Introdução à Controlabilidade de EDO's

Felipe W. Chaves-Silva

DM - UFPB

Escola de Verão em Matemática da UFPB - 2021

Método da Unicidade de Hilbert

Nesta parte, nos centraremos no chamado *Método da Unicidade de Hilbert* (HUM), introduzido por Jacques-Louis Lions para estudar problemas de controle para EDP's lineares.

Este método está intimamente ligado à dualidade entre controlabilidade e observabilidade e nos dá uma maneira bastante geral para computar controles para sistemas em dimensão infinita.

Na verdade, o método HUM é bastante indicado quando queremos um algorítimo para computar o controle de um determinado problema.

Observação

De fato, note que o Teorema de Kalman é um resultado qualitativo, que não diz nada sobre quem pode ser um controle para o sistema.

Por outro lado, o métado Gramiano nos diz precisamente quem é um controle, entretanto sua aplicação é, na maioria das vezes, muito difícil ou impossível.

Método da Unicidade de Hilbert

Nesta parte, nos centraremos no chamado *Método da Unicidade de Hilbert* (HUM), introduzido por Jacques-Louis Lions para estudar problemas de controle para EDP's lineares.
Este método está intimamente ligado à dualidade entre controlabilidade e observabilidade e nos dá uma maneira bastante geral para computar controles para sistemas em dimensão infinita.
Na verdade, o método HUM é bastante indicado quando queremos um algorítimo para computar o controle de um determinado problema.

Observação

De fato, note que o Teorema de Kalman é um resultado qualitativo, que não diz nada sobre quem pode ser um controle para o sistema.
Por outro lado, o métado Gramiano nos diz precisamente quem é um controle, entretanto sua aplicação é, na maioria das vezes, muito difícil ou impossível.

Método da Unicidade de Hilbert

Nesta parte, nos centraremos no chamado *Método da Unicidade de Hilbert* (HUM), introduzido por Jacques-Louis Lions para estudar problemas de controle para EDP's lineares.
Este método está intimamente ligado à dualidade entre controlabilidade e observabilidade e nos dá uma maneira bastante geral para computar controles para sistemas em dimensão infinita.
Na verdade, o método HUM é bastante indicado quando queremos um algorítimo para computar o controle de um determinado problema.

Observação

De fato, note que o Teorema de Kalman é um resultado qualitativo, que não diz nada sobre quem pode ser um controle para o sistema.
Por outro lado, o métado Gramiano nos diz precisamente quem é um controle, entretanto sua aplicação é, na maioria das vezes, muito difícil ou impossível.

Método da Unicidade de Hilbert

Nesta parte, nos centraremos no chamado *Método da Unicidade de Hilbert* (HUM), introduzido por Jacques-Louis Lions para estudar problemas de controle para EDP's lineares.
Este método está intimamente ligado à dualidade entre controlabilidade e observabilidade e nos dá uma maneira bastante geral para computar controles para sistemas em dimensão infinita.
Na verdade, o método HUM é bastante indicado quando queremos um algorítimo para computar o controle de um determinado problema.

Observação

De fato, note que o Teorema de Kalman é um resultado qualitativo, que não diz nada sobre quem pode ser um controle para o sistema.
Por outro lado, o métado Gramiano nos diz precisamente quem é um controle, entretanto sua aplicação é, na maioria das vezes, muito difícil ou impossível.

Método da Unicidade de Hilbert

Nesta parte, nos centraremos no chamado *Método da Unicidade de Hilbert* (HUM), introduzido por Jacques-Louis Lions para estudar problemas de controle para EDP's lineares.
Este método está intimamente ligado à dualidade entre controlabilidade e observabilidade e nos dá uma maneira bastante geral para computar controles para sistemas em dimensão infinita.
Na verdade, o método HUM é bastante indicado quando queremos um algorítimo para computar o controle de um determinado problema.

Observação

De fato, note que o Teorema de Kalman é um resultado qualitativo, que não diz nada sobre quem pode ser um controle para o sistema.
Por outro lado, o métado Gramiano nos diz precisamente quem é um controle, entretanto sua aplicação é, na maioria das vezes, muito difícil ou impossível.

Observabilidade de EDO's Lineares

Veremos a seguir que a propriedade de controlabilidade exata para um sistema está diretamente relacionada a uma desigualdade apropriada para o seu *sistema adjunto*. Esta desigualdade é conhecida como *desigualdade de observabilidade*.

Começamos lembrado que se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, seu operador adjunto (que neste caso é matriz transposta) $A^* \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a única matriz que satisfaz

$$< Ax, y >_{\mathbb{R}^n} = < x, A^*y >_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Observabilidade de EDO's Lineares

Veremos a seguir que a propriedade de controlabilidade exata para um sistema está diretamente relacionada a uma desigualdade apropriada para o seu *sistema adjunto*. Esta desigualdade é conhecida como *desigualdade de observabilidade*.

Começamos lembrado que se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, seu operador adjunto (que neste caso é matriz transposta) $A^* \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a única matriz que satisfaz

$$< Ax, y >_{\mathbb{R}^n} = < x, A^* y >_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Observabilidade de EDO's Lineares

Veremos a seguir que a propriedade de controlabilidade exata para um sistema está diretamente relacionada a uma desigualdade apropriada para o seu *sistema adjunto*. Esta desigualdade é conhecida como *desigualdade de observabilidade*.

Começamos lembrado que se $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, seu operador adjunto (que neste caso é matriz transposta) $A^* \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ é a única matriz que satisfaz

$$< Ax, y >_{\mathbb{R}^n} = < x, A^* y >_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Sistema Adjunto

Definição

Dado o sistema de controle (A, B)*:*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Definimos seu *sistema adjunto* *por*

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^*\varphi(t), \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

Lembremos que vale a seguinte desigualdade de energia

$$C_1\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \leq C_2\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

Observação

O sistema adjunto tem, para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$*, uma única solução* $\varphi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *analítica. i.e.,* $\varphi \in C^w([0, T]; \mathbb{R}^n)$*. Além disso, a equação é retrógrada (vai "para trás" no tempo).*

Sistema Adjunto

Definição

Dado o sistema de controle (A, B)*:*

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{1}$$

Definimos seu *sistema adjunto* *por*

$$\begin{cases} -\varphi'(t) = A^*\varphi(t), \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \tag{2}$$

Lembremos que vale a seguinte desigualdade de energia

$$C_1\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|\varphi_T\|_{\mathbb{R}^n} \leq C_2\|\varphi(t)\|_{\mathbb{R}^n}$$

Observação

O sistema adjunto tem, para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$*, uma única solução* $\varphi : [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *analítica. i.e.,* $\varphi \in C^w([0, T]; \mathbb{R}^n)$*. Além disso, a equação é retrógrada (vai "para trás" no tempo).*

Lembrando do seguinte resultado

Teorema
O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se ele é controlável a zero no tempo* $T > 0$*,*

daqui por diante nos concentraremos no problema de controlabilidade a zero.

Veremos agora uma primeira condicão equivalente a controlabilidade:

Lema (Condicão de Optimalidade)
Um dado inicial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *pode ser levado a zero no tempo* $T > 0$ *por meio de um controle* $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ *se e somente se*

$$\int_0^T < u(t), B^* \varphi(t) >_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0, \qquad (3)$$

para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ *onde* φ *é a solução correspondente do sistema adjunto* (2) .

Lembrando do seguinte resultado

Teorema
O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se ele é controlável a zero no tempo* $T > 0$*,*

daqui por diante nos concentraremos no problema de controlabilidade a zero.

Veremos agora uma primeira condicão equivalente a controlabilidade:

Lema (Condicão de Optimalidade)
Um dado inicial $y_0 \in \mathbb{R}^n$ *pode ser levado a zero no tempo* $T > 0$ *por meio de um controle* $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ *se e somente se*

$$\int_0^T < u(t), B^* \varphi(t) >_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0, \tag{3}$$

para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ *onde* φ *é a solução correspondente do sistema adjunto* (2) .

Prova do Lema: Seja $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ e φ a solução correspondente de (2).
Tomando o produto interno de (1) por φ e o produto interno de (2) por y, obtemos

$$< y'(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} = < Ay(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} + < Bu(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n}$$

e

$$- < \varphi'(t), y(t) >_{\mathbb{R}^n} = < A^* \varphi(t), y(t) >_{\mathbb{R}^n} .$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} < y(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} = < Bu(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} .$$

Integrando com respeito ao tempo no intervalo $(0, T)$, obtemos

$$< y(T), \varphi_T >_{\mathbb{R}^n} - < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = \int_0^T < Bu(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Portanto, temos que

$$y(T) = 0 \iff \int_0^T < u(t), B^* \varphi(t) >_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0 \ \ \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Prova do Lema: Seja $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ e φ a solução correspondente de (2).
Tomando o produto interno de (1) por φ e o produto interno de (2) por y, obtemos

$$< y'(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} = < Ay(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} + < Bu(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n}$$

e

$$- < \varphi'(t), y(t) >_{\mathbb{R}^n} = < A^* \varphi(t), y(t) >_{\mathbb{R}^n} .$$

Assim,

$$\frac{d}{dt} < y(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} = < Bu(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} .$$

Integrando com respeito ao tempo no intervalo $(0, T)$, obtemos

$$< y(T), \varphi_T >_{\mathbb{R}^n} - < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = \int_0^T < Bu(t), \varphi(t) >_{\mathbb{R}^n} dt.$$

Portanto, temos que

$$y(T) = 0 \iff \int_0^T < u(t), B^* \varphi(t) >_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0 \ \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Controle como mínimo de um funcional

Veremos agora que (3) é na verdade uma condição de optimalidade para os pontos críticos do funcional quadrático $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2}\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n},$$

onde φ é a solução de (2) correspondendo ao dado inicial φ_T.

Temos o seguinte resultado:

Teorema
Suponha que J *tem um mínimo* $\widehat{\varphi_T} \in \mathbb{R}^n$ *e seja* $\widehat{\varphi}$ *a solução do sistema adjunto* (2) *com dado inicial* $\widehat{\varphi_T}$. *Então*

$$u(t) = B^*\widehat{\varphi}(t)$$

é um controle para o sistema (1) *com dado inicial* y_0.

Exercício 0: Mostre que se J possuir um mínimo, ele será único. Ou seja, o controle construído minimizando o funcional J é único.

Sugestão: Mostre que J é estritamente convexo.

Controle como mínimo de um funcional

Veremos agora que (3) é na verdade uma condição de optimalidade para os pontos críticos do funcional quadrático $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2}\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n},$$

onde φ é a solução de (2) correspondendo ao dado inicial φ_T.

Temos o seguinte resultado:

Teorema
Suponha que J tem um mínimo $\widehat{\varphi_T} \in \mathbb{R}^n$ e seja $\widehat{\varphi}$ a solução do sistema adjunto (2) *com dado inicial $\widehat{\varphi_T}$. Então*

$$u(t) = B^*\widehat{\varphi}(t)$$

é um controle para o sistema (1) *com dado inicial y_0.*

Exercício 0: Mostre que se J possuir um mínimo, ele será único. Ou seja, o controle construído minimizando o funcional J é único.

Sugestão: Mostre que J é estritamente convexo.

Controle como mínimo de um funcional

Veremos agora que (3) é na verdade uma condição de optimalidade para os pontos críticos do funcional quadrático $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2}\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n},$$

onde φ é a solução de (2) correspondendo ao dado inicial φ_T.

Temos o seguinte resultado:

Teorema
Suponha que J tem um mínimo $\widehat{\varphi_T} \in \mathbb{R}^n$ *e seja* $\widehat{\varphi}$ *a solução do sistema adjunto* (2) *com dado inicial* $\widehat{\varphi_T}$*. Então*

$$u(t) = B^*\widehat{\varphi}(t)$$

é um controle para o sistema (1) *com dado inicial* y_0.

Exercício 0: Mostre que se J possuir um mínimo, ele será único. Ou seja, o controle construído minimizando o funcional J é único.

Sugestão: Mostre que J é estritamente convexo.

Controle como mínimo de um funcional

Veremos agora que (3) é na verdade uma condição de optimalidade para os pontos críticos do funcional quadrático $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$J(\varphi_T) = \frac{1}{2}\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n},$$

onde φ é a solução de (2) correspondendo ao dado inicial φ_T.

Temos o seguinte resultado:

Teorema
Suponha que J tem um mínimo $\widehat{\varphi_T} \in \mathbb{R}^n$ e seja $\widehat{\varphi}$ a solução do sistema adjunto (2) *com dado inicial $\widehat{\varphi_T}$. Então*

$$u(t) = B^*\widehat{\varphi}(t)$$

é um controle para o sistema (1) *com dado inicial y_0.*

Exercício 0: Mostre que se J possuir um mínimo, ele será único. Ou seja, o controle construído minimizando o funcional J é único.

Sugestão: Mostre que J é estritamente convexo.

Prova: Seja $\widehat{\varphi_T}$ um mínimo de J. Temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{J(\widehat{\varphi_T} + h\varphi_T) - J(\widehat{\varphi_T})}{h} = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Calculando este limite, vemos que

$$\int_0^T < B^* \widehat{\varphi}(t), B^* \varphi(t) >_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo lema, concluimos que $u(t) = B^* \widehat{\varphi}(t)$ é um controle para (1) que leva y_0 a zero no tempo $T > 0$.

Observação

O teorema anterior nos dá um método variacional para a obtenção de um controle como mínimo do funcional J. Entretanto, este não é o único funcional que podemos definir para obter controles. De fato, podemos modificar J de maneira conveniente para obter outros tipos de controles.

Note também que os controles obtidos são da forma $B^* \varphi$, com φ solução do sistema adjunto (2), e portanto estes controles são funções analíticas no tempo.

Prova: Seja $\widehat{\varphi_T}$ um mínimo de J. Temos

$$\lim_{h \to 0} \frac{J(\widehat{\varphi_T} + h\varphi_T) - J(\widehat{\varphi_T})}{h} = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Calculando este limite, vemos que

$$\int_0^T < B^* \widehat{\varphi}(t), B^* \varphi(t) >_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo lema, concluimos que $u(t) = B^* \widehat{\varphi}(t)$ é um controle para (1) que leva y_0 a zero no tempo $T > 0$.

Observação

O teorema anterior nos dá um método variacional para a obtenção de um controle como mínimo do funcional J. Entretanto, este não é o único funcional que podemos definir para obter controles. De fato, podemos modificar J de maneira conveniente para obter outros tipos de controles.

Note também que os controles obtidos são da forma $B^*\varphi$, com φ solução do sistema adjunto (2), e portanto estes controles são funções analíticas no tempo.

Prova: Seja $\widehat{\varphi_T}$ um mínimo de J. Temos

$$\lim_{h\to 0} \frac{J(\widehat{\varphi_T} + h\varphi_T) - J(\widehat{\varphi_T})}{h} = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Calculando este limite, vemos que

$$\int_0^T < B^*\widehat{\varphi}(t), B^*\varphi(t) >_{\mathbb{R}^m} dt + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo lema, concluimos que $u(t) = B^*\widehat{\varphi}(t)$ é um controle para (1) que leva y_0 a zero no tempo $T > 0$.

Observação

O teorema anterior nos dá um método variacional para a obtenção de um controle como mínimo do funcional J. Entretanto, este não é o único funcional que podemos definir para obter controles. De fato, podemos modificar J de maneira conveniente para obter outros tipos de controles.
Note também que os controles obtidos são da forma $B^*\varphi$, com φ solução do sistema adjunto (2), e portanto estes controles são funções analíticas no tempo.

Observabilidade

Agora, focaremos em encontrar propriedades para o sistema adjunto (2) para que o funcional J possua um mínimo. Neste sentido, veremos que a controlabilidade do sistema (1) é equivalente a uma *desigualdade de observabilidade* para o sistema adjunto (2).

Definição (Desigualdade de Observabilidade)

Diremos que o sistema (2) *é observável no tempo* $T > 0$ *se existe* $C > 0$ *tal que*

$$|\varphi(0)|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T |B^*\varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt, \tag{4}$$

para toda $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, *onde* φ *a solução correspondente do sistema adjunto* (2).

Observação

A desigualdade de observabilidade, quando válida, garante que a solução do sistema adjunto (2) *no tempo* $t = 0$ *é unicamente determinada pela quantidade observada* $B^*\varphi$ *no intervalo* $(0, T)$. *Isto é, a informação contida no termo* $B^*\varphi$ *caracteriza completamente a solução do sistema adjunto* (2).

Observabilidade

Agora, focaremos em encontrar propriedades para o sistema adjunto (2) para que o funcional J possua um mínimo. Neste sentido, veremos que a controlabilidade do sistema (1) é equivalente a uma *desigualdade de observabilidade* para o sistema adjunto (2).

Definição (Desigualdade de Observabilidade)

Diremos que o sistema (2) *é observável no tempo* $T > 0$ *se existe* $C > 0$ *tal que*

$$|\varphi(0)|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T |B^*\varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt, \tag{4}$$

para toda $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$*, onde* φ *a solução correspondente do sistema adjunto* (2)*.*

Observação

A desigualdade de observabilidade, quando válida, garante que a solução do sistema adjunto (2) *no tempo* $t = 0$ *é unicamente determinada pela quantidade observada* $B^*\varphi$ *no intervalo* $(0, T)$*. Isto é, a informação contida no termo* $B^*\varphi$ *caracteriza completamente a solução do sistema adjunto* (2)*.*

Observabilidade

Agora, focaremos em encontrar propriedades para o sistema adjunto (2) para que o funcional J possua um mínimo. Neste sentido, veremos que a controlabilidade do sistema (1) é equivalente a uma *desigualdade de observabilidade* para o sistema adjunto (2).

Definição (Desigualdade de Observabilidade)

Diremos que o sistema (2) *é observável no tempo* $T > 0$ *se existe* $C > 0$ *tal que*

$$|\varphi(0)|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T |B^* \varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt, \tag{4}$$

para toda $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$*, onde* φ *a solução correspondente do sistema adjunto* (2)*.*

Observação

A desigualdade de observabilidade, quando válida, garante que a solução do sistema adjunto (2) *no tempo* $t = 0$ *é unicamente determinada pela quantidade observada* $B^* \varphi$ *no intervalo* $(0, T)$*. Isto é, a informação contida no termo* $B^* \varphi$ *caracteriza completamente a solução do sistema adjunto* (2)*.*

Observação (Exercício 1)

A desigualdade de observabilidade (4) *é equivalente à seguinte desigualdade:*
" Existe $C > 0$ tal que

$$|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T |B^* \varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt, \tag{5}$$

para toda $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, onde φ a solução correspondente do sistema adjunto (2)*".*

A equivalência segue do fato que a aplicação linear $\varphi_T \mapsto \varphi(0)$ é linear e contínua do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, com inversa contínua.

De agora em diante, usaremos ambas desigualdades dependendo do contexto necessário.

Observação

A observação acima somente é válida no caso de EDO's. Quando trabalhemos com EDP's a equivalência entre as desigualdades (4) *e* (5) *não será, em geral, verdadeira.*

Observação (Exercício 1)

A desigualdade de observabilidade (4) *é equivalente à seguinte desigualdade:*
" Existe $C > 0$ *tal que*

$$|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T |B^*\varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt, \tag{5}$$

para toda $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$*, onde* φ *a solução correspondente do sistema adjunto* (2)*".*

A equivalência segue do fato que a aplicação linear $\varphi_T \mapsto \varphi(0)$ é linear e contínua do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, com inversa contínua.

De agora em diante, usaremos ambas desigualdades dependendo do contexto necessário.

Observação

A observação acima somente é válida no caso de EDO's. Quando trabalhemos com EDP's a equivalência entre as desigualdades (4) *e* (5) *não será, em geral, verdadeira.*

Observação (Exercício 1)

A desigualdade de observabilidade (4) *é equivalente à seguinte desigualdade:*
" Existe $C > 0$ tal que

$$|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T |B^* \varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt, \tag{5}$$

para toda $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$, onde φ a solução correspondente do sistema adjunto (2)*".*

A equivalência segue do fato que a aplicação linear $\varphi_T \mapsto \varphi(0)$ é linear e contínua do $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$, com inversa contínua.

De agora em diante, usaremos ambas desigualdades dependendo do contexto necessário.

Observação

A observação acima somente é válida no caso de EDO's. Quando trabalhemos com EDP's a equivalência entre as desigualdades (4) *e* (5) *não será, em geral, verdadeira.*

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\left\{ \begin{array}{l} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.
O adjunto é dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} -\varphi' + \lambda \varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

Queremos provar a desigualdade de observabilidade:

$$|\varphi(0)|^2 \leq C \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}.$$

Considere $\theta \in C^3([0, T])$, $0 \leq \theta \leq 1$ satisfazendo

$$\left\{ \begin{array}{ll} \theta = 1, & \text{em } [0, T/4] \\ \theta = 0, & \text{em } [3T/4, T]. \end{array} \right.$$

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.
O adjunto é dado por

$$\begin{cases} -\varphi' + \lambda\varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Queremos provar a desigualdade de observabilidade:

$$|\varphi(0)|^2 \leq C \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}.$$

Considere $\theta \in C^3([0, T])$, $0 \leq \theta \leq 1$ satisfazendo

$$\begin{cases} \theta = 1, & \text{em } [0, T/4] \\ \theta = 0, & \text{em } [3T/4, T]. \end{cases}$$

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0,T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0,T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.
O adjunto é dado por

$$\begin{cases} -\varphi' + \lambda\varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Queremos provar a desigualdade de observabilidade:

$$|\varphi(0)|^2 \leq C \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}.$$

Considere $\theta \in C^3([0,T])$, $0 \leq \theta \leq 1$ satisfazendo

$$\begin{cases} \theta = 1, & \text{em } [0, T/4] \\ \theta = 0, & \text{em } [3T/4, T]. \end{cases}$$

Exemplo bobo

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$, $T > 0$ e consideremos a equação

$$\begin{cases} y' + \lambda y = u, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Aqui $y : [0, T] \to \mathbb{R}$ e $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ são funções escalares.
O adjunto é dado por

$$\begin{cases} -\varphi' + \lambda\varphi = 0, \\ \varphi(T) = \varphi_T \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

Queremos provar a desigualdade de observabilidade:

$$|\varphi(0)|^2 \leq C \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt, \quad \forall \varphi_T \in \mathbb{R}.$$

Considere $\theta \in C^3([0, T])$, $0 \leq \theta \leq 1$ satisfazendo

$$\begin{cases} \theta = 1, & \text{em } [0, T/4] \\ \theta = 0, & \text{em } [3T/4, T]. \end{cases}$$

Agora, multipliquemos o sistema adjunto por $\theta\varphi$, e obtemos

$$-\frac{\theta(t)}{2}\frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2 + \lambda\theta(t)|\varphi(t)|^2 = 0, \quad \forall t \in [0,T].$$

Integrando em $(0,T)$, obtemos

$$-\int_0^T \frac{\theta(t)}{2}\frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2 dt + \lambda\int_0^T \theta|\varphi(t)|^2 dt = 0,$$

ou seja

$$\frac{1}{2}|\varphi(0)|^2 = -\lambda\int_0^T \theta(t)|\varphi(t)|^2 dt - \int_0^T \frac{\theta'(t)}{2}|\varphi(t)|^2 dt.$$

Donde,

$$|\varphi(0)|^2 \leq C\int_0^T |\varphi(t)|^2 dt.$$

Agora, multipliquemos o sistema adjunto por $\theta\varphi$, e obtemos

$$-\frac{\theta(t)}{2}\frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2+\lambda\theta(t)|\varphi(t)|^2=0,\quad \forall t\in[0,T].$$

Integrando em $(0,T)$, obtemos

$$-\int_0^T\frac{\theta(t)}{2}\frac{d}{dt}|\varphi(t)|^2dt+\lambda\int_0^T\theta|\varphi(t)|^2dt=0,$$

ou seja

$$\frac{1}{2}|\varphi(0)|^2=-\lambda\int_0^T\theta(t)|\varphi(t)|^2dt-\int_0^T\frac{\theta'(t)}{2}|\varphi(t)|^2dt.$$

Donde,

$$|\varphi(0)|^2\leq C\int_0^T|\varphi(t)|^2dt.$$

Exemplo 1

Exemplo 1: $\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 \end{cases}$ (sistema não controlável!)

Ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema adjunto é dado por $\begin{cases} -\varphi_1' = \varphi_1, \\ -\varphi_2' = \varphi_2 \\ \varphi_1(T) = \varphi_{1T}, \ \varphi_2(T) = \varphi_{2T}. \end{cases}$

Neste caso temos $B^*\varphi = B^*(\varphi_1, \varphi_2)^* = \varphi_1$ e a desigualdade de observabilidade não pode ser verdadeira!

Exercício 2: Mostre que a desigualdade de observabillidade para o sistema adjunto não é verdadeira.

Exemplo 1

Exemplo 1: $\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 \end{cases}$ (sistema não controlável!)

Ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

O sistema adjunto é dado por $\begin{cases} -\varphi_1' = \varphi_1, \\ -\varphi_2' = \varphi_2 \\ \varphi_1(T) = \varphi_{1T}, \ \varphi_2(T) = \varphi_{2T}. \end{cases}$

Neste caso temos $B^*\varphi = B^*(\varphi_1, \varphi_2)^* = \varphi_1$ e a desigualdade de observabilidade não pode ser verdadeira!

Exercício 2: Mostre que a desigualdade de observabillidade para o sistema adjunto não é verdadeira.

Exemplo 2

Exemplo 2: $x'' + x = u$ (sistema controlável!)
Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = u - x \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema adjunto é dado por $\begin{cases} -\varphi_1' = -\varphi_2, \\ -\varphi_2' = \varphi_1, \\ \varphi_1(T) = \varphi_{1T}, \ \varphi_2(T) = \varphi_{2T}. \end{cases}$

Neste caso temos $B^*\varphi = B^*(\varphi_1, \varphi_2)^* = \varphi_2$ e a desigualdade de observabilidade neste caso é verdadeira!

Exercício 3: Prove a desigualdade de observabillidade para o sistema adjunto.

Exemplo 2

Exemplo 2: $x'' + x = u$ (sistema controlável!)
Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = u - x \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

O sistema adjunto é dado por $\begin{cases} -\varphi_1' = -\varphi_2, \\ -\varphi_2' = \varphi_1, \\ \varphi_1(T) = \varphi_{1T}, \ \varphi_2(T) = \varphi_{2T}. \end{cases}$

Neste caso temos $B^*\varphi = B^*(\varphi_1, \varphi_2)^* = \varphi_2$ e a desigualdade de observabilidade neste caso é verdadeira!

Exercício 3: Prove a desigualdade de observabillidade para o sistema adjunto.

Continuação única

A seguir, mostraremos que para EDO's a desigualdade de observabilidade (4) é equivalente a um resultado de *continuação única* para o sistema adjunto.
No caso de EPD's, estes dois conceitos não são equivalentes e darão lugar a conceitos *distintos* de controlabilidade.

Teorema (Observabilidade $\iff$ continuação única)
A desigualdade de observabilidade (4) *é equivalente ao seguinte resultado de continuação única:*

$$B^*\varphi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow \varphi_T = 0. \tag{6}$$

Continuação única

A seguir, mostraremos que para EDO's a desigualdade de observabilidade (4) é equivalente a um resultado de *continuação única* para o sistema adjunto.
No caso de EPD's, estes dois conceitos não são equivalentes e darão lugar a conceitos *distintos* de controlabilidade.

Teorema (Observabilidade $\iff$ continuação única)

A desigualdade de observabilidade (4) *é equivalente ao seguinte resultado de continuação única:*

$$B^* \varphi(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T] \Rightarrow \varphi_T = 0. \tag{6}$$

Conceitos equivalentes para EDO's

Temos as seguintes equivalência para EDO's lineares com coeficientes constantes:

$$\text{Controle Exato} \iff \text{Controle Nulo} \iff \text{Continuação única.}$$

Prova (observabilidade $\iff$ continuação única):

($\Rightarrow$) Segue diretamente da desigualdade (5).

($\Leftarrow$) Definindo a semi-norma em $\mathbb{R}^n$:

$$\|\varphi_T\|_{obs} = \left(\int_0^T |B^* \varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt \right)^{1/2}.$$

É fácil ver que se (6) vale então $\|\varphi_T\|_{obs}$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

O resultado segue do fato que todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Prova (observabilidade $\iff$ continuação única):

($\Rightarrow$) Segue diretamente da desigualdade (5).

($\Leftarrow$) Definindo a semi-norma em $\mathbb{R}^n$:

$$\|\varphi_T\|_{obs} = \left(\int_0^T |B^* \varphi(t)|^2_{\mathbb{R}^m} dt \right)^{1/2}.$$

É fácil ver que se (6) vale então $\|\varphi_T\|_{obs}$ define uma norma em $\mathbb{R}^n$.

O resultado segue do fato que todas as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes.

Controlabilidade $\Longleftrightarrow$ Observabilidade

Vejamos agora a relação entre a desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto (2) e a controlabilidade do sistema (1).

Teorema (Controlabilidade $\Longleftrightarrow$ Observabilidade)
Sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se o sistema adjunto* (2) *é observável no intervalo* $(0, T)$.

Observação
O teorema acima é bastante útil pois reduz controlabilidade à obtenção de una desigualdade. No caso de EDO's talvez seja mais prático aplicar o Teorema de Kalman, se a dimensão n não for muito grande. Entretanto, para EDP's, em geral, a melhor maneira para estudar controlabilidade é através de desigualdades de observabilidade adequadas.

Controlabilidade $\iff$ Observabilidade

Vejamos agora a relação entre a desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto (2) e a controlabilidade do sistema (1).

Teorema (Controlabilidade $\iff$ Observabilidade)

Sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se o sistema adjunto* (2) *é observável no intervalo* $(0, T)$.

Observação

O teorema acima é bastante útil pois reduz controlabilidade à obtenção de una desigualdade. No caso de EDO's talvez seja mais prático aplicar o Teorema de Kalman, se a dimensão n não for muito grande. Entretanto, para EDP's, em geral, a melhor maneira para estudar controlabilidade é através de desigualdades de observabilidade adequadas.

Controlabilidade $\Longleftrightarrow$ Observabilidade

Vejamos agora a relação entre a desigualdade de observabilidade para o sistema adjunto (2) e a controlabilidade do sistema (1).

Teorema (Controlabilidade $\Longleftrightarrow$ Observabilidade)

Sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se o sistema adjunto* (2) *é observável no intervalo* $(0, T)$.

Observação

O teorema acima é bastante útil pois reduz controlabilidade à obtenção de una desigualdade. No caso de EDO's talvez seja mais prático aplicar o Teorema de Kalman, se a dimensão n não for muito grande. Entretanto, para EDP's, em geral, a melhor maneira para estudar controlabilidade é através de desigualdades de observabilidade adequadas.

Controlabilidade $\Longleftrightarrow$ Observabilidade

Assumiremos o seguinte resultado básico de Análise:

Lema
Seja $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional convexo, contínuo e coercivo, i.e.,

$$J(x) \longrightarrow +\infty, \quad \textit{quando } |x|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty.$$

Então, J possui (ao menos) um mínimo.

Prova do Teorema: (des. observabilidade $\Rightarrow$ controle exato)

É suficiente provar que para cada $y_0 \in \mathbb{R}^n$, J possui um mínimo
É fácil ver que J é convexo e contínuo. E basta provar que J é coercivo.

De fato, pela desigualdade de observabilidade (5):

$$J(\varphi_T) \geq C|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n} - | < y_0, \varphi(0)|$$

e por Cauchy-Schwarz: $| < y_0, \varphi(0) > | \leq C(\epsilon)|y_0|^2_{\mathbb{R}^n} + \epsilon|\varphi(0)|^2_{\mathbb{R}^n}, \forall \epsilon > 0.$

Controlabilidade $\Longleftrightarrow$ Observabilidade

Assumiremos o seguinte resultado básico de Análise:

Lema

Seja $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional convexo, contínuo e coercivo, i.e.,

$$J(x) \longrightarrow +\infty, \quad \textit{quando } |x|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty.$$

Então, J possui (ao menos) um mínimo.

Prova do Teorema: (des. observabilidade $\Rightarrow$ controle exato)

É suficiente provar que para cada $y_0 \in \mathbb{R}^n$, J possui um mínimo
É fácil ver que J é convexo e contínuo. E basta provar que J é coercivo.

De fato, pela desigualdade de observabilidade (5):

$$J(\varphi_T) \geq C|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n} - | < y_0, \varphi(0)|$$

e por Cauchy-Schwarz: $| < y_0, \varphi(0) > | \leq C(\epsilon)|y_0|^2_{\mathbb{R}^n} + \epsilon|\varphi(0)|^2_{\mathbb{R}^n}, \forall \epsilon > 0.$

Controlabilidade $\Longleftrightarrow$ *Observabilidade*

Assumiremos o seguinte resultado básico de Análise:

Lema

Seja $J : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *um funcional convexo, contínuo e coercivo, i.e.,*

$$J(x) \longrightarrow +\infty, \quad \textit{quando } |x|_{\mathbb{R}^n} \to +\infty.$$

Então, J possui (ao menos) um mínimo.

Prova do Teorema: (des. observabilidade $\Rightarrow$ controle exato)

É suficiente provar que para cada $y_0 \in \mathbb{R}^n$, J possui um mínimo
É fácil ver que J é convexo e contínuo. E basta provar que J é coercivo.

De fato, pela desigualdade de observabilidade (5):

$$J(\varphi_T) \geq C|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n} - |< y_0, \varphi(0)|$$

e por Cauchy-Schwarz: $| < y_0, \varphi(0) > | \leq C(\epsilon)|y_0|^2_{\mathbb{R}^n} + \epsilon|\varphi(0)|^2_{\mathbb{R}^n}, \forall \epsilon > 0.$

Lembrado que existe $C_1, C_2 > 0$ tal que (normas equivalentes!)

$$C_1|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n} \leq |\varphi(0)|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C_2|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n},$$

temos, escolhendo ϵ apropriado,

$$J(\varphi_T) \geq \frac{C}{2}|\varphi_T|^2_{\mathbb{R}^n} - C|y_0|^2_{\mathbb{R}^n},$$

e portanto J é coercivo.

(controle exato $\Rightarrow$ des. observabilidade)
Suponha que o sistema é exatamente controlável no tempo $T > 0$ e que o sistema adjunto não é observável no tempo T.
Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\tilde{\varphi}_T^k$ tal que a desigualdade de observabilidade (5) nao vale, i.e.,

$$|\tilde{\varphi}_T^k|_{\mathbb{R}^n}^2 > k \int_0^T |B^* \tilde{\varphi}^k|^2 dt,$$

onde $\tilde{\varphi}^k$ é solução de (2) com dado inicial $\tilde{\varphi}_T^k$.
Assim, tomando $\varphi_T^k = \frac{\tilde{\varphi}^k}{|\tilde{\varphi}_T^k|_{\mathbb{R}^n}}$, obtemos uma sequência $\{\varphi_T^k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $|\varphi_T^k|_{\mathbb{R}^n} = 1$ para todo k e

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T |B^* \varphi^k|^2 dt = 0,$$

onde φ^k é a solução de (2) com dado inicial φ_T^k.

(controle exato $\Rightarrow$ des. observabilidade)
Suponha que o sistema é exatamente controlável no tempo $T > 0$ e que o sistema adjunto não é observável no tempo T.
Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $\tilde{\varphi}_T^k$ tal que a desigualdade de observabilidade (5) nao vale, i.e.,

$$|\tilde{\varphi}_T^k|_{\mathbb{R}^n}^2 > k \int_0^T |B^* \tilde{\varphi}^k|^2 dt,$$

onde $\tilde{\varphi}^k$ é solução de (2) com dado inicial $\tilde{\varphi}_T^k$.
Assim, tomando $\varphi_T^k = \frac{\tilde{\varphi}^k}{|\tilde{\varphi}_T^k|_{\mathbb{R}^n}}$, obtemos uma sequência $\{\varphi_T^k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que $|\varphi_T^k|_{\mathbb{R}^n} = 1$ para todo k e

$$\lim_{k \to \infty} \int_0^T |B^* \varphi^k|^2 dt = 0,$$

onde φ^k é a solução de (2) com dado inicial φ_T^k.

Portanto, existe uma subsequência de $(\varphi_T^k)_{k=1}^{\infty}$ que converge a algum $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ e $|\varphi_T|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Seja φ a solução do sistema adjunto (2) associada a φ_T, então temos que

$$\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2 dt = 0.$$

Entretanto, como o sistema (1) é controlável, pela Condição de Optimalidade (3) temos que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existe um controle $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$\int_0^T < u(t), B^*\varphi^k(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \varphi^k(0) >_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall k.$$

Fazendo $k \to +\infty$ vemos que

$$< y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Como $y_0 \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário, concluimos que $\varphi(0) = 0$, donde $\varphi_T = 0$ o que contradiz $|\varphi_T|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Portanto, existe uma subsequência de $(\varphi_T^k)_{k=1}^{\infty}$ que converge a algum $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ e $|\varphi_T|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Seja φ a solução do sistema adjunto (2) associada a φ_T, então temos que

$$\int_0^T |B^* \varphi(t)|^2 dt = 0.$$

Entretanto, como o sistema (1) é controlável, pela Condição de Optimalidade (3) temos que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existe um controle $u \in L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\int_0^T < u(t), B^* \varphi^k(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \varphi^k(0) >_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall k.$$

Fazendo $k \to +\infty$ vemos que

$$< y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Como $y_0 \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário, concluimos que $\varphi(0) = 0$, donde $\varphi_T = 0$ o que contradiz $|\varphi_T|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Portanto, existe uma subsequência de $(\varphi_T^k)_{k=1}^{\infty}$ que converge a algum $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$ e $|\varphi_T|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Seja φ a solução do sistema adjunto (2) associada a φ_T, então temos que

$$\int_0^T |B^*\varphi(t)|^2 dt = 0.$$

Entretanto, como o sistema (1) é controlável, pela Condição de Optimalidade (3) temos que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existe um controle $u \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ tal que

$$\int_0^T < u(t), B^*\varphi^k(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \varphi^k(0) >_{\mathbb{R}^n}, \quad \forall k.$$

Fazendo $k \to +\infty$ vemos que

$$< y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n} = 0.$$

Como $y_0 \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário, concluimos que $\varphi(0) = 0$, donde $\varphi_T = 0$ o que contradiz $|\varphi_T|_{\mathbb{R}^n} = 1$.

Estimativa sobre a norma do controle

Mostremos agora que a norma do controle obtido ao minimizar J é proporcional ao dado inicial y_0 que queremos controlar.

Teorema

Suponha que o par (A, B) é controlável no tempo T e seja u o controle obtido ao minimizar o funcional J para levar y_0 a zero.
Então, existe $C > 0$, dependendo somente de T, tal que

$$|u|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \leq C|y_0|_{\mathbb{R}^n}.$$

Prova: Seja u o controle que leva a solução de (1) que leva y_0 a zero obtido ao minimizar J.
Pela condição de optimalidade (3), temos

$$|u|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} = \int_0^T |B^*\widehat{\varphi(t)}|^2_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

Estimativa sobre a norma do controle

Mostremos agora que a norma do controle obtido ao minimizar J é proporcional ao dado inicial y_0 que queremos controlar.

Teorema

Suponha que o par (A, B) é controlável no tempo T e seja u o controle obtido ao minimizar o funcional J para levar y_0 a zero.
Então, existe $C > 0$, dependendo somente de T, tal que

$$|u|_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} \leq C|y_0|_{\mathbb{R}^n}.$$

Prova: Seja u o controle que leva a solução de (1) que leva y_0 a zero obtido ao minimizar J.
Pela condição de optimalidade (3), temos

$$|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} = \int_0^T |B^*\widehat{\varphi(t)}|^2_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

Estimativa sobre a norma do controle

Mostremos agora que a norma do controle obtido ao minimizar J é proporcional ao dado inicial y_0 que queremos controlar.

Teorema
Suponha que o par (A, B) é controlável no tempo T e seja u o controle obtido ao minimizar o funcional J para levar y_0 a zero.
Então, existe $C > 0$, dependendo somente de T, tal que

$$|u|_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} \leq C|y_0|_{\mathbb{R}^n}.$$

Prova: Seja u o controle que leva a solução de (1) que leva y_0 a zero obtido ao minimizar J.
Pela condição de optimalidade (3), temos

$$|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} = \int_0^T |B^*\widehat{\varphi(t)}|^2_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

Considere a EDO sem controle (i.e., $u = 0$):

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t), \\ w(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Também, seja $\widehat{\varphi_T} \in \mathbb{R}^n$ o mínimo de J e considere o sistema

$$\begin{cases} -\widehat{\varphi}' = A^*\widehat{\varphi}, \\ \widehat{\varphi}(T) = \widehat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

É fácil ver que

$$\frac{d}{dt} < w(t), \widehat{\varphi(t)} >_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

ou seja $< y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} = < w(T), \widehat{\varphi(T)} >_{\mathbb{R}^n}$.
Assim,

$$|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} = < w(T), \widehat{\varphi(T)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

Considere a EDO sem controle (i.e., $u = 0$):

$$\begin{cases} w'(t) = Aw(t), \\ w(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Também, seja $\widehat{\varphi_T} \in \mathbb{R}^n$ o mínimo de J e considere o sistema

$$\begin{cases} -\widehat{\varphi}' = A^* \widehat{\varphi}, \\ \widehat{\varphi}(T) = \widehat{\varphi}_T \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

É fácil ver que

$$\frac{d}{dt} < w(t), \widehat{\varphi(t)} >_{\mathbb{R}^n} = 0,$$

ou seja $< y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} = < w(T), \widehat{\varphi(T)} >_{\mathbb{R}^n}$.
Assim,

$$|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} = < w(T), \widehat{\varphi(T)} >_{\mathbb{R}^n} \; .$$

O resultado segue da desigualdade de observabilidade (ver exercício 1)

$$|\widehat{\varphi_T}|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T |B^* \widehat{\varphi(t)}|^2_{\mathbb{R}^m} dt \quad (= C|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)})$$

e o fato (estimativa de energia!) que existe $C_1 > 0$ tal que

$$|w(T)|_{\mathbb{R}^n} \leq C_1 |y_0|_{\mathbb{R}^n}.$$

De fato, por Cauchy-Schwartz, temos

$$|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} \leq |w(T)|_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi(T)}|_{\mathbb{R}^n}.$$

donde

$$|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} \leq |y_0|_{\mathbb{R}^n} |u|_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)},$$

e o resultado segue.

O resultado segue da desigualdade de observabilidade (ver exercício 1)

$$|\widehat{\varphi_T}|^2_{\mathbb{R}^n} \leq C \int_0^T |B^* \widehat{\varphi(t)}|^2_{\mathbb{R}^m} dt \quad (= C|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)})$$

e o fato (estimativa de energia!) que existe $C_1 > 0$ tal que

$$|w(T)|_{\mathbb{R}^n} \leq C_1 |y_0|_{\mathbb{R}^n}.$$

De fato, por Cauchy-Schwartz, temos

$$|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} \leq |w(T)|_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi(T)}|_{\mathbb{R}^n}.$$

donde

$$|u|^2_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)} \leq |y_0|_{\mathbb{R}^n} |u|_{L^2(0,T:\mathbb{R}^m)},$$

e o resultado segue.

HUM como controle de norma mínima

Teorema
O controle (único!) $u(t) = B^*\widehat{\varphi}(t)$ obtido pela minimização do funcional J tem, entre todos os controles possíveis, norma mínima em $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$.

Observação
O controle obtido através do Gramiano também tem norma mínima em $L^2(0, T; \mathbb{R}^m)$. Portanto, ele é o controle obtido pela minimização do funcional J!

Prova: Seja v um controle arbitrário para o sistema (1).
Temos que a Condicão de Optimalidade (3) é satisfeita para ambos u e v para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$.

Tomando $\varphi_T = \widehat{\varphi_T}$ (o mínimo de J), temos

$$\int_0^T < v(t), B^*\widehat{\varphi}(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

HUM como controle de norma mínima

Teorema

O controle (único!) $u(t) = B^* \widehat{\varphi}(t)$ obtido pela minimização do funcional J tem, entre todos os controles possíveis, norma mínima em $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Observação

O controle obtido através do Gramiano também tem norma mínima em $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Portanto, ele é o controle obtido pela minimização do funcional J!

Prova: Seja v um controle arbitrário para o sistema (1).
Temos que a Condicão de Optimalidade (3) é satisfeita para ambos u e v para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$.

Tomando $\varphi_T = \widehat{\varphi_T}$ (o mínimo de J), temos

$$\int_0^T < v(t), B^* \widehat{\varphi}(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

HUM como controle de norma mínima

Teorema

O controle (único!) $u(t) = B^* \widehat{\varphi}(t)$ obtido pela minimização do funcional J tem, entre todos os controles possíveis, norma mínima em $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Observação

O controle obtido através do Gramiano também tem norma mínima em $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Portanto, ele é o controle obtido pela minimização do funcional J!

Prova: Seja v um controle arbitrário para o sistema (1).
Temos que a Condicão de Optimalidade (3) é satisfeita para ambos u e v para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$.

Tomando $\varphi_T = \widehat{\varphi_T}$ (o mínimo de J), temos

$$\int_0^T < v(t), B^* \widehat{\varphi}(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

HUM como controle de norma mínima

Teorema

O controle (único!) $u(t) = B^* \widehat{\varphi}(t)$ obtido pela minimização do funcional J tem, entre todos os controles possíveis, norma mínima em $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$.

Observação

O controle obtido através do Gramiano também tem norma mínima em $L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$. Portanto, ele é o controle obtido pela minimização do funcional J!

Prova: Seja v um controle arbitrário para o sistema (1).
Temos que a Condicão de Optimalidade (3) é satisfeita para ambos u e v para todo $\varphi_T \in \mathbb{R}^n$.

Tomando $\varphi_T = \widehat{\varphi_T}$ (o mínimo de J), temos

$$\int_0^T < v(t), B^* \widehat{\varphi}(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

HUM como controle de norma mínima

Também,

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} = \int_0^T < u(t), B^*\widehat{\varphi}(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

Portanto,

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} = \int_0^T < v(t), B^*\widehat{\varphi}(t) >_{\mathbb{R}^m} dt \leq \|v\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \|B^*\widehat{\varphi}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}$$

e o resultado segue.

HUM como controle de norma mínima

Também,

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} = \int_0^T < u(t), B^*\widehat{\varphi}(t) >_{\mathbb{R}^m} dt = - < y_0, \widehat{\varphi(0)} >_{\mathbb{R}^n} .$$

Portanto,

$$\|u\|^2_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} = \int_0^T < v(t), B^*\widehat{\varphi}(t) >_{\mathbb{R}^m} dt \leq \|v\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)} \|B^*\widehat{\varphi}\|_{L^2(0,T;\mathbb{R}^m)}$$

e o resultado segue.

Exercício: controle com restrição

Exercício 4: Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o sistema de controle

$$\begin{cases} y' + ay = u \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

com $y(t), u(t) \in \mathbb{R}$.

O objetivo deste exercício é analisar quando é possível controlar o sistema por meio de controles satisfazendo a restrição $|u(t)| \leq 1$ para todo t.

Mostre:

- Se $a \geq 0$, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ existe um tempo $T = T(y_0)$ e um controle $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ com $|u(t)| \leq 1$, q.s. $t \in [0, T]$, tal que $y(T) = 0$.

- Se $a < 0$, quem são os dados iniciais y_0 para os quais existe um tempo $T = T(y_0)$ e um controle $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ com $|u(t)| \leq 1$, q.s. $t \in [0, T]$, tal que $y(T) = 0$.

Observação

O tempo de controle depende do dado inicial.

Exercício: controle com restrição

Exercício 4: Seja $a \in \mathbb{R}$ e considere o sistema de controle

$$\begin{cases} y' + ay = u \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

com $y(t), u(t) \in \mathbb{R}$.

O objetivo deste exercício é analisar quando é possível controlar o sistema por meio de controles satisfazendo a restrição $|u(t)| \leq 1$ para todo t.

Mostre:

- Se $a \geq 0$, para todo $y_0 \in \mathbb{R}$ existe um tempo $T = T(y_0)$ e um controle $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ com $|u(t)| \leq 1$, q.s. $t \in [0, T]$, tal que $y(T) = 0$.

- Se $a < 0$, quem são os dados iniciais y_0 para os quais existe um tempo $T = T(y_0)$ e um controle $u : [0, T] \to \mathbb{R}$ com $|u(t)| \leq 1$, q.s. $t \in [0, T]$, tal que $y(T) = 0$.

Observação

O tempo de controle depende do dado inicial.

Exercício: controle com restrição

Exercício 5: Considere o sistema de controle

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{7}$$

com $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

O objetivo deste exercício é encontrar condições necessárias para controlar o sistema por meio de controles satisfazendo a restrição $|u(t)|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$ para todo t.

Assuma:

- O sistema (7) é controlável.
- O operador A é estável (i.e., $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$ temos que $e^{tA}y_0 \to 0$ quando $t \to +\infty$).

Prove que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existe um tempo $T = T(y_0)$ e um controle $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$ com $|u(t)|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$, quase sempre $t \in [0,T]$, tal que $y(T) = 0$.

Observação

O tempo de controle depende do dado inicial.

Exercício: controle com restrição

Exercício 5: Considere o sistema de controle

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{7}$$

com $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

O objetivo deste exercício é encontrar condições necessárias para controlar o sistema por meio de controles satisfazendo a restrição $|u(t)|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$ para todo t.

Assuma:

- O sistema (7) é controlável.
- O operador A é estável (i.e., $\forall y_0 \in \mathbb{R}^n$ temos que $e^{tA}y_0 \to 0$ quando $t \to +\infty$).

Prove que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$ existe um tempo $T = T(y_0)$ e um controle $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$ com $|u(t)|_{\mathbb{R}^m} \leq 1$, quase sempre $t \in [0, T]$, tal que $y(T) = 0$.

Observação

O tempo de controle depende do dado inicial.

Exercício

Exercício 6: Sejam $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sabemos que o sistema

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + u \\ y_2' = cy_1 + dy_2, \\ y_1(0) = y_{01}, \;\; y_2(0) = y_{02} \end{cases} \tag{8}$$

com $y_{01}, y_{02} \in \mathbb{R}$ e $t \in [0, T]$ é exatamente controlável se e somente se

$$c \neq 0.$$

Assumindo $c \neq 0$. Escreva o sistema adjunto de (8) e prove a respectiva desigualdade de observabilidade para este sistema.

Observação

Um exemplo prático onde sistemas do tipo (8) *surgem é na modelagem de um forno elétrico residencial. (veja o livro [Jerzy Zabczyk; Mathematical control theory: an introduction]).*

Exercício

Exercício 7: Seja $a \in \mathbb{R}$ e $0 < \epsilon < 1/2$. Considere a EDO linear

$$\left| \begin{array}{l} x' + x + ay = u, \\ \epsilon y' + x + y = 0, \\ (x(0), y(0)) = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \tag{9}$$

- Mostre que o sistema adjunto é dado por:

$$\left| \begin{array}{l} -\varphi_t + \varphi + \xi = 0, \\ -\epsilon \xi_t + \xi + a\varphi = 0, \\ (\varphi(T), \xi(T)) = (\varphi_T, \xi_T) \in \mathbb{R}^2. \end{array} \right. \tag{10}$$

- Mostre que existe $C > 0$, independente de ϵ, tal que vale a desigualdade de observabilidade:

$$|\varphi(0)|^2 + \epsilon |\xi(0)|^2 \leq C \int_0^T |\varphi(t)|^2 dt, \tag{11}$$

para todo $\varphi_T, \xi_T \in \mathbb{R}$.

Exercício: Construção de outros tipos de Controle

Exercício 8: Para cada $1 < p < \infty$ seja $J_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ um funcional dado por:

$$J_p(\varphi_T) = \frac{1}{2}\left(\int_0^T |B^*\varphi(t)|^p_{\mathbb{R}^m} dt\right)^{2/p} + < y_0, \varphi(0) >_{\mathbb{R}^n},$$

onde φ é a solução de (2) correspondendo ao dado inicial φ_T.

- Assumindo que J_p possui um mínimo $\widehat{\varphi}_T$. Mostre que um controle para o sistema (1) associado ao funcional J_p é dado por

  $$u_p(t) = \left(\int_0^T |B^*\widehat{\varphi}(t)|^p_{\mathbb{R}^m} dt\right)^{2-p/p} |B^*\widehat{\varphi}(t)|^{p-2} B^*\widehat{\varphi}(t),$$

  onde $\widehat{\varphi}$ é a solução de (2) com dado inicial $\widehat{\varphi}_T$.
- É possível definir uma desigualdade de observabilidade que garanta que o funcional J_p possui um mínimo? Se sim, qual?
- É possível mostrar que o controle u_p tem norma mínima em algum $L^q(0, T; \mathbb{R}^m)$, com $1 < q < \infty$? Se sim, quem deve ser q?

Observação

O caso $p = 1$ é bem mais delicado e leva ao estudo dos chamados controle bang-bang.

Exercício

Exercício 9: Seja $T > 0$ e assuma que o sistema

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

é controlável.
Mostre que existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $y_0, y_T \in \mathbb{R}^n$, existe um controle $u \in C^\infty([0,T])$ tal que $y(T) = y_T$ e satisfazendo *supp* $u \subset [\epsilon, T-\epsilon]$.

Exercício: EDO's com memória

Exercício 10:
Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e $T > 0$. Considere a EDO linear com memória:

$$\begin{cases} y' = ay + b \displaystyle\int_0^t y(s)ds + u \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

com $y(t), u(t) \in \mathbb{R}$.
Mostre que para todo $y_0 \in \mathbb{R}$, existe um controle u tal que

$$y(T) = 0, \quad \int_0^T y(s)ds = 0.$$

Exercício: EDO's com memória

Exercício 11: Sejam $a, b, c, d, A, B \in \mathbb{R}$ e $T > 0$.
Considere a EDO linear com memória:

$$\begin{cases} y_1' = ay_1 + by_2 + A\displaystyle\int_0^t y_2(s)ds + u \\ y_2' = cy_1 + dy_2 + B\displaystyle\int_0^t y_2(s)ds, \\ y_1(0) = y_1^0, \;\; y_2(0) = y_2^0 \end{cases}$$

com $y_1(t), y_2(t), u(t) \in \mathbb{R}$.
Mostre que se $c \neq 0$, então para todo $y_1^0, y_2^0 \in \mathbb{R}$, existe um controle u tal que

$$y_1(T) = 0, \quad y_2(T) = 0, \quad \int_0^T y_2(s)ds = 0.$$

É possível obter também $\int_0^T y_1(s)ds = 0$?