Introdução à Controlabilidade de EDO's

Felipe W. Chaves-Silva

DM - UFPB

Escola de Verão em Matemática da UFPB - 2021

Referências

• F. Boyer, *Controllability of linear parabolic equations and systems*, M2 Lecture Notes, 2020.

• J.-M. Coron, *Control and nonlinearity*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, vol. 136, Providence, RI, 2007.

• R. E. Kalman, *On the general theory of control systems*, Proc. 1st IFAC Congress, Moscow, 1960, vol. 1, Butterworth, London, 1961, 481–492.

• E. Fernández-Cara, E. Zuazua, *Control Theory, History, Mathematical achievements and perspectives*, Boletin SEMA, 26, 2003, 79–140.

• S. Micu, E. Zuazua, *An Introduction to the Controllability of Partial Differential Equations*, Quelques questions de Théorie du Contrôle. Sari, T., ed., Collection Travaux en Cours Hermann, (2004), 69–157.

Referências

• G. Olive, *Introduction to linear control theory*, Lecture notes, Shandong University, 2017.

• SIAM, *Control in an Information Rich World: Report of the Panel on Future Directions in Control, Dynamics, and Systems*. SIAM, 2002; available at `http://www.cds.caltech.edu/~murray/cdspanel`.

• E. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional system*. Second Edition. Springer, New York, 1998.

• J. Zabczyk, *Mathematical Control Theory: An introduction*. Birkhäuser, 2007.

• E. Zuazua, *Controllability and observability of partial differential equations: some results and open problems, Handbook of differential equations: evolutionary equations. Vol. III*, Handb. Differ. Equ., pages 527–621, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2007.

Controle de EDO's

Focaremos uma vez mais em EDO's lineares da forma:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

aqui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Observação

$y : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tem n componentes e o controle $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem m componentes. Assumiremos, $m \leq n$.

Dado $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e um controle u, temos pela fórmula de variação dos parâmetros:

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Controle de EDO's

Focaremos uma vez mais em EDO's lineares da forma:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

aqui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Observação

$y : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tem* n *componentes e o controle* $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ *tem* m *componentes. Assumiremos,* $m \leq n$.

Dado $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e um controle u, temos pela fórmula de variação dos parâmetros:

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Controle de EDO's

Focaremos uma vez mais em EDO's lineares da forma:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), \; t \in [0,T], \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{1}$$

aqui $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, $y(t) \in \mathbb{R}^n$ e $u(t) \in \mathbb{R}^m$.

Observação

$y : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tem n componentes e o controle $u : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^m$ tem m componentes. Assumiremos, $m \leq n$.

Dado $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e um controle u, temos pela fórmula de variação dos parâmetros:

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds.$$

Diferentes noções de controlabilidade

Definição

Sistema (1) *é* ***exatamente controlável*** *no tempo* T *se, para todo* $y_0, y_T \in \mathbb{R}^n$, *pudermos encontrar* $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ *tal que a solução* y *de* (1) *satisfaz*

$$y(T) = y_T.$$

Definição

Sistema (1) *é* ***aproximadamente controlável*** *no tempo* T *se, para todo* $y_0, y_T \in \mathbb{R}^n$ *e todo* $\epsilon > 0$, *pudermos encontrar* $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ *tal que a solução* y *de* (1) *satisfaz:*

$$||y(T) - y_T||_Y < \epsilon.$$

Definição

Sistema (1) *é* ***controlável a zero*** *no tempo* T *se pudermos encontrar* $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ *tal que a solução* y *de* (1) *satisfaz*

$$y(T) = 0.$$

Diferentes noções de controlabilidade

Definição

Sistema (1) *é* ***exatamente controlável*** *no tempo* T *se, para todo* $y_0, y_T \in \mathbb{R}^n$, *pudermos encontrar* $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ *tal que a solução* y *de* (1) *satisfaz*

$$y(T) = y_T.$$

Definição

Sistema (1) *é* ***aproximadamente controlável*** *no tempo* T *se, para todo* $y_0, y_T \in \mathbb{R}^n$ *e todo* $\epsilon > 0$, *pudermos encontrar* $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ *tal que a solução* y *de* (1) *satisfaz:*

$$||y(T) - y_T||_Y < \epsilon.$$

Definição

Sistema (1) *é* ***controlável a zero*** *no tempo* T *se pudermos encontrar* $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ *tal que a solução* y *de* (1) *satisfaz*

$$y(T) = 0.$$

Diferentes noções de controlabilidade

Definição

Sistema (1) *é* ***exatamente controlável*** *no tempo T se, para todo $y_0, y_T \in \mathbb{R}^n$, pudermos encontrar $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ tal que a solução y de* (1) *satisfaz*

$$y(T) = y_T.$$

Definição

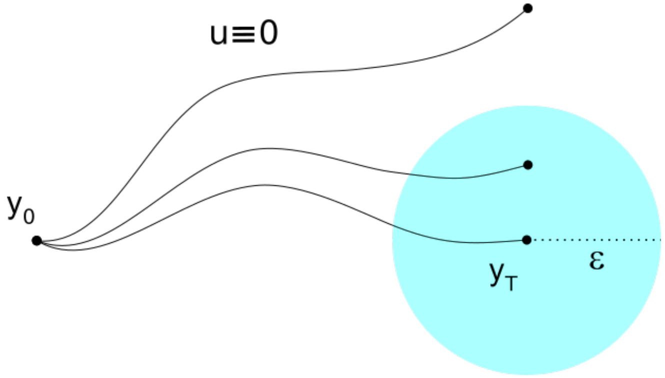
Sistema (1) *é* ***aproximadamente controlável*** *no tempo T se, para todo $y_0, y_T \in \mathbb{R}^n$ e todo $\epsilon > 0$, pudermos encontrar $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ tal que a solução y de* (1) *satisfaz:*

$$||y(T) - y_T||_Y < \epsilon.$$

Definição

Sistema (1) *é* ***controlável a zero*** *no tempo T se pudermos encontrar $u \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ tal que a solução y de* (1) *satisfaz*

$$y(T) = 0.$$


u≡0
y0
yT
ε

C. Exato $\iff$ *C. Nulo*

Provaremos o seguinte resultado de equivalência:

Teorema

O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se ele é controlável a zero no tempo* $T > 0$.

Prova: ($\Rightarrow$)

Suponhamos que (1) é exatamente controlável no tempo $T > 0$. Assim, dados $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, existe um controle $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que $y(T) = y_1$. Em particular podemos escolher $y_1 = 0$.

($\Leftarrow$)

Agora, suponhamos que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que $y(T) = 0$.

Seja $y_1 \in \mathbb{R}^n$ um estado que queremos alcançar partindo de y_0.

C. Exato $\iff$ *C. Nulo*

Provaremos o seguinte resultado de equivalência:

Teorema

O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se ele é controlável a zero no tempo* $T > 0$*.*

Prova: $(\Rightarrow)$

Suponhamos que (1) é exatamente controlável no tempo $T > 0$. Assim, dados $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, existe um controle $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que $y(T) = y_1$. Em particular podemos escolher $y_1 = 0$.

$(\Leftarrow)$

Agora, suponhamos que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que $y(T) = 0$.

Seja $y_1 \in \mathbb{R}^n$ um estado que queremos alcançar partindo de y_0.

C. Exato $\iff$ *C. Nulo*

Provaremos o seguinte resultado de equivalência:

Teorema
O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se ele é controlável a zero no tempo* $T > 0$.

Prova: $(\Rightarrow)$
Suponhamos que (1) é exatamente controlável no tempo $T > 0$. Assim, dados $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, existe um controle $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que $y(T) = y_1$. Em particular podemos escolher $y_1 = 0$.

$(\Leftarrow)$
Agora, suponhamos que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que $y(T) = 0$.

Seja $y_1 \in \mathbb{R}^n$ um estado que queremos alcançar partindo de y_0.

C. Exato $\Longleftrightarrow$ *C. Nulo*

Provaremos o seguinte resultado de equivalência:

Teorema
O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se ele é controlável a zero no tempo* $T > 0$.

Prova: ($\Rightarrow$)
Suponhamos que (1) é exatamente controlável no tempo $T > 0$. Assim, dados $y_0, y_1 \in \mathbb{R}^n$, existe um controle $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que $y(T) = y_1$. Em particular podemos escolher $y_1 = 0$.

($\Leftarrow$)
Agora, suponhamos que para todo $y_0 \in \mathbb{R}^n$, existe $u \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que $y(T) = 0$.

Seja $y_1 \in \mathbb{R}^n$ um estado que queremos alcançar partindo de y_0.

$C.\ Exato \iff C.\ Nulo$

A partir de y_1, resolvemos a seguinte EDO (sem controle):

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), \\ z(T) = y_1. \end{cases}$$

Como a EDO é nulamente controlável, existe um controle $v \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ tal que a solução de

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bv(t), \\ x(0) = y_0 - z(0), \end{cases}$$

satisfaz:

$$x(T) = 0.$$

O resultado segue notando que $y(t) = x(t) + z(t)$ é solução de (1) com

$$y(T) = y_1.$$

Pergunta: quem é o controle que leva y_0 a y_1?

Observação

Este resultado de equivalência entre controle exato e controle nulo só é válido para sistemas lineares. Por quê?

$C.\ Exato \iff C.\ Nulo$

A partir de y_1, resolvemos a seguinte EDO (sem controle):

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), \\ z(T) = y_1. \end{cases}$$

Como a EDO é nulamente controlável, existe um controle $v \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que a solução de

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bv(t), \\ x(0) = y_0 - z(0), \end{cases}$$

satisfaz:

$$x(T) = 0.$$

O resultado segue notando que $y(t) = x(t) + z(t)$ é solução de (1) com

$$y(T) = y_1.$$

Pergunta: quem é o controle que leva y_0 a y_1?

Observação

Este resultado de equivalência entre controle exato e controle nulo só é válido para sistemas lineares. Por quê?

C. Exato $\Longleftrightarrow$ *C. Nulo*

A partir de y_1, resolvemos a seguinte EDO (sem controle):

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), \\ z(T) = y_1. \end{cases}$$

Como a EDO é nulamente controlável, existe um controle $v \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ tal que a solução de

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bv(t), \\ x(0) = y_0 - z(0), \end{cases}$$

satisfaz:

$$x(T) = 0.$$

O resultado segue notando que $y(t) = x(t) + z(t)$ é solução de (1) com

$$y(T) = y_1.$$

Pergunta: quem é o controle que leva y_0 a y_1?

Observação

Este resultado de equivalência entre controle exato e controle nulo só é válido para sistemas lineares. Por quê?

C. Exato $\Longleftrightarrow$ *C. Nulo*

A partir de y_1, resolvemos a seguinte EDO (sem controle):

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), \\ z(T) = y_1. \end{cases}$$

Como a EDO é nulamente controlável, existe um controle $v \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^n)$ tal que a solução de

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bv(t), \\ x(0) = y_0 - z(0), \end{cases}$$

satisfaz:

$$x(T) = 0.$$

O resultado segue notando que $y(t) = x(t) + z(t)$ é solução de (1) com

$$y(T) = y_1.$$

Pergunta: quem é o controle que leva y_0 a y_1?

Observação

Este resultado de equivalência entre controle exato e controle nulo só é válido para sistemas lineares. Por quê?

C. Exato $\iff$ *C. Nulo*

A partir de y_1, resolvemos a seguinte EDO (sem controle):

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t), \\ z(T) = y_1. \end{cases}$$

Como a EDO é nulamente controlável, existe um controle $v \in L^\infty(0,T;\mathbb{R}^n)$ tal que a solução de

$$\begin{cases} x'(t) = Ax(t) + Bv(t), \\ x(0) = y_0 - z(0), \end{cases}$$

satisfaz:

$$x(T) = 0.$$

O resultado segue notando que $y(t) = x(t) + z(t)$ é solução de (1) com

$$y(T) = y_1.$$

Pergunta: quem é o controle que leva y_0 a y_1?

Observação

Este resultado de equivalência entre controle exato e controle nulo só é válido para sistemas lineares. Por quê?

Condição do tipo Kalman

A condição necessária e suficiente de controlabilidade para o sistema (1) em termos da matriz Gramiana requer computar a matriz G, o qual pode ser muito difícil ou até mesmo impossível.

Portanto, agora veremos um critério mais simples. E que nos dá uma resposta completa ao problema de controlabilidade exata para sistemas de EDO's lineares a coeficientes constantes (o caso de coeficientes não constante é mais delicado!).

Em particular, este resultado nos diz que para EDO's lineares o tempo de controle é irrelevante.

Condição do tipo Kalman

A condição necessária e suficiente de controlabilidade para o sistema (1) em termos da matriz Gramiana requer computar a matriz G, o qual pode ser muito difícil ou até mesmo impossível.

Portanto, agora veremos um critério mais simples. E que nos dá uma resposta completa ao problema de controlabilidade exata para sistemas de EDO's lineares a coeficientes constantes (o caso de coeficientes não constante é mais delicado!).

Em particular, este resultado nos diz que para EDO's lineares o tempo de controle é irrelevante.

Condição do tipo Kalman

A condição necessária e suficiente de controlabilidade para o sistema (1) em termos da matriz Gramiana requer computar a matriz G, o qual pode ser muito difícil ou até mesmo impossível.

Portanto, agora veremos um critério mais simples. E que nos dá uma resposta completa ao problema de controlabilidade exata para sistemas de EDO's lineares a coeficientes constantes (o caso de coeficientes não constante é mais delicado!).

Em particular, este resultado nos diz que para EDO's lineares o tempo de controle é irrelevante.

Condição do tipo Kalman

A condição necessária e suficiente de controlabilidade para o sistema (1) em termos da matriz Gramiana requer computar a matriz G, o qual pode ser muito difícil ou até mesmo impossível.

Portanto, agora veremos um critério mais simples. E que nos dá uma resposta completa ao problema de controlabilidade exata para sistemas de EDO's lineares a coeficientes constantes (o caso de coeficientes não constante é mais delicado!).

Em particular, este resultado nos diz que para EDO's lineares o tempo de controle é irrelevante.

Teorema de Kalman

Theorem (Kalman)

O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se*

$$rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n. \tag{2}$$

Portanto, se o sistema (1) *é controlável em algum tempo* $T > 0$ *ele será controlável em qualquer tempo.*

Observação

Diremos que (A, B) *é controlável se vale* (2)*. Ou seja, se o sistema* (1) *é exatamente controlável*

Observação

Denotando por $K = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ *a matriz de Kalman. Temos que a condição de Kalman é equivalente a*

$$Ker(K^*) = \{0\}.$$

Teorema de Kalman

Theorem (Kalman)

O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se*

$$rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n. \tag{2}$$

Portanto, se o sistema (1) *é controlável em algum tempo* $T > 0$ *ele será controlável em qualquer tempo.*

Observação

Diremos que (A, B) *é controlável se vale* (2)*. Ou seja, se o sistema* (1) *é exatamente controlável*

Observação

Denotando por $K = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ *a matriz de Kalman. Temos que a condição de Kalman é equivalente a*

$$Ker(K^*) = \{0\}.$$

Teorema de Kalman

Theorem (Kalman)

O sistema (1) *é exatamente controlável no tempo* $T > 0$ *se e somente se*

$$rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n. \tag{2}$$

Portanto, se o sistema (1) *é controlável em algum tempo* $T > 0$ *ele será controlável em qualquer tempo.*

Observação

Diremos que (A, B) *é controlável se vale* (2)*. Ou seja, se o sistema* (1) *é exatamente controlável*

Observação

Denotando por $K = [B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ *a matriz de Kalman. Temos que a condição de Kalman é equivalente a*

$$Ker(K^*) = \{0\}.$$

Exemplo 1

Exemplo 1: $\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

Ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2)$. E temos 2 equações e 1 controle.

Pelo Teorema de Kalman:

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ sistema não controlável!} \qquad (rank = 1!)$$

Note que também poderiamos dizer que o sistema é não controlável pelo fato do controle não atuar na segunda equação.

Exemplo 1

Exemplo 1: $\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

Ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2)$. E temos 2 equações e 1 controle.

Pelo Teorema de Kalman:

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ sistema não controlável!} \qquad (rank = 1!)$$

Note que também poderiamos dizer que o sistema é não controlável pelo fato do controle não atuar na segunda equação.

Exemplo 1

Exemplo 1: $\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

Ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2)$. E temos 2 equações e 1 controle.

Pelo Teorema de Kalman:

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ sistema não controlável! } \qquad (rank = 1!)$$

Note que também poderiamos dizer que o sistema é não controlável pelo fato do controle não atuar na segunda equação.

Exemplo 1

Exemplo 1: $\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

Ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2)$. E temos 2 equações e 1 controle.

Pelo Teorema de Kalman:

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ sistema não controlável!} \qquad (\mathit{rank} = 1!)$$

Note que também poderiamos dizer que o sistema é não controlável pelo fato do controle não atuar na segunda equação.

Exemplo 1

Exemplo 1: $\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 \end{cases}$

Ou seja

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2)$. E temos 2 equações e 1 controle.

Pelo Teorema de Kalman:

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{sistema não controlável!} \qquad (rank = 1!)$$

Note que também poderiamos dizer que o sistema é não controlável pelo fato do controle não atuar na segunda equação.

Exemplo 2

Exemplo 2: $x'' + x = u$

Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = u - x \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{sistema controlável!} \qquad (\mathit{rank} = 2!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x, x')$. E temos 2 equações e 1 controle.

Exemplo 2

Exemplo 2: $x'' + x = u$
Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = u - x \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{sistema controlável!} \qquad (rank = 2!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x, x')$. E temos 2 equações e 1 controle.

Exemplo 2

Exemplo 2: $x'' + x = u$
Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = u - x \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ sistema controlável!} \qquad (rank = 2!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x, x')$. E temos 2 equações e 1 controle.

Exemplo 2

Exemplo 2: $x'' + x = u$
Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = u - x \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ sistema controlável!} \qquad (\mathit{rank} = 2!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x, x')$. E temos 2 equações e 1 controle.

Exemplo 2

Exemplo 2: $x'' + x = u$
Temos

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = u - x \end{cases}$$

Ou seja,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$[B, AB] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{ sistema controlável!} \qquad (rank = 2!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x, x')$. E temos 2 equações e 1 controle.

Observação

No exemplo 2, podemos construir controles de maneira direta. De fato, se consideramos o sistema

$$\begin{cases} x'' + x = u \\ x(0) = x_0,\ x'(0) = y_0 \end{cases}$$

e queremos

$$x(T) = x_1,\ \ x'(T) = y_1,$$

basta considerar uma função escalar suave z, e.g., um polinômio cúbico, tal que

$$z(0) = x_0,\ z'(0) = y_0,\ z(T) = x_1,\ z'(T) = y_1.$$

Então, o controle será simplesmente $u = z'' + z$.

Exemplo 3

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 + x_1 \\ x_3' = x_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{sistema controlável!} \qquad (rank = 3!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2, x_3)$. E temos 3 equações e 1 controle.

Exemplo 3

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 + x_1 \\ x_3' = x_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{sistema controlável!} \qquad (\textit{rank} = 3!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2, x_3)$. E temos 3 equações e 1 controle.

Exemplo 3

$$\begin{cases} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 + x_1 \\ x_3' = x_2 \end{cases} \iff \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{sistema controlável!} \qquad (\mathit{rank} = 3!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2, x_3)$. E temos 3 equações e 1 controle.

Exemplo 3

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 + x_1 \\ x_3' = x_2 \end{array}\right. \iff \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{sistema controlável!} \qquad (\mathit{rank} = 3!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2, x_3)$. E temos 3 equações e 1 controle.

Exemplo 3

$$\left\{\begin{array}{l} x_1' = x_1 + u, \\ x_2' = x_2 + x_1 \\ x_3' = x_2 \end{array}\right. \iff \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v$$

com

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$AB = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ e } A^2B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto

$$[B, AB, A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \text{sistema controlável!} \qquad (\textit{rank} = 3!)$$

Observação

Aqui o estado do sistema é $Y = (x_1, x_2, x_3)$. E temos 3 equações e 1 controle.

Prova do Teorema de Kalman

$(\Leftarrow)$ E. C. $\Rightarrow rank = n$

Suponha $rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] < n$.

Assim, as linhas da matriz $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ são linearmente dependentes e, portanto, existe um vetor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$ tal que

$$w^*[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = 0,$$

onde os coeficientes da combinação linear são as componentes do vetor w.

Agora, como $w^*[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = [w^*B, w^*AB, \ldots, w^*A^{n-1}B]$ vemos que

$$\begin{cases} w^*B = 0 \\ w^*AB = 0 \\ \ldots \\ w^*A^{n-1}B = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Prova do Teorema de Kalman

$(\Leftarrow)$ E. C. $\Rightarrow rank = n$

Suponha $rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] < n$.

Assim, as linhas da matriz $[B, AB, \ldots, A^{n-1}B]$ são linearmente dependentes e, portanto, existe um vetor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$ tal que

$$w^*[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = 0,$$

onde os coeficientes da combinação linear são as componentes do vetor w.

Agora, como $w^*[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = [w^*B, w^*AB, \ldots, w^*A^{n-1}B]$ vemos que

$$\begin{cases} w^*B = 0 \\ w^*AB = 0 \\ \ldots \\ w^*A^{n-1}B = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Prova do Teorema de Kalman

($\Leftarrow$) E. C. $\Rightarrow rank = n$

Suponha $rank[B, AB, \dots, A^{n-1}B] < n$.

Assim, as linhas da matriz $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ são linearmente dependentes e, portanto, existe um vetor $w \in \mathbb{R}^n$, $w \neq 0$ tal que

$$w^*[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = 0,$$

onde os coeficientes da combinação linear são as componentes do vetor w.

Agora, como $w^*[B, AB, \dots, A^{n-1}B] = [w^*B, w^*AB, \dots, w^*A^{n-1}B]$ vemos que

$$\begin{cases} w^*B = 0 \\ w^*AB = 0 \\ \dots \\ w^*A^{n-1}B = 0 \end{cases} \tag{3}$$

Usaremos o teorema de Cayley-Hamilton:

Teorema
Se A é uma matriz $n \times n$, existe um polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ de grau n tal que $p(A) = 0$.

Em outras palavras, uma matriz quadrada é raíz de seu polinômio característico.

Assim, por Cayley-Hamilton, temos que $A^n = a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$. E por (3) vemos que $w^* A^n B = 0$.

Portanto, concluímos que $w^* A^k B = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Usando a definição da matriz exponencial $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, segue que

$$w^* e^{tA} B = 0, \text{ para todo } t > 0.$$

Usaremos o teorema de Cayley-Hamilton:

Teorema
Se A é uma matriz $n \times n$, existe um polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ de grau n tal que $p(A) = 0$.

Em outras palavras, uma matriz quadrada é raíz de seu polinômio característico.

Assim, por Cayley-Hamilton, temos que $A^n = a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$. E por (3) vemos que $w^* A^n B = 0$.

Portanto, concluímos que $w^* A^k B = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Usando a definição da matriz exponencial $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, segue que

$$w^* e^{tA} B = 0, \text{ para todo } t > 0.$$

Usaremos o teorema de Cayley-Hamilton:

Teorema

Se A é uma matriz $n \times n$, existe um polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ de grau n tal que $p(A) = 0$.

Em outras palavras, uma matriz quadrada é raíz de seu polinômio característico.

Assim, por Cayley-Hamilton, temos que $A^n = a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$. E por (3) vemos que $w^* A^n B = 0$.

Portanto, concluímos que $w^* A^k B = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Usando a definição da matriz exponencial $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, segue que

$$w^* e^{tA} B = 0, \text{ para todo } t > 0.$$

Usaremos o teorema de Cayley-Hamilton:

Teorema
Se A é uma matriz $n \times n$, existe um polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ de grau n tal que $p(A) = 0$.

Em outras palavras, uma matriz quadrada é raíz de seu polinômio característico.

Assim, por Cayley-Hamilton, temos que $A^n = a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$. E por (3) vemos que $w^* A^n B = 0$.

Portanto, concluímos que $w^* A^k B = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Usando a definição da matriz exponencial $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, segue que

$$w^* e^{tA} B = 0, \text{ para todo } t > 0.$$

Usaremos o teorema de Cayley-Hamilton:

Teorema
Se A é uma matriz $n \times n$, existe um polinômio $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ de grau n tal que $p(A) = 0$.

Em outras palavras, uma matriz quadrada é raíz de seu polinômio característico.

Assim, por Cayley-Hamilton, temos que $A^n = a_{n-1}A^{n-1} + \ldots + a_1 A + a_0 I$. E por (3) vemos que $w^* A^n B = 0$.

Portanto, concluímos que $w^* A^k B = 0$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

Usando a definição da matriz exponencial $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$, segue que

$$w^* e^{tA} B = 0, \text{ para todo } t > 0.$$

Agora, usando que a solução da equação pode ser escrita explicitamente como

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,$$

temos

$$< w, y(T) >_{\mathbb{R}^n} = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T < w, e^{(T-s)A}Bu(s) >_{\mathbb{R}^n} ds = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n} .$$

Portanto,

$$< w, y(T) >_{\mathbb{R}^n} = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n},$$

o que mostra que a projeção da solução y no tempo T sobre o vetor w é independente do valor do controle u.

Assim, o sistema não pode ser controlável, o que é um absurdo.

Agora, usando que a solução da equação pode ser escrita explicitamente como

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,$$

temos

$$< w, y(T) >_{\mathbb{R}^n} = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T < w, e^{(T-s)A}Bu(s) >_{\mathbb{R}^n} ds = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n} .$$

Portanto,

$$< w, y(T) >_{\mathbb{R}^n} = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n},$$

o que mostra que a projeção da solução y no tempo T sobre o vetor w é independente do valor do controle u.

Assim, o sistema não pode ser controlável, o que é um absurdo.

Agora, usando que a solução da equação pode ser escrita explicitamente como

$$y(t) = e^{tA}y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)ds,$$

temos

$$< w, y(T) >_{\mathbb{R}^n} = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n} + \int_0^T < w, e^{(T-s)A}Bu(s) >_{\mathbb{R}^n} ds = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n} .$$

Portanto,

$$< w, y(T) >_{\mathbb{R}^n} = < w, e^{TA}y_0 >_{\mathbb{R}^n},$$

o que mostra que a projeção da solução y no tempo T sobre o vetor w é independente do valor do controle u.

Assim, o sistema não pode ser controlável, o que é um absurdo.

$(\Rightarrow)$ $rank = n \Rightarrow E.C.$

Usaremos a matriz Gramiana

$$G = \int_0^T e^{(T-s)A} B B^* e^{(T-s)A^*} ds,$$

e o fato que o sistema (1) é exatamente controlável se e somente se G é invertível.

Assumiremos que (1) não é exatamente controlável e devemos chegar a um absurdo.

Assim, temos que G não é invertível e existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Gx = 0.$$

Também,

$$x^* G x = 0,$$

e portanto

$$\int_0^T |B^* e^{(T-s)A^*} x|^2 ds = 0.$$

$(\Rightarrow)$ $rank = n \Rightarrow E.C.$

Usaremos a matriz Gramiana

$$G = \int_0^T e^{(T-s)A} BB^* e^{(T-s)A^*} ds,$$

e o fato que o sistema (1) é exatamente controlável se e somente se G é invertível.

Assumiremos que (1) não é exatamente controlável e devemos chegar a um absurdo.

Assim, temos que G não é invertível e existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Gx = 0.$$

Também,

$$x^* Gx = 0,$$

e portanto

$$\int_0^T |B^* e^{(T-s)A^*} x|^2 ds = 0.$$

$(\Rightarrow)$ $rank = n \Rightarrow E.C.$

Usaremos a matriz Gramiana

$$G = \int_0^T e^{(T-s)A} B B^* e^{(T-s)A^*} ds,$$

e o fato que o sistema (1) é exatamente controlável se e somente se G é invertível.

Assumiremos que (1) não é exatamente controlável e devemos chegar a um absurdo.

Assim, temos que G não é invertível e existe $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tal que

$$Gx = 0.$$

Também,

$$x^* G x = 0,$$

e portanto

$$\int_0^T |B^* e^{(T-s)A^*} x|^2 ds = 0.$$

Com isto, vemos que

$$K(s) = x^* e^{(T-s)A} B = 0, \quad \forall s \in [0,T].$$

Derivando i-vezes com respeito a s, e depois tomando $s = T$, obtemos

$$K^{(i)}(T) := (-1)^i x^* A^i B.$$

Portanto, temos que

$$x^* A^i B = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Finalmente, como $x \neq 0$, concluimos que

$$rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \neq n,$$

o que é um absurdo.

Com isto, vemos que

$$K(s) = x^* e^{(T-s)A} B = 0, \quad \forall s \in [0, T].$$

Derivando i-vezes com respeito a s, e depois tomando $s = T$, obtemos

$$K^{(i)}(T) := (-1)^i x^* A^i B.$$

Portanto, temos que

$$x^* A^i B = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Finalmente, como $x \neq 0$, concluimos que

$$rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \neq n,$$

o que é um absurdo.

Com isto, vemos que

$$K(s) = x^* e^{(T-s)A} B = 0, \quad \forall s \in [0, T].$$

Derivando i-vezes com respeito a s, e depois tomando $s = T$, obtemos

$$K^{(i)}(T) := (-1)^i x^* A^i B.$$

Portanto, temos que

$$x^* A^i B = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Finalmente, como $x \neq 0$, concluimos que

$$rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \neq n,$$

o que é um absurdo.

Com isto, vemos que

$$K(s) = x^* e^{(T-s)A} B = 0, \quad \forall s \in [0, T].$$

Derivando i-vezes com respeito a s, e depois tomando $s = T$, obtemos

$$K^{(i)}(T) := (-1)^i x^* A^i B.$$

Portanto, temos que

$$x^* A^i B = 0, \quad \forall i = 0, 1, 2, \ldots.$$

Finalmente, como $x \neq 0$, concluimos que

$$rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] \neq n,$$

o que é um absurdo.

Densidade no conjunto das Matrizes

Teorema

O conjunto de sistemas controláveis (A, B) é aberto e denso em $M_{n\times n} \times M_{n\times m}$.

Prova: Se (A, B) é controlável, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo (A_0, B_0) com

$$|A - A_0|_{M_{n\times n}} < \epsilon, \;\; |B - B_0|_{M_{n\times m}} < \epsilon$$

é também controlável.
Isto é uma simples consequência do fato que o determinante de uma matriz depende continuamente de suas entradas.

Agora, se (A, B) não é controlável, para todo $\epsilon > 0$ existe (A_0, B_0) controlável, com

$$|A - A_0|_{M_{n\times n}} < \epsilon, \;\; |B - B_0|_{M_{n\times m}} < \epsilon.$$

De fato, isto de deve a que o determinante de uma matriz $i \times j$ depende analiticamente de suas entradas, e portanto não pode se anular em uma bola aberta de $\mathbb{R}^{i\times j}$.

Densidade no conjunto das Matrizes

Teorema

O conjunto de sistemas controláveis (A, B) é aberto e denso em $M_{n\times n} \times M_{n\times m}$.

Prova: Se (A, B) é controlável, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo (A_0, B_0) com

$$|A - A_0|_{M_{n\times n}} < \epsilon, \ \ |B - B_0|_{M_{n\times m}} < \epsilon$$

é também controlável.
Isto é uma simples consequência do fato que o determinante de uma matriz depende continuamente de suas entradas.

Agora, se (A, B) não é controlável, para todo $\epsilon > 0$ existe (A_0, B_0) controlável, com

$$|A - A_0|_{M_{n\times n}} < \epsilon, \ \ |B - B_0|_{M_{n\times m}} < \epsilon.$$

De fato, isto de deve a que o determinante de uma matriz $i \times j$ depende analiticamente de suas entradas, e portanto não pode se anular em uma bola aberta de $\mathbb{R}^{i\times j}$.

Densidade no conjunto das Matrizes

Teorema

O conjunto de sistemas controláveis (A, B) é aberto e denso em $M_{n\times n} \times M_{n\times m}$.

Prova: Se (A, B) é controlável, existe $\epsilon > 0$ tal que para todo (A_0, B_0) com

$$|A - A_0|_{M_{n\times n}} < \epsilon, \;\; |B - B_0|_{M_{n\times m}} < \epsilon$$

é também controlável.

Isto é uma simples consequência do fato que o determinante de uma matriz depende continuamente de suas entradas.

Agora, se (A, B) não é controlável, para todo $\epsilon > 0$ existe (A_0, B_0) controlável, com

$$|A - A_0|_{M_{n\times n}} < \epsilon, \;\; |B - B_0|_{M_{n\times m}} < \epsilon.$$

De fato, isto de deve a que o determinante de uma matriz $i \times j$ depende analiticamente de suas entradas, e portanto não pode se anular em uma bola aberta de $\mathbb{R}^{i\times j}$.

Sistemas de segunda ordem

Teorema

Nas condições anteriores para A e B. Temos o que sistema

$$\begin{cases} y''(t) = Ay(t) + Bu(t), \ t \in [0, T], \\ (y, y')(0) = (y_0, y_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

é exatamente controlável se e somente se

$$rank[B, AB, \ldots, A^{n-1}B] = n.$$

Prova: Exercício!

Observação

Exatamente controlável aqui significa que dados $y_0^T, y_1^T \in \mathbb{R}^n$, existe um controle tal que

$$y(T) = y_0^T, \ \ y'(T) = y_1^T.$$

Obrigado!