

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

A Aplicação de Gauss de Superfícies Mínimas Completas com Curvatura Total Finita.

Por
Gilvaneide Nascimento Silva

sob orientação do
Prof. Dr. Pedro A. Hinojosa

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

dezembro - 2007
João Pessoa, Paraíba

A Aplicação de Gauss de Superfícies Mínimas Completas com Curvatura Total Finita.

por

Gilvaneide Nascimento Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática-CCEN-UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre da Ciência em Matemática.

Área de Concentração: Geometria Diferencial

Aprovada por:

Prof. Dr. **Pedro A. Hinojosa**
Orientador

Prof. Dr. **Jorge Herbert Soares de Lira**
Examinador

Prof. Dr. **Roberto Callejas Bedregal**
Examinador

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

dezembro - 2007

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

Data: dezembro - 2007

Autor: Gilvaneide Nascimento Silva

Título: **A Aplicação de Gauss de
Superfícies Mínimas Completas
com Curvatura Total Finita.**

Depto.: Matemática

Grau: M.Sc. Convocação: dezembro Ano: 2007

Permissão está juntamente concedida pela Universidade Federal da Paraíba à circular e ser copiado para propósitos não comerciais, em sua descrição, o título acima sob a requisição de indivíduos ou instituições.

Assinatura do Autor

O AUTOR RESERVA OUTROS DIREITOS DE PUBLICAÇÃO, E NEM A TESE NEM EXTENSIVAS EXTRAÇÕES DELA PODEM SER IMPRESSAS OU REPRODUZIDAS SEM A PERMISSÃO ESCRITA DO AUTOR.

O AUTOR ATESTA QUE A PERMISSÃO TEM SIDO OBTIDA PELO USO DE QUALQUER DIREITO AUTORAL DO MATERIAL EM QUE ESTA TESE APAREÇA(OU BREVES RESUMOS REQUERENDO APENAS O PRÓPRIO AGRADECIMENTO NO MATERIAL ESCRITO) E QUE TODOS OS TAIS USOS SEJAM CLARAMENTE AGRADECIDOS.

*Ao meu esposo, meus filhos
e a minha mãe.*

Agradecimentos

A elaboração de uma dissertação requer empenho e perseverança de seu autor, porém são muitos os que de alguma forma contribuem para realização deste trabalho. A todos estes, registro aqui meus agradecimentos:

- A Deus todo poderoso, pois sem ele nada é possível.*
- Ao meu amado esposo, por seu incentivo e apoio em todos os momentos.*
- A minha mãe, por sua ajuda nos momentos em que precisei.*
- Aos meus filhos Layse e Fernando, por compreender meus momentos de ausência.*
- Ao meu orientador Professor Pedro A. Hinojosa pela orientação deste trabalho.*
- Aos professores da graduação e da pós-graduação, por contribuírem com minha formação.*
- Aos meus amigos do Mestrado, pelo companheirismo.*
- Ao CNPq, pelo apoio financeiro durante a realização deste mestrado.*

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract	viii
Introdução	ix
1 Preliminares	1
1.1 Introdução	1
1.2 Abordagem Histórica.	1
1.3 A Representação de Weierstrass	7
1.4 Superfícies Mínimas, em \mathbb{R}^3 , com Curvatura Total Finita.	14
2 O Teorema de Osserman	19
2.1 A Função Altura	20
2.2 Função Tipo Suporte	24
2.3 O Teorema	25
2.4 Comportamento de M no Infinito	28
3 Superfícies de Gênero 1	39
3.1 Introdução	39
3.2 A Função φ de Weierstrass	40
3.3 Resultados Gerais	45
3.4 O Caso de $C(M) = -16\pi$	48
3.4.1 O Caso de Gênero 1	49
Referências Bibliográficas	60

Resumo

Um conhecido teorema devido a Osserman afirma que se M é uma superfície mínima completa em \mathbb{R}^3 com curvatura total finita e não é um plano, então a sua imagem esférica omite no máximo três pontos da esfera \mathbb{S}^2 .

Não se sabe ainda se este número é o melhor possível. De fato, não se conhecem exemplos de tais superfícies cuja imagem esférica omite exatamente três pontos da esfera. Ainda mais, pouco ou nada se sabe sobre a existência de uma superfície deste tipo.

Fazendo uma hipótese adicional sobre o tipo de fins da superfície mostramos que a aplicação de Gauss omite no máximo dois pontos e quando este número é exatamente dois vemos que a superfície é homeomorfa a uma esfera menos dois pontos e, claro, quando os fins são mergulhados, M é um catenóide.

Em 1964, para M nas condições anteriores, Osserman provou que se a imagem esférica de M omite três pontos de \mathbb{S}^2 , então a sua curvatura total, $C(M)$, é menor ou igual que -12π . Neste trabalho mostramos que de fato, $C(M) \leq -16\pi$ a menos que M seja um bi-toro com três fins que devem ser mergulhados e planares.

Palavras-Chave: superfícies mínimas, representação de Weierstrass, curvatura total finita, aplicação de Gauss.

Abstract

A known theorem by Osserman states that if M is a complete minimal surface in \mathbb{R}^3 with finite total curvature and M is not a planar, then its image spherical omits at most three points of the sphere \mathbb{S}^2 .

It is not known yet if this number is sharp. In fact, no known example of such surfaces whose image spherical omits exactly three points of the sphere. Moreover, very little or nothing is known about the existence of such surface.

Making an additional hypothesis about the kind of ends, we show that the Gauss map omits at most two points and if this number is exactly two then the surface is homeomorphic to the sphere minus two points and, of course, when the ends are embedded, M is a catenoid.

In 1964, for M in the above conditions, Osserman proved that if the image spherical of M omits three points of \mathbb{S}^2 , then its total curvature, $C(M)$, is less than or equal to -12π . In this work, we show that $C(M) \leq -16\pi$ unless M is a bi-torus with three ends which are to be embedded and planar.

Key words: minimal surfaces, Weierstrass representation, finite total curvature, Gauss map.

Introdução

Um resultado interessante referente ao estudo da aplicação de Gauss de superfícies mínimas completas com curvatura total finita é devido a Osserman, e afirma que nestas superfícies o número de pontos omitidos pela aplicação normal de Gauss é no máximo igual a três, a menos que esta superfície seja um plano. A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [10]. Para os casos em que são omitidos um e dois pontos temos como exemplos conhecidos, a superfície de Enneper e o catenóide, respectivamente. Entretanto, até o presente momento, não são conhecidos exemplos de superfícies, nas condições anteriores, cuja imagem esférica omite exatamente três pontos. No caso de superfícies mínimas completas de curvatura total finita, ainda é uma questão em aberto exibir um exemplo de uma tal superfície cuja aplicação de Gauss omite três pontos, ou melhorar o teorema de Osserman para dois pontos.

Nosso trabalho começa com um breve e conciso estudo histórico sobre superfícies mínimas, exibindo alguns exemplos. Ao longo do primeiro capítulo estudamos também a representação de Weierstrass, que nos dá uma solução satisfatória da equação das superfícies mínimas. Esta representação permite obter vários exemplos destas superfícies. Em seguida, acrescentando à nossa superfície mínima M as hipóteses de completude e curvatura total finita, descrevemos alguns resultados básicos necessários para o desenvolvimento dos capítulos seguintes.

No segundo capítulo apresentamos uma demonstração diferente, da feita por Osserman, do teorema citado acima. Colocando uma hipótese adicional sobre o tipo de fins da superfície, mostramos que a aplicação de Gauss omite no máximo dois valores e quando este número é exatamente dois vemos que a superfície é homeomorfa a uma

esfera menos dois pontos e, claro, quando os fins são mergulhados, M é um catenóide.

No terceiro capítulo, nosso objetivo principal é provar que não existe uma superfície mínima completa de gênero 1 com $C(M) = -16\pi$, cuja aplicação de Gauss $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ omita três pontos da esfera S^2 . Assim, $C(M) \leq -20\pi$ a menos que a superfície M seja um bi-toro com três fins que devem ser mergulhados e planares.

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introdução

Neste primeiro capítulo, introduzimos alguns resultados e definições preliminares necessários ao desenvolvimento deste trabalho.

Iniciamos fazendo um breve comentário histórico a respeito do estudo das superfícies mínimas, apresentando alguns exemplos clássicos destas superfícies. Depois acrescentamos a hipótese de completude.

Em seguida estudamos a representação de Weierstrass, usando a teoria das funções de variáveis complexas e a sua relação essencial com as superfícies mínimas. Exibimos a relação existente entre as funções desta representação e a aplicação normal de Gauss. Vemos ainda que, usando esta representação, é possível reobter exemplos de superfícies mínimas.

Na seção seguinte, a hipótese de curvatura total finita permite uma maior riqueza de resultados nas superfícies mínimas completas imersas em \mathbb{R}^3 .

1.2 Abordagem Histórica.

O estudo das superfícies mínimas, ao que tudo indica, teve início com Lagrange, em 1760. Ele considerou superfícies em \mathbb{R}^3 que eram gráficos de funções, $z = f(x, y)$

de classe C^2 . Para uma superfície deste tipo, o elemento de área é dado por

$$dM = \sqrt{(1 + f_x^2 + f_y^2)} dx \wedge dy. \quad (1.1)$$

Lagrange estudou o seguinte problema: achar a superfície de área mínima que assumisse valores dados na fronteira de um conjunto aberto Ω do plano.

O único exemplo dado por Lagrange foi o plano.

Se $z = f(x, y)$ representa uma solução para este problema, considere a família de funções $z_t(x, y) := f(x, y) + t\eta(x, y)$, onde η é uma função de classe C^2 que se anula na fronteira de Ω , e defina

$$A(t) = \int_{\Omega} (1 + (z_t)_x^2 + (z_t)_y^2)^{\frac{1}{2}} dx dy. \quad (1.2)$$

Assim,

$$A(t) = \int_{\Omega} ((1 + f_x^2 + f_y^2) + 2t(f_x\eta_x + f_y\eta_y) + t^2(\eta_x^2 + \eta_y^2))^{\frac{1}{2}} dx dy.$$

Sejam $p := f_x$, $q := f_y$ e $w := (1 + p^2 + q^2)^{\frac{1}{2}}$. Derivando, com relação a t , a equação acima obtemos

$$A'(0) = \int_{\Omega} 2 \left(\frac{p}{w} \eta_x + \frac{q}{w} \eta_y \right) dM.$$

Integrando por partes e observando que $\eta|_{\partial\Omega} = 0$, temos

$$A(t) = -2 \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{w} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \eta dM. \quad (1.3)$$

Como $z = f(x, y)$ é solução para o problema, $A(0)$ é mínimo para a função $A(t)$ e portanto $A'(0) = 0$. Isto ocorre para qualquer função η que se anula na fronteira de Ω . Logo,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p}{w} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{q}{w} \right) = 0.$$

Calculando as derivadas acima, obtemos

$$f_{xx}(1 + f_y)^2 + 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}(1 + f_x)^2 = 0. \quad (1.4)$$

Esta equação é conhecida como equação das superfícies mínimas ou equação de Lagrange.

Na época não se conheciam as definições de curvatura média, nem tampouco de curvaturas principais k_1 e k_2 (introduzidas, também em 1760, num trabalho de Euler). O que Lagrange fez foi utilizar o método do cálculo das variações para superfícies na forma $z = f(x, y)$ e deduzir que a equação (1.4) era uma condição necessária para que uma superfície tivesse área mínima.

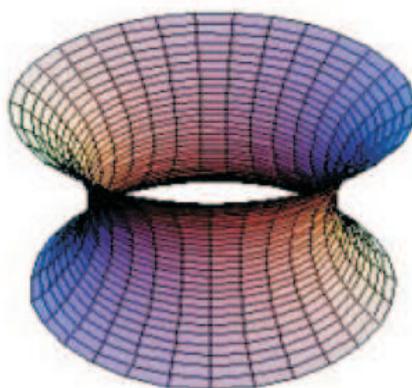
Somente em 1776 Meusnier deu uma interpretação geométrica para a equação (1.4) mostrando que ela era equivalente à condição

$$H = \frac{k_1 + k_2}{2} = 0.$$

Como a equação (1.4) é complicada e provavelmente tem muitas soluções, então Meusnier procurou soluções com propriedades especiais e obteve como resultado.

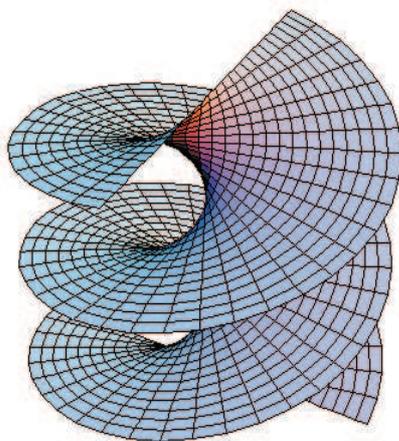
(1) Catenóide

Esta superfície é obtida pela rotação da catenária em torno de um eixo que não a corta. É a única superfície mínima de revolução, sua curvatura total é -4π e sua imagem esférica omite dois pontos da esfera.



(2) Helicóide

Podemos obter tal superfície do seguinte modo: Considere uma hélice que se enrola em um cilindro circular reto e, por cada ponto da hélice, passe uma reta que encontre perpendicularmente o eixo do cilindro. O helicóide possui a propriedade, provada por Catalan em 1842, de ser, além do plano, a única superfície mínima completa regradada. Sua curvatura total não é finita.



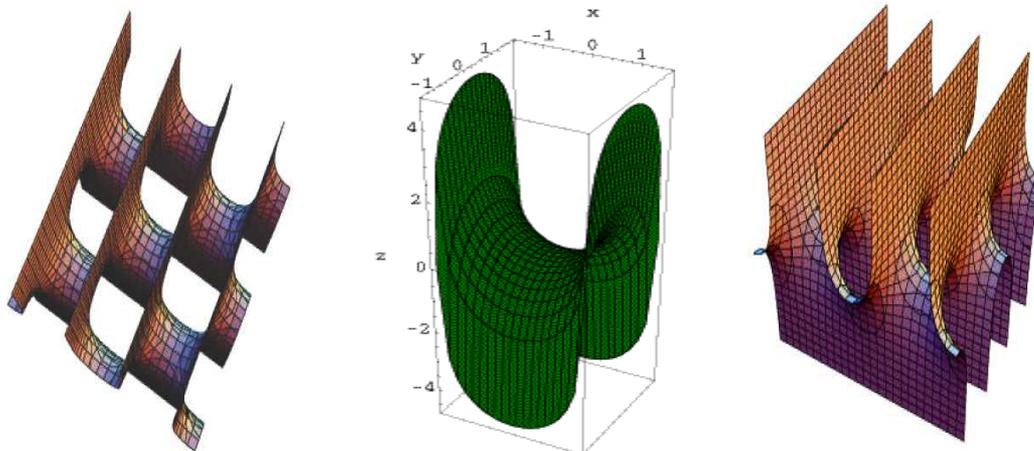
Em 1835, Scherk obteve um novo exemplo resolvendo a equação (1.4) para funções do tipo $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Assim o gráfico de

$$f(x, y) = \log \left(\frac{\cos(x)}{\cos(y)} \right), \quad x, y \in \left(0, \frac{\pi}{2} \right) \quad (1.5)$$

ficou conhecido como superfície de Scherk.

Vista de um ângulo apropriado, esta superfície pode ser percebida como um tabuleiro de xadrez com infinitas casas.

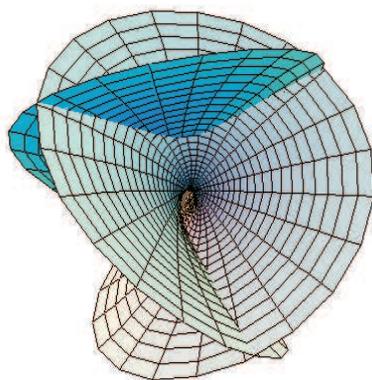
Scherk provou que o helicóide e o catenóide, descobertos por Meusnier, são apenas dois elementos de uma família de superfícies mínimas, através da qual podemos deformar continuamente o catenóide menos um meridiano em uma volta completa do helicóide. Ele também tentou, mas sem sucesso, determinar todas as superfícies mínimas regradadas. Tal problema foi resolvido em 1842 por Catalan.



Enneper, em 1864, encontrou uma das mais simples superfícies mínimas. Imagem da aplicação $x : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))$, dada por:

$$x_1(u, v) = u - \frac{u^3}{3} + uv^2; \quad x_2(u, v) = v - \frac{v^3}{3} + vu^2; \quad x_3(u, v) = u^2 - v^2.$$

Observe que as funções que representam esta superfície só envolvem somas e produtos. É, neste sentido que ela é simples. Esta superfície, hoje conhecida como superfície de Enneper, é completa, tem curvatura total -4π , não é mergulhada e sua imagem esférica omite um ponto da esfera.



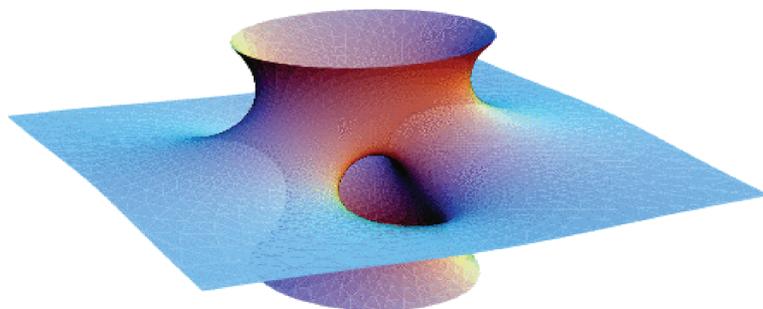
Foram grandes os esforços de várias gerações de matemáticos, mas uma solução completamente satisfatória da equação (1.4) só foi obtida por Weierstrass em 1866, mais de cem anos depois da definição de superfície mínima.

Em 1915, Bernstein provou que um gráfico mínimo e completo é um plano.

Em torno de 1960, R. Osserman obteve um belo resultado. Provou que se a imagem esférica de uma superfície mínima completa não é densa em S^2 , então esta superfície é um plano. Porém este não é um resultado completamente satisfatório, pois em todos os exemplos conhecidos de superfícies mínimas completas, salvo no plano, a imagem esférica omite muito menos que um domínio aberto da esfera. Mais tarde, em 1979, Frederico Xavier, então da Universidade Federal de Pernambuco, obteve o seguinte resultado: Suponha que a imagem esférica de uma superfície mínima completa omite sete ou mais pontos, então ela é um plano. Este resultado ainda foi melhorado por Fujimoto, ao diminuir de sete para quatro, o número de pontos omitidos pela aplicação de Gauss de uma superfície mínima completa o que fechou o problema neste caso.

É possível construir exemplos de superfícies mínimas completas cuja imagem esférica cobre a esfera toda, a esfera menos um, dois, três ou quatro pontos.

Em 1982, o matemático brasileiro Celso Costa, em sua tese de doutorado, apresenta um exemplo surpreendente, hoje conhecido como *superfície de Costa*. Esta superfície é mergulhada (fato que foi provado posteriormente) e topologicamente é um toro menos três pontos. A representação de Weierstrass foi fundamental para a sua descoberta. Ela pode ser representada usando-se as funções \wp e zeta de Weierstrass.



1.3 A Representação de Weierstrass

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto simplesmente conexo e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de classe C^k , com $k \geq 2$. A aplicação φ descreve uma superfície parametrizada em \mathbb{R}^3 .

Se $|\varphi_u| = |\varphi_v|$ e $\langle \varphi_u, \varphi_v \rangle = 0$, então φ é uma aplicação conforme e induz em Ω a métrica

$$ds^2 = \lambda^2(du^2 + dv^2), \quad \text{onde } \lambda = |\varphi_u| = |\varphi_v|.$$

Dizemos, neste caso, que (u, v) são parâmetros isotérmicos para a superfície descrita por φ .

Teorema 1.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ um domínio simplesmente conexo e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de classe C^k , ($k \geq 2$). Então, existe um difeomorfismo $\psi : \Omega \rightarrow \Omega$ de classe C^k tal que $\tilde{\varphi} = \psi \circ \varphi$ é uma aplicação conforme.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [9].

Sejam M uma superfície conexa e orientável e $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão de classe C^k . Pelo teorema acima cada ponto $p \in M$ tem uma vizinhança na qual estão definidos parâmetros isotérmicos. A métrica induzida em M por x será representada, localmente, em termos destes parâmetros por

$$ds^2 = \lambda^2|dz|^2, \quad \text{onde } z = u + iv.$$

A mudança de parâmetros é uma aplicação conforme e como M é orientável, podemos nos restringir a uma família de parâmetros isotérmicos, cujas mudanças de coordenadas preservam a orientação do plano. Em termos da variável $z = u + iv$, isto significa que tais mudanças de coordenadas são funções holomorfas. A superfície M juntamente com uma família de parâmetros isotérmicos cujas mudanças de coordenadas preservam a orientação do plano é chamada superfície de Riemann.

Na superfície de Riemann consideramos, localmente, os operadores

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} - i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad e \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial u} + i\frac{\partial}{\partial v}\right) \quad (1.6)$$

A definição destes operadores é tal que, se $f : M \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função complexa diferenciável, então

$$df = \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv = \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} d\bar{z}.$$

A função f é holomorfa se e somente se $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$.

Para uma imersão $x = (x_1, x_2, x_3) : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$, definimos o laplaciano de x como $\Delta x = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$.

Proposição 1.2. *Sejam H a curvatura média da superfície M e N sua aplicação normal de Gauss. Então*

$$\Delta x = 2HN.$$

Demonstração: Como x é uma aplicação conforme então

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle = \lambda^2 \quad (1.7)$$

e

$$\left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle = 0. \quad (1.8)$$

Diferenciando 1.7 em relação a u e 1.8 em relação a v temos :

$$\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \frac{\partial x}{\partial u} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle \quad (1.9)$$

$$\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}, \frac{\partial x}{\partial v} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} \right\rangle \quad (1.10)$$

de 1.9 e 1.10 temos

$$\left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial x}{\partial u} \right\rangle = 0$$

portanto

$$\langle \Delta x, \frac{\partial x}{\partial u} \rangle = 0$$

analogamente encontramos

$$\langle \Delta x, \frac{\partial x}{\partial v} \rangle = 0$$

logo $\Delta x // N$.

Por outro lado x é uma imersão mínima, $N_u = a_{11}x_u + a_{12}x_v$ e $N_v = a_{21}x_u + a_{22}x_v$, então a expressão para a curvatura média H é dada por

$$H = -\frac{1}{2}(a_{11} + a_{22}) \quad \therefore \quad 2H = (-a_{11} - a_{22}).$$

Note que

$$\lambda^2 \langle \Delta x, N \rangle = \left\langle \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, N \right\rangle = -a_{11} \langle x_u, x_u \rangle - a_{22} \langle x_v, x_v \rangle$$

assim

$$\lambda^2 \langle \Delta x, N \rangle = \lambda^2 2H.$$

Como $\Delta x // N$ então $\Delta x = 2HN$. □

Corolário 1.3. *Seja M uma superfície regular parametrizada por $x(u, v)$, onde u, v são parâmetros isotérmicos. As funções coordenadas $x_k(u, v)$ são harmônicas se e somente se M é superfície mínima.*

Demonstração: Como as funções x_k são harmônicas $\Delta x_k = 0$, logo $\Delta x = 0$. Uma vez que $N \neq 0$ então H também é zero, ou seja x é mínima. A recíproca é imediata. □

Defina $\phi(z) = \frac{\partial x}{\partial z}$. Note que a aplicação ϕ é holomorfa se e somente se x é harmônica. Se $\phi = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$, então

$$\phi_k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v} \right).$$

Portanto,

$$\sum_{k=1}^3 \phi_k^2(z) = \frac{1}{4} \left[\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial u} \right)^2 - \sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial v} \right)^2 - 2i \sum_{k=1}^3 \frac{\partial x_k}{\partial u} \frac{\partial x_k}{\partial v} \right] = 0,$$

pois os parâmetros são isotérmicos. Analogamente, obtemos

$$\sum_{k=1}^3 |\phi_k(z)|^2 = \frac{1}{4} \left[\left| \frac{\partial x}{\partial u} \right|^2 + \left| \frac{\partial x}{\partial v} \right|^2 \right] = \frac{\lambda^2}{2}$$

Agora observe que nós temos a aplicação ϕ definida em termos de parâmetros isotérmicos, na vizinhança de cada ponto de M . Se $z = u + iv$ e $w = r + is$ são coordenadas locais de um mesmo ponto, então a mudança de coordenadas $w = w(z)$ é holomorfa, com $\frac{\partial w}{\partial z} \neq 0$. Segue-se que

$$\phi = \frac{\partial x}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z} = \tilde{\phi} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Assim, se considerarmos as formas diferenciais $\alpha = \phi dz$ e $\tilde{\alpha} = \tilde{\phi} dw$, temos

$$\alpha = \phi dz = \tilde{\phi} \frac{\partial w}{\partial z} dz = \tilde{\phi} dw = \tilde{\alpha}.$$

ou seja, a forma diferencial α é globalmente definida em M , com expressão local dada por $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, onde

$$\alpha_k = \phi_k dz, \quad 1 \leq k \leq 3.$$

Agora vamos definir uma forma holomorfa ω e uma função meromorfa g , dadas por

$$\omega = \alpha_1 - i\alpha_2, \quad g = \frac{\alpha_3}{\alpha_1 - i\alpha_2}.$$

Localmente, se $\alpha_k = \phi_k dz$, então $\omega = f dz$, onde f é uma função holomorfa e

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}.$$

Considere a equação

$$\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 = 0 \tag{1.11}$$

Proposição 1.4. *Sejam Ω um domínio no plano complexo, $g(z)$ uma função meromorfa em Ω e $f(z)$ uma função holomorfa em Ω , tendo a propriedade que em cada ponto onde $g(z)$ tem um pólo de ordem m , $f(z)$ tem um zero de ordem $2m$. Então as funções.*

$$\phi_1 = \frac{1}{2}f(1 - g^2), \quad \phi_2 = \frac{i}{2}f(1 + g^2), \quad \phi_3 = fg \tag{1.12}$$

são holomorfas em Ω e satisfazem (1.11). Reciprocamente, toda tripla de funções holomorfas em Ω satisfazendo (1.11) pode ser representadas na forma (1.12) exceto para $\phi_1 = i\phi_2$ e $\phi_3 = 0$

Demonstração: Com um cálculo simples verifica-se que as funções da equação (1.12) satisfazem (1.11). Reciprocamente, dada uma solução de (1.11), sejam

$$f = \phi_1 - i\phi_2, \quad g = \frac{\phi_3}{\phi_1 - i\phi_2}. \quad (1.13)$$

Se escrevermos (1.11) na forma

$$(\phi_1 + i\phi_2)(\phi_1 - i\phi_2) = -\phi_3^2$$

teremos

$$\phi_1 + i\phi_2 = \frac{-\phi_3^2}{\phi_1 - i\phi_2} = -fg^2 \quad (1.14)$$

combinando (1.13) e (1.14) temos

$$2\phi_1 = f(1 - g^2) \therefore \phi_1 = \frac{f}{2}(1 - g^2)$$

$$2i\phi_2 = -f(1 + g^2) \therefore \phi_2 = i\frac{f}{2}(1 + g^2)$$

$$g = \frac{\phi_3}{f} \therefore \phi_3 = fg$$

Como $\phi_1 + i\phi_2$ é holomorfa, segue que fg^2 é holomorfa e assim nos pontos onde g tem um pólo de ordem m , f terá um zero de ordem pelo menos $2m$. Esta representação pode falhar se, e somente se o denominador de g em (1.13) se anular, isto é, $\phi_1 = \phi_2$, o que implica $\phi_3 = 0$. \square

Teorema 1.5. (*Teorema de Uniformização de Koebe.*)

Seja M uma superfície de Riemann dotada com métrica ds^2 completa. Seja Ω representada por uma das seguintes superfícies: a esfera unitária, o plano complexo \mathbb{C} , ou o disco unitário. Então, existe uma aplicação conforme, localmente invertível, F de Ω para M .

Certamente, se $x : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima completa então usando o teorema acima, podemos considerar que a função $x \circ F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ continuará a ser uma imersão mínima completa com a métrica induzida. Como as imersões mínimas em \mathbb{R}^3 não podem ser compactas (pois $K \leq 0$), então Ω nunca será a esfera.

Teorema 1.6. (*Representação de Weierstrass*)

Toda superfície mínima em \mathbb{R}^3 , definida em um domínio simplesmente conexo $\Omega \in \mathbb{C}$, pode ser representada por

$$x_k(z) = \operatorname{Re}\left(\int_0^z \phi_k dz\right), \quad k = 1, 2, 3 \quad (1.15)$$

onde as funções ϕ_k são definidas por (1.12) e as funções f, g tem as propriedades do lema anterior. Sendo Ω o disco unitário ou o plano inteiro e a integral sendo tomada ao longo de um caminho ligando a origem ao ponto z . A superfície será regular se e somente se f satisfizer a propriedade de se anular somente nos pólos de g , com a ordem dos zeros exatamente o dobro da ordem dos pólos de g .

Demonstração: Pelo teorema (1.5), a superfície pode ser representada por $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, onde Ω é o disco unitário ou o plano. Sendo M mínima temos que as coordenadas x_k são harmônicas. Se considerarmos

$$\phi_k(z) = \frac{\partial x_k}{\partial u} - i \frac{\partial x_k}{\partial v}, \quad k = 1, 2, 3, \quad \text{onde } z = u + iv,$$

então as funções ϕ_k são holomorfas e vale (1.15) (a integral independe do caminho). Para uma superfície mínima generalizada, a equação (1.11) será válida e pelo lema (1.4) nós temos a representação (1.12). A superfície deixará de ser regular se e somente se toda ϕ_k se anular simultaneamente, isto acontecerá precisamente quando $f = 0$ e g for regular ou quando $fg^2 = 0$, onde g tem um pólo. \square

A seguir veremos que usando a representação de Weierstrass é possível reobter as equações de superfícies mínimas. Mostraremos aqui o exemplo do helicóide.

Tome

$$M = \mathbb{C}; \quad g(z) = -ie^z; \quad f(z) = e^{-z}$$

De (1.12) temos

$$\phi_1 = 1/2f(1 - g^2) = \cosh z$$

$$\phi_2 = i/2f(1 + g^2) = -i \sinh z$$

$$\phi_3 = fg = -i$$

como \cosh , \sinh e i são funções holomorfas em \mathbb{C} então

$$\int_{\Gamma} \phi_k = 0, \quad \Gamma \text{ um caminho fechado.}$$

assim

$$x_1(z) = \operatorname{Re}\left(\int_0^z \cosh z \, dz\right) = \sinh u \cos v$$

$$x_2(z) = \operatorname{Re}\left(\int_0^z -i \sinh z \, dz\right) = \sinh u \sin v$$

$$x_3(z) = \operatorname{Re}\left(\int_0^z -i \, dz\right) = v$$

Portanto $x(z)$ é dada por $x(u, v) = (\sinh u \cos v, \sinh u \sin v, v)$ que é a parametrização do helicóide.

A função meromorfa $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que aparece na representação de Weierstrass das imersões mínimas $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$, tem um importante significado geométrico. Para ver isto, vamos obter uma expressão para a aplicação de Gauss $N : M \rightarrow S^2(1)$ em termos da representação de Weierstrass para x . Localmente, para cada ponto de M , $\alpha_k = \phi_k dz$.

Além disso, note que

$$\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} = \operatorname{Im}\{(\phi_2 \bar{\phi}_3, \phi_3 \bar{\phi}_1, \phi_1 \bar{\phi}_2)\}$$

e por (1.12) temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} &= \operatorname{Im}\left\{\frac{if}{2}(1+g^2)\bar{f}\bar{g}, fg\frac{\bar{f}}{2}(1-\bar{g}^2), \frac{-if}{2}(1-g^2)\frac{\bar{f}}{2}(1+\bar{g}^2)\right\} \\ &= \frac{|f|^2}{4}(1+|g|^2)(2\operatorname{Re}(g), 2\operatorname{Im}(g), |g|^2-1) \end{aligned}$$

Disto segue que

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}\right| &= \frac{|f|^2}{4}(1+|g|^2)[4(\operatorname{Re}g)^2 + 4(\operatorname{Im}g)^2 + |g|^4 - 2|g|^2 + 1]^{1/2} \\ &= \frac{|f|^2}{4}(1+|g|^2)(|g|^4 + 2|g|^2 + 1)^{1/2} \\ &= \frac{|f|^2}{4}(1+|g|^2)^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$N = \frac{\frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v}}{\left| \frac{\partial x}{\partial u} \times \frac{\partial x}{\partial v} \right|} = \left(\frac{2\text{Re}g}{1 + |g|^2}, \frac{2\text{Im}g}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2} \right).$$

1.4 Superfícies Mínimas, em \mathbb{R}^3 , com Curvatura Total Finita.

O fato da curvatura total de uma superfície mínima completa ser finita implica em fortes restrições sobre sua estrutura conforme. Mais precisamente podemos afirmar o seguinte:

Teorema 1.7. *Seja M uma superfície completa em \mathbb{R}^3 , cuja curvatura Gaussiana satisfaz:*

$$(a) K \leq 0$$

$$(b) \int |K| dA < \infty.$$

Então M é conformemente equivalente a uma superfície compacta \widehat{M} perfurada em um número finito de pontos.

Demonstração: Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada em [10]. \square

Definição 1.8. *Seja M uma superfície mínima completa. A curvatura total de M é dada por*

$$C(M) = \int |K| dA \tag{1.16}$$

onde K é a curvatura gaussiana. Dizemos que M tem curvatura total finita se $C(M) < \infty$.

Lema 1.9. *Seja M uma superfície regular mínima completa em \mathbb{R}^3 . Se a curvatura total de M é finita, então a aplicação de Gauss, $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, se estende a uma função meromorfa definida na superfície \widehat{M} descrita no teorema anterior.*

Demonstração: Como M é conformemente equivalente a $\widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$, podemos considerar g como uma função meromorfa definida nesta última superfície. Se algum dos p_j fosse uma singularidade essencial de g , então pelo teorema (grande) de Picard g assumiria qualquer valor, com duas possíveis exceções no máximo, infinitas vezes. Mas isto implicaria que a área da imagem esférica de M seria infinita e, portanto, também seria infinita a curvatura total, contradizendo a hipótese. Assim g tem uma singularidade removível ou um pólo em cada p_j , podendo assim ser estendida a uma função meromorfa em \widehat{M} . \square

Lema 1.10. *Seja M uma superfície mínima completa em \mathbb{R}^3 com curvatura total finita. Então*

$$C(M) = \int |K| dA = -4\pi m, \text{ onde } m \in \mathbb{Z} \text{ e } m \geq 0.$$

Demonstração: Como M é mínima então $K \leq 0$, assim $\int K dA$ diverge a $-\infty$ ou a curvatura total é finita. Se $C(M)$ é finita então aplicando o lema anterior encontramos que a curvatura total é o negativo da área da imagem esférica de $\widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$, através de g . Como g é meromorfa em \widehat{M} , ou g é constante ou g cobre a esfera m vezes. No primeiro caso $C(M) = 0$, no segundo $C(M) = -4\pi m$. \square

Notações 1.11. $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, denota uma imersão mínima completa, com curvatura total finita. Se não for este o caso, será dada uma nova definição para a aplicação.

Definição 1.12. *Seja \widehat{M} uma superfície compacta, p_1, \dots, p_r um número finitos de pontos em \widehat{M} e $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, uma imersão mínima completa. Se $D \subset \widehat{M}$ é uma vizinhança contendo p_j , então a imagem $x(D - p_j)$ de $D - p_j$ por x é um fim de $x(\widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\})$, o qual denotamos E_j .*

Um fim de uma superfície mergulhada é a parte da superfície que é topologicamente homeomorfa ao disco perfurado no centro, tal que todo caminho partindo do centro tem comprimento infinito. O catenóide é um exemplo de uma superfície mínima completa, em \mathbb{R}^3 , com dois fins.

Lema 1.13. *Seja \widehat{M} uma superfície compacta e $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$, como definimos. $C(M) = -4\pi m$. A forma $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tem um pólo de ordem $m_j \geq 2$ em cada ponto p_j .*

Demonstração: Numa vizinhança de p_j , α_i pode ser representada por

$$\alpha_i = \phi_i(z)dz$$

com $z = 0$ correspondendo a p_j .

Em $z = 0$ cada α_i tem no máximo um pólo de ordem $m_{i,j}$. Como M é completa na métrica induzida e esta métrica é dada por

$$ds^2 = 1/2 \sum_{i=1}^3 |\phi_i(z)|^2 |dz|^2$$

então temos

$$\lim_{z \rightarrow 0} \sum_{i=1}^3 |\phi_i(z)|^2 = \infty.$$

Assim $m_j = \max\{m_{1,j}, m_{2,j}, m_{3,j}\} \geq 1$. Observe que m_j é exatamente a ordem do pólo α em p_j . Suponha que $m_j = 1$ então,

$$\alpha_i(z) = \frac{c_i}{z} + b_i + \dots, \quad i = 1, 2, 3.$$

Pelo fato de $x_i = \operatorname{Re} \int \phi_i(z)dz$, segue que $x_i - \operatorname{Re}(c_i \log z)$ está bem definida e c_i é real. Como $\sum \phi_i^2 = 0$ então $\sum c_i^2 = 0$, e portanto cada c_i é nulo. Mas isto é uma contradição, portanto $m_j \geq 2$. \square

Teorema 1.14. *Seja \widehat{M} uma superfície compacta e $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$. $C(M) = -4\pi m$. Então*

$$2m \geq 2r - \chi(\widehat{M}) \tag{1.17}$$

onde $\chi(\widehat{M})$ é a característica de Euler de \widehat{M} .

Demonstração: Observe que a extensão de g para \widehat{M} assume cada valor de S^2 exatamente m vezes, contando multiplicidade, então depois de uma mudança de coordenadas em \mathbb{R}^3 nós podemos supor que $g(p_j) \neq \infty$ e $g(p_j) \neq 0$, $j = 1, \dots, r$. Tomando $\omega = fdz$, pelo lema anterior temos que a forma ω tem um pólo de ordem $m_j \geq 2$ em p_j e exatamente $2m$ zeros (contando multiplicidade). Pela relação de Riemann que o número de pólos em ω menos o número de zeros em ω é igual a característica de Euler em (\widehat{M}) . Assim obtemos

$$\sum_{j=1}^r m_j - 2m = \chi(\widehat{M})$$

como $m_j \geq 2$, então

$$2m \geq 2r - \chi(\widehat{M})$$

Observamos que a igualdade vale se e somente se todos os fins da superfície são mergulhados. \square

A característica de Euler de M é dada por

$$\chi(M) = \chi(\widehat{M}) - r \tag{1.18}$$

assim obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.15. *Sejam $M = \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$ e $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$. Então*

$$\int |K| dA \leq 2\pi(\chi(M) - r) \tag{1.19}$$

Demonstração: Pelo lema (1.10) temos que

$$C(M) = \int |K| dA = -4\pi m = 2\pi(-2m)$$

de (1.17) temos que

$$-2m \leq \chi(\widehat{M}) - 2r \therefore \int |K| dA \leq 2\pi(\chi(\widehat{M}) - 2r)$$

de (1.18) temos que

$$\int |K| dA \leq 2\pi(\chi(M) - r)$$

□

Se Y_ρ representa a intersecção do catenóide com a esfera de raio ρ , então $\frac{1}{\rho}Y_\rho$ converge para os grandes círculos de $S^2(1)$, com ρ indo para infinito. Tal fato leva a concluir que o catenoide visto do infinito parece com duas cópias de um plano passando pela origem, com orientações opostas. Inspirados neste fato, Jorge e Meeks provaram o seguinte resultado:

Teorema 1.16. *Seja M uma superfície completa imersa em \mathbb{R}^3 , difeomorfa a $\widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$, onde \widehat{M} é uma superfície compacta orientável tal que a aplicação de Gauss N se estende continuamente a \widehat{M} . Se $Y_\rho = M \cap S^2(\rho)$, então $\frac{1}{\rho}Y_\rho$ consiste de r curvas fechadas $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ que convergem C^1 para geodésicas fechadas $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ de $S^2(1)$, com multiplicidade I_1, \dots, I_r .*

Demonstração: Esta demonstração pode ser encontrada em [8].

□

Capítulo 2

O Teorema de Osserman

Nosso objetivo neste capítulo será estudar um conhecido teorema devido a R. Osserman que diz : A menos que a superfície M seja um plano, a imagem esférica de M omite , no máximo, três pontos da esfera S^2 . No intuito de simplificar a demonstração deste teorema, usaremos menos argumentos de variáveis complexas.

Nossa demonstração usa ainda a representação de Weierstrass, o fato de M ser uma superfície compacta menos um número finito de pontos e um teorema de Poincaré do curso básico de Geometria Diferencial, o qual afirma que a soma dos índices de um campo diferenciável com singularidades isoladas sobre uma superfície compacta \widehat{M} é igual à característica de Euler desta superfície.

Mais especificamente, nas duas seções iniciais, consideraremos certas funções particulares sobre a superfície \widehat{M} , e usando o teorema de Poincaré para o campo gradiente destas funções, conseguiremos algumas relações entre a característica de Euler de \widehat{M} , o número de fins, o índice de cada fim, a curvatura total de M e o número de pontos omitidos pela imagem esférica de M .

Não são conhecidos exemplos de superfícies cuja aplicação de Gauss omite três direções. Ainda neste capítulo, fazendo hipóteses adicionais sobre o tipo de fins da superfície, obtemos resultados que melhoraram o teorema de Osserman.

2.1 A Função Altura

Seja um ponto qualquer $\xi \in S^2$ e consideremos a função $f_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$, definida por:

$$f_\xi(p) = \langle x(p), \xi \rangle \quad (2.1)$$

Por um cálculo simples temos que:

$$\text{grad } f_\xi = \xi^T \quad (2.2)$$

onde ξ^T é a projeção ortogonal de ξ em $T_p M$. Logo as singularidades do campo $\text{grad } f_\xi$ estão nos pontos onde $N(p) = \pm \xi$.

Proposição 2.1. *Se $\text{grad } f_\xi = 0$ então o índice desta singularidade, $i_p(\text{grad } f_\xi)$, é $-\nu(p)$, onde $\nu(p)$ é a ordem de p como zero de $g - g(p)$*

Demonstração: Por meio de um movimento rígido em \mathbb{R}^3 , se necessário, podemos supor que $\xi = \pm(0, 0, 1)$. Consideremos a seguinte identificação $\pi : S^2(1) \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ de modo que $\pi(0, 0, 1) = \infty$ e $\pi(0, 0, -1) = 0$. Logo temos $g(p) = 0$ ou $g(p) = \infty$. Mudando novamente as coordenadas de \mathbb{R}^3 , podemos supor que $g(p) = 0$. Tome $z = u + iv$ parâmetro complexo local de M tal que p corresponde a $z = 0$, então numa vizinhança de p temos

$$g(z) = z^{\nu(p)} \cdot \tilde{g}(z)$$

com $\tilde{g}(0) \neq 0$. Por outro lado $w = f(z)dz$ é holomorfa, então

$$0 < |f(0)| < \infty.$$

De 1.12, 1.15 e da escolha de coordenadas feita para \mathbb{R}^3 temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_\xi}{\partial z}(z) &= \left\langle \frac{\partial x}{\partial z}, \xi \right\rangle = \pm g(z) \cdot f(z) \\ &= \pm z^{\nu(p)} \cdot \tilde{g}(z) \cdot f(z) \\ \frac{\partial f_\xi}{\partial z}(z) &= w(z)^{\nu(p)} \end{aligned}$$

onde w é uma função holomorfa de z com $w(0) = 0$ e $w'(0) \neq 0$.

Daí obtemos:

$$\frac{\partial f_\xi}{\partial u} = 2\operatorname{Re}\left(\frac{\partial f_\xi}{\partial z}\right) = 2 \cdot \operatorname{Re}(w^{\nu(p)})$$

$$\frac{\partial f_\xi}{\partial v} = -2\operatorname{Im}\left(\frac{\partial f_\xi}{\partial z}\right) = -2 \cdot \operatorname{Im}(w^{\nu(p)})$$

e

$$\operatorname{grad} f_\xi = \frac{1}{|\frac{\partial x}{\partial z}|^2} \left[\operatorname{Re}(w^{\nu(p)}) \frac{\partial x}{\partial u} - \operatorname{Im}(w^{\nu(p)}) \frac{\partial x}{\partial v} \right]$$

portanto

$$i_p(\operatorname{grad} f_\xi) = -\nu(p)$$

□

Para ver o que acontece com $\operatorname{grad} f_\xi$ nos pontos $p_i \in \widehat{M} - M$, vamos estudar agora o comportamento do campo $\operatorname{grad} f_\xi$ ao longo das curvas γ_ρ^i , definidas no teorema 1.16, tal que $\gamma_\rho^i : S^1 \rightarrow M$ parametriza ∂V_i ,

$$V_i = E_i \cup \{p_i\},$$

onde E_i é um fim, V_i é uma vizinhança do fim E_i e ∂V_i é a fronteira de V_i .

Proposição 2.2. Para ρ “suficientemente grande” o índice de $\operatorname{grad} f_\xi$ ao longo de γ_ρ^i é:

$$(1) \quad I(p_i) + 1, \quad \text{se } \widehat{N}(p_i) \neq \pm\xi \quad (2.3)$$

$$(2) \quad I(p_i) - \nu(p_i) + 1, \quad \text{se } \widehat{N}(p_i) = \pm\xi \quad (2.4)$$

Demonstração: Escolhamos coordenadas em \mathbb{R}^3 de modo que $\widehat{g}(p) = \infty$, e $z = u+iv$ é parâmetro local de M com p correspondendo a $z = 0$ então numa vizinhança de p temos:

$$\widehat{g}(z) = a_0 + z^{\nu(p)} \cdot \tilde{g}(z)$$

com $\tilde{g}(0) \neq 0$. Por outro lado $w = f(z)dz$ é holomorfa, com $f(z) = z^{-\mu(p)} \cdot \tilde{f}(z)$, com $\tilde{f}(0) \neq 0$.

Como na demonstração da proposição anterior temos :

$$\frac{\partial f_\xi}{\partial z} = \left\langle \frac{\partial x}{\partial z}, \xi \right\rangle = \pm f(z) \cdot g(z)$$

(1) Se $\widehat{N}(p_i) \neq \pm \xi$, então $\widehat{g}(0) \neq 0$ e podemos escrever

$$\frac{\partial f_\xi}{\partial z} = \pm z^{-\mu(p)} \cdot h_1(z), \text{ onde } h_1 = \tilde{f} \cdot \widehat{g} \text{ e } h_1(0) \neq 0.$$

(2) Se $\widehat{N}(p_i) = \pm \xi$, então $\widehat{g}(0) = 0$ e

$$\frac{\partial f_\xi}{\partial z} = \pm z^{\nu(p)-\mu(p)} \cdot h_2(z), \text{ onde } h_2 = \tilde{f} \cdot \widehat{g} \text{ e } h_2(0) \neq 0.$$

Segue que :

$$(1) \quad \frac{\partial f_\xi}{\partial z} = w_1(z)^{-\mu(p)} = w_1(z)^{n_1}$$

$$(2) \quad \frac{\partial f_\xi}{\partial z} = w_2(z)^{\nu(p)-\mu(p)} = w_2(z)^{n_2}.$$

As funções w_i são holomorfas e satisfazem $w'_i(0) \neq 0$. Assim temos :

$$\text{grad } f_\xi = \frac{1}{\left| \frac{\partial x}{\partial z} \right|^2} \cdot \left[\text{Re}(w_i^{n_i}) \frac{\partial x}{\partial u} - \text{Im}(w_i^{n_i}) \frac{\partial x}{\partial v} \right]$$

Portanto para ρ suficientemente grande, tal que γ_ρ^i esteja contido na vizinhança de p_i que estivermos trabalhando, o índice de $\text{grad } f_\xi$ ao longo de γ_ρ^i é μ no caso (1) e $\mu - \nu$ no caso (2).

O lema seguinte completa a prova.

Lema 2.3. *Se $p \in \widehat{M} - M$, $\widehat{g}(p) \neq \infty$ e ω tem um pólo de ordem μ em p , então*

$$I(p) = \mu - 1$$

Demonstração: Podemos escolher coordenadas em $S^2(1)$ de modo que $\widehat{g}(p) = 0$. Segue de 1.15 que

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 &= \operatorname{Re} \int^z (1 - g^2) f dz - i \operatorname{Im} \int^z (1 + g^2) f dz \\ &= \operatorname{Re} \int^z (1 - z^{2\nu} \cdot \tilde{g}(z)^2) \frac{\tilde{f}(z)}{z^\mu} dz - i \operatorname{Im} \int^z (1 + z^{2\nu} \cdot \tilde{g}(z)^2) \frac{\tilde{f}(z)}{z^\mu} dz \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{b_0}{z^{\mu-1}} + f_1(z) \right) - i \operatorname{Im} \left(\frac{b_0}{z^{\mu-1}} + f_2(z) \right) \end{aligned}$$

onde f_1 e f_2 são séries de potências com no máximo termos em $\frac{1}{z^{\mu-2}}$.

Escrevendo $z = re^{i\theta}$ e $b_0 = r_0 e^{i\theta_0}$ obtemos :

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{\mu-1} (x_1 + ix_2) = r_0 \exp(i[(1 - \mu)\theta + \theta_0])$$

Logo para ρ suficientemente grande (tal que γ_ρ^i é suficientemente pequena) $x_1 + ix_2$ transforma o círculo de raio r em torno de p em uma curva fechada que gira $(\mu - 1)$ vezes em torno da origem. Ou seja, $I(p) = \mu - 1$ \square

Corolário 2.4. *Seja $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ como sempre, $C(M) = -4\pi m$. Então*

$$\chi(\widehat{M}) = \sum_{i=1}^r (I(p_i) + 1) - 2m$$

Demonstração: Escolha $\xi \in S^2$ tal que $\widehat{N}(p_i) \neq \pm\xi$, $i = 1, \dots, r$. Assim temos:

$$\begin{aligned} \chi(\widehat{M}) &= \sum_{N(p)=\pm\xi} i_p(\operatorname{grad} f_\xi) + \sum_{i=1}^r i_{p_i}(\operatorname{grad} f_\xi) \\ &= - \sum_{N(p)=\pm\xi} \nu(p_i) + \sum_{i=1}^r (I(p_i) + 1) \\ &= -2m + \sum_{i=1}^r (I(p_i) + 1) \end{aligned}$$

\square

2.2 Função Tipo Suporte

Seja um ponto qualquer $\xi \in S^2$, consideremos agora a função $s_\xi : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por :

$$s_\xi = \langle N(p), \xi \rangle \quad (2.5)$$

Um cálculo simples mostra que as singularidades de $\text{grad } s_\xi$ são os pontos onde $\xi^T = 0$ ou $K(p) = 0$. Por uma mudança de coordenadas em \mathbb{R}^3 podemos sempre supor que $\xi = (0, 0, 1)$. Como

$$N = \left(\frac{2\text{Reg}}{1 + |g|^2}, \frac{2\text{Im}g}{1 + |g|^2}, \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2} \right)$$

temos que :

$$s_\xi = \frac{|g|^2 - 1}{1 + |g|^2}$$

Proposição 2.5.

- (A) $\widehat{N}(p) = \pm\xi \Rightarrow \text{grad } s_\xi(p) = 0$ e $i_p(\text{grad } s_\xi) = 1$
 (B) $\widehat{N}(p) \neq \pm\xi$ e $\text{grad } s_\xi(p) = 0 \Rightarrow i_p(\text{grad } s_\xi) = 1 - \nu(p)$.

Demonstração: Seja p um ponto de M , tal que $\widehat{N}(p) = \pm\xi$. Em termos de coordenadas locais $z = u + iv$, com p correspondendo a $z = 0$, temos $g(z) = z^{\nu(p)} \cdot \tilde{g}(z)$, $\tilde{g}(0) \neq 0$, onde ν é um inteiro não nulo.

Se $\nu > 0$, então $s_\xi(0) = -1$ e

$$s_\xi(z) + 1 = \frac{2|g(z)|^2}{1 + |g(z)|^2} = \frac{2|z|^{2\nu}|\tilde{g}(z)|^2}{1 + |z|^{2\nu}|\tilde{g}(z)|^2}.$$

O ponto p é então um ponto de mínimo local para s_ξ (com índice +1).

Se $\nu < 0$, então $s_\xi(0) = 1$ e

$$s_\xi(z) - 1 = \frac{-2}{1 + |g(z)|^2} = -\frac{2|z|^{-2\nu}}{|z|^{-2\nu} + |\tilde{g}(z)|^2}.$$

O ponto p é então um ponto de máximo local para s_ξ e seu índice também é +1.

Quando $p \notin \widehat{N}^{-1}\{\pm\xi\}$, temos $g(z) = a_0 + z^\nu \cdot \tilde{g}(z)$, com $\tilde{g}(0) \neq 0$ e $\nu \geq 1$. Segue-se que:

$$s_\xi(0) = \frac{|a_0|^2 - 1}{|a_0|^2 + 1} \quad e$$

$$\begin{aligned} s_\xi(z) - s_\xi(0) &= \frac{2(|g(z)|^2 - |a_0|^2)}{(|g(z)|^2 + 1)(|a_0|^2 + 1)} \\ &= \frac{4\operatorname{Re}(z^\nu \bar{a}_0 \tilde{g}(z) + 2|z|^{2\nu} |\tilde{g}(z)|^2)}{(|g(z)|^2 + 1)(|a_0|^2 + 1)}. \end{aligned}$$

fazendo $z = re^{i\theta}$ obtemos

$$\begin{aligned} \psi(\theta) &:= \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{r^\nu} (s_\xi(z) - s_\xi(0)) \\ &= \frac{4}{(|a_0|^2 + 1)^2} \operatorname{Re}(e^{i\nu\theta} \bar{a}_0 b_0) \end{aligned}$$

onde $b_0 = \tilde{g}(0)$. Fazendo $\bar{a}_0 b_0 = Re^{i\alpha}$, obtemos

$$\psi(\theta) = \frac{4R}{(|a_0|^2 + 1)^2} \cos(\nu\theta + \alpha).$$

A partir desta expressão vemos que $s_\xi(z) - s_\xi(0)$ muda de sinal em qualquer vizinhança de $z = 0$. Por alguns cálculos, concluimos que $i_p(\operatorname{grad} s_\xi) = 1 - \nu(p)$. \square

2.3 O Teorema

Um conhecido teorema devido a Robert Osserman afirma que se M é uma superfície mínima completa em \mathbb{R}^3 , de curvatura total finita diferente de um plano, então a imagem esférica de M omite no máximo três pontos da esfera S^2 .

Este teorema foi provado por Osserman em [10] usando um método diferente do que nós apresentaremos aqui. No intuito de simplificar a demonstração, usaremos menos argumentos de variáveis complexas.

Até hoje, não se conhece exemplo algum de uma superfície mínima completa cuja imagem esférica omite exatamente três pontos.

Teorema 2.6. *Seja $x : M = \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa com curvatura total finita $-4\pi m$. Suponha que $\{\xi_1, \dots, \xi_k\} \subseteq S^2(1) - g(M)$ e que M não é um plano. Então $k \leq 3$.*

Demonstração: Considere os seguintes conjuntos:

$$\begin{aligned} A_i &= \{p \in \widehat{M} - M, \widehat{g}(p) = \xi_i\}, \quad i = 1, \dots, k. \\ B &= \{p \in \widehat{M} - M, \widehat{g}(p) \in g(M)\} \\ C &= \{p \in M, \nu(p) > 1\} \end{aligned}$$

Seja ξ um valor regular de g . Contando os índices das singularidades de $\text{grad } s_\xi$ temos:

$$\begin{aligned} \chi(\widehat{M}) &= \sum_{\widehat{N}(p)=\pm\xi} i_p(\text{grad } s_\xi) + \sum_{\widehat{N}(p)\neq\pm\xi} i_p(\text{grad } s_\xi) \\ &= 2m + \sum_{i=1}^k \sum_{p \in A_i} (1 - \nu(p)) + \sum_{p \in B} (1 - \nu(p)) + \sum_{p \in C} (1 - \nu(p)) \end{aligned}$$

Note que:

$$\sum_{p \in A_i} \nu(p) = m \quad \text{e} \quad \left(\sum_{i=1}^k \#A_i \right) + \#B = r,$$

portanto

$$\begin{aligned} \chi(\widehat{M}) &= 2m + \sum_{i=1}^k [(\#A_i - m) + \#B] - \sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} (\nu(p) - 1) \\ &= 2m + r - km - \sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} (\nu(p) - 1). \end{aligned}$$

Agora usando o Corolário (2.4) obtemos:

$$\sum_{i=1}^r I(p_i) = 4m - km - \sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} (\nu(p) - 1),$$

daí

$$(4 - k)m > 0, \quad \text{donde } k < 4$$

□

Corolário 2.7. *Seja $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ como no teorema anterior e suponha que $k = 3$, então $\chi(\widehat{M}) \leq 0$. Além disso se $\chi(\widehat{M}) = 0$ temos:*

- (1) $m = r$
- (2) $B = C = \emptyset$
- (3) *Os fins de M são mergulhados.*

Demonstração: Uma vez que $k = 3$ temos

$$\begin{aligned} \chi(\widehat{M}) &= (2 - k)m + r - \sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} \nu(p) - 1 \\ &= r - m - \sum_{p \in B} \nu(p) - \sum_{p \in C} \nu(p) - 1 \\ &\leq r - m. \end{aligned}$$

Por outro lado, pela equação (1.17) temos $\chi(\widehat{M}) \geq 2(r - m)$.

Logo $2(r - m) \leq \chi(\widehat{M}) \leq r - m$ portanto $r - m \leq 0$, ou seja, $\chi(\widehat{M}) \leq 0$.

Agora se $\chi(\widehat{M}) = 0$ então $r = m$

$$\sum_{p \in B} \nu(p) + \sum_{p \in C} (1 - \nu(p)) = 0 \text{ logo } B = C = \emptyset$$

Do teorema (1.14) temos que a igualdade vale se e somente se, os fins são mergulhados. □

Corolário 2.8. *Nas hipóteses do teorema, se $k = 3$ então $m \geq 3$.*

Demonstração: Da demonstração anterior temos que $2(r - m) \leq \chi(\widehat{M}) \leq 0$, logo $m \geq r$. Observe agora que cada ponto omitido de S^2 tem no mínimo uma pré-imagem em \widehat{M} por \widehat{N} , portanto $r \geq 3$. □

Note que:

- (1) Se $k = 3$, o corolário (2.7) nos diz que \widehat{M} não é homeomorfa à esfera S^2
- (2) Se $k = 3$, do corolário (2.8) temos $C(M) \leq -12\pi$.

2.4 Comportamento de M no Infinito

Nesta seção vamos analisar o comportamento das superfícies mínimas completas de curvatura total finita vistas no infinito. Podemos dizer que uma superfície com estas características e com k fins, se apresenta como k planos passando pela origem, cada um com uma multiplicidade (número de vezes que o plano é contado) I_j , $j = 1, \dots, k$, que é igual a um se o fim correspondente é mergulhado (não tem auto-intersecção).

Seja $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima, completa, $C(M) = -4\pi m$, e seja (g, ω) um par de Weierstrass para x , onde $\omega = f dz$. Após uma rotação de \mathbb{R}^3 podemos supor, para $j \in \{1, \dots, r\}$ fixado, que $\widehat{g}(p_j) = 0$.

Seja $D \subset \widehat{M}$ uma vizinhança de p_j e seja z um parâmetro local em D tal que $z(p_j) = 0$. Então, Localmente

$$g(z) = z^\nu \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n; \quad \nu \geq 1 \text{ e } b_0 \neq 0.$$

Como M é completa, f tem um pólo em p_j e sabemos que a ordem deste pólo é pelo menos dois. Assim, localmente

$$f(z) = z^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \quad \mu \geq 2 \text{ e } a_0 \neq 0.$$

Do Lema (2.3) temos, $I(p) = \mu - 1$. Portanto p_j é um fim mergulhado se e somente se, $\mu(p_j) = 2$.

Suponhamos que p_j é um fim mergulhado, isto é $\mu(p_j) = 2$. A função que descreve o comportamento assintótico do fim é $x_3 = x_3(x_1, x_2)$, onde

$$x_3 = \operatorname{Re} \int \alpha_3, \quad \alpha_3 = g\omega = g f dz$$

e

$$\begin{aligned} g f &= z^{\nu-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^n a_i b_{n-i} \right) z^n \\ &= a_0 b_0 z^{\nu-2} + (a_0 b_1 + a_1 b_0) z^{\nu-1} + \dots \end{aligned}$$

Se $\nu > 1$, então gf é holomorfa e $x_3(p) = \operatorname{Re} \int^p g\omega$ é tal que

$$\lim_{p \rightarrow p_j} x_3(p) = L \in \mathbb{R},$$

ou seja, o fim F_j se aproxima do plano $\{x_3 = L\}$. Neste caso dizemos que F_j é um fim planar de ordem $\nu - 1$.

Se $\nu = 1$, então $gf = a_0 b_0 z^{-1} +$ função holomorfa. Como $\operatorname{Re} \oint_l (gf) dz = 0$, para todo caminho fechado l , obtemos que $\operatorname{Re}(2\pi i a_0 b_0) = 0$. Portanto, $a_0 b_0 \in \mathbb{R}$.

Assim,

$$x_3(z) = a_0 b_0 \log|z| + R(z),$$

onde R é uma função harmônica na vizinhança de $0 \in \mathbb{C}$ e $R(0) = 0$. O número $a_0 b_0 \in \mathbb{R}$ diz-se o crescimento logarítmico do fim F_j . Neste caso dizemos que o fim F_j é um fim tipo catenóide e geometricamente F_j assíntota um catenóide em \mathbb{R}^3 .

Teorema 2.9. *Seja $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ como sempre. Suponha que os fins de M são tais que*

$$\nu(p_j) - \mu(p_j) \leq 0, \quad \forall j = 1, \dots, r.$$

Se k é o número de pontos omitidos pela aplicação de Gauss, então $k \leq 2$.

Demonstração: Pelo Teorema (2.6) temos que $k \leq 3$. Suponha que $k = 3$ e sejam ξ_1, ξ_2, ξ_3 os pontos omitidos, ou seja $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} \subset S^2 - g(M)$. Sejam

$$\begin{aligned} A_i &= \{p \in \widehat{M} - M; \widehat{g}(p) = \xi_i\}, \quad i = 1, 2, 3 \\ B &= \{p \in \widehat{M} - M; \widehat{g}(p) \in g(M)\}. \end{aligned}$$

Contando os índices de $\operatorname{grad} f_\xi$ obtemos:

(A) Quando $\xi_2 = -\xi_1$

$$\chi(\widehat{M}) = \sum_{p \in A_1 \cup A_2} (I(p) - \nu(p) + 1) + \sum_{p \in A_3 \cup B} (I(p) + 1),$$

por hipótese

$\nu(p) - \mu(p) \leq 0$ logo $\nu(p) - I(p) - 1 \leq 0$. Portanto $I(p) - \nu(p) + 1 > 0, \quad \forall p \in \cup A_i$.

Assim $\chi(\widehat{M}) > 0$, mas este fato contradiz o Corolário 2.7, ou seja o caso (A) é impossível.

(B) Quando $\xi_2 \neq -\xi_1$ e $\xi_3 \neq -\xi_1$,

$$\begin{aligned}\chi(\widehat{M}) &= \sum_{p \in A_1} (I(p) - \nu(p) + 1) + \sum_{N(p)=-\xi_1} (-\nu(p)) + \sum_{p \in A_2 \cup A_3 \cup B} (I(p) + 1) \\ &\geq -m + \sum_{p \in A_2 \cup A_3 \cup B} (I(p) + 1).\end{aligned}$$

Como

$$\sum_{p \in A_2} (I(p) + 1) \geq \sum_{p \in A_2} \nu(p) = m,$$

obtemos $\chi(\widehat{M}) > 0$, mas este fato contradiz o Corolário 2.7. Portanto o caso (B) também não é possível. Logo $k \leq 2$. \square

Teorema 2.10. *Seja $x : \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão como sempre. Suponha que os fins de M são tais que $I(p_j) - \nu(p_j) + 1 < 0$ e que a aplicação de Gauss omite dois pontos de S^2 , ou seja $k = 2$. Então M é topologicamente uma esfera menos dois pontos.*

Demonstração: Sejam $\xi_1, \xi_2 \in S^2$ os pontos omitidos. Então como na demonstração anterior, temos:

(A) Quando $\xi_2 = -\xi_1$

$$\chi(\widehat{M}) = \sum_{p \in A_1 \cup A_2} (I(p) - \nu(p) + 1) + \sum_{p \in B} (I(p) + 1).$$

Ou seja, $\chi(\widehat{M}) > 0$ portanto $\widehat{M} \approx S^2$.

(B) Quando $\xi_2 \neq -\xi_1$

$$\begin{aligned}\chi(\widehat{M}) &= \sum_{p \in A_1} (I(p) - \nu(p) + 1) - m + \sum_{p \in A_2 \cup B} (I(p) + 1) \\ &= \sum_{p \in A_1} (I(p) - \nu(p) + 1) - m + m + \sum_{p \in B} (I(p) + 1).\end{aligned}$$

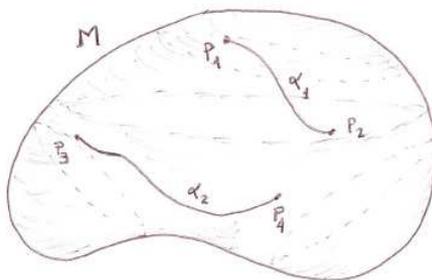
Logo, neste caso novamente temos $\chi(\widehat{M}) > 0$ portanto $\widehat{M} \approx S^2$.

Assim, em ambos os casos, temos \widehat{M} homeomorfa à esfera. Portanto

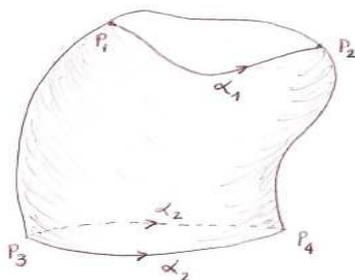
$$M \cong S^2 - \{p_1, \dots, p_r\}$$

Afirmção 1 : $r \leq 3$

Suponha que $r \geq 4$ e sejam p_1, p_2, p_3, p_4 quatro pontos distintos de $\widehat{M} - M$. Consideremos duas curvas simples (diferenciáveis) contidas em M , α_1, α_2 ligando p_1 a p_2 e p_3 a p_4 respectivamente, tais que $\alpha_1 \cap \alpha_2 = \emptyset$.

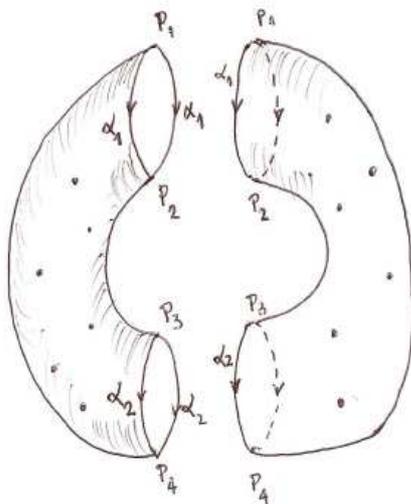


”Cortando” M ao longo de α_1 e α_2 obtemos outra superfície.



Juntando duas cópias desta última superfície ao longo de α_1 e α_2 , resulta uma superfície compacta de gênero 1 com $2(r - 4) + 4$ pontos removidos.

Denotemos esta nova superfície por M' e seja $R : M' \rightarrow M$ a aplicação de recobrimento natural. Agora $x \circ R : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima, com a mesma imagem



que x e com aplicação de Gauss dada por $N' = N \circ R$ cuja imagem é a mesma que a da aplicação de Gauss de x .

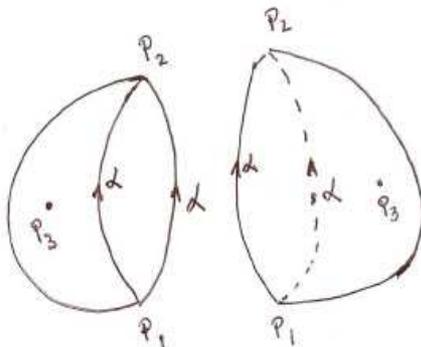
Para os fins de M' ainda temos $I(p) - \nu(p) + 1 > 0$, pois nos fins que não estão na fronteira das curvas α_1 e α_2 continua-se a ter o mesmo comportamento local, logo o mesmo $I(p)$ e o mesmo $\nu(p)$. Conseqüentemente o valor de $I(p) - \nu(p) + 1$ não mudou. Para os fins que estão na fronteira das curvas α_1 e α_2 algumas mudanças ocorrem. Uma vizinhança de p_1 , por exemplo, agora cobre duas vezes uma vizinhança antiga. Segue-se que $I(p_1)$ muda para $2I(p_1)$ e $g(z)$ muda para $g(z^2) = z^{2\nu} \tilde{g}(z^2)$ de modo que $\nu(p_1)$ muda para $2\nu(p_1)$. Portanto $I(p_1) - \nu(p_1)$ muda para $2I(p_1) - 2\nu(p_1)$ preservando-se a desigualdade $\nu(p) \leq I(p)$, ou seja ainda temos $I(p) - \nu(p) + 1 > 0$.

Assim $x \circ R : M' \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima como na proposição, com fins tais que $I(p) - \nu(p) + 1 > 0$. Pela primeira parte devemos ter que $\chi(\widehat{M}') > 0$. Isto contradiz o fato de \widehat{M}' ter gênero 1. Portanto, $r \leq 3$

Afirmção 2 : $r = 2$

De fato, é claro que $r \geq 2$. Suponha que $r = 3$ e sejam p_1, p_2, p_3 os fins de M . Considere uma curva α ligando p_1 a p_2 como antes. A construção de M' nos conduz

agora a uma superfície com $r = 4$, contradizendo o fato de $r \leq 3$. Portanto, $r = 2$



□

Corolário 2.11. *Nas hipóteses da proposição anterior, se os fins de M são mergulhados, então M descreve um catenóide.*

Demonstração: Sejam $\widehat{M} - M = \{p_1, p_2\}$ e ξ_1, ξ_2 os pontos omitidos pela aplicação de Gauss. É claro que $\widehat{N}(p_1, p_2) = \{\xi_1, \xi_2\}$, digamos que $\widehat{N}(p_i) = \xi_i$, $i = 1, 2$.

(A) Se $\xi_2 = -\xi_1$,

$$\begin{aligned} 2 &= \chi(\widehat{M}) = \sum_{p \in A_1 \cup A_2} (I(p) - \nu(P) + 1) \\ &= 4 - \nu(p_1) - \nu(p_2) \\ &= 4 - 2m \quad \text{portanto } m = 1 \end{aligned}$$

(B) Se $\xi_2 \neq -\xi_1$,

$$\begin{aligned} 2 &= \chi(\widehat{M}) = \sum_{p \in A_1} (I(p) - \nu(p) + 1) - m + \sum_{p \in A_2} (I(p) + 1) \\ &= I(p_1) - \nu(p_1) + 1 - m + I(p_2) + 1 \\ &= 4 - 2m \quad \text{logo } m = 1. \end{aligned}$$

Assim em qualquer caso, $m = 1$. Logo $C(M) = -4\pi$. Por um resultado de Osserman, encontrado em [10] M é um catenóide ou a superfície de Enneper. Porém, na superfície de Enneper os fins não são mergulhados, logo M é catenóide. \square

Proposição 2.12. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão com $C(M) = -4m\pi$, cuja aplicação de Gauss omite três pontos. Se tem r fins todos mergulhados, dos quais l são do tipo catenóide, então $r - l > 2$.*

Demonstração: Sejam p_i os fins mergulhados tipo catenóide, então

$$\nu(p_i) = 1.$$

Agora se $r - l \leq 2$, então no máximo dois fins são do tipo planar, ou seja no máximo para dois fins tem-se $\nu(p_j) > 1$.

Suponha que $\nu(p_1) > 1$ e $\nu(p_2) > 1$. Sejam ξ_1, ξ_2 , e ξ_3 os pontos omitidos pela aplicação de Gauss, como antes, seja

$$A_j = \{p \in \widehat{M} - M ; \widehat{g}(p) = \xi_j\} \quad j = 1, 2, 3.$$

Sabemos que $\sum_{p \in A_i} \nu(p) = m$. De modo que existe $j \in \{1, 2, 3\}$ tal que $\#A_j = m$. De fato, se $p_1 \in A_1$ e $p_2 \in A_2$ então

$$m = \sum_{p \in A_3} \nu(p) = \sum_{p \in A_3} 1 = \#A_3.$$

Se $p_1, p_2 \in A_1$, por exemplo, então $\#A_2 = \#A_3 = m$. Mas $A_j \subset \{p_1, \dots, p_r\}$, portanto $\#A_j \leq r$, para todo j , ou seja temos $m \leq r$.

Como $k = 3$ temos $2(r - m) \leq \chi(\widehat{M}) \leq 0$, ou seja $m \geq r$. Portanto $r = m$. Se $\#A_j = m = r$, então

$$\widehat{g}^{-1}(\xi_j) = \{p_1, \dots, p_r\}$$

e portanto \widehat{g} omite ξ_i , $i \neq j$, o que é uma contradição. Logo $r - l > 2$. \square

Corolário 2.13. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ como na proposição anterior. Se M tem no máximo quatro fins, todos mergulhados, então eles devem ser planares.*

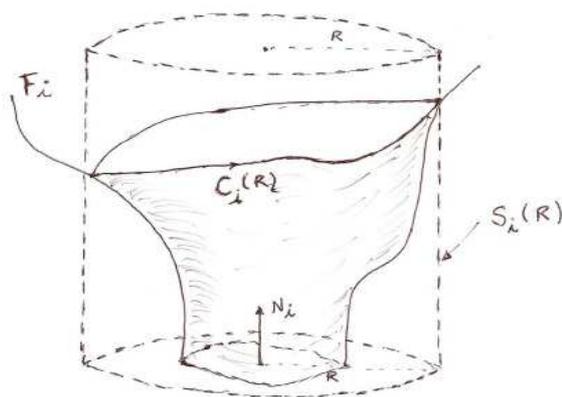
Demonstração: Como $r - l > 2$ temos que $4 - l > 2$, ou seja $l < 2$. Portanto $l \leq 1$. Assim, M têm no máximo um fim tipo catenóide. Porém não pode ter exatamente um, pois os fins tipo catenóide tem direções normais linearmente dependentes. Isto é consequência da proposição seguinte. \square

Proposição 2.14. *Sejam $x : M = \widehat{M} - \{p_1, \dots, r\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa, $C(M) = -4m\pi$, $N_i = \widehat{N}(p_i)$ e F_i , o fim correspondente a p_i , mergulhado. Suponha que F_j , $j = 1, \dots, l$ são fins do tipo catenóide e F_i , $i = l + 1, \dots, r$ são os fins planares (todos mergulhados). Então existem números reais não nulos a_j , $j = 1, \dots, l$, tais que*

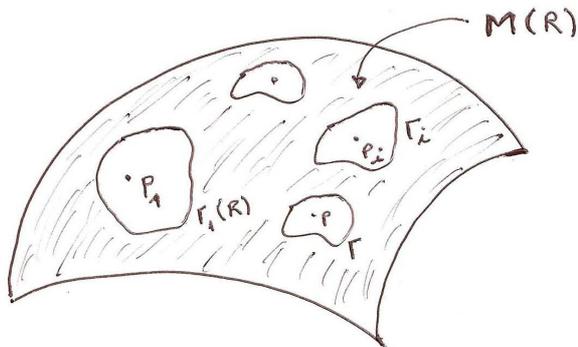
$$\sum_{j=1}^l a_j N_j = 0$$

Demonstração: Seja $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in S^2 \subset \mathbb{R}^3$ um ponto qualquer (fixo). Considere a função f_ξ definida em 2.1. Como $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma imersão mínima, temos que f_ξ é harmônica.

Seja $S_i(R)$ um cilindro circular reto, em \mathbb{R}^3 , com eixo N_i e raio R . Seja $C_i(R)$ a intersecção de $S_i(R)$ com o fim F_i . Para R grande, $C_i(R)$ é “quase” um círculo, isto decorre do comportamento assintótico do fim F_i que é mergulhado.



Seja $\Gamma_i(R) = x^{-1}(C_i(R))$ e considere a subvariedade compacta $M(R)$ de M limitada por $\cup_{i=1}^r \Gamma_i(R)$



Seja n_i a normal unitária interior a $\Gamma_i(R)$ sobre M . Então temos:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{M(R)} \Delta f_\xi \\ &= \sum_{i=1}^r \int_{\Gamma_i(R)} \langle \text{grad } f_\xi, n_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \int_{C_i(R)} \langle \xi^\top, \tilde{n}_i \rangle \\ &= \sum_{i=1}^r \int_{C_i(R)} \langle \xi, \tilde{n}_i \rangle \end{aligned}$$

onde ξ^\top é a projeção de ξ sobre TM e \tilde{n}_i é a normal unitária interior a $C_i(R)$ tangente a $x(M)$. Para calcular $\int_{C_i(R)} \langle \xi, \tilde{n}_i \rangle$ podemos supor que o fim F_i é gráfico sobre o plano (x_1, x_2) e que o vetor normal é $N_i = (0, 0, 1)$. Então $x = (x_1, x_2, x_3(x_1, x_2))$ é tal que

$$x_3 = \alpha_i \log(r) + \beta_i + O(r^{-1})$$

onde $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $\alpha_i \in \mathbb{R} - \{0\}$ se F_i é um fim catenóide e $\alpha_i = 0$ se F_i é um fim planar.

Sejam (r, θ) coordenadas polares no plano $x_1 x_2$, então

$$x(r, \theta) = (r \cos(\theta), r \sin(\theta), \alpha_i \log(r) + \beta_i + O(r^{-1})),$$

e

$$\tilde{n}_i = \frac{-\frac{\partial x}{\partial r}}{\left|\frac{\partial x}{\partial r}\right|} \quad \text{quando } r = R$$

$$\frac{\partial x}{\partial r} = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta), \frac{\alpha_i}{r} + O(r^{-2}))$$

$$\begin{aligned} \left\|\frac{\partial x}{\partial r}\right\|^2 &= 1 + \left(\frac{\alpha_i}{r} + O(r^{-2})\right)^2 \\ &= 1 + \frac{\alpha_i^2}{r^2} + 2\alpha_i O(r^{-3}) + O(r^{-4}) \\ &= 1 + O(r^{-1}) \\ \left\|\frac{\partial x}{\partial r}\right\| &= \sqrt{1 + O(r^{-1})}. \end{aligned}$$

Portanto $\tilde{n}_i = \frac{-1}{\sqrt{1 + O(R^{-1})}}(\cos \theta, \operatorname{sen} \theta, \frac{\alpha_i}{R} + O(R^{-2}))$.

Como $\int_{C_i(R)} \cos \theta = \int_{C_i(R)} \operatorname{sen} \theta = 0$ temos

$$\int_{C_i(R)} \xi_1 \cos(\theta) = \int_{C_i(R)} \xi_2 \operatorname{sen}(\theta) = 0$$

assim

$$\begin{aligned} \int_{C_i(R)} \langle \xi, \tilde{n}_i \rangle &= \int_{C_i(R)} \xi_3 \left(\frac{\alpha_i}{R} + O(R^{-2})\right) \frac{-1}{\sqrt{1 + O(R^{-1})}} \\ &= -\frac{2R\pi\alpha_i\xi_3}{R\sqrt{1 + O(R^{-1})}} - \frac{2R\pi\xi_3 O(R^{-2})}{\sqrt{1 + O(R^{-1})}} \\ &= -\frac{2\pi\alpha_i\xi_3}{\sqrt{1 + O(R^{-1})}} + O(R^{-1}) \\ &= -\frac{2\pi}{\sqrt{1 + O(R^{-1})}} \langle \xi, \alpha_i N_i \rangle + O(R^{-1}) \end{aligned}$$

Agora como $\alpha_i = 0$, $i = l + 1, \dots, r$ temos

$$0 = \sum_{i=1}^r \int_{C_i(R)} \langle \xi, \tilde{n}_i \rangle = -\frac{2\pi}{\sqrt{1 + O(R^{-1})}} \langle \xi, \sum_{i=1}^l \alpha_i N_i \rangle + O(R^{-1}).$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$ temos

$$-2\pi \langle \xi, \sum_{i=1}^l \alpha_i N_i \rangle = 0$$

e como $\xi \in S^2$ é arbitrário temos que

$$\sum_{i=1}^l \alpha_i N_i = 0.$$

□

Capítulo 3

Superfícies de Gênero 1

3.1 Introdução

No estudo das superfícies mínimas completas com curvatura total finita, imersas em \mathbb{R}^3 , nós podemos usar a representação de Weierstrass para transformar problemas de existência, unicidade, classificação, etc, em problemas de funções meromorfas e 1-formas numa superfície compacta. Mas em geral as funções meromorfas e 1-formas, nestas superfícies, são de difícil compreensão.

No caso das superfícies de gênero 1, podemos contar com a teoria das funções elípticas. Estudamos em particular a função elíptica de Weierstrass \wp associada a um reticulado $L = [1, \tau]$ no plano complexo.

Como vimos no capítulo 2, não são conhecidos exemplos de superfícies mínimas completas cuja aplicação de Gauss omite três pontos, sabe-se apenas se tal superfície existe, então sua curvatura total $C(M)$ é muito grande. Provaremos agora, que $C(M) \leq -20\pi$ ou temos uma superfície de gênero 2 com três fins. De fato, neste capítulo nosso objetivo principal é provar que não existe uma superfície mínima completa de gênero 1 com $C(M) = -16\pi$, cuja aplicação de Gauss $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ omite três pontos da esfera S^2 .

3.2 A Função \wp de Weierstrass

Definição 3.1. *Sejam ω_1 e ω_2 números complexos não nulos tais que $\text{Im}(\frac{\omega_2}{\omega_1}) \neq 0$, então o conjunto*

$$L = L[\omega_1, \omega_2] = \{z \in \mathbb{C} ; z = m\omega_1 + n\omega_2, m, n \in \mathbb{Z}\}$$

é chamado um reticulado em \mathbb{C} gerado por ω_1 e ω_2 .

Um conjunto finito $\{z_1, z_2, \dots, z_n\} \subset \mathbb{C}$ é dito incongruente para o reticulado L se z_i não é congruente a z_j para $i \neq j$.

Um domínio fundamental de L baseado em z_0 , será o conjunto

$$D(z_0) = \{z_0 + \mu\omega_1 + \delta\omega_2 \in \mathbb{C} ; 0 \leq \mu, \delta < 1\}$$

Note que para todo $z \in \mathbb{C}$, existe um e um único $\tilde{z} \in D(z_0)$ tal que $z \equiv \tilde{z} \pmod{L}$.

Definição 3.2. *Seja $L = L[\omega_1, \omega_2]$ um reticulado. Uma função meromorfa $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é dita uma função elíptica de L se para todos $z \in \mathbb{C}$ e $\omega \in L$, $f(z + \omega) = f(z)$.*

Definição 3.3. *Se f é uma função elíptica de um reticulado L , o número de soluções, contados com multiplicidades, da equação $f(z) = a$ num domínio fundamental de L é chamado a ordem de f*

Associada a cada $L = L[\omega_1, \omega_2]$ existe uma função elíptica especial, a função \wp de Weierstrass, que é dada por

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right), \quad (3.1)$$

onde $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, $\forall (0, 0) \neq (m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Afirmção : \wp está bem definida, ou seja a série acima é absolutamente convergente sobre conjuntos compactos. De fato, seja $\rho > 0$ e $|z| \leq \rho$. Então existem apenas um número finito de $\omega \in L$ tais que $|\omega| \leq 2\rho$. Assim se $|\omega| > 2\rho$ e $|z| \leq \rho$,

$$\left| \frac{1}{(z - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right| = \left| \frac{(2\omega - z)z}{(z - \omega)^2\omega^2} \right| = \frac{|(2 - \frac{z}{\omega})z|}{|(\frac{z}{\omega} - 1)||\omega^3|} \leq \frac{10\rho}{\omega^3}.$$

Então para que a soma definida em 3.1 seja absolutamente convergente sobre conjuntos compactos é suficiente que

$$\sum_{\omega \in L - \{0\}} \frac{1}{\omega^3} < \infty.$$

Note que como $\text{Im}(\frac{\omega_2}{\omega_1}) \neq 0$, então $\{\omega_1, \omega_2\}$ pode ser visto como uma base de \mathbb{R}^2 . Assim para $v = a\omega_1 + b\omega_2$, definimos a norma $\|v\| = |a| + |b|$. Como todas as normas em \mathbb{R}^2 são equivalentes, existe $\alpha > 0$ tal que

$$|a\omega_1 + b\omega_2| \geq \alpha(|a| + |b|).$$

Em particular para $m, n \in \mathbb{Z}$, $\omega = m\omega_1 + n\omega_2$, temos $|m\omega_1 + n\omega_2| \geq \alpha(|n| + |m|)$. Como existem exatamente $4k$ pares (n, m) com $|n| + |m| = k$, encontramos que

$$\sum_{\omega \in L - \{0\}} |\omega^{-3}| \leq 4\alpha^{-3} \sum_{k=1}^{\infty} k^{-2} < \infty.$$

Assim $\wp(z)$ define uma função meromorfa.

Também segue de 3.1 que \wp é uma função par. Como \wp está bem definida, derivando termo a termo a equação 3.1 obtemos

$$\wp'(z) = -\frac{2}{z^3} + \sum_{\omega \neq 0} \left(\frac{2}{(z - \omega)^3} \right), \quad (3.2)$$

que é uma função ímpar.

Diretamente da equação 3.2 concluímos que $\wp'(z)$ é uma função elíptica. Para mostrarmos que $\wp(z)$ também é elíptica considere a função $h(z) = \wp(z + \omega) - \wp(z)$. Temos que $h(z)$ é uma função constante, pois sua derivada é identicamente nula. Além disso $h(\frac{-\omega}{2}) = \wp(\frac{\omega}{2}) - \wp(-\frac{\omega}{2}) = 0$. Logo h é identicamente nula e $\wp(z)$ é função elíptica.

Como \wp é uma função par, segue-se que em uma vizinhança da origem temos o desenvolvimento de Laurent

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots \quad (3.3)$$

onde a_j pode ser calculado diretamente derivando termo a termo a equação 3.1.

Agora apresentaremos um resultado importante o qual mostra que fixado o reticulado, $\wp(z)$ satisfaz uma equação diferencial linear com coeficientes constantes.

Teorema 3.4. *Sejam $L = [\omega_1, \omega_2]$ um reticulado e $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, a função $\wp(z)$ de Weierstrass e sua derivada $\wp'(z)$, $e_i = \wp(\frac{\omega_i}{2})$; $i = 1, 2, 3$. Então*

$$(\wp')^2 = 4(\wp - e_1)(\wp - e_2)(\wp - e_3)$$

Demonstração: \wp' é uma função elíptica de ordem três, com pólos de ordem três nos pontos de L e portanto possui três zeros (contados possivelmente com multiplicidades) em cada domínio fundamental. Como $\omega_j \equiv -\omega_j \pmod{L}$, para $j = 1, 2, 3$ e \wp' é uma função ímpar encontramos que $\wp'(\omega_j) = \wp'(-\omega_j) = -\wp'(\omega_j) = 0$. Além disso, $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \}$ é L -incongruente o que mostra que z é um zero de \wp' se e somente se $z \equiv \omega_j$ para algum j . Por outro lado, a função $\wp(z) - e_j$ é de ordem dois, possui pólos duplos nos pontos de L , um zero duplo em todo $z_0 \in \mathbb{C}$ para qual $z_0 \equiv \omega_j$ e estes são todos os zeros desta função. Note que as funções $(\wp')^2$ e $\prod_{j=1}^3 (\wp - e_j)$ possuem os mesmos pólos e os mesmos zeros com iguais multiplicidades. Assim, o quociente destas funções é uma função elíptica sem pólos, donde, uma função constante. Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $(\wp')^2 = \lambda \prod_{j=1}^3 (\wp - e_j)$. Agora usando 3.3 concluímos que em uma vizinhança da origem

$$(\wp')^2(z) = \frac{4}{z^6}(1 - 2a_2z^4 + \dots), \quad \prod_{j=1}^3 (\wp - e_j) = \frac{1}{z^6}(1 - (e_1 + e_2 + e_3)z^2 + \dots). \quad (3.4)$$

Isto mostra que $\lambda = 4$. □

Corolário 3.5. *No reticulado L , com função \wp de Weierstrass associada, temos:*

- a. $(\wp')^2 = 4\wp^3 - g_2\wp - g_3$, onde $g_2 = -4(e_1e_2 + e_1e_3 + e_2e_3)$, $g_3 = 4e_1e_2e_3$
- b. $e_1 + e_2 + e_3 = 0$
- c. $\wp'' = 6\wp^2 - \frac{g_2}{2}$

Demonstração: Os itens (a) e (b) seguem do teorema anterior e da não existência de termos do tipo z^{-4} , correspondentes a \wp^2 , nos desenvolvimentos 3.4. Para provar (c) derivamos em relação a z a equação (a). \square

O item (a) do corolário acima mostra que o ponto $(\wp(z), \wp'(z))$ encontra-se na curva definida pela equação

$$y^2 = 4x^3 - g_2x - g_3.$$

A cubica polinomial do lado direito tem o discriminante dado por

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2.$$

Como $e_i = \wp(\frac{\omega_i}{2})$, então a função $h(z) = (\wp(z) - e_j)$ tem um zero em $\frac{\omega_i}{2}$, ou seja $\wp'(\frac{\omega_i}{2}) = 0$, $i = 1, 2, 3$. Comparando zeros e pólos, concluímos que

$$\wp'^2(z) = 4(\wp(z) - e_1)(\wp(z) - e_2)(\wp(z) - e_3).$$

Assim e_1, e_2, e_3 são raízes de $4x^3 - g_2x - g_3$. Portanto \wp assume o valor e_i com multiplicidade dois e tem apenas um pólo de ordem 2 *mod* L , a fim de que $e_i \neq e_j$ para $i \neq j$. Isto significa que as três raízes da cúbica polinomial são distintas e portanto $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

A seguir enunciaremos três lemas que não serão demonstrados, porém estas demonstrações podem ser encontradas em [1].

Lema 3.6. 1. $\wp^{(2k)}$ é uma função par, $\wp^{(2k-1)}$ é uma função ímpar, onde $\wp^{(n)}$ denota a n -ésima derivada de \wp , $n \geq 0$.

2. $\wp^{(2k)} = P_k(\wp)$ e $\wp^{(2k+1)} = Q_k(\wp)(\wp')$. Onde P_k e Q_k são polinômios.

3. Se $L = [1, \tau]$ e $\tau \in i\mathbb{R}$ então $\wp(\bar{z} + \tau) = \overline{\wp(z)}$, $\wp(-\bar{z} + \tau) = \overline{\wp(z)}$ e

$$\int_0^1 (\wp^{(n)})^2(\frac{\tau}{2} + t) dt > 0.$$

para todo $n \geq 0$. Também

$$\int_0^1 (\wp^{(n)})^2\left(\frac{\tau}{2} + t\right) \wp^m\left(\frac{\tau}{2} + t\right) dt \quad e \quad \int_0^1 \wp^m\left(\frac{\tau}{2} + t\right) dt$$

são números reais não nulos.

4. Se $L = [1, i]$ e $\omega = \frac{1+i}{2}$, então $\wp(\omega + i\bar{z}) = -\overline{\wp(\omega + z)}$, $\wp(\omega - i\bar{z}) = -\overline{\wp(\omega + z)}$, e $\wp(\omega + \bar{z}) = \overline{\wp(\omega + z)}$. \wp tem um pólo duplo em zero, um zero duplo em ω e não tem outros zeros ou pólos. Portanto

$$\wp^{(n)}\left(\frac{i}{2} + t\right) = -i^n \wp^{(n)}\left(\frac{1}{2} + it\right) \quad (3.5)$$

$$(\wp^{(n)})^2\left(\frac{i}{2} + t\right) = (-1)^n (\wp^{(n)})^2\left(\frac{1}{2} + it\right), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.6)$$

5. Sejam $L = [1, \tau]$, $p_1 = \frac{1}{2}$, $p_2 = \frac{\tau}{2}$ e $p_3 = \frac{(1+\tau)}{2}$, $e_1 = \wp(p_1)$, $e_2 = \wp(p_2)$ e $e_3 = \wp(p_3)$, então nós temos $\wp'(p_i) = 0$, $i = 1, 2, 3$; $e_i \neq e_j$, $j, i = 1, 2, 3$ $i \neq j$ e

$$e_1 + e_2 + e_3 = 0 \quad (3.7)$$

6. Um dos e_k é igual a zero se, e somente se $\tau = i$.

Seja $L = [1, \tau]$, $\tau \in D(z_0)$, considere o conjunto:

$$G_L = \{z \in \mathbb{C}; z = s + t\tau, 0 \leq s, t < 1\}$$

como um paralelogramo fundamental em L . Tal que, para toda órbita $[z]$ de L , existe um único representante de $[z]$ em G_L .

Lema 3.7. *Seja F uma função elíptica associada a L . Se $p_1, \dots, p_k, q_1, \dots, q_n$ são pólos e zeros de F em G_L , contando multiplicidade, então*

1. $k = n$
2. $p_1 + \dots + p_k - q_1 - \dots - q_n \in L$
3. $\sum_{i=1}^k \text{Res}(F, p_i) = 0$, onde $\text{Res}(F, p_i)$ é o resíduo de F em p_i .

Lema 3.8. *Se uma função elíptica não tem pólos, então ela é constante.*

3.3 Resultados Gerais

Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa, com curvatura total finita. Assumindo que g omite l pontos, $\xi_1, \dots, \xi_l \in S^2$ então

$$\{\xi_1, \dots, \xi_l\} \subset \widehat{g}(\{p_1, \dots, p_r\}).$$

Desde que g é sobrejetiva em \widehat{M}_γ , onde γ é o gênero de \widehat{M} , então $r \geq l$. Como $C(M) = -4\pi m$ pelo corolário 2.4 temos que

$$C(M) = 2\pi(-2m) = -2\pi(r + \sum_{i=1}^r I_{(p_i)} - 2(1 - \gamma)) \quad (3.8)$$

A ordem de ramificação total de g é dada pela fórmula de Hurwitz

$$n_0 = 2(m + \gamma - 1). \quad (3.9)$$

Seja n_1 a ordem de ramificação total dos fins $\{p_1, \dots, p_r\}$, então $n_1 \leq n_0$.

Proposição 3.9. *Suponha $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa, com curvatura total $C(M) = -4\pi m$. Seja $g : M \rightarrow S^2$ aplicação de Gauss, então g pode omitir no máximo três pontos de S^2 . Se g omite exatamente três pontos temos:*

1. $\gamma \geq 1$ e $m \geq r$
2. Se $\gamma = 1$ então $m = r \geq 3$ e $I_{(p_i)} = 1 \quad i = 1, \dots, r$, isto é, cada fim é mergulhado.
3. $C(M) \leq -12\pi$.

Demonstração: Suponha que g omite três pontos. Desde que m é o grau de g , nós precisamos de lm pontos, contando com a multiplicidade, para cobrir $\{\xi_1, \dots, \xi_l\}$ como

$$\{p_1, \dots, p_r\} \subset g^{-1}(\{\xi_1, \dots, \xi_l\}).$$

então

$$r \geq lm - n_1 \geq lm - n_0$$

pela equação 3.9 temos

$$r \geq (l - 2)m + 2(1 - \gamma) \quad (3.10)$$

por 3.8 temos $2m = r + \sum_{i=1}^r I_{(p_i)} - 2(1 - \gamma)$ assim

$$2m - \sum_{i=1}^r I_{(p_i)} = r + 2(\gamma - 1) \geq (l - 2)m$$

$$(l - 4)m \leq - \sum_{i=1}^r I_{(p_i)}.$$

Desde que $l = 3$ temos

$$m \geq \sum_{i=1}^r I_{(p_i)} \geq r \quad (3.11)$$

Se $\gamma = 0$, por 3.10 temos $r \geq m + 2$ e por 3.11 temos $m \geq r$, logo temos uma contradição. Portanto $\gamma \neq 0$.

Se $\gamma = 1$, por 3.10 temos $r \geq m$ e por 3.11 temos $r \leq m$, logo $r = m$ e todos os fins são mergulhados.

Note que para $r \geq 3$ e $\gamma \geq 1$ temos por 1.19 e 1.18 que

$$\begin{aligned} C(M) &\leq 2\pi(\chi(\widehat{M}) - 2r) \\ &\leq 4\pi(1 - \gamma - r) \\ C(M) &\leq -12\pi. \end{aligned}$$

□

Proposição 3.10. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa com curvatura total finita e $M = \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$. Se a aplicação de Gauss omite três pontos e $\gamma = 1$, então para todo ponto $p \in M$, temos $K(p) < 0$, isto é, $g : M \rightarrow S^2 - \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ é regular.*

Demonstração: Como M é mínima então $K \leq 0$. Assim só precisamos mostrar que $K \neq 0$. Note que a curvatura gaussiana pode ser expressa em termos das funções da

representação de Weierstrass

$$K(p) = -\left[\frac{4|g'(p)|}{|f(p)|(1+|g(p)|^2)^2}\right]^2$$

temos que $K(p) = 0$ se, e somente se p é um ponto de ramificação de g . Logo temos que mostrar que p não é ponto de ramificação de g . Como g omite três pontos e $\gamma = 1$ temos que $\chi(\widehat{M}) = 0$, e pela proposição anterior temos $m = r$. Usando a equação 3.9 temos

$$n_0 = 2m = 2r$$

Como $m = r$ e g omite três pontos, para cobrir $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ r vezes precisamos de $3r$ pontos. Assim a ordem de ramificação dos fins n_1 satisfaz

$$r + n_1 \geq 3r \Rightarrow n_1 \geq 2r = n_0$$

Como $n_0 \geq n_1$. Logo $n_0 = n_1$ e

$$\{p_1, \dots, p_r\} = g^{-1}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}).$$

Assim se $p \in M$, então p não é ponto de ramificação de g . □

Corolário 3.11. *Suponha $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ como na proposição 3.10. Então toda superfície tem exatamente três direções limites diferentes.*

Demonstração: Como observamos

$$g^{-1}(\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}) = \{p_1, \dots, p_k\}$$

□

Teorema 3.12. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima completa com curvatura total finita e $M = \widehat{M} - \{p_1, \dots, p_r\}$. Suponha que E_i é um fim mergulhado correspondente a p_i . Se g tem um pólo de ordem $k \geq 1$ em p_i , então $\eta = fdz$ tem um zero de ordem $2k - 2$ em p_i . Se g assume um valor finito com multiplicidade k em p_i , então η tem um pólo de ordem 2 em p_i . Portanto, p_i é um ponto de ramificação de g se e somente se E_i é um fim planar.*

Demonstração: Ver [6], capítulo II. □

3.4 O Caso de $C(M) = -16\pi$

Em [2] Weitsman e Xavier provaram que se M é uma superfície mínima completa cuja aplicação de Gauss omite três pontos, então $C(M) \leq -16\pi$. Nosso objetivo, nesta seção, é mostrar que não é possível termos $C(M) = -16\pi$, em uma superfície de gênero 1.

Teorema 3.13. *Seja M é uma superfície mínima completa com curvatura total $C(M) = -4\pi m$ e cuja aplicação de Gauss omite três pontos. Suponha $M = \widehat{M}_\gamma - \{p_1, \dots, p_r\}$, onde \widehat{M}_γ é uma superfície compacta de gênero γ , assim $\gamma \leq m - 2$. Se $C(M) = -16\pi$, então*

$$M = T - \{p_0, p_1, p_2, p_3\},$$

onde T é um toro, ou

$$M = \widehat{M}^2 - \{p_1, p_2, p_3\}$$

Em ambos os casos os fins são planares.

Demonstração: Suponha $M = \widehat{M}_\gamma - \{p_1, \dots, p_r\}$, pela equação 3.8 temos

$$2m = r + \sum_{i=1}^r I_{(p_i)} + 2(\gamma - 1)$$

Por outro lado, temos $r \geq 3$ e $\sum I_{(p_i)} \geq 1$ portanto

$$r + \sum I_{(p_i)} \geq 6 \text{ e } 2m \geq 6 + 2(\gamma - 1) \implies \gamma \leq m - 2.$$

Agora suponha $m = 4$. Pela proposição 3.9 $\gamma \neq 0$.

Se $\gamma = 1$ pela mesma proposição temos $r = m = 4$ e cada fim é mergulhado.

Se $\gamma = 2 \implies 2(\gamma - 1) = 2$ portanto $r + \sum I_{(p_i)} = 6 \implies r = 3$ e $I_{(p_i)} = 1$ para $i = 1, 2, 3$. Logo cada fim é mergulhado.

Em ambos os casos, pelo corolário 2.13 todos os fins são planares. \square

3.4.1 O Caso de Gênero 1

Assuma $M = T - \{p_0, p_1, p_2, p_3\}$. Sejam $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ imersão mínima, completa com curvatura total finita e $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a aplicação de Gauss. Suponha que g omite três pontos ξ_1, ξ_2, ξ_3 . Sem perda de generalidade, podemos supor $\xi_1 = \infty$. Então considerando $\tilde{g} = g - \xi_2$ no lugar de g , nós podemos assumir que \tilde{g} omite $0, \infty$ e um outro ponto. Assim nós estudamos as propriedades funcionais de \tilde{g} , depois fazendo $g = a\tilde{g} + b$ $a, b \in \mathbb{C}$ nós voltamos para a função original g .

Seja $L = [1, \sigma], Im \sigma > 0$, um reticulado tal que $T = \frac{\mathbb{C}}{L}$. Agora nós estamos estudando uma função elíptica \hat{g} tal que se $\pi : \mathbb{C} \rightarrow T$ é a projeção, então $\hat{g} = \tilde{g} \circ \pi$ e em M \tilde{g} omite $\{\infty, 0, q\}$. Para simplificar, escreveremos g no lugar de \hat{g} .

Por uma translação em \mathbb{C} , se necessário, podemos assumir que $p_3 = 0$, $g(0) = \infty$, $g(p_0) = 0$. Pelo corolário 3.11 $g(p_1) = g(p_2) = q$. Desde que $\gamma = 1$ temos $r = m = 4$, pela equação 3.9, a ordem de ramificação total de g é $n_0 = 8$. Pela proposição 3.10 todos os pontos de ramificação estão incluídos em $\{0, p_0, p_1, p_2\}$. Logo nós podemos assumir, sem perda de generalidade que existe um único caso: caso 1) 0 e p_0 tem ordem de ramificação 3 e p_1 e p_2 tem ordem de ramificação 1.

Neste caso g é uma função elíptica de ordem 4, cujos únicos pólos ocorrem em 0 e os únicos zeros ocorrem em p_0 . Pelo item 2 do lema 3.7 temos que

$$4p_0 \equiv 0 \pmod{L}. \quad (3.12)$$

Desde que 0 é o único pólo de g , no paralelogramo fundamental, o resíduo de g em 0 deve ser zero (lema 3.7). A expansão de Laurent de g em zero deve ser

$$g(z) = \frac{c_{-4}}{z^4} + \frac{c_{-3}}{z^3} + \frac{c_{-2}}{z^2} + c_0 + c_1z + \dots \quad (3.13)$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir $c_{-4} = 1$ (não há motivos para não fazermos isto, desde que estamos estudando as propriedades funcionais de \tilde{g} , depois

fazendo $g = a\tilde{g} + b$ nós voltamos para a função original g .)

Seja $\wp(z)$ a função de Weierstrass associada ao reticulado L . Então pelas equações 3.1 e 3.2

$$g(z) - \wp^2(z) + \frac{c_{-3}}{2} \cdot \wp'(z) - c_{-2}\wp(z)$$

é uma função elíptica sem pólos. Portanto é constante. Assim

$$g(z) = \wp^2(z) + b\wp'(z) + c\wp(z) + d.$$

Temos

$$g(p_1) = g(p_2), \quad g'(p_1) = g'(p_2) = 0$$

então p_1, p_2 são os únicos zeros de $g(z) - g(p_1)$ e são ambos de ordem 2, daí

$$2(p_1 + p_2) \equiv 0 \pmod{L}. \quad (3.14)$$

Como g' tem um zero triplo em p_0 , dois zeros simples em p_1 e p_2 e um pólo de ordem 5 em 0, usando o mesmo raciocínio temos:

$$3p_0 + p_1 + p_2 \equiv 0 \pmod{L}. \quad (3.15)$$

como $4p_0 \equiv 0 \pmod{L}$ então:

$$-p_0 + p_1 + p_2 \equiv 0 \pmod{L}. \quad (3.16)$$

Multiplicando 3.16 por 2 e usando 3.14, nós obtemos

$$2p_0 \equiv 0 \pmod{L}. \quad (3.17)$$

Portanto p_0 é semi-periódica. Pelo item 5 do lema 3.6, $\wp'(p_0) = 0$. Observando que $g'(p_0) = 0$, então

$$\begin{aligned} 0 = g'(p_0) &= 2\wp(p_0)\wp'(p_0) + b\wp''(p_0) + c\wp'(p_0) \\ 0 &= b\wp''(p_0) \end{aligned}$$

como $\wp''(p_0) \neq 0 \implies b = 0$. Portanto

$$g(z) = \wp^2(z) + c\wp(z) + d.$$

Seja $\omega_1 = \frac{1}{2}$, $\omega_2 = \frac{\tau}{2}$, $\omega_3 = \frac{1+\tau}{2}$ e $\wp(\omega_i) = e_i$, $i = 1, 2, 3$. Nós sabemos que $\wp'(\omega_i) = 0$ e

$$e_k + e_{k+1} + e_{k+2} = 0, \quad (3.18)$$

onde $e_k = e_i$, $i = 1, 2, 3$ se $k \equiv i \pmod{3}$. Assim nós temos

$$g'(\omega_i) = 2\wp(\omega_i)\wp'(\omega_i) + c\wp'(\omega_i) = 0.$$

Mas os únicos zeros de g' são p_0, p_1, p_2 , então $p_0 = \omega_k$, $p_1 = \omega_{k+1}$, $p_2 = \omega_{k+2}$, onde $\omega_k = \omega_i$, $i = 1, 2, 3$, se $k \equiv i \pmod{3}$.

Como $g''(\omega_k) = 0$ e $\wp'(\omega_k) = 0$ então

$$\begin{aligned} 0 = g''(\omega_k) &= 2\wp'^2(\omega_k) + \wp''(\omega_k) \cdot [2\wp(\omega_k) + c] \\ 0 &= \wp''(\omega_k) \cdot [2\wp(\omega_k) + c]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\wp''(\omega_k) \neq 0$ temos

$$\begin{aligned} 2\wp(\omega_k) + c &= 0 \\ c &= -2\wp(\omega_k) \\ c &= -2e_k \end{aligned}$$

logo

$$g(z) = \wp^2(z) - 2e_k\wp(z) + d,$$

mas $g(\omega_k) = 0$ então

$$e_k^2 - 2e_k + d = 0 \implies d = e_k^2$$

portanto

$$g(z) = \wp^2(z) - 2e_k\wp(z) + e_k^2 \quad (3.19)$$

como $g(\omega_{k+1}) = g(\omega_{k+2})$ então

$$\begin{aligned} e_{k+1}^2 - 2e_k e_{k+1} + e_k^2 &= e_{k+2}^2 - 2e_k e_{k+2} + e_k^2 \\ e_{k+1}(e_{k+1} - 2e_k) &= e_{k+2}(e_{k+2} - 2e_k). \end{aligned}$$

Por 3.18, $-2e_k = 2(e_{k+1} + e_{k+2})$ logo

$$\begin{aligned} e_{k+1}(3e_{k+1} + 2e_{k+2}) &= e_{k+2}(3e_{k+2} + 2e_{k+1}) \\ 3e_{k+1}^2 &= 3e_{k+2}^2 \\ e_{k+1} &= \pm e_{k+2} \end{aligned}$$

pelo lema 3.6 $e_{k+1} \neq e_{k+2}$ assim $e_{k+1} = -e_{k+2}$. Portanto por 3.18 nós temos $e_k = 0$ e por 3.19

$$g(z) = \wp^2(z). \quad (3.20)$$

Mas $e_k = 0$ somente quando $L = [1, i]$, então fica provada a proposição seguinte.

Proposição 3.14. *Seja $x : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma imersão mínima completa com curvatura total finita e $M = T - \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, cuja aplicação de Gauss omite três pontos. Suponha que a ordem de ramificação de p_1 e p_2 é 3 e a ordem de ramificação de p_3 e p_4 é 1. Então depois de uma rotação, se necessário, nós temos:*

1. T é o toro quadrado.

Se representado por $\frac{\mathbb{C}}{[1, i]}$ então;

2. $p_1 = 0$, $p_2 = \frac{1+i}{2}$, $p_3 = \frac{1}{2}$, $p_4 = \frac{i}{2}$

3. $g(z) = a\wp^2(z) + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$

Note que o caso 1 pode ser descrito como o caso que a derivada da aplicação de Gauss (g') tem três zeros distintos, portanto nós podemos sempre assumir que $\{\infty\}$ é um valor omitido de g em M .

Proposição 3.15. *Suponha $M = \frac{\mathbb{C}}{[1, i]} - \{0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\}$ e \wp é a função de Weierstrass associada a $L = [1, i]$. Seja*

$$\phi = \frac{\wp^2(z)}{\wp'^2(z)} dz, \quad \psi = \frac{\wp^4(z)}{\wp'^2(z)} dz, \quad \eta = \frac{1}{\wp'^2(z)} dz. \quad (3.21)$$

Sejam γ_1 o caminho em M de $\frac{1}{4} + i$ para $\frac{1}{4}$ e γ_2 o caminho de $\frac{3}{4}i$ para $1 + \frac{3}{4}i$. Então

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \phi &= iB, & \int_{\gamma_1} \psi &= iA, & \int_{\gamma_1} \eta &= iC, \\ \int_{\gamma_2} \phi &= B, & \int_{\gamma_2} \psi &= A, & \int_{\gamma_2} \eta &= C, \end{aligned}$$

onde $A, B, C \in \mathbb{R}$ e B, C são não nulos.

Demonstração: Seja ζ a função zeta de Weierstrass e $\zeta'(z) = -\wp(z)$. Então

$$\zeta\left(\frac{1}{4} + i\right) \neq \zeta\left(\frac{1}{4}\right). \quad (3.22)$$

(Ver [9].)

Seja \bar{z} o complexo conjugado de z . Considere as seguintes reflexões no plano complexo \mathbb{C} .

$$\begin{aligned} R(z) &= -i\bar{z} + 1 + i \\ K(z) &= 1 - \bar{z} \\ Q(z) &= i\bar{z} \\ N(z) &= \bar{z} + i. \end{aligned}$$

Seja S o quadrado $\{z = x + iy ; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$. Note que estas reflexões tornam S invariante e

$$Q = K \circ R \circ K, \quad N = R \circ K \circ R. \quad (3.23)$$

Veja que

$$R^* dz = -id\bar{z}, \quad K^* dz = -d\bar{z}. \quad (3.24)$$

Como \wp é uma função elíptica, temos a seguinte equação diferencial

$$\wp'^2(z) = 4\wp(z)(\wp^2(z) - e_1^2) \quad (3.25)$$

onde $e_1 = \wp\left(\frac{1}{2}\right) = -\wp\left(\frac{i}{2}\right) \in \mathbb{R}$. Temos também

$$\wp \circ R(z) = -\overline{\wp(z)}, \quad \wp \circ K(z) = \overline{\wp(z)}. \quad (3.26)$$

Por 3.25 temos

$$\wp^2 \circ R(z) = -\overline{\wp^2(z)}, \quad \wp^2 \circ K(z) = \overline{\wp^2(z)}. \quad (3.27)$$

Assim para as três formas definidas em 3.21 obtemos

$$\begin{aligned} R^*\phi &= \frac{\wp^2 \circ R(z)}{\wp^2 \circ R(z)} R^* dz = -i \overline{\left(\frac{\wp^2}{-\wp^2} dz \right)} = i\bar{\phi}, & R^*\bar{\phi} &= -i\phi \\ R^*\psi &= \frac{\wp^4 \circ R(z)}{\wp^2 \circ R(z)} R^* dz = -i \overline{\left(\frac{\wp^4}{-\wp^2} dz \right)} = i\bar{\psi}, & R^*\bar{\psi} &= -i\psi \\ R^*\eta &= \frac{dz}{\wp^2 \circ R(z)} R^* = i\bar{\eta}, & R^*\bar{\eta} &= -i\eta. \end{aligned}$$

Analogamente temos

$$\begin{aligned} K^*\phi &= -\bar{\phi}, & K^*\psi &= -\bar{\psi}, & K^*\eta &= -\bar{\eta} \\ K^*\bar{\phi} &= -\phi, & K^*\bar{\psi} &= -\psi, & K^*\bar{\eta} &= -\eta. \end{aligned}$$

Por 3.23

$$Q^*\phi = K^* \circ R^* \circ K^*\phi = -i\bar{\phi}, \quad Q^*\bar{\phi} = i\phi,$$

$$Q^*\psi = -i\bar{\psi}, \quad Q^*\bar{\psi} = i\psi, \quad Q^*\eta = -i\bar{\eta}, \quad Q^*\bar{\eta} = i\eta,$$

$$N^*\phi = \bar{\phi}, \quad N^*\bar{\phi} = \phi, \quad N^*\psi = \bar{\psi}, \quad N^*\bar{\psi} = \psi,$$

$$N^*\eta = \bar{\eta}, \quad N^*\bar{\eta} = \eta.$$

Sejam os caminhos:

$$\begin{aligned} \gamma_1 &\text{ de } \frac{1}{4} + i \text{ para } \frac{1}{4}, & \gamma_2 &\text{ de } \frac{3}{4}i \text{ para } 1 + \frac{3}{4}i, \\ \gamma_3 &\text{ de } \frac{3}{4} + i \text{ para } \frac{3}{4}, & \gamma_4 &\text{ de } \frac{1}{4}i \text{ para } 1 + \frac{1}{4}i. \end{aligned}$$

Pela definição de R, Q, N, K temos

$$\begin{aligned} R(\gamma_1) &= \gamma_2, & K(\gamma_1) &= \gamma_3, & Q(\gamma_2) &= -\gamma_3 \\ R(\gamma_3) &= \gamma_4, & N(\gamma_2) &= \gamma_4, & Q(\gamma_1) &= -\gamma_4. \end{aligned}$$

Sejam $\int_{\gamma_1} \phi = x + iy$ e $\int_{\gamma_2} \phi = u + iv$ então

$$\begin{aligned}
x + iy &= \int_{\gamma_1} \phi = \int_{R(\gamma_2)} \phi \\
&= \int_{\gamma_2} R^* \phi = \int_{\gamma_2} \bar{\phi} \\
&= \overline{i \int_{\gamma_2} \phi} = \overline{i(u + iv)} = i(u - iv) \\
x + iy &= v + iu
\end{aligned}$$

logo $x = v$ e $y = u$. Agora usando as outras simetrias temos

$$\begin{aligned}
x + iy &= \int_{\gamma_1} \phi = \int_{K(\gamma_3)} \phi = \int_{\gamma_3} K^* \phi = - \int_{\gamma_3} \bar{\phi} \\
&= \int_{Q(\gamma_2)} \bar{\phi} = \int_{\gamma_2} Q^* \bar{\phi} = i \int_{\gamma_2} \phi = i(u + iv) \\
x + iy &= -v + iu
\end{aligned}$$

logo $v = x = -v = 0$ e $y = u = B$. Portanto

$$\int_{\gamma_1} \phi = iB, \quad \int_{\gamma_2} \phi = B.$$

Assim

$$\begin{aligned}
iB &= \int_{\gamma_1} \phi = - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \frac{\wp^2(z)}{\wp^2(z)} dz = - \frac{1}{4} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \frac{\wp'(z)}{\wp^2(z) - e_1^2} dz \\
&= - \frac{1}{8} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \left(\frac{1}{\wp(z) - e_1} + \frac{1}{\wp(z) + e_1} \right) dz \\
&= - \frac{1}{16e_1^2} \left\{ - \left[e_1 z + \zeta(z) + \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) - e_1)} \right] - \left[-e_1 z + \zeta(z) + \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) + e_1)} \right] \right\}_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \\
&= \frac{1}{16e_1^2} \left\{ 2\zeta(z) + \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) - e_1)} + \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) + e_1)} \right\}_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \\
iB &= \frac{\zeta(\frac{1}{4} + i) - \zeta(\frac{1}{4})}{8e_1^2},
\end{aligned}$$

segue de 3.22 que $B \neq 0$. Todas as outras integrais podem ser encontradas em [11].

Note que temos $e_1 = -e_2$ e $e_3 = 0$. De modo análogo podemos provar que

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \eta &= iC, & \int_{\gamma_1} \psi &= iA \\ \int_{\gamma_2} \eta &= C, & \int_{\gamma_2} \psi &= A \end{aligned}$$

onde $A, C \in \mathbb{R}$. Portanto

$$\begin{aligned} iC &= \int_{\gamma_1} \eta = - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \eta = - \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \frac{dz}{\wp^2(z)} \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \frac{dz}{\wp(z)(\wp^2(z) - e_1^2)} \\ &= \frac{1}{8e_1^2} \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}+i} \left(\frac{2}{\wp(z)} - \frac{1}{\wp(z) - e_1} - \frac{1}{\wp(z) + e_1} \right) dz \\ &= \frac{1}{16e_1^4} \left\{ 4\left[\zeta(z) + \frac{\wp'(z)}{2\wp(z)} \right] + \left[e_1 z + \zeta(z) + \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) - e_1)} \right] + \left[-e_1 z + \zeta(z) + \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) + e_1)} \right] \right\}^{\frac{1}{4}+i} \\ &= \frac{1}{16e_1^4} \left\{ 6\zeta(z) + \left[2\frac{\wp'(z)}{2\wp(z)} + \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) - e_1)} + \frac{\wp'(z)}{2(\wp(z) + e_1)} \right] \right\}^{\frac{1}{4}+i} \\ &= \frac{3}{8e_1^4} \left[\zeta\left(\frac{1}{4} + i\right) - \zeta\left(\frac{1}{4}\right) \right] \\ iC &= \frac{3iB}{e_1^2} \neq 0. \quad \text{Portanto } C \neq 0. \quad \square \end{aligned}$$

Proposição 3.16. *Suponha $M = \frac{\mathbb{C}}{[1,i]} - \{0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\}$ e $g(z) = a\wp^2 + b$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$. Então g não é a aplicação de Gauss de uma imersão mínima, completa em \mathbb{R}^3 que está bem definida em M .*

Demonstração: Considere o reticulado $L = [1, i]$. No plano complexo ele pode ser expresso como o quadrado S com vértices $\{0, 1, 1 + i, i\}$. O grau de g é quatro. Se g é a aplicação de Gauss de uma imersão mínima completa, então $C(M) = -16\pi$. Uma vez que em $M = \frac{\mathbb{C}}{[1,i]} - \{0, \frac{1}{2}, \frac{i}{2}, \frac{1+i}{2}\}$, g omite três pontos $\{\infty, b, ae_1^2 + b\}$, onde $e_1 = \wp(\frac{1}{2}) = \wp(\frac{i}{2})$, segue da Proposição 2.12 que todos os fins são mergulhados.

Portanto, pelo Teorema 3.12 os divisores de $g, \frac{1}{\wp^2}$ e da possível 1-forma $\eta = f(z)dz$ são

$$\begin{array}{cccc}
 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{i}{2} & \frac{1+i}{2} \\
 g & \infty^4 & & & \\
 f & 0^6 & \infty^2 & \infty^2 & \infty^2 \\
 \frac{1}{\wp^2} & 0^6 & \infty^2 & \infty^2 & \infty^2
 \end{array} \tag{3.28}$$

Assim $f\wp^2 = c \neq 0$ é uma constante. Portanto $f = \frac{c}{\wp^2}$.

Note que γ_1 e γ_2 da proposição anterior representam os dois geradores do grupo fundamental T .

Agora considere as três formas diferenciais da representação de Weierstrass.

$$\omega_1 = \frac{c}{2} \left(\frac{1 - (a\wp^2(z) + b)^2}{\wp^2} \right) dz \tag{3.29}$$

$$\omega_2 = \frac{ic}{2} \left(\frac{1 - (a\wp^2(z) + b)^2}{\wp^2} \right) dz \tag{3.30}$$

$$\omega_3 = c \left(\frac{a\wp^2(z) + b}{\wp^2} \right) dz. \tag{3.31}$$

Por 3.21 temos

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{c}{2} [(1 - b^2)\eta - a^2\psi - 2ab\phi], \\
 \omega_2 &= \frac{ic}{2} [(1 + b^2)\eta + a^2\psi + 2ab\phi], \\
 \omega_3 &= c(a\phi + b\eta).
 \end{aligned}$$

Elas representam uma imersão mínima bem definida se e somente se

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_i} \omega_j = 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3. \tag{3.32}$$

Para fazer ω_3 não ter períodos reais precisamos que

$$\operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \omega_3 = 0 \quad e \quad \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \omega_3 = 0$$

mas

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Re} \int_{\gamma_1} \omega_3 = \operatorname{Re} c(a \int_{\gamma_1} \phi + b \int_{\gamma_1} \eta) \\
&= \operatorname{Re} c(aiB + biC) \\
0 &= \operatorname{Im} c(aB + bC)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{Re} \int_{\gamma_2} \omega_3 = \operatorname{Re} c(a \int_{\gamma_2} \phi + b \int_{\gamma_2} \eta) \\
0 &= \operatorname{Re} c(aB + bC).
\end{aligned}$$

Como $c \neq 0$, então $aB + bC = 0$.

Desde que $a \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, $b = -\frac{B}{C} a \neq 0$. Assim $\forall 0 \neq a \in \mathbb{C}$ temos $b = -\frac{B}{C} a$. Logo

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{c}{2} [(1 + (\frac{B}{C})^2 a^2) \eta - a^2 \psi + 2a^2 (\frac{B}{C}) \phi] \\
\omega_2 &= \frac{ic}{2} [(1 + (\frac{B}{C})^2 a^2) \eta + a^2 \psi - 2a^2 (\frac{B}{C}) \phi].
\end{aligned}$$

e temos as seguintes integrais

$$\begin{aligned}
2 \int_{\gamma_1} \omega_1 &= ic [(1 - (\frac{B}{C})^2 a^2) C - a^2 A + 2a^2 (\frac{B}{C}) B] \\
2 \int_{\gamma_2} \omega_1 &= c [(1 - (\frac{B}{C})^2 a^2) C + a^2 A + 2a^2 (\frac{B}{C}) B], \\
\therefore 2 \int_{\gamma_2} \omega_1 &= -i 2 \int_{\gamma_1} \omega_1 \\
2 \int_{\gamma_1} \omega_2 &= -c [(1 + (\frac{B}{C})^2 a^2) C + a^2 A - 2a^2 (\frac{B}{C}) B] \\
2 \int_{\gamma_2} \omega_2 &= ic [(1 + (\frac{B}{C})^2 a^2) C - a^2 A - 2a^2 (\frac{B}{C}) B], \\
\therefore 2 \int_{\gamma_2} \omega_2 &= -i 2 \int_{\gamma_1} \omega_2
\end{aligned}$$

Assim para termos $\operatorname{Re} \int_{\gamma_i} \omega_j = 0$ para $1 \leq i, j \leq 2$ equivale termos

$$[(1 - (\frac{B}{C})^2 a^2) C - a^2 A + 2a^2 (\frac{B}{C}) B] = 0 \tag{3.33}$$

$$[(1 + (\frac{B}{C})^2 a^2)C + a^2 A - 2a^2 (\frac{B}{C})B] = 0 \quad (3.34)$$

somando 3.33 com 3.34 obtemos $2C = 0$. Portanto $C = 0$ que é uma contradição. \square

Proposição 3.17. *Seja $M = T - \{p_1, \dots, p_r\}$, onde T é um toro. Não existe uma superfície mínima, completa mergulhada, com gênero 1 e curvatura total $C(M) = -16\pi$, cuja aplicação de Gauss $g : M \rightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ omita três pontos e g tenha três zeros distintos em T .*

Demonstração: Como $C(M) = -16\pi$ temos $m = 4$. Como $\gamma = 1$ temos $m = r = 4$. As hipóteses da proposição dizem que a aplicação de Gauss é como no caso 1, mas pela proposição 3.16 esta aplicação não está bem definida. \square

A proposição anterior diz que o caso 1 é impossível e pelo teorema 3.13 temos que: Possivelmente a superfície mínima, completa de curvatura total -16π , cuja aplicação de Gauss omite três pontos é uma superfície fechada de gênero-2 menos três pontos.

Referências Bibliográficas

- [1] Abramovitz M. e Stegun I. - *Handbooks of Mathematical Functions*, Advanced Mathematics, Dover Publications, Inc., New York, 1972.
- [2] A. Weitsman e F. Xavier. - *Some function theoretic properties of the Gauss map for hyperbolic complete minimal surfaces*. Michigan Math. J., 34:275-283, 1987.
- [3] Barbosa, J. Lucas e Colares A. Gervasio. - *Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* , Impa.
- [4] Costa C. J. - *Funções Elípticas, Algébricas e Superfícies Mínimas*, 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática, 1991, IMPA.
- [5] do Carmo, M.P.-*Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, 2^o edição, Sociedade Brasileira de Matemática 2006.
- [6] Fang Y. - *Complete Minimal Surfaces of Finite Total Curvature*, University of Massachusetts at Amherst, 1991.
- [7] Hinojosa, Pedro A. - *Números de Pontos Omitidos pela Aplicação de Gauss de Imersões Mínimas Completas com Curvatura Total Finita*, Dissertação da Mestrado UFC - Fortaleza, 1991.
- [8] Jorge L. P. e Meeks W. - *The Topology of Complete Minimal Surface of Finite Total Gaussian Curvature*, Topology 22, 1983.
- [9] Lang S. -*Elliptic Functions*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York, 2nd edition, 1987.

- [10] Osserman R. - *A Survey of Minimal Surface*, Dover, New York 2^o edição, 1986.
- [11] P. F. Byrd and M. D. Friedman. -*Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists* Springer-Verlag, Berlin Gottingen Heidelberg, 1954.
- [12] Spivak M. - *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol 4, Publish on Perish, Inc. Berkeley, 1979.