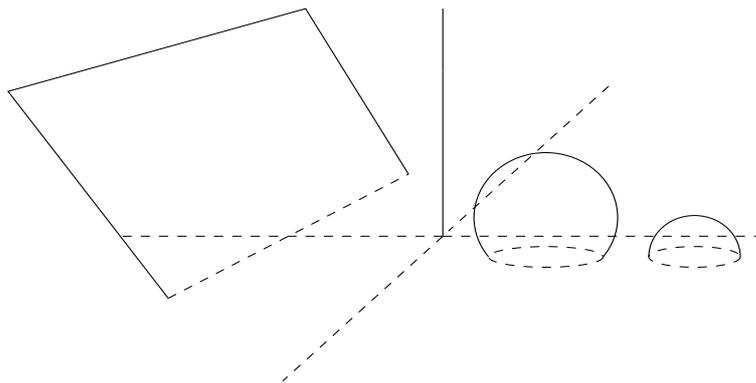


Figura 1.7: Hipersuperfícies Equidistantes

1.3 Princípio do Máximo

Nesta seção, apresentamos o Princípio do Máximo para a equação da curvatura média para gráficos horizontais no Espaço Hiperbólico. Para isto, precisamos fazer algumas considerações.

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio limitado e $u : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\overline{\Omega})$, o gráfico de u , $G(u)$, em \mathbb{R}^3 é dado por

$$G(u) = \{(x, y, u(x, y)) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \overline{\Omega}\}.$$

Sabemos que $G(u)$ é uma hipersuperfície regular em \mathbb{R}^3 com curvatura média H se, e somente se, u verifica a equação

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = 2H, \quad (1.2)$$

onde ∇u representa o gradiente euclidiano de u .

Agora, consideremos um plano geodésico \mathbb{P} em \mathbb{H}^3 , sem perda de generalidade, podemos pensar $\mathbb{P} = \{y = 0\}$. Sejam $\Omega \subset \mathbb{P}$ um domínio limitado e $u : \Omega \subset \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe $C^2(\overline{\Omega})$. Definimos o gráfico horizontal de u , $G_h(u)$, em \mathbb{H}^3 por

$$G_h(u) = \{(x, u(x, z), z) \in \mathbb{H}^3; (x, 0, z) \in \overline{\Omega}\}.$$

Sabemos que se $G_h(u)$ tem curvatura média H em \mathbb{H}^3 , então u satisfaz a equação

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right) = \frac{2}{z} \left(H + \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right), \quad (1.3)$$

onde ∇u representa o gradiente euclidiano de u .

É importante observarmos que as equações (1.2) e (1.3) são equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem e, portanto, verificam um princípio do máximo.

O princípio do máximo tem sido uma ferramenta muito útil no estudo das hipersuperfícies com curvatura média constante, quando estudamos alguns problemas que envolvem unicidade. Uma boa referência para isto é [3] e o Cap. 3 de [7].

Trataremos de duas situações, uma que diz respeito a duas hipersuperfícies tangentes em pontos interiores, e a outra que está relacionada com a tangência em pontos dos bordos.

Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies conexas em \mathbb{H}^n que são tangentes em $p \in M_1 \cap M_2$ e têm o mesmo vetor normal unitário no ponto de tangência. Numa vizinhança de p , M_1 e M_2 são gráficos horizontais de funções f_1 e f_2 , respectivamente, onde $f_1, f_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, com Ω sendo um conjunto aberto do plano tangente comum a ambas hipersuperfícies no ponto de interseção.

Definição 1.1. *Com as notações anteriores, dizemos que M_1 está sobre M_2 na vizinhança de p , se $f_1 \geq f_2$ nesta vizinhança. Denotamos isso por $M_1 \geq M_2$.*

Teorema 1.2. *(Princípio do Máximo no Interior) Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies em \mathbb{H}^n e seja $p \in M_1 \cap M_2$ um ponto interior comum a ambas as hipersuperfícies. Suponhamos que M_1 e M_2 são tangentes em p e que, localmente em torno de p , elas estão orientadas por campos de vetores normais unitários que coincidem em p . Sejam H_1 e H_2 as curvaturas médias com relação a estes campos. Se, numa vizinhança de p , temos $M_1 \geq M_2$ e $H_1 \leq H_2$, então $M_1 = M_2$ na vizinhança de p .*

Demonstração: Podemos supor, a menos de uma mudança de coordenadas, que $T_p M_1 = T_p M_2 = \pi = \{x_1 = 0\}$. Sejam M_1 e M_2 localmente representadas por funções f_1 e f_2 tais que $f_1(\mathbf{a}) = f_2(\mathbf{a}) = p = (0, x_2, \dots, x_n)$ e $\mathbf{a} = (x_2, \dots, x_n)$, e $f_1 \geq f_2$ em algum conjunto aberto $\Omega \subset \pi$ que contém \mathbf{a} . Portanto, estas funções satisfazem a equação da curvatura média para gráficos horizontais no espaço hiperbólico, assim;

$$\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) = \frac{n}{x_n} \left(H + \frac{u_n}{W(u)} \right), \quad (1.4)$$

onde ∇u representa o gradiente euclidiano de $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ e $W(u) = (1 + \sum u_i^2)^{1/2}$. Reescrevendo a equação (1.4), obtemos

$$x_n \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) - \frac{nu_n}{W(u)} = nH,$$

que podemos escrever na forma

$$F(x, q, r) = nH, \quad (1.5)$$

onde $q = (q_i)$, $q_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $r = (r_{ij})$, $r_{ij} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, \dots, n$, F é uma função suave definida em $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2}$ e H é a curvatura média do gráfico de u . Observe que

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{W(u)} \right) &= \sum_i \left(\frac{u_i}{W(u)} \right)_i \\
&= \sum_i \frac{u_{ii}W - u_i W_i}{W^2} \\
&= \sum_i \frac{u_{ii}}{W} - \frac{1}{W^2} \sum_i u_i W_i \\
&= \sum_i \frac{u_{ii}}{W} - \frac{1}{W^2} \sum_i u_i \left(\sqrt{1 + \sum_j u_j^2} \right)_i \\
&= \sum_{i,j} \frac{\delta_{ij} u_{ij}}{W} - \frac{1}{W^2} \sum_i \frac{u_i u_j u_{ij}}{W}.
\end{aligned}$$

Logo a função F é dada explicitamente por

$$F(x, q, r) = \frac{x_n}{W} \left(\sum_{i,j} \left(\delta_{ij} - \frac{q_i q_j}{W^2} \right) r_{ij} \right) - \frac{nq_n}{W}.$$

Quando $u = f_i$, $i = 1, 2$, usamos na equação (1.5) a notação q^i , r^i e H_i . Como estamos supondo $H_1 \leq H_2$, temos

$$F(x, q^2, r^2) - F(x, q^1, r^1) \geq 0. \quad (1.6)$$

Definamos agora

$$\alpha(t) := F(x, tq^2 + (1-t)q^1, tr^2 + (1-t)r^1).$$

Pela equação (1.6), temos $\alpha(0) \leq \alpha(1)$, logo, pelo teorema fundamental do cálculo segue-se que:

$$\int_0^1 \alpha'(t) dt = \alpha(1) - \alpha(0) \geq 0.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\alpha'(t) &= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial q_i}{\partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} \frac{\partial r_{ij}}{\partial t} \\
&= \sum_i \frac{\partial F}{\partial q_i} (q^2 - q^1) + \sum_{i,j} \frac{\partial F}{\partial r_{ij}} (r^2 - r^1).
\end{aligned}$$

Daí, usando a regra da cadeia, podemos escrever

$$\mathcal{L}w = \sum \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\xi) dt w_{ij} + \sum \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial q_i}(\xi) dt w_i \geq 0,$$

onde $w = f_2 - f_1$, $w_i = \frac{\partial w}{\partial x_i}$, $w_{ij} = \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j}$ e $\xi = \xi(t) = (x, tq^2 + (1-t)q^1, tr^2 + (1-t)r^1)$.

O lado esquerdo da inequação acima define um operador \mathcal{L} cujos coeficientes são

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial r_{ij}}(\xi) dt \text{ e } b_i = \int_0^1 \frac{\partial F}{\partial q_i}(\xi) dt.$$

Estes coeficientes são funções contínuas de x . É fácil ver que são limitados, que $a_{ij} = a_{ji}$ e que a forma quadrática associada a matriz (a_{ij}) é positiva definida.

Como $\mathcal{L}w \geq 0$, $w(\mathbf{a}) = 0$ e $w \leq 0$ em Ω (w atinge um máximo em Ω), aplicamos o princípio do máximo de Hopf, no interior, (veja [3], pág. 19) para concluir que w é constante e como $w(a) = 0$, temos $w \equiv 0$ em Ω , ou seja, $f_1 = f_2$.

□

Também é importante considerarmos o caso em que o ponto de tangência p se localiza no bordo das hipersuperfícies. Neste caso, como antes, assumimos que M_1 e M_2 são tangentes no ponto p e que os seus campos de vetores unitários normais coincidem neste ponto. Além disso, necessitamos que os bordos ∂M_1 e ∂M_2 sejam diferenciáveis e tangentes em p e os campos de vetores unitários conormais interiores aos bordos, ν_1 e ν_2 , também coincidam neste ponto.

Teorema 1.3. (*Princípio do Máximo no Bordo*) *Sejam M_1 e M_2 hipersuperfícies em \mathbb{H}^n , com bordos diferenciáveis e seja $p \in \partial M_1 \cap \partial M_2$. Suponhamos que ∂M_1 e ∂M_2 são tangentes em p e que, localmente em torno de p , M_1 e M_2 estão orientadas por campos de vetores unitários normais que coincidem em p . Suponha também que os campos de vetores unitários conormais interiores aos bordos coincidam em p . Sejam H_1 e H_2 as curvaturas médias de M_1 e M_2 com relação a tais campos. Se numa vizinhança de p , temos $M_1 \geq M_2$ e $H_1 \leq H_2$, então $M_1 = M_2$ na vizinhança de p .*

Demonstração: Este teorema pode ser demonstrado usando os mesmos argumentos de antes, apenas com pequenas alterações. A principal diferença é que aqui as funções f_i estão definidas em um conjunto $\tilde{\Omega}$ que é a união de um conjunto aberto Ω de π com uma hipersuperfície Γ em π contida no bordo de Ω . O ponto p , e também o ponto \mathbf{a} , pertencem a Γ . Usando as mesmas notações e os mesmos argumentos da prova anterior, concluímos que $\mathcal{L}w \geq 0$ e $w \geq 0$ em $\tilde{\Omega}$. As hipóteses sobre os espaços tangentes nos bordos de M_1 e M_2 implicam que, além de $w(\mathbf{a}) = 0$, a derivada de w na direção normal ao bordo de $\tilde{\Omega}$ no ponto \mathbf{a} é zero. O resultado segue agora do princípio do máximo no bordo de Hopf (veja [3], pág. 20).

□

1.4 Fórmula do Fluxo

A fórmula do fluxo para hipersuperfícies com curvatura média constante $H \neq 0$ tem sido bastante utilizada para tratar alguns problemas no Espaço Hiperbólico. Foi provada por Robert Kusner [13] em sua tese de doutorado. Faremos aqui um esquema da prova em \mathbb{R}^3 ou em \mathbb{H}^3 , mas é importante ressaltarmos que o seu desenvolvimento não depende do espaço ambiente a ser considerado.

Teorema 1.4. *Sejam M e D hipersuperfícies compactas imersas em \mathbb{R}^3 ou em \mathbb{H}^3 tais que $\partial M = \partial D$. Suponhamos que M tem curvatura média constante $H \neq 0$ e que $\Omega := M \cup D$ é um ciclo orientado, onde M está orientada pelo vetor curvatura média $\vec{H} \neq \vec{0}$. Seja Y um campo de Killing em \mathbb{R}^3 ou em \mathbb{H}^3 . Então*

$$\int_D \langle Y, \eta_D \rangle = \frac{1}{2H} \int_{\partial M} \langle Y, \nu \rangle, \quad (1.7)$$

onde η_D é o vetor unitário normal a D na orientação de Ω e ν é o vetor unitário conormal interior ao longo de ∂M .

Demonstração: Sejam W o domínio de \mathbb{R}^3 ou de \mathbb{H}^3 limitado por Ω e Y um campo de Killing em \mathbb{R}^3 ou em \mathbb{H}^3 (note que, em ambos os casos, $\operatorname{div}(Y) = 0$).

Sabemos que em uma variedade qualquer

$$\operatorname{div}(Y) = \operatorname{tr}(X \rightarrow \nabla_X Y) = \sum_{i=1}^n \langle E_i, \nabla_{E_i} X \rangle = 0,$$

onde $\{E_i\}$ é um referencial geodésico ortonormal e, como Y é um campo de Killing, satisfaz a equação $\langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle \nabla_Z X, Y \rangle = 0$. Daí, pelo Teorema da Divergência, temos

$$0 = \int_D \operatorname{div}(Y) = \int_M \langle Y, \eta_M \rangle + \int_D \langle Y, \eta_D \rangle, \quad (1.8)$$

onde η_M é o vetor unitário normal a M .

Consideremos uma variação de M com campo variacional $Y|_M$ e seja $A(t)$ o funcional área para esta variação. Como o campo Y é de Killing, temos

$$0 = A'(0) = \int_M \frac{d}{dt} dM_t = \int_M \operatorname{div}_M(Y),$$

onde $\operatorname{div}_M(Y) = \operatorname{tr}(X \rightarrow (D_X Y)^T)$ e D denota a conexão Riemanniana do espaço ambiente, \mathbb{R}^3 ou \mathbb{H}^3 . Para um referencial geodésico em M , $\{e_i\}$, $i = 1, 2$, temos

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_M(Y) &= \sum \langle D_{e_i} Y, e_i \rangle \\ &= \sum e_i \langle Y, e_i \rangle - \langle D_{e_i} e_i, Y \rangle \\ &= \sum e_i \langle Y^T, e_i \rangle - \langle (D_{e_i} e_i)^T, Y \rangle - \langle (D_{e_i} e_i)^N, Y \rangle \\ &= \sum \langle D_{e_i} Y^T, e_i \rangle + \langle Y^T, D_{e_i} e_i \rangle - \langle (D_{e_i} e_i)^T, Y \rangle - \langle (D_{e_i} e_i)^N, Y \rangle \\ &= \sum \langle D_{e_i} Y^T, e_i \rangle - \langle (D_{e_i} e_i)^N, Y \rangle \\ &= \operatorname{div}_M Y^T - \sum k_i \langle \eta_M, Y \rangle \\ &= \operatorname{div}_M Y^T - 2H \langle \eta_M, Y \rangle, \end{aligned}$$

onde os k_i denotam as curvaturas principais da imersão. Donde obtemos,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \operatorname{div}_M(Y) \\ &= -2H \int_M \langle Y, \eta_M \rangle + \int_M \operatorname{div}_M(Y^T) \\ &= -2H \int_M \langle Y, \eta_M \rangle - \int_{\partial M} \langle Y, \nu \rangle. \end{aligned}$$

Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_M \operatorname{div}_M(Y^T) = - \int_{\partial M} \langle Y^T, \nu \rangle = - \int_{\partial M} \langle Y, \nu \rangle.$$

Assim,

$$-2H \int_M \langle Y, \eta_M \rangle = \int_{\partial M} \langle Y, \nu \rangle.$$

Pela equação (1.8), obtemos o resultado desejado,

$$\int_D \langle Y, \eta_D \rangle = \frac{1}{2H} \int_{\partial M} \langle Y, \nu \rangle.$$

□

Mostraremos agora uma outra versão para a fórmula do fluxo conhecida como fórmula do balanço, embora o enunciado e a demonstração estejam em \mathbb{R}^3 o resultado também é válido em \mathbb{H}^3 .

Teorema 1.5. *Sejam M uma superfície compacta com bordo ∂M e $\phi : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante $H \neq 0$. Então,*

$$H \int_{\partial M} \gamma \times \gamma' = - \int_{\partial M} N \times \gamma',$$

onde $N : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a aplicação normal de Gauss de ϕ e $\gamma : \partial M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a restrição de ϕ ao bordo ∂M de M .

Demonstração: Defina a 1-forma w em M com valores em \mathbb{R}^3 por

$$w_p(v) = (H\phi + N) \times d\phi_p(v), \quad p \in M \text{ e } v \in T_pM.$$

Como H é constante, temos que

$$dw = d(H\phi + N) \times d\phi = (Hd\phi + dN) \times d\phi = Hd\phi \times d\phi + dN \times d\phi.$$

Sendo $d\phi = \phi_u du + \phi_v dv$, então

$$\begin{aligned} d\phi \times d\phi &= (\phi_u du + \phi_v dv) \times (\phi_u du + \phi_v dv) \\ &= \phi_u \times \phi_u dud u + \phi_v \times \phi_u dv du + \phi_u \times \phi_v du dv + \phi_v \times \phi_v dv dv \\ &= 2(\phi_u \times \phi_v) dudv. \end{aligned}$$

Daí, como

$$dN = N_u du + N_v dv = (a_{11} du + a_{21} dv) du + (a_{12} du + a_{22} dv) dv,$$

temos que

$$dN \times d\phi = (N_u \times \phi_v - N_v \times \phi_u) dudv = [(a_{11} + a_{22}) \phi_u \times \phi_v] dudv = -2H(\phi_u \times \phi_v) dudv.$$

Portanto

$$dw = 2H(\phi_u \times \phi_v) dudv - 2H(\phi_u \times \phi_v) dudv = 0.$$

Do Teorema de Stokes, temos

$$\int_{\partial M} (H\gamma + N) \times \gamma' = 0.$$

Logo

$$H \int_{\partial M} \gamma \times \gamma' = - \int_{\partial M} N \times \gamma'.$$

□

Capítulo 2

Discos com Área Limitada em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3

2.1 Introdução

Neste capítulo, tratamos de uma imersão $\phi : D \rightarrow \mathbb{Q}$, com bordo circular e curvatura média constante $H \neq 0$, onde D é um disco bidimensional e $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^3$.

Na seção 2.2, apresentamos alguns resultados, juntamente com suas respectivas demonstrações, que serão essenciais no decorrer deste capítulo.

Na seção 2.3, iniciamos o estudo no espaço euclidiano \mathbb{R}^3 com base em [15], por López e Montiel. De início mostramos que se a área da imersão ϕ é menor do que ou igual a área da calota esférica maior com bordo igual a $\phi(\partial D)$, então a imersão ϕ é umbílica e sua imagem é uma calota esférica.

Ainda em \mathbb{R}^3 , utilizaremos uma Fórmula tipo Minkowski para obter estimativas globais para a área e o volume da imersão ϕ que não dependem da curvatura média H . Estas estimativas foram obtidas por Hinojosa [9], melhorando resultados obtidos por López e Montiel [16].

Finalmente, na seção 2.4 tratamos de resultados análogos aos anteriores, mas agora no espaço hiperbólico. Fazemos isto seguindo, em grande parte, o trabalho de

López [14].

2.2 Preliminares

Nesta seção, enunciamos alguns resultados necessários para o desenvolvimento deste capítulo. Como é usual, definimos a área e o volume (volume algébrico) de ϕ respectivamente por:

$$A = A(\phi) := \int_D dD = \int_D |\phi_u \wedge \phi_v| \, dudv \quad (2.1)$$

$$V = V(\phi) := -\frac{1}{3} \int_D \langle \phi, N \rangle dD = -\frac{1}{3} \int_D \langle \phi, \phi_u \wedge \phi_v \rangle \, dudv. \quad (2.2)$$

onde N representa a aplicação de Gauss de ϕ .

Uma aplicação simples, porém interessante da fórmula do fluxo (1.7), é dada na proposição abaixo.

Proposição 2.1. *Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante H e bordo $\partial M = \Gamma$ uma curva de Jordan de comprimento L contida num plano $\mathbb{P} \subset \mathbb{R}^3$. Seja D a região planar limitada pela curva Γ e denote por \mathcal{A} a área de D . Então*

$$|H| \leq \frac{L}{2\mathcal{A}}$$

Em particular, se $\partial M = \Gamma$ é um círculo unitário, então $|H| \leq 1$.

Demonstração: Considere o ciclo orientado $M \cup D$ de modo que a orientação em M coincida com aquela dada pelo vetor curvatura média. Sejam ν o vetor unitário conormal a M (interior) ao longo de Γ , η_D o campo unitário normal a D e Y um campo de Killing em \mathbb{R}^3 . Pela fórmula do fluxo temos:

$$2H \int_D \langle Y, \eta_D \rangle = \int_\Gamma \langle Y, \nu \rangle.$$

Em \mathbb{R}^3 os campos de Killing são campos de vetores constantes, logo podemos tomar $Y = \eta_D$ e obtemos:

$$\begin{aligned}
2|H|\mathcal{A} &= \left| \int_{\Gamma} \langle Y, \nu \rangle \right| \\
&\leq \int_{\Gamma} |\langle Y, \nu \rangle| \\
&\leq \int_{\Gamma} 1 = L.
\end{aligned}$$

Donde,

$$|H| \leq \frac{L}{2\mathcal{A}}.$$

Se Γ é um círculo unitário, então $\mathcal{A} = \pi$ e $L = 2\pi$. Daí, neste caso, $|H| \leq 1$.

□

A proposição acima é originalmente um resultado obtido por Heinz [8] sem usar a fórmula do fluxo (1.7).

É possível encontrarmos um resultado análogo para o Espaço Hiperbólico \mathbb{H}^3 , utilizando também a fórmula do fluxo (1.7).

Proposição 2.2. *Seja $M \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície compacta imersa em \mathbb{H}^3 com curvatura média constante H e bordo $\partial M = \Gamma$ uma curva de Jordan de comprimento L contido num plano totalmente geodésico $\mathbb{P}(a) \subset \mathbb{H}^3$, $a > 0$. Seja D a região planar limitada pela curva Γ e denote por \mathcal{A} a área de D . Seja $r > 0$ o raio da menor bola $B(\tilde{a}, r) \subset \mathbb{P}(a)$ que contém D , com $\tilde{a} = (0, 0, a)$. Então*

$$|H| \leq \frac{L}{2\mathcal{A}} \cosh r.$$

Em particular, se $\partial M = \Gamma$ é um círculo de raio ρ , então $|H| \leq \coth \rho$.

Demonstração: Sejam $\eta_D = \frac{p}{|p|}$ o campo unitário normal a D e ν o vetor unitário interior conormal a M ao longo de Γ . Tomemos o campo de Killing em \mathbb{H}^3 definido por $Y(p) = p = (p_1, p_2, p_3)$. Assim, $|Y| = \frac{a}{p_3}$. Note que $\sqrt{a^2 - R^2} \leq p_3 \leq a$. Olhando a Figura (2.1) é fácil ver que $\cosh r = \sec \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 - R^2}}$. Logo $1 \leq |Y| \leq \cosh r$.

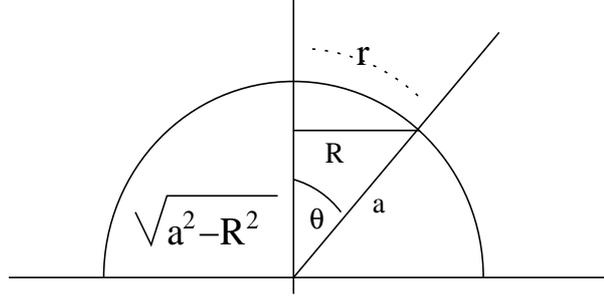


Figura 2.1: Cálculo do $\cosh r$

Através da fórmula do fluxo (1.7), obtemos

$$2H \int_D \langle Y, \eta_D \rangle = \int_\Gamma \langle Y, \nu \rangle.$$

Como $\langle Y, \eta_D \rangle = \left\langle p, \frac{p}{|p|} \right\rangle = |p| = |Y|$ e $1 \leq \frac{a}{p_3} = |Y| \leq \frac{a}{r}$, temos

$$\mathcal{A} \leq \int_D \langle Y, \eta_D \rangle = \int_D |Y| \leq \frac{a}{r} \mathcal{A}.$$

Por outro lado,

$$\int_\Gamma \langle Y, \nu \rangle \leq \int_\Gamma |\langle Y, \nu \rangle| = \int_\Gamma |Y| \leq L \cosh r.$$

Portanto

$$\begin{aligned} 2|H| \left| \int_D \langle Y, \eta_D \rangle \right| &= \left| \int_\Gamma \langle Y, \nu \rangle \right| \\ &\leq \int_\Gamma |\langle Y, \nu \rangle| \\ &= \int_\Gamma |Y| \\ &= L \cosh r. \end{aligned}$$

Donde

$$|H| \leq \frac{L}{2\mathcal{A}} \cosh r.$$

Em particular, quando Γ é um círculo de raio ρ , então $r = \rho$. Daí temos que $\mathcal{A} = \pi \sinh^2 \rho$ e $L = 2\pi \sinh \rho$. Logo,

$$|H| \leq \coth \rho.$$

□

Sejam S uma esfera de raio $1/|H|$ em \mathbb{R}^3 e P um plano que corta S de modo que a interseção entre S e P é um círculo unitário. Obtemos então duas calotas esféricas, uma maior e uma menor, com áreas A_+ e A_- respectivamente, cujos valores em função de H apresentamos a seguir.

Proposição 2.3. *Seja S uma esfera de raio $1/|H|$ em \mathbb{R}^3 , então a área da calota esférica menor, com bordo igual a um círculo de raio 1, é igual a*

$$A_- = \frac{2\pi}{H^2}(1 - \sqrt{1 - H^2})$$

e a área da calota esférica maior, com bordo igual a um círculo de raio 1, é igual a

$$A_+ = \frac{2\pi}{H^2}(1 + \sqrt{1 - H^2}).$$

Demonstração: A prova dessa proposição é feita de forma elementar com a ajuda do Cálculo Diferencial e Integral.

Note que, na Proposição 2.1 obtivemos que $|H| \leq 1$. Logo $1 - H^2 \geq 0$. Portanto, $\sqrt{1 - H^2}$ está bem definido.

Consideremos agora uma esfera geodésica S em \mathbb{H}^3 e P um plano que corta S tal que a interseção entre S e P é um círculo de raio ρ . Dessa forma obtemos duas calotas esféricas, uma maior e uma menor, com áreas A_+ e A_- respectivamente.

Proposição 2.4. *Seja S uma esfera geodésica em \mathbb{H}^3 , então a área da calota esférica menor, com bordo igual a um círculo de raio ρ , é igual a*

$$A_- = \frac{2\pi}{H^2 - 1} \left(1 - \sqrt{\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho} \right)$$

e a área da calota esférica maior, com bordo igual a um círculo de raio ρ , é igual a

$$A_+ = \frac{2\pi}{H^2 - 1} \left(1 + \sqrt{\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho} \right).$$

Demonstração: A prova dessa proposição é feita de forma análoga à anterior porém utilizamos o modelo da bola do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 e pomos o centro da esfera S coincidindo com o centro da bola \mathbb{B}^3 (veja a seção (1.2) do capítulo 1).

Como $|H| \leq \coth \rho$, pela Proposição (2.2). Temos, $\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho \geq 0$. Portanto, $\sqrt{\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho}$ está bem definido.

Seja $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão com curvatura média constante $H \neq 0$, então é fácil ver que

$$\Delta|\phi|^2 = 4(1 + H\langle N, \phi \rangle), \quad (2.3)$$

onde N é a aplicação de Gauss de ϕ .

Integrando a equação (2.3) obtemos

$$\begin{aligned} \int_D \Delta|\phi|^2 &= \int_D 4(1 + H\langle N, \phi \rangle) \\ &= 4A + 4H \int_D \langle N, \phi \rangle \\ &= 4(A - 3HV). \end{aligned}$$

Por outro lado, usando o teorema de Green, temos

$$\int_D \Delta|\phi|^2 = -2 \int_{\partial D} \langle \phi, \nu \rangle,$$

onde ν é o campo unitário cornormal interior a $\phi(D)$ ao longo de $\phi(\partial D)$.

Portanto,

$$A - 3HV = -\frac{1}{2} \int_{\partial D} \langle \phi, \nu \rangle. \quad (2.4)$$

A equação (2.4) é conhecida como a fórmula de Minkowski.

Note também que, no caso em que $\phi(\partial D) = S^1$ é um círculo unitário, a curvatura geodésica K_g de $\phi(\partial D)$ é dada por $K_g = -\langle \phi, \nu \rangle$. Assim neste caso a fórmula de Minkowski é

$$A - 3HV = \frac{1}{2} \int_{\partial D} K_g. \quad (2.5)$$

2.3 Discos com Área Limitada em \mathbb{R}^3

Nesta seção consideremos uma imersão $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, com curvatura média constante $H \neq 0$, e bordo $\phi(\partial D) = S^1$ um círculo unitário contido num plano π (Figura 2.2), onde D é um disco bidimensional em \mathbb{R}^3 .

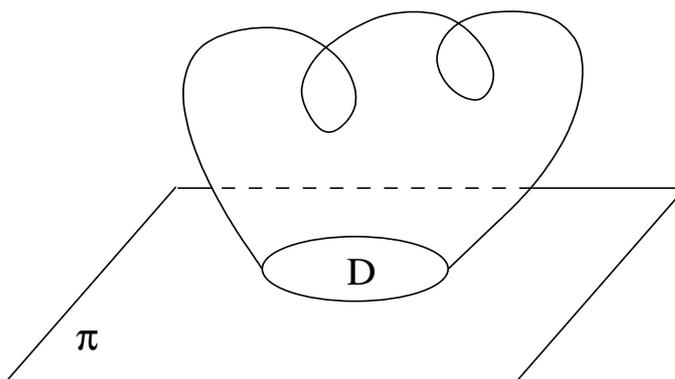


Figura 2.2: Disco imerso em \mathbb{R}^3

Veremos que se a área da imersão ϕ é menor do que ou igual a área da calota esférica maior com bordo igual a $\phi(\partial D)$, então a imersão ϕ é umbílica e sua imagem é uma calota esférica. Para isto vamos utilizar uma desigualdade isoperimétrica provada por Barbosa e Do Carmo em [2].

Teorema 2.5. (*Desigualdade Isoperimétrica*) *Seja M uma superfície generalizada. Seja D um domínio simplesmente conexo em M com área A e limitado por uma curva Γ , fechada, C^1 por partes e de comprimento L . Sejam K_0 um número real arbitrário e K a curvatura Gaussiana de M . Suponha que em uma vizinhança de um ponto singular, K é limitada por cima. Então,*

$$L^2 \geq 4\pi A \left(1 - \frac{1}{2\pi} \int_D (K - K_0)^+ dM - \frac{K_0 A}{4\pi} \right) \quad (2.6)$$

e vale a igualdade se, e somente se, $K \equiv K_0$ e D é um disco geodésico.

Demonstração: Veja [2].

□

Uma consequência quase imediata do teorema (2.5) é

Proposição 2.6. *Se $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão como descrita anteriormente. Então,*

$$A \leq A_- \text{ ou } A \geq A_+.$$

Demonstração: Nas condições acima, a desigualdade (2.6) é dada por

$$L^2 - 2A \left(2\pi - \int_D (K - K_0)^+ dA \right) + K_0 A^2 \geq 0, \quad (2.7)$$

onde A é a área de $\phi(D)$, L é comprimento de ∂D , dA é a medida de área, K é a curvatura Gaussiana, K_0 é um número real arbitrário e $(K - K_0)^+$ é a parte positiva de $(K - K_0)$.

Como ∂D é um círculo de raio 1, temos que $L = 2\pi$. Tomando $K_0 = H^2$ e lembrando que $K \leq H^2$ (com a igualdade só em pontos umbílicos), obtemos

$$H^2 A^2 - 4\pi A + 4\pi^2 \geq 0. \quad (2.8)$$

Portanto

$$A \leq \frac{2\pi}{H^2}(1 - \sqrt{1 - H^2}) = A_- \text{ ou } A \geq \frac{2\pi}{H^2}(1 + \sqrt{1 - H^2}) = A_+.$$

A igualdade é válida se, e somente se, a imersão ϕ é umbílica.

□

Teorema 2.7. *Seja $\phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão como descrita anteriormente. Então,*

$$A \geq A_-.$$

A igualdade é válida se, e somente se, a imersão ϕ é umbílica.

Demonstração: Através da fórmula do fluxo (1.7), obtemos o seguinte

$$\int_D \langle Y, \eta_D \rangle = \frac{1}{2H} \int_{\partial D} \langle Y, \nu \rangle.$$

Seja $Y = e_3 = \eta_D = (0, 0, 1)$ um campo de Killing em \mathbb{R}^3 .

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} \langle \nu, e_3 \rangle &= 2H \int_D 1 \\ &= 2\pi H.\end{aligned}$$

Sabendo que $|\phi| = 1$ em ∂D , então $\langle \phi, \phi' \rangle = 0$. Logo, $\{\phi, \phi', e_3\}$ formam uma base ortonormal em \mathbb{R}^3 . Daí,

$$\nu = a_1\phi + a_2\phi' + a_3e_3.$$

Mas, como ν e ϕ' são ortogonais temos $\langle \nu, \phi' \rangle = 0$. Portanto, $a_2 = 0$. Daí,

$$\nu = a_1\phi + a_3e_3.$$

Vamos determinar as constantes a_1 e a_3 , para isto fazamos $\langle \nu, \phi \rangle$ e $\langle \nu, e_3 \rangle$, daí obtemos

$$\nu = \langle \nu, \phi \rangle \phi + \langle \nu, e_3 \rangle e_3.$$

Como $|\nu| = 1$, temos então

$$\langle \nu, \phi \rangle^2 = 1 - \langle \nu, e_3 \rangle^2.$$

Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, encontramos a seguinte relação

$$\begin{aligned}\left(\int_{\partial D} \langle \nu, e_3 \rangle\right)^2 &\leq \int_{\partial D} 1 \int_{\partial D} \langle \nu, e_3 \rangle^2 \\ &= 2\pi \int_{\partial D} \langle \nu, e_3 \rangle^2.\end{aligned}$$

Usamos novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz e então,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\partial D} \langle \nu, \phi \rangle\right)^2 &\leq \int_{\partial D} 1 \int_{\partial D} \langle \nu, \phi \rangle^2 \\
&= 2\pi \int_{\partial D} \langle \nu, \phi \rangle^2 \\
&= 2\pi \int_{\partial D} (1 - \langle \nu, e_3 \rangle^2) \\
&= 2\pi \int_{\partial D} 1 - 2\pi \int_{\partial D} \langle \nu, e_3 \rangle^2 \\
&\leq 4\pi^2 - \left(\int_{\partial D} \langle \nu, e_3 \rangle\right)^2 \\
&= 4\pi - (2\pi H)^2 \\
&= 4\pi^2(1 - H^2).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\partial D} \langle \nu, \phi \rangle \leq 2\pi\sqrt{1 - H^2}.$$

Agora observe que, a partir do Triedro de Darboux, (veja [5], pág. 261, Ex. 14)

$$\phi'' = K_g \nu + K_n \eta,$$

onde K_g é a curvatura geodésica ao longo de ∂D e K_n é a curvatura normal ao longo de ∂D . Donde,

$$K_g \langle \nu, \nu \rangle = \langle \nu, \phi'' \rangle - K_n \langle \nu, \eta \rangle.$$

Assim, a curvatura geodésica de $\phi(\partial D)$ é dada por

$$K_g = \langle \nu, \phi'' \rangle = -\langle \nu, \phi \rangle. \quad (2.9)$$

Podemos escrever

$$\left| \int_{\partial D} K_g \right| = \left| \int_{\partial D} -\langle \nu, \phi \rangle \right| \leq 2\pi\sqrt{1 - H^2} \quad (2.10)$$

Aplicando o teorema de Gauss-Bonnet e, usando o fato que em \mathbb{R}^3 temos $K \leq H^2$, obtemos

$$2\pi = \int_{\partial D} K_g + \int_D K \leq 2\pi\sqrt{1 - H^2} + H^2 A. \quad (2.11)$$

Donde,

$$A \geq \frac{2\pi - 2\pi\sqrt{1-H^2}}{H^2} = \frac{2\pi}{H^2}(1 - \sqrt{1-H^2}) = A_- \quad (2.12)$$

Se ϕ é umbílica, $K = H^2$ e vale a igualdade na equação (2.12).

Por outro lado, se tomarmos $A = A_-$ teremos a igualdade na equação (2.11) e, conseqüentemente, $K = H^2$. Concluimos que ϕ é umbílica. □

Corolário 2.8. *Se*

$$A \leq A_+,$$

então ϕ é umbílica e sua imagem é a calota esférica maior ou a calota esférica menor.

Demonstração: Da Proposição (2.6), obtivemos que

$$A \leq A_- \text{ ou } A \geq A_+.$$

Se alguma dessas inequações se tornar uma igualdade então vale a igualdade na equação (2.8), logo $K = H^2$. Desse modo, ϕ será umbílica.

Podemos observar que se $A \leq A_+$ então, do teorema (2.7) e da desigualdade (2.6), temos $A = A_-$ ou $A = A_+$, isto é, ϕ é umbílica e sua imagem é uma calota esférica (menor ou maior, respectivamente). □

Em outras palavras se ϕ não é umbílica, então $A > A_+$.

Com este resultado e com a Fórmula de Minkowski, López e Montiel em [16], obtiveram estimativas para o volume V de ϕ em \mathbb{R}^3 que não dependem da curvatura média H . Mais precisamente, eles mostraram que, se ϕ não é umbílica, então

$$V > \frac{2}{3}\pi.$$

O teorema a seguir é um aperfeiçoamento deste resultado.

Teorema 2.9. *Se ϕ não é umbílica, então $A > \frac{29}{10}\pi$ e $V > \frac{9}{10}\pi$.*

Demonstração: Na equação (2.5), como $\phi(\partial D) = S^1$ é um círculo unitário, temos

$$A - 3HV = \frac{1}{2} \int_{\partial D} K_g$$

Logo, da equação (2.10)

$$|A - 3HV| \leq \pi\sqrt{1 - H^2} \quad (2.13)$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, ϕ é totalmente umbílica.

Consideremos σ a segunda forma fundamental de ϕ . Então

$$|\sigma|^2 = 4H^2 - 2K.$$

Por integração, obtemos que

$$\int_D |\sigma|^2 = \int_D (4H^2 - 2K) = 4H^2A - 2 \int_D K.$$

Vamos usar aqui novamente o teorema de Gauss-Bonnet. Assim,

$$\int_D K = 2\pi - \int_{\partial D} K_g = 2\pi + \int_{\partial D} \langle \phi, \nu \rangle = 2\pi - 2(A - 3HV).$$

Portanto,

$$\int_D |\sigma|^2 = 4H^2A - 4\pi + 4(A - 3HV).$$

Por outro lado, um resultado obtido por Barbosa e Jorge [4] nos diz que se

$$\int_D |\sigma|^2 \leq 8\pi$$

então ϕ é totalmente umbílica.

Logo, se ϕ não é totalmente umbílica, então

$$4H^2A - 4\pi + 4(A - 3HV) > 8\pi$$

$$H^2 + A - 3HV > 3\pi$$

$$3\pi - H^2A < A - 3HV < \pi\sqrt{1 - H^2}.$$

Donde

$$A > \frac{\pi}{H^2}(3 - \sqrt{1 - H^2}). \quad (2.14)$$

Consideremos a seguinte função $g : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$g(H) = \frac{3 - \sqrt{1 - H^2}}{H^2}\pi.$$

É fácil ver que g tem um mínimo absoluto no ponto

$$H_0 = 2\sqrt{3\sqrt{2} - 4}$$

e

$$g(H_0) = \frac{3 - \sqrt{17 - 12\sqrt{2}}}{12\sqrt{2} - 16}\pi > \frac{29}{10}\pi.$$

Portanto,

$$A > g(H) \geq g(H_0) > \frac{29}{10}\pi.$$

Agora, obtemos a partir das equações (2.13) e (2.14) que

$$A - 3HV < \pi\sqrt{1 - H^2}.$$

Daí temos

$$V > \frac{A - \pi\sqrt{1 - H^2}}{3H}.$$

Usando a equação (2.14) obtemos que se ϕ não é totalmente umbílica, então

$$V > \frac{\pi}{3H^3}(3 - \sqrt{1 - H^2} - H^2\sqrt{1 - H^2}).$$

Para provar a segunda parte do teorema, definimos a função $f : (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f(H) = \frac{\pi}{3H^2}(3 - \sqrt{1 - H^2} - H^2\sqrt{1 - H^2}).$$

Verificamos facilmente que f tem um mínimo absoluto no ponto

$$H_1 = \sqrt{\frac{9\sqrt{73} - 75}{2}}$$

e

$$f(H_1) > \frac{9}{10}\pi$$

Donde,

$$V > f(H) \geq f(H_1) > \frac{9}{10}\pi.$$

□

2.4 Discos com Área Limitada em \mathbb{H}^3

Nesta seção, tratamos do caso em \mathbb{H}^3 . Consideremos uma imersão $\phi : D \rightarrow \mathbb{H}^3$, com curvatura média constante H , $|H| > 1$, e bordo $\phi(\partial D) = S^1$ um círculo de raio ρ contido num plano geodésico π (Figura 2.3), onde D é um disco bidimensional em \mathbb{H}^3 .

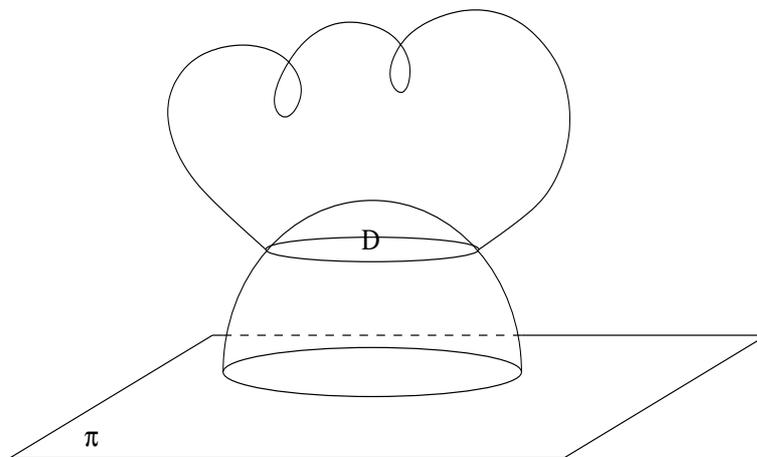


Figura 2.3: Disco imerso em \mathbb{H}^3

Encontramos um resultado análogo ao \mathbb{R}^3 . Ou seja, se a área da imersão ϕ é menor do que ou igual a área da calota esférica maior com bordo igual a $\phi(\partial D)$, então a imersão ϕ é umbílica.

Proposição 2.10. *Se ϕ é uma imersão como descrita anteriormente, então*

$$A \leq A_- \text{ ou } A \geq A_+.$$

A igualdade é válida se, e somente se, ϕ é umbílica.

Demonstração: Nas condições acima, vale a desigualdade (2.6). Tomando $K_0 = H^2 - 1$ e, como em \mathbb{H}^3 temos $K \leq H^2 - 1$, obtemos

$$L^2 \geq 4\pi A - (H^2 - 1)A^2.$$

Vale a igualdade se, e somente se a imersão ϕ é umbílica.

Como ρ é o raio de ∂D , temos $L = 2\pi \sinh \rho$. Assim, a área de ϕ satisfaz a

$$(H^2 - 1)A^2 - 4\pi A + 4\pi^2 \sinh^2 \rho \geq 0.$$

Portanto,

$$A \leq \frac{2\pi}{H^2 - 1} \left(1 - \sqrt{\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho} \right) = A_-$$

ou

$$A \geq \frac{2\pi}{H^2 - 1} \left(1 + \sqrt{\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho} \right) = A_+.$$

□

Teorema 2.11. *Se*

$$A \leq A_+,$$

então ϕ é umbílica e sua imagem é ou a calota esférica maior ou a calota esférica menor.

Demonstração: Suponhamos que $A \leq A_+$. Se $A = A_+$, então ϕ é umbílica devido ao resultado obtido através da equação (2.6). No outro caso, temos $A \leq A_-$. Utilizando o teorema de Gauss-Bonnet, e como em \mathbb{H}^3 temos $K \leq H^2 - 1$, obtemos

$$2\pi \leq A(H^2 - 1) + \int_{\partial D} K_g \leq A_-(H^2 - 1) + \int_{\partial D} K_g.$$

Substituindo o valor de A_- obtemos

$$2\pi \leq 2\pi \left(1 - \sqrt{\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho} \right) + \int_{\partial D} K_g$$

resultando em

$$2\pi \sqrt{\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho} \leq \int_{\partial D} K_g. \quad (2.15)$$

Elevando a equação (2.15) ao quadrado e usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} 4\pi^2(\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho) &\leq \left(\int_{\partial D} K_g \right)^2 \\ &\leq \int_{\partial D} 1 \int_{\partial D} K_g^2 \\ &= 2\pi \sinh \rho \int_{\partial D} K_g^2. \end{aligned}$$

Donde

$$4\pi^2(\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho) \leq 2\pi \sinh \rho \int_{\partial D} K_g^2. \quad (2.16)$$

Precisamos calcular a curvatura geodésica K_g ao longo de ∂D . Então, seja

$$\beta(t) = (R \cos t, R \sin t, \sqrt{a^2 - R^2}), \quad 0 \leq t \leq 2\pi, \quad R > 0,$$

uma parametrização de ∂D em \mathbb{R}^3 . É fácil ver que β não está parametrizada pelo comprimento de arco s . Tomemos então

$$\alpha(s) = \left(R \cos \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} s, R \sin \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} s, \sqrt{a^2 - R^2} \right).$$

Daí

$$\alpha'(s) = \left(-\sqrt{a^2 - R^2} \sin \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} s, \sqrt{a^2 - R^2} \cos \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} s, 0 \right).$$

E

$$\begin{aligned} \alpha''(s) &= \left(-\frac{a^2 - R^2}{R} \cos \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} s, \frac{a^2 - R^2}{R} \sin \frac{\sqrt{a^2 - R^2}}{R} s, 0 \right) \\ &= -\frac{(a^2 - R^2)}{R^2} \alpha + \left(0, 0, \frac{(a^2 - R^2)^{3/2}}{R^2} \right) \\ &= -\frac{1}{\sinh^2 \rho} \alpha + \frac{1}{\sinh^2 \rho} (0, 0, \sqrt{a^2 - R^2}) \\ &= \frac{1}{\sinh^2 \rho} [-\alpha + (0, 0, \sqrt{a^2 - R^2})]. \end{aligned}$$

Observemos que, da equação (2.9)

$$\begin{aligned}
K_g &= \langle \nu, \alpha'' \rangle \\
&= \frac{1}{\sinh^2 \rho} \left[-\langle \nu, \alpha \rangle + \langle \nu, (0, 0, \sqrt{a^2 - R^2}) \rangle \right] \\
&= \frac{1}{\sinh^2 \rho} \left[-\langle \nu, \alpha \rangle + \left\langle \nu, \left(0, 0, \frac{(a^2 - R^2)^{3/2}}{a^2} + \left(\frac{R^2}{a^2 - R^2} \right) \frac{(a^2 - R^2)^{3/2}}{a^2} \right) \right\rangle \right],
\end{aligned}$$

onde ν é o vetor unitário conormal ao longo de ∂D .

Façamos $b = \left(0, 0, \frac{(a^2 - R^2)^{3/2}}{a^2} \right)$. Sabendo que $\sinh \rho = \frac{R^2}{a^2 - R^2}$ temos

$$\begin{aligned}
K_g &= \frac{1}{\sinh^2 \rho} \left(-\langle \nu, \alpha \rangle + \left\langle \nu, b + \left(\frac{R^2}{a^2 - R^2} \right) b \right\rangle \right) \\
&= \frac{1}{\sinh^2 \rho} (-\langle \nu, \alpha \rangle + \langle \nu, b \rangle) + \langle \nu, b \rangle \\
&= \frac{-\langle \nu, \alpha \rangle + \langle \nu, b \rangle + \sinh^2 \rho \langle \nu, b \rangle}{\sinh^2 \rho} \\
&= \frac{-\langle \nu, \alpha \rangle + \cosh^2 \rho \langle \nu, b \rangle}{\sinh^2 \rho}.
\end{aligned}$$

Como ∂D é um círculo de raio ρ , obtemos

$$\cosh^2 \rho \langle \nu, b \rangle = \langle \nu, \alpha \rangle \pm \sinh \rho \sqrt{(\cosh^2 \rho - \langle \nu, \alpha \rangle)^2}.$$

Então

$$K_g = \pm \frac{\sqrt{\cosh^2 \rho - \langle \nu, \alpha \rangle^2}}{\sinh \rho}. \quad (2.17)$$

Substituindo a equação (2.17) na equação (2.16), ficamos com

$$\begin{aligned}
4\pi^2(\cosh^2 \rho - H^2 \sinh^2 \rho) &\leq 2\pi \sinh \rho \int_{\partial D} \frac{\cosh^2 \rho - \langle \nu, \alpha \rangle^2}{\sinh^2 \rho} \\
&= \frac{2\pi \cosh^2 \rho}{\sinh \rho} \int_{\partial D} 1 - \frac{2\pi}{\sinh \rho} \int_{\partial D} \langle \nu, \alpha \rangle^2 \\
&= 4\pi^2 \cosh^2 \rho - \frac{2\pi}{\sinh \rho} \int_{\partial D} \langle \nu, \alpha \rangle^2.
\end{aligned}$$

Donde

$$2\pi H^2 \sinh^3 \rho \geq \int_{\partial D} \langle \nu, \alpha \rangle^2. \quad (2.18)$$

Em virtude da fórmula do fluxo (1.7), e usando novamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$(2\pi|H| \sinh^2 \rho)^2 = \left(\int_{\partial D} \langle \nu, \alpha \rangle \right)^2 \leq 2\pi \sinh \rho \int_{\partial D} \langle \nu, \alpha \rangle^2,$$

isto é,

$$2\pi H^2 \sinh^3 \rho \leq \int_{\partial D} \langle \nu, \alpha \rangle^2. \quad (2.19)$$

Usando a equação (2.19) na equação (2.18), obtemos a seguinte identidade

$$2\pi H^2 \sinh^3 \rho = \int_{\partial D} \langle \nu, \alpha \rangle^2.$$

Consequentemente, obtemos também identidades na equação (2.16) e na equação (2.15). Em particular, $A = A_-$.

Portanto se $A \leq A_+$ temos $A = A_-$ ou $A = A_+$, isto é, ϕ é umbílica e sua imagem é uma calota esférica (menor ou maior, respectivamente).

□

Capítulo 3

Simetria de Superfícies com Bordo Simétrico em \mathbb{R}^3 e em \mathbb{H}^3

3.1 Introdução

Neste capítulo, consideramos um mergulho $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{Q}$, com curvatura média constante $H \neq 0$ e com bordo uma curva de Jordan contida num plano π , onde Σ é uma superfície compacta e $\mathbb{Q} = \mathbb{R}^3$ ou $\mathbb{Q} = \mathbb{H}^3$.

Na seção 3.2, baseados nos resultados obtido em [13] por Koiso, inicialmente mostramos que se a superfície não intercepta o exterior do domínio limitado pelo bordo $\partial\Sigma$ em π , então ela está totalmente contida num dos semi-espacos determinados pelo plano que contém o bordo. Depois, usando o Princípio da Reflexão de Alexandrov [1], mostramos que se Σ possui bordo simétrico $\partial\Sigma \subset \pi$, então Σ herda as simetrias de seu bordo. Como consequência, se o bordo é circular, então a superfície é uma calota esférica.

Na seção 3.3, com base em [14] por López, apresentaremos o caso em \mathbb{H}^3 . Veremos que, se Σ possui bordo $\partial\Sigma$ contido em π , onde π é um plano geodésico, ou uma hipersuperfície equidistante ou uma horoesfera em \mathbb{H}^3 e não intercepta o exterior do domínio limitado pelo bordo em π , então Σ está contida num dos semi-espacos determinados por π . Se tomarmos o bordo igual a um círculo, então a superfície é

umbílica.

3.2 Simetria de Superfícies com Bordo Simétrico em \mathbb{R}^3

Nesta seção consideremos um mergulho $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^3$, com curvatura média constante $H \neq 0$ e com bordo uma curva de Jordan contida num plano π , onde Σ é uma superfície compacta. Sob estas condições, veremos que se Σ possui bordo simétrico, então herda as simetrias de seu bordo.

Lema 3.1. *Seja Σ como descrita anteriormente. Seja $\partial\Sigma$ uma curva de Jordan contida num plano π . Seja Ω o domínio limitado por $\partial\Sigma$ em π . Se $\Sigma \cap \text{ext}(\Omega) = \emptyset$ em π , então $\Sigma - \partial\Sigma$ não intercepta π .*

Demonstração: Suponhamos que $\pi = \{z = 0\}$. Como a curvatura média H de Σ é não-nula, Σ não está contida em π . Suponhamos então que $\Sigma - \partial\Sigma$ apenas intercepta π (Figura 3.1).

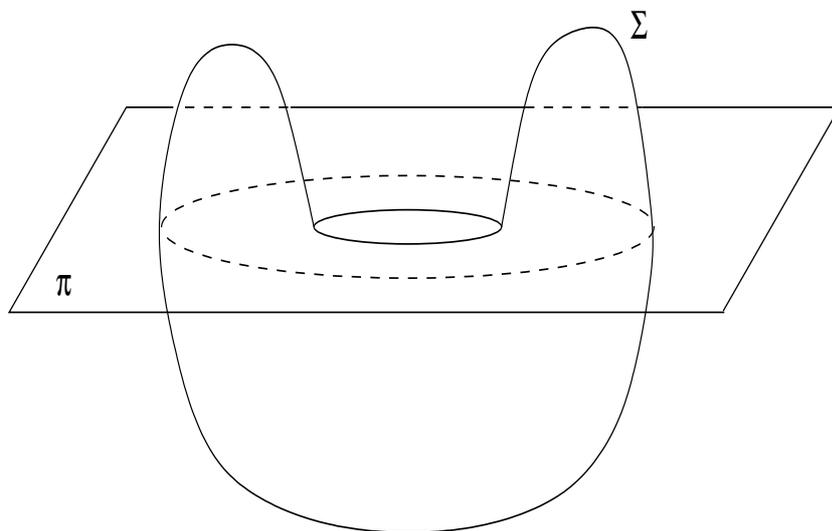


Figura 3.1: Superfície Σ

Sejam

$$m_1 = \max\{z; (x, y, z) \in \Sigma - \partial\Sigma\} > 0,$$

$$m_2 = \min\{z; (x, y, z) \in \Sigma - \partial\Sigma\} \leq 0.$$

Vamos supor que m_i é atingido em $p_i \in \Sigma - \partial\Sigma$, $i = 1, 2$.

Sejam $\partial\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ a decomposição em componentes conexas de $\partial\Sigma$ e G_λ o exterior de B_λ em π . Como Σ é limitada, está contida em S uma bola suficientemente grande cujo bordo denotamos por \tilde{S} . Seja \tilde{B} a interseção entre \tilde{S} e π , e seja \tilde{D} o interior de \tilde{B} em π . Então, \tilde{S} está dividido em duas calotas esféricas por \tilde{B} , denotemos por \tilde{S}_1 o fecho de uma delas. Assumiremos \tilde{S}_1 contido em $\mathbb{R}_-^3 = \{z \leq 0\}$. Seja

$$M = \Sigma \cup (\tilde{D} \cap G) \cup \tilde{S}_1$$

onde G é o exterior de $\partial\Sigma$ em π , isto é, $G = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$. Então, M é uma subvariedade topológica fechada conexa bidimensional sem bordo de \mathbb{R}^3 . Portanto, do teorema da dualidade de Alexander [19], M é orientável. Introduzimos a orientação de M tal que o normal em cada ponto regular aponta para o interior de M . Consideremos, então, a orientação de Σ induzida por M .

Nos pontos p_1 e p_2 os espaços tangentes a Σ são ambos identificados com π . Os vetores unitários normais a Σ nestes pontos são ambos iguais a $(0, 0, -1)$.

Numa vizinhança U_i de p_i , Σ é o gráfico de funções diferenciáveis f_i , de valores reais, sobre algum domínio V_i em \mathbb{R}^2 , $f_i : V_i \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$. Assim,

$$\Sigma = \{(x, y, f_i(x, y)); (x, y) \in V_i\}$$

tal que

$$p_i = (0, 0, f_i(0, 0)) \text{ e } f_i(0, 0) = m_i.$$

Portanto, em p_i temos:

$$(f_i)_x(0, 0) = (f_i)_y(0, 0) = 0$$

e, ainda,

$$(f_1)_{xx}(0, 0) \leq 0 \text{ e } (f_1)_{yy}(0, 0) \leq 0,$$

$$(f_2)_{xx}(0,0) \geq 0 \text{ e } (f_2)_{yy}(0,0) \geq 0.$$

Vamos calcular a curvatura média H_i em p_i . Seja

$$X(u, v) = (u, v, f(u, v)), \quad (u, v) \in V$$

uma parametrização de Σ . Então,

$$X_u = (1, 0, f_u), \quad X_v = (0, 1, f_v),$$

$$X_{uu} = (0, 0, f_{uu}), \quad X_{uv} = (0, 0, f_{uv}), \quad X_{vv} = (0, 0, f_{vv}).$$

Assim,

$$X_u \times X_v = (-f_u, -f_v, 1).$$

Portanto,

$$\eta = \frac{(f_u, f_v, -1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

Logo,

$$\mathbf{E} = 1 + f_u^2, \quad \mathbf{F} = f_u f_v, \quad \mathbf{G} = 1 + f_v^2,$$

$$\mathbf{e} = \frac{-f_{uu}}{f_u^2 + f_v^2 + 1}, \quad \mathbf{f} = \frac{-f_{uv}}{f_u^2 + f_v^2 + 1}, \quad \mathbf{g} = \frac{-f_{vv}}{f_u^2 + f_v^2 + 1}.$$

Portanto,

$$H_i = \frac{1}{2} \left[\frac{-f_{uu}(1 + f_v^2) + 2f_{uv}f_u f_v - f_{vv}(1 + f_u^2)}{(f_u^2 + f_v^2 + 1)^{\frac{3}{2}}} \right].$$

Em p_1 , temos

$$H_1 = -\frac{1}{2} (f_{uu} + f_{vv}) \geq 0$$

e em p_2 , temos

$$H_2 = -\frac{1}{2} (f_{uu} + f_{vv}) \leq 0$$

Mas, isto contradiz a hipótese de que H é constante e não-nula.

□

Teorema 3.2. *Seja $\partial\Sigma \subset \pi$ uma curva C^2 que satisfaz a seguinte propriedade: Existem um intervalo fechado $I \subset \{x = z = 0\}$ e uma função $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \geq 0$, identicamente nula em ∂I e $\text{Graf}(f) \subset \pi$, tal que:*

$$\partial\Sigma = \text{Graf}(f) \cup \text{Graf}(-f).$$

Se Σ está contida em um dos semi-espacos determinados por π , então Σ é simétrica com relação ao plano $\{x = 0\}$.

Demonstração: Seja

$$\Sigma \subset \mathbb{R}_+^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0\} \text{ e } \Sigma \cap \pi = \partial\Sigma.$$

Denotemos por Ω o interior de $\partial\Sigma$ em π . Como $\Sigma \cup \Omega$ é uma subvariedade topológica fechada conexa bidimensional em \mathbb{R}^3 , limita um domínio G em \mathbb{R}_+^3 em virtude do teorema da dualidade de Alexander [19].

Para um número real qualquer a , denotemos o plano $\{x = a\}$ por \mathbb{P}_a . Seja

$$a_0 = \min\{x; (x, y, z) \in \Sigma\}$$

e definamos um subconjunto aberto Σ_a de Σ por:

$$\Sigma_a = \{(x, y, z) \in \Sigma; x < a\}.$$

Observemos que $\Sigma_a = \emptyset$ quando $a \leq a_0$. Portanto, para $a > a_0$, Σ_a é não-vazio. Denotemos por Σ_a^* a reflexão de Σ_a com relação a \mathbb{P}_a .

Se $a - a_0$ é suficientemente pequeno, $\Sigma_a^* \subset G \cup \Omega$. Seja

$$c = \sup\{b \in \mathbb{R}; \Sigma_a^* \subset G \cup \Omega, \forall a \in (a_0, b)\}.$$

Então $a_0 < c \leq 0$.

Queremos provar que \mathbb{P}_0 é um plano de simetria para Σ . Para isto, deveríamos ter $c = 0$. Mas, inicialmente, vamos supor que $c < 0$ e daí, obteremos uma contradição. Neste caso, observemos que $\Sigma_c^* \cap \partial\Sigma = \emptyset$, já que o bordo $\partial\Sigma$ é simétrico. Assim,

$$\Sigma_c^* \subset \bar{G} = G \cup \Sigma \cup \Omega.$$

Portanto, vale uma das possibilidades:

(I) $\Sigma_c^* \subset G \cup \Omega$;

(II) $\Sigma_c^* \not\subset G \cup \Omega$ e $\Sigma_c^* \subset \overline{G} - \partial\Sigma$.

Suponhamos que (I) é válida.

Seja $p \in \partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^* = \{(c, y, z) \in \Sigma\}$. Inicialmente notemos que p poderia pertencer a $\partial\Sigma$.

Suponhamos que em p o espaço tangente a Σ , $T_p\Sigma$, não é perpendicular a \mathbb{P}_c . Então, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno, $\Sigma_{c+\delta}^* \subset G \cup \Omega$ numa vizinhança de $p \in (\partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^*) - \partial\Sigma$.

Entretanto, se $p \in \partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^* \cap \partial\Sigma$ e se $T_p\Sigma$ coincide com π , então $\Sigma_{c+\delta}^* \subset G \cup \Omega$ numa vizinhança de p , para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno.

Globalmente, devido a compacidade de $\partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^*$ e a suavidade de Σ , temos que $\Sigma_{c+\delta}^* \subset G \cup \Omega$, para algum $\delta > 0$ suficientemente pequeno, desde que:

- (i) Para qualquer ponto $p \in (\partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^*) - \partial\Sigma$, $T_p\Sigma$ não é perpendicular a \mathbb{P}_c ;
- (ii) Para qualquer ponto $p \in \partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^* \cap \partial\Sigma$, $T_p\Sigma$ não é perpendicular a \mathbb{P}_c ou coincide com π .

Mas, isto contradiz a definição de c , pois, desta forma $\delta + c$ seria menor que c . Logo, (i) e (ii) não podem ocorrer.

Portanto, deveríamos termos que, ou:

- (iii) Existe algum ponto $p \in (\partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^*) - \partial\Sigma$, tal que $T_p\Sigma \perp \mathbb{P}_c$; ou
- (iv) Existe algum ponto $p \in \partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^* \cap \partial\Sigma$, tal que $T_p\Sigma \perp \mathbb{P}_c$ e $T_p\Sigma$ não coincide com π .

Assim, vamos assumir que (iii) é válida.

Então $\Sigma - \Sigma_c$ e Σ_c^* possuem um ponto de tangência comum. Devido ao Princípio do Máximo [7], $\Sigma - \Sigma_c$ e Σ_c^* coincidem numa vizinhança deste ponto, contradizendo (I).

Agora, afirmamos que (iv) não pode ocorrer.

De fato, suponhamos que $T_p\Sigma$ é perpendicular a \mathbb{P}_c no ponto $p = (c, p^2, 0) \in \partial\Sigma_c \cap \partial\Sigma_c^* \cap \partial\Sigma$. Então,

$$T_p\Sigma = \{a_2y + a_3z = 0\}$$

para algum $(a_2, a_3) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Temos que, como $c < 0$,

$$\partial\Sigma = (-f(y), y, 0) \subset \pi.$$

Daí, como $T_p\partial\Sigma$ está contido em $T_p\Sigma$, se

$$\vec{v} = \left(-\frac{\partial f}{\partial y}(y), 1, 0 \right) \Big|_{y=p^2} \in T_p\partial\Sigma,$$

então $\vec{v} \in T_p\Sigma$.

Por outro lado, temos que $\vec{v} \parallel T_p\Sigma$. Onde, $\vec{v} \perp (0, a_2, a_3)$. Assim,

$$\left\langle \left(-\frac{\partial f}{\partial y}, 1, 0 \right), (0, a_2, a_3) \right\rangle = 0.$$

Portanto,

$$a_2 = 0$$

e, daí,

$$T_p\Sigma = \{z = 0\}.$$

Logo, (iv) é impossível.

Concluimos, então, que (I) não pode acontecer.

Suponhamos que (II) é válida.

Neste caso, $\Sigma_c^* \cap (\Sigma - \partial\Sigma) \neq \emptyset$. Tomemos $p \in \Sigma_c^* \cap (\Sigma - \partial\Sigma)$ que é um ponto de tangência comum a ambos. Em virtude do Princípio de Máximo [7], Σ_c^* e $(\Sigma - \partial\Sigma)$ coincidem numa vizinhança de p .

Pela analiticidade da curvatura média H obtemos que Σ_c^* e $(\Sigma - \partial\Sigma)$ coincidem também globalmente.

Isto implica que \mathbb{P}_c , embora não seja um plano de simetria do bordo $\partial\Sigma$, é um plano de simetria de Σ .

Consequentemente, (II) não é possível.

Portanto, $c = 0$.

Por outro lado, seja

$$a_1 = \max\{x; (x, y, z) \in \Sigma\}.$$

Para $a < a_1$, definamos o subconjunto Σ_a de Σ por:

$$\Sigma_a = \{(x, y, z) \in \Sigma; x > a\}$$

e denotemos por Σ_a^* como a reflexão de Σ_a com relação a \mathbb{P}_a . Seja

$$d = \inf\{b \in \mathbb{R}; \Sigma_a^* \subset G \cup \Omega, \forall a \in (b, a_1)\}.$$

De forma análoga, obtemos também que $d = 0$. Portanto,

$$\Sigma_a^* \subset G \cup \Omega, \forall a \in (a_0, 0), \quad (3.1)$$

$$\Sigma_a^* \subset G \cup \Omega, \forall a \in (0, a_1). \quad (3.2)$$

Para concluirmos a prova do teorema devemos garantir que $\mathbb{P}_0 = \{x = 0\}$ é realmente um plano de reflexão de Σ . Tomemos $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \overline{G}$. Sejam

$$p^1 = p^1(\mathbf{x}) = \min\{x^1; (x^1, y, z) \in \overline{G}\},$$

$$q^1 = q^1(\mathbf{x}) = \max\{x^1; (x^1, y, z) \in \overline{G}\},$$

$$p = p(\mathbf{x}) = (p^1, y, z),$$

$$q = q(\mathbf{x}) = (q^1, y, z).$$

Então, p e q estão em Σ . Afirmamos que

$$p^1 \leq 0 \leq q^1.$$

De fato, suponhamos que $p^1 > 0$, então $p \in \Sigma_0$. Portanto, a reflexão de p é:

$$p^* = -(p^1, y, z) \in \Sigma_0^* \subset \overline{G}$$

e, então $-p^1 < p^1$, o que contradiz a definição de p^1 . Logo, p^1 é não positivo.

Analogamente, obtemos que q^1 é não negativo.

Donde, $p \in \overline{\Sigma}_0$ e $q \in \overline{\Sigma}_0$. Mas,

$$p^* = p^*(\mathbf{x}) = (-p^1, y, z) \in \overline{\Sigma}_0^* \subset \overline{G}, \quad (3.3)$$

$$q^* = q^*(\mathbf{x}) = (-q^1, y, z) \in \overline{\Sigma}_0^* \subset \overline{G}. \quad (3.4)$$

Por (3.3) e (3.4) e pelas definições de p^1 e q^1

$$-p^1 \leq q^1 \quad e \quad -q^1 \geq p^1.$$

Daí temos que,

$$p^1 = -q^1$$

que implica que

$$p^* = (-p^1, y, z) = (q^1, y, z) = q$$

é a reflexão de p e

$$q^* = (-q^1, y, z) = (p^1, y, z) = p$$

é a reflexão de q .

De (3.1) e (3.2) resulta que,

$$\Sigma \cap \{(x^1, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^1 \in \mathbb{R}\} = \{p(\mathbf{x}), p^*(\mathbf{x})\}.$$

Como \mathbf{x} é qualquer ponto de \overline{G} e $\Sigma \subset \overline{G}$, segue que

$$\Sigma = \bigcup_{\mathbf{x} \in G} \{p(\mathbf{x}), p^*(\mathbf{x})\}.$$

Assim, concluímos assim que Σ é simétrica com relação a \mathbb{P}_0 .

□

Em particular, se tomarmos o bordo $\partial\Sigma$ igual a um círculo, situação é a seguinte:

Corolário 3.3. *Seja $\partial\Sigma$ um círculo contido num plano π . Se Σ não intercepta o exterior do domínio limitado por $\partial\Sigma$ em π , então Σ é uma calota esférica.*

Demonstração: A prova se conclui imediatamente do Teorema 3.2. Como todo plano de simetria do bordo $\partial\Sigma$ é também um plano de simetria de Σ , então, neste caso, Σ é uma calota esférica.

□

3.3 Simetria de Superfícies com Bordo Simétrico em \mathbb{H}^3

Nesta seção, tratamos do caso em \mathbb{H}^3 . Consideremos um mergulho $\psi : \Sigma \rightarrow \mathbb{H}^3$, com curvatura média constante $H \neq 0$ e com bordo uma curva de Jordan contida num plano π , onde π é um plano geodésico, uma hipersuperfície equidistante ou uma horoesfera. Veremos que se Σ não intercepta o exterior do domínio limitado pelo bordo em π , então Σ está contida num dos semi-espacos determinados por π .

Teorema 3.4. *Seja Σ como descrita anteriormente. Seja $\partial\Sigma$ uma curva de Jordan contida em π , onde π é um plano geodésico, uma hipersuperfície equidistante ou uma horoesfera em \mathbb{H}^3 . Seja Ω o domínio limitado por $\partial\Sigma$ em π . Se $\Sigma \cap \text{ext}(\Omega) = \emptyset$, então Σ está contida num dos semi-espacos de \mathbb{H}^3 determinados por π .*

Demonstração: Após uma isometria em \mathbb{H}^3 , podemos assumir que:

1. Se π é um plano geodésico, então $\pi = \mathbb{P}(a)$ para algum $a > 0$;
2. Se π é uma hipersuperfície equidistante, então π é uma calota esférica em \mathbb{R}_+^3 centrada em $(0, 0, z_0)$, com $z_0 > 0$, cujo bordo está no plano XY;
3. Se π é uma horoesfera, $\pi = L(a)$ para algum $a > 0$.

Consideremos a foliação de \mathbb{H}^3 dada por translações hiperbólicas de π , isto é, homotetias da origem de \mathbb{R}^3 :

$$\{\pi(t) = \mathbf{h}_t(\pi); t > 0\}.$$

Chamamos I o semi-espaço determinado por π definido por:

$$I = \bigcup_{t>1} \pi(t).$$

Orientemos tanto π quanto cada $\pi(t)$, $t > 0$, por um campo normal unitário de modo que a curvatura média de π ou $\pi(t)$, segundo o caso, seja maior ou igual a zero. No caso em que π é um plano geodésico, escolhemos o campo normal unitário que aponta para I . Se H_1 denota a curvatura média de π , então, é claro que, $0 \leq H_1 \leq 1$.

Inicialmente assumimos que $\Sigma \cap \text{int}(\Omega) \neq \emptyset$. Definamos $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$, por $f(p) = t$ onde $p \in \pi(t)$. Como Σ é compacta existem $p_0, p_1 \in \Sigma$ tais que f atinge seu máximo e seu mínimo respectivamente. Sejam $t_0 = f(p_0)$ e $t_1 = f(p_1)$. Então $t_1 \leq 1 \leq t_0$. Se $t_0 = t_1$, então $\Sigma = \Omega \cup \partial\Sigma$ e isto prova o teorema. No outro caso, obteremos uma contradição.

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $t_0 > 1$ e p_0, p_1 não pertencem a $\partial\Sigma$. Como Σ é compacta, seja S uma esfera euclidiana em \mathbb{R}_+^3 de raio suficientemente grande tal que $\Sigma \subset B$, onde B é a bola euclidiana limitada por S . Seja $S^+ = \bigcup_{t \geq 1} (S \cap \pi(t))$. Então

$$T = S^+ \cup K \cup \Sigma$$

é uma superfície mergulhada fechada (não suave em $\partial\Sigma \cup \partial S^+$), onde $K \subset \pi$ é o domínio limitado pelo círculo $S \cap \pi$ e a curva $\partial\Sigma$. Portanto, T define um domínio interior W . Orientemos Σ por um campo unitário normal η que aponta para I .

As superfícies $\pi(t_0)$ e Σ são tangentes em p_0 e as respectivas orientações concordam em p_0 . Portanto, podemos comparar ambas as superfícies neste ponto para concluirmos que, se denotamos H_2 como a curvatura média de Σ , $H_1 \geq H_2$.

Se temos $H_1 = H_2$, pelo Princípio do Máximo [7], Σ está contida em π . Isto é uma contradição porque p_0 não pertence a Ω . Como conclusão, $H_1 > H_2$. Agora, comparamos Σ com $\pi(t_1)$ no ponto p_1 . Como $\eta(p_1)$ aponta para W , $\eta(p_1)$ concorda com a orientação em $\pi(t_1)$ em p_1 . Como acima, pelo Princípio do Máximo [7] obtemos que $H_1 < H_2$, resultando em uma contradição novamente.

□

Se Σ possui bordo circular contido em um plano geodésico temos

Proposição 3.5. *Sejam $\Sigma \subset \mathbb{H}^3$ uma superfície compacta, mergulhada em \mathbb{H}^3 , com curvatura média constante $H \neq 0$, cujo bordo é $\partial\Sigma \subset \pi$, onde π é um plano geodésico. Se Σ está em um dos semi-espaços determinados por π , então Σ é umbílica.*

Isto pode ser visto com maiores detalhes em [17]. A mesma afirmação da Proposição 3.5 vale se o círculo está incluído em alguma horoesfera e a superfície está em um dos semi-espaços determinados por esta horoesfera. Neste caso, após uma isometria de \mathbb{H}^3 , podemos considerar a horoesfera como $L(a)$, para algum $a > 0$ e que $\Sigma \subset \{z \geq a\}$. Aplicamos o Princípio da Reflexão de Alexandrov [1] para planos geodésicos verticais. Então não é difícil concluir que Σ é uma superfície de revolução compacta e umbílica. Se a superfície está mergulhada é importante assegurarmos que ela está em um dos lados determinados pelo plano geodésico ou pela horoesfera. O Teorema 3.4 tem uma consequência imediata quando o bordo é circular. Dado um círculo em \mathbb{H}^3 , existe um plano geodésico e uma horoesfera que contém este círculo. Assim, juntamente com a Proposição 3.5, temos o seguinte

Corolário 3.6. *Seja $\partial\Sigma$ um círculo contido num plano π , onde π é um plano geodésico ou uma horoesfera em \mathbb{H}^3 . Se Σ não intercepta o exterior do domínio limitado por $\partial\Sigma$ em π , então Σ é umbílica.*

Referências Bibliográficas

- [1] Alexandrov, A., *Uniqueness theorems for surfaces in the large, I*. Vestnik Leningrad Univ. Math 11:5-17, 1956.
- [2] Barbosa, J. L. M. e Do Carmo, M. P., *A proof of a general isoperimetric inequality for surfaces*. Math. Z. 173, 13-28, 1980.
- [3] Barbosa, J. L. M. e Earp, R. S., *Geometric Methods and Nonlinear Analysis in Hiperbolic Space*. X Escola de Geometria Diferencial - UFMG, 1998.
- [4] Barbosa, J. L. M. e Jorge, L. P., *Stable H-Surfaces Whose Boundary is $S^1(1)$* . An. Acad. Bras. Ci., 66, 3, 1994.
- [5] Do Carmo, M. P., *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall Eaglewood Cliffs, 1976.
- [6] Do Carmo, M. P., *Geometria Riemanniana*. 2.^a edição, Projeto Euclides - IMPA, 1988.
- [7] Gilbarg, D. e Trudinger, N. S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Springer-Verlag, 1983.
- [8] Heinz, H., *On the Nonexistence of a Surface of Constant Mean Curvature with Finite Area and Prescribed Rectifiable Boundary*. Arch. Rational Mach. Anal. 35, 249-252, 1969.

- [9] Hinojosa, P. A., *Constant Mean Curvature Surfaces with Circular Boundary in \mathbb{R}^3* . An. Acad. Bras. (2006) 78 (1): 1-6.
- [10] Hopf, E., *Differential Geometry in the Large*. Lecture Notes in Math. 1000, Springer-Verlag, Berlin, 1983.
- [11] Kapouleas, N., *Compact Constant Mean Curvature Surfaces in Euclidean Three-space*. J. Differential Geom. 33, 683-715, 1991.
- [12] Koiso, M., *Symmetry of Hypersurfaces of Constant Mean Curvature with Symmetric Boundary*. Math. Z. 191: 567-574, 1986.
- [13] Kusner, R. B., *Global Geometry of Extremal Surfaces in Three-Space*. Doctoral thesis, University of California, Berkeley, 1985.
- [14] López, R., *Constant Mean Curvature Surfaces with Boundary in the Hiperbolic Space*. Springer-Verlag, 1999.
- [15] López, R. e Montiel, S., *Constant Mean Curvature Discs with Bounded Area*. Proceeding of A. M. S. 123, 1555-1558, 1995.
- [16] López, R. e Montiel, S., *Constant Mean Curvature Surfaces with Planar Boundary*. Duke Math. J. vol. 85, No. 3, 1996.
- [17] Nelli, B. e Rosenberg, H. *Some remarks on embedded hypersurfaces in hyperbolic space of constant mean curvature and spherical boundary*. Ann Glob Anal Geom 13: 23-30, 1995.
- [18] Wente, H. C., *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*. Pacific J. Math. 121, 193-243, 1986.
- [19] Wilder, R. L., *Topology of Manifolds*. New York: American Mathematical Society, 1949.